

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE DU BOIS

OLLIVIER HUNAUT

## **Classification des formes de Seifert rationnelles des germes de courbe plane**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 46, n° 2 (1996), p. 371-410

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1996\\_\\_46\\_2\\_371\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_2_371_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CLASSIFICATION DES FORMES DE SEIFERT RATIONNELLES DES GERMES DE COURBE PLANE

par

P. DU BOIS et O. HUNAUULT

---

## 0. Introduction.

**0.1.** — Soit  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe de fonction holomorphe ayant une singularité isolée en l'origine. Si  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont des réels positifs, on note  $B_\eta^0$  le disque ouvert de rayon  $\eta$  et de centre 0 dans  $\mathbb{C}$ , et  $S_\varepsilon^{2n+1}$  (resp.  $B_\varepsilon^{2n+2}$ ) la sphère (resp. la boule) de rayon  $\varepsilon$ , centrée en l'origine de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . On pose :

$$Y = S_\varepsilon^{2n+1} \setminus (f^{-1}(B_\eta^0) \cap S_\varepsilon^{2n+1}).$$

D'après J. Milnor, l'application  $\phi = f/|f|$ , de  $Y$  sur  $S^1$ , est une fibration localement triviale, qui ne dépend pas de  $\varepsilon$  et  $\eta$  quand  $\eta \ll \varepsilon \ll 1$ . Soit  $F$  une fibre de  $\phi$ ; on dit que  $F$  est la *fibre de Milnor de  $f$* . Le bord de  $F$  est isotope à l'entrelacs

$$K(f) = S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0).$$

Le *type topologique de  $f$*  est la classe d'homéomorphismes conservant l'orientation de la paire  $(B_\varepsilon^{2n+2}, f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon^{2n+2})$ . Milnor a montré que l'entrelacs de  $f$  détermine le type topologique de  $f$ . De plus,  $F$  a le type d'homotopie d'un bouquet de  $n$ -sphères et est difféomorphe à  $f^{-1}(\eta) \cap B_\varepsilon^{2n+2}$ , voir [Mil].

Soit  $\nu$  le champ de vecteurs normal orienté à  $F$  dans  $S_\varepsilon^{2n+1}$  et  $i_+ : F \rightarrow S_\varepsilon^{2n+1} \setminus F$  l'application définie par  $i_+(P) = P + \alpha\nu(P)$  pour un

petit réel positif  $\alpha$  et  $P$  dans  $F$ . La *forme de Seifert*  $A(f)$  de  $K(f)$  est la forme bilinéaire sur  $H_n(F, \mathbb{Z})$  définie, pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H_n(F, \mathbb{Z})$  par

$$A(f)(u, v) = \text{Lk}(u, i_+(v))$$

où  $\text{Lk}$  est le nombre d'enlacement dans  $S^{2n+1}$ .

Les propriétés classiques de la forme de Seifert sont :

- $A(f)$  est unimodulaire ;
- la forme d'intersection  $S(f)$  sur  $H_n(F, \mathbb{Z})$  est donnée par

$$S(f) = A(f) + (-1)^n A^T(f) ;$$

- l'endomorphisme  $h_*$  induit par la monodromie de la fibration est donné par

$$h_* = (-1)^{n+1} A(f)^{-1} A^T(f) ;$$

- le polynôme caractéristique de la monodromie est

$$\Delta(f)(t) = \pm \det(tA(f) + (-1)^n A^T(f)).$$

En posant  $tu = h_*(u)$  pour tout cycle  $u$ , on munit  $H_n(F, \mathbb{Z})$  d'une structure de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. Les relations ci-dessus entre  $A = A(f)$ ,  $S = S(f)$  et  $h_*$  entraînent que pour  $u$  et  $v$  dans  $H_n(F, \mathbb{Z})$ , nous avons :

$$S(u, v) = A(u, (1-t)v) = A(u, v) + (-1)^n A(v, u).$$

Rappelons que deux formes bilinéaires  $A_1$  et  $A_2$  définies sur des  $\mathbb{Z}$ -modules libres  $M_1$  et  $M_2$  de rang respectif  $n_1$  et  $n_2$  sont *Witt-équivalentes* si  $A_1 \oplus (-A_2)$  est identiquement nulle sur un sous-module  $N$  de  $M_1 \oplus M_2$  de rang  $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$  ; on appelle *métaboliseur* un tel sous-module.

D'après A. Durfee [Du], théorème 3.1, des résultats de M. Kervaire et J. Levine entraînent que pour  $n \geq 3$ , la classe d'isomorphisme (sur  $\mathbb{Z}$ ) de  $A(f)$  détermine le type topologique de  $f$ . De plus, Kervaire [Ke], th. 2 et Levine [Le], « the main theorem » ont également montré que si  $K(f)$  est sphérique (c'est-à-dire que  $K(f)$  est homéomorphe à une sphère, ce qui a lieu si et seulement si  $\Delta(f)(1) = \pm 1$ ), alors la classe de Witt-équivalence de  $A(f)$  détermine le nœud  $K(f)$  à cobordisme près.

**0.2.** — Dans [DM2] F. Michel et le premier auteur donnent une condition suffisante pour que les formes de Seifert rationnelles associées à deux germes de courbe plane  $f_1$  et  $f_2$  soient Witt-équivalentes, et dans [DM3] ils donnent une condition suffisante pour que les formes de

Seifert entières  $A(f_1)$  et  $A(f_2)$  soient isomorphes, sous certaines hypothèses relatives à la monodromie. Dans les deux cas, une liste de données calculées à partir de l'arbre de désingularisation du germe permet de déterminer la forme de Seifert à isomorphisme près [DM3], th. 4.6 ou prop. 4.8 ou à Witt-équivalence près [DM2], th. 5.1. On rappelle que le type topologique d'un germe de courbe plane est caractérisé par son arbre de désingularisation.

Nous complétons ici ces études en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que les formes de Seifert rationnelles associées à des germes de courbe plane soient isomorphes (resp. Witt-équivalentes), en termes d'un ensemble complet d'invariants déterminés à partir du type topologique du germe. Le problème de la classification des formes de Seifert entières en termes d'un ensemble complet d'invariants semble pour l'instant hors d'atteinte, dans la mesure où l'on ne connaît pas d'ensemble complet d'invariants pour les formes bilinéaires entières.

La liste des invariants comporte d'une part les invariants que l'on peut calculer avec l'homologie réelle,

(i) le nombre de blocs de Jordan de taille 1 et 2 associés à chaque valeur propre;

(ii) les signatures équivariantes associées aux valeurs propres, déjà étudiées par W. Neumann [Ne], voir aussi Schrauwen-Steenbrink-Stevens [SSS]; et, d'autre part, de nouveaux invariants, que nous définirons en 2.12;

(iii) pour chaque polynôme cyclotomique  $\phi_m(t)$  (avec  $m > 2$ ) divisant le polynôme caractéristique  $\Delta(f)$  et donnant lieu à un ou plusieurs blocs de Jordan de taille 1 (resp. 2), un invariant  $d_m^1$  (resp.  $d_m^2$ ) élément de  $\mathbb{Q}[t]/\phi_m(t)$ , bien défini à multiplication par  $u(t)u(t^{-1})$  près, où  $u(t) \in \mathbb{Q}[t]$ ;

(iv) la classe d'isomorphisme de la forme quadratique définie positive  $S_2^2$  induite par la forme d'intersection  $S$  sur le quotient

$$\ker(\phi_2^2(t); H_1(F, \mathbb{Q})) / \ker(\phi_2(t); H_1(F, \mathbb{Q}))$$

et enfin,

(v) la classe d'isomorphisme de la forme quadratique définie négative associée à la restriction de la forme de Seifert au sous-espace  $\ker(t - 1)$  de  $H_1(F, \mathbb{Q})$  fixe par la monodromie.

En application, nous donnons de nouveaux exemples de nœuds algébriques (de dimensions supérieures) cobordants et non isotopes. Contrairement aux exemples donnés dans [DM2], la monodromie associée à ces nœuds algébriques est d'ordre fini.

Nous noterons dorénavant  $A$  ou  $A(f)$  (resp.  $S$  ou  $S(f)$ ) la forme de Seifert (resp. la forme d'intersection) rationnelle (sur  $H_1(F, \mathbb{Q})$ ), et  $A_{\mathbb{Z}}(f)$  la forme de Seifert entière.

**0.3.** — Le plan de ce travail est le suivant.

Dans la section 1, nous utilisons la filtration monodromique (ou filtration par le poids) sur l'homologie de la fibre de Milnor pour réduire la question à un problème de classification sur chaque gradué de cette filtration et sur le sous-espace  $\ker(t - 1)$  laissé fixe par la monodromie, voir les théorèmes 1.7 et 1.12.

Dans la section 2, nous traduisons le problème en problème de classification des formes hermitiennes sur les extensions cyclotomiques de  $\mathbb{Q}$  en utilisant le dictionnaire établi par Milnor dans [Mi2], voir les théorèmes 2.13 et 2.16.

La section 3 est consacrée au calcul effectif des invariants; on utilise l'interprétation géométrique de la filtration par le poids et la description de la fibre de Milnor qui sont à la base des articles [DM2] et [DM3].

La section 4 donne un exemple de nœuds algébriques distingués par leurs formes de Seifert entières mais pas par leurs formes de Seifert rationnelles. On en déduit au théorème 4.2 des exemples de nœuds algébriques cobordants et non isotopes dont la monodromie est d'ordre fini.

**0.4. DÉFINITION.** — *Dans ce travail, la signature d'une forme quadratique sur  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$ , ou hermitienne sur  $\mathbb{C}$ , supposée non dégénérée, est la différence entre le nombre de termes positifs et le nombre de termes négatifs sur la diagonale, dans une base pour laquelle la matrice de cette forme est diagonale.*

## 1. Utilisation de la filtration monodromique.

**1.1.** — Soit :  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe de fonction holomorphe à singularité isolée; le théorème de la monodromie (Grothendieck-Brieskorn) assure que les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité. De plus, la taille maximale des blocs de Jordan est  $n \times n$  pour la valeur propre 1 et  $(n + 1) \times (n + 1)$  pour les autres valeurs propres, voir van Doorn-Steenbrink [DS] pour un résultat supplémentaire.

On appelle *exposant de la monodromie* un entier  $e$  tel que

$$(t^e - 1)^{n+1} H_n(F, \mathbb{Q}) = 0.$$

**1.2.** — Considérons le cas des germes de courbe plane ( $n = 1$ ). On définit la filtration monodromique (ou filtration par le poids) sur l'homologie de la fibre de Milnor par les formules suivantes (ces formules ne dépendent pas de l'exposant  $e$  choisi) :

$$\begin{aligned} W_0 H_1(F, \mathbb{Q}) &= H_1(F, \mathbb{Q}), \\ W_{-1} H_1(F, \mathbb{Q}) &= \ker(t^e - 1), \\ W_{-2} H_1(F, \mathbb{Q}) &= \operatorname{im}(t^e - 1) \oplus \ker(t - 1). \end{aligned}$$

Les gradués de la filtration  $W$  sont définis pour  $p = 0$  ou  $-1$  par la formule :

$$\operatorname{gr}_p^W H_1(F, \mathbb{Q}) = W_p H_1(F, \mathbb{Q}) / W_{p-1} H_1(F, \mathbb{Q}).$$

L'égalité  $h_* = A^{-1} A^T$  montre que la filtration  $W$  et les gradués associés sont définis en termes de la forme de Seifert.

**1.3.** — La forme de Seifert  $A$  n'est pas symétrique, mais l'orthogonal de  $\ker(t - 1)$  pour  $A$  est bien défini car, pour tout  $x$  de  $\ker(t - 1)$  et pour tout  $y$  de  $H_1(F, \mathbb{Q})$ , on a :

$$A(y, x) = A(y, tx) = A(x, y).$$

L'orthogonal à gauche de  $\ker(t - 1)$  est donc égal à son orthogonal à droite.

**PROPOSITION.** — Le  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(F, \mathbb{Q})$  se décompose en la somme directe orthogonale pour  $A$  :

$$H_1(F, \mathbb{Q}) = \ker(t - 1) \oplus \operatorname{im}(t - 1).$$

**Démonstration.** — Soit  $\Lambda(t)$  le polynôme minimal de la monodromie. Si 1 n'est pas racine de  $\Lambda(t)$ , on a :

$$H_1(F, \mathbb{Q}) = (t - 1)H_1(F, \mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \ker(t - 1) = \{0\}.$$

Si 1 est racine de  $\Lambda(t)$ , c'est une racine simple, donc  $(t - 1)$  et  $\Lambda(t)/(t - 1)$  sont premiers entre eux. L'identité de Bezout entre ces polynômes donne alors la décomposition indiquée.

**1.4. DÉFINITION.** — Soit  $K$  un corps, une structure isométrique symétrique (resp. antisymétrique) sur un  $K$ -espace vectoriel  $V$  est un triplet  $(V, S, t)$ , où  $t$  est un automorphisme de  $V$  et  $S$  une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique)  $t$ -équivariante sur  $V$ .

**1.5.** — La multiplication par  $(t - 1)$  est un isomorphisme sur  $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$ . Par suite, la restriction de la forme de Seifert  $A$  et la restriction de la structure isométrique  $(S, t)$  à ce  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel sont des données équivalentes.

La définition de la filtration  $W$  entraîne que la forme d'intersection  $S$  induit une forme bilinéaire antisymétrique  $t$ -équivariante  $S^1$  sur  $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$ .

Soit  $e$  un exposant de la monodromie. La formule

$$S^2(\bar{u}, \bar{v}) = S((t^e - 1)u, v),$$

où  $\bar{u}$  (resp.  $\bar{v}$ ) est la classe dans  $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$  d'un cycle  $u$  (resp.  $v$ ) dans  $H_1(F, \mathbb{Q})$ , définit une forme bilinéaire symétrique  $t$ -équivariante  $S^2$  sur  $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ . On a en effet, pour tout  $v$ , l'égalité  $t^e(t^e - 1)v = (t^e - 1)v$ , et par suite

$$S((t^e - 1)u, v) = -S((t^{-e} - 1)v, u) = S((t^e - 1)v, u).$$

On a :

$$S((t^{ke} - 1)u, v) = kS((t^e - 1)u, v).$$

La forme bilinéaire  $S^2$  dépend donc du choix de l'exposant  $e$ . Dans la définition de  $S^2$ , on conviendra de choisir le plus petit exposant  $e$ .

**1.6.** — Nous noterons  $A^0$  la restriction de  $A$  à  $\ker(t - 1)$ . D'après [DM3], §3.1 (voir aussi §3.2),  $A^0$  est la forme bilinéaire associée à une forme quadratique définie négative.

**1.7. THÉORÈME.** — *Avec les notations ci-dessus, la forme de Seifert  $A$  sur  $H_1(F, \mathbb{Q})$  est déterminée à isomorphisme près, par la forme bilinéaire symétrique  $A^0$  et les structures isométriques  $(\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t)$  et  $(\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^2, t)$ .*

*Démonstration.* — On notera :

- $\phi_m(t)$  le  $m$ -ième polynôme cyclotomique,
- $\varphi(m) = \deg \phi_m$  la fonction indicatrice d'Euler,
- $V_m$  le noyau de l'action de  $\phi_m^2(t)$  sur  $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$  et
- $S_m$  la forme bilinéaire induite par  $S$  sur  $V_m$ .

L'action de la monodromie sur  $V_m$  sera encore notée comme la multiplication par  $t$ .

Si  $n \neq m$ , alors  $V_m$  et  $V_n$  sont orthogonaux pour  $S$ . En effet,  $\phi_n^2(t)$  est un isomorphisme sur  $V_m$ ; pour tout  $x \in V_m$ , il existe donc un  $y \in V_m$  tel que  $\phi_n^2(t)y = x$ , et pour tout  $z \in V_n$ ,

$$S(x, z) = S(\phi_n^2(t)y, z) = S(y, \phi_n^2(t^{-1})z) = S(y, t^{-2\varphi(n)}\phi_n^2(t)z) = 0.$$

La structure isométrique  $(S, t)$  sur  $(t-1)H_1(F, \mathbb{Q})$  admet la décomposition en somme directe orthogonale suivante :

$$(1.7.1) \quad ((t-1)H_1(F, \mathbb{Q}), S, t) = \bigoplus_{m>1} (V_m, S_m, t).$$

Du fait que les valeurs propres de la monodromie sont ici d'ordre au plus 2, le théorème 3.2 de Milnor [Mi2] donne le résultat suivant : chaque  $V_m$  admet une décomposition en somme directe orthogonale  $V_m = V_m^1 \oplus V_m^2$ , où  $V_m^i$  est un module libre sur  $\mathbb{Q}[t]/\phi_m^i(t)$  pour  $i = 1, 2$ , et cette décomposition est unique à isomorphisme près. Comme  $(t^e - 1)/\phi_m(t)$  est un automorphisme de  $V_m$ , la filtration induite par la filtration  $W$  sur  $V_m$ , que nous noterons encore  $W$ , vérifie les égalités suivantes :

$$W_{-1}(V_m) = \ker(\phi_m(t); V_m) = V_m^1 \oplus \phi_m(t) \cdot V_m^2,$$

$$W_{-2}(V_m) = \phi_m(t) \cdot V_m = \phi_m(t) \cdot V_m^2,$$

et on a donc les isomorphismes :

$$\mathrm{gr}_0^W(V_m) \cong V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{gr}_{-1}^W(V_m) \cong V_m^1.$$

On notera  $S_m^1$  la forme bilinéaire antisymétrique, restriction de  $S_m$  à  $V_m^1$  et  $S_m^2$  la forme bilinéaire symétrique sur  $V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$  définie par les égalités :

$$S_m'^2(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{cases} S_m(\phi_m(t)t^{-d}u, v) & \text{si } m \neq 2, \\ S_2((t - t^{-1})u, v) & \text{si } m = 2, \end{cases}$$

où  $d = \frac{1}{2}\varphi_m$  et  $\bar{u}$  (resp.  $\bar{v}$ ) est la classe dans  $V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$  d'un cycle  $u$  (resp.  $v$ ) de  $V_m^2$ .

D'après [Mi2], th. 3.3 et 3.4, la structure isométrique  $(V_m, S_m, t)$  est définie à isomorphisme près par la donnée des classes d'isomorphisme des structures isométriques  $(V_m^1, S_m^1, t)$  et  $(V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2), S_m'^2, t)$ .

La forme bilinéaire  $S^2$  induit sur  $V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$  la forme  $S_m^2$  définie par :

$$S_m^2(\bar{u}, \bar{v}) = S_m((t^e - 1)u, v).$$

Le polynôme  $Q_m(t)$ ,  $m \neq 2$  (resp.  $Q_2(t)$ ), défini par l'égalité

$$t^e - 1 = Q_m(t)\phi_m(t) \quad (\text{resp. } t^e - 1 = Q_2(t)(t - t^{-1})),$$

est premier avec  $\phi_m(t)$  (resp.  $(t - t^{-1})$ ); par suite, déterminer  $S_m^2$  à isomorphisme près équivaut à déterminer  $S_m'^2$  à isomorphisme près. Compte-tenu de 1.3 et 1.5, ceci donne le théorème.

Nous avons de plus les décompositions en somme directe orthogonale suivantes :

$$(1.7.2) \quad (\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t) \\ = \bigoplus_{m>1} (\ker(\phi_m(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})), S_m^1, t),$$

$$(1.7.3) \quad (\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^2, t) \\ = \bigoplus_{m>1} (\ker(\phi_m(t); \text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})), S_m^2, t).$$

**1.8.** — Nous allons maintenant classifier les formes de Seifert des germes de courbe plane à Witt-équivalence près. Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux germes de courbe plane,  $A(f_1)$  et  $A(f_2)$  les formes de Seifert associées; on notera :

$$M_i = H_1(F(f_i), \mathbb{Q}), \quad n_i = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(F(f_i), \mathbb{Q}), \quad i = 1, 2;$$

$$A = A(f_1) \oplus (-A(f_2)), \quad t = t_1 \oplus t_2.$$

LEMME. — Si  $A(f_1)$  et  $A(f_2)$  sont Witt-équivalentes et si  $N$  est un métaboliseur pour  $A(f_1) \oplus (-A(f_2))$ , alors  $N$  est invariant par l'action de  $t$ .

*Démonstration.* — Soit  $x$  un élément fixé dans  $N$ ; on a donc pour tout  $y$  dans  $N$ ,  $A(x, y) = A(y, x) = 0$  et donc  $A(y, tx) = 0$ . Si  $tx$  n'est pas dans  $N$ , on peut compléter une base de  $N$  en une base de  $M_1 \oplus M_2$  dont  $tx$  est élément; dans cette base, la matrice de  $A$  contient un bloc de zéros de taille  $(1 + \frac{1}{2}(n_1 + n_2)) \times \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ : on aurait alors  $\det(A) = 0$ , ce qui est absurde car  $\det(A) = \pm 1$ , d'où le résultat.

**1.9.** — Avec les mêmes hypothèses, supposons que le polynôme minimal  $\Lambda(t)$  de la monodromie sur  $M = M_1 \oplus M_2$  soit le produit de deux polynômes  $\Lambda'(t)$  et  $\Lambda''(t)$  premiers entre eux. Alors  $M$  est la somme directe de  $M' = \ker(\Lambda'(t))$  et  $M'' = \ker(\Lambda''(t))$ ; ces sous-modules sont invariants par la monodromie et orthogonaux pour  $A$  à gauche et à droite. De plus, la restriction  $A'$  (resp.  $A''$ ) de  $A$  à  $M'$  (resp.  $M''$ ) est Witt-équivalente à 0

et le métaboliseur  $N$  est la somme directe de  $N' = N \cap M'$ , qui est un métaboliseur pour  $A'$  et de  $N'' = N \cap M''$ .

En particulier,  $A^0(f_1)$  et  $A^0(f_2)$  d'une part et les restrictions de  $A(f_1)$  à  $(t-1)M_1 = (t-1)H_1(F(f_1), \mathbb{Q})$  et de  $A(f_2)$  à  $(t-1)M_2$  d'autre part, sont Witt-équivalentes.

**1.10. DÉFINITION.** — Deux structures isométriques  $(S_1, t)$  et  $(S_2, t)$  définies sur des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels  $M_1$  et  $M_2$  et de rang respectif  $n_1 = \dim_{\mathbb{Q}} M_1$  et  $n_2 = \dim_{\mathbb{Q}} M_2$  sont Witt-équivalentes si  $S_1 \oplus (-S_2)$  est identiquement nulle sur un sous-espace vectoriel  $N$  de  $M_1 \oplus M_2$  stable par l'action de  $t$  et de dimension  $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ .

**1.11. PROPOSITION.** — Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La restriction de  $A(f_1)$  à  $(t-1)H_1(F(f_1), \mathbb{Q})$  et la restriction de  $A(f_2)$  à  $(t-1)H_1(F(f_2), \mathbb{Q})$  sont Witt-équivalentes.

(ii) Les structures isométriques associées sont Witt-équivalentes.

(iii) Les structures isométriques  $(V_m(f_1), S_m, t)$  et  $(V_m(f_2), S_m, t)$  sont Witt-équivalentes pour tout  $m > 1$ .

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $N$  un métaboliseur pour  $A = A(f_1) \oplus (-A(f_2))$ ; posons  $S = S(f_1) \oplus (-S(f_2))$ . La relation  $S(x, y) = A(x, y) - A(y, x)$  implique que  $S$  est identiquement nulle sur  $N$ . De plus, d'après le lemme 1.8, le sous-espace  $N$  est stable par l'action de  $t$ ; par suite,  $N$  est un métaboliseur pour  $(S, t)$ .

(i)  $\Leftarrow$  (ii) Soit  $N$  un métaboliseur de  $S$  sur  $(t-1)H_1(F(f_1), \mathbb{Q}) \oplus (t-1)H_1(F(f_2), \mathbb{Q})$ . Nous avons vu que  $(t-1)$  ne divise pas le polynôme minimal  $\Lambda_i(t)$  de la monodromie sur  $(t-1)H_1(F(f_i), \mathbb{Q})$  pour  $i = 1, 2$ . Soit  $\Lambda(t)$  le ppcm de  $\Lambda_1(t)$  et  $\Lambda_2(t)$ . Il existe alors des polynômes  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  de  $\mathbb{Q}[t]$  tels que  $\alpha(t)(1-t) + \beta(t)\Lambda(t) = 1$ . Par suite, pour tout  $x$  et  $y$  de  $N$ , on a  $A(x, y) = S(x, (1-t)^{-1}y) = S(x, \alpha(t)y) = 0$ , car  $N$  est stable par l'action de  $t$ , et  $N$  est un métaboliseur pour  $A$ .

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) Ceci est un analogue de 1.9.

**1.12. THÉORÈME.** — La forme de Seifert d'un germe de courbe plane est déterminée à Witt-équivalence près par la donnée de la forme bilinéaire symétrique  $A^0$  à isomorphisme près et de la structure isométrique  $(S^1, t)$  sur  $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$  à Witt-équivalence près.

*Démonstration.* — Nous avons vu en 1.9 que la forme de Seifert  $A$  est déterminée à Witt-équivalence près par les classes de Witt-équivalence de  $A^0$  et de la restriction de  $A$  à  $(t-1)H_1(F, \mathbb{Q})$ . La forme quadratique associée à  $A^0$  étant définie négative (cf. 1.6), donner  $A^0$  à Witt-équivalence près équivaut à donner  $A^0$  à isomorphisme près (cf. [MiH], th. 1.7, p. 58).

Par ailleurs, d'après 1.11, la classe de Witt-équivalence de la restriction de  $A$  à  $(t-1)H_1(F, \mathbb{Q})$  est déterminée par les classes de Witt-équivalence des structures isométriques  $(V_m, S_m, t)$  pour  $m > 1$ . Pour chaque  $m$ , la restriction de  $S_m$  à  $\phi_m(t) \cdot V_m = \phi_m(t) \cdot V_m^2$  est identiquement nulle; de plus  $\dim_{\mathbb{Q}} V_m^2 = 2 \dim_{\mathbb{Q}} (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$  et  $\phi_m(t) \cdot V_m$  est stable par l'action de  $t$ . Il s'ensuit que  $(V_m^2, S_m|_{V_m^2}, t)$  est Witt-équivalente à 0. Donc  $(V_m, S_m, t)$  est Witt-équivalente à  $(V_m^1, S_m^1, t)$ ; par suite, (1.7.2) et 1.11 permettent de conclure.

## 2. Passage des structures isométriques aux formes hermitiennes ou antihermitiennes.

**2.1.** — Nous devons maintenant classifier les structures isométriques sur  $\mathbb{Q}$  telles que le polynôme minimal de  $t$  est le produit de polynômes cyclotomiques tous distincts, afin de caractériser à isomorphisme près les structures isométriques rencontrées en 1.7. Cette classification se déduit de la classification des cas élémentaires  $(V, R, t)$  suivants :

$$(2.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V \text{ est un } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel de dimension finie muni d'un auto-} \\ \text{morphisme } t \text{ de polynôme minimal } \phi_m, \text{ et d'une forme bilinéaire} \\ \text{symétrique ou antisymétrique } t\text{-équivariante non dégénérée } R. \end{array} \right.$$

On notera  $\mathbb{K}_m$  le corps  $\mathbb{Q}[x]/\phi_m(x)$ ,  $\mathbb{L}_m$  le sous-corps de  $\mathbb{K}_m$  fixe par la conjugaison et  $\lambda_m$  la classe de  $x$  dans  $\mathbb{K}_m$ . L'automorphisme  $t$  munit  $V$  d'une structure de  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel définie par  $\lambda_m v = tv$ .

On notera  $r$  la dimension de  $V$  vu comme  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel.

Nous traiterons d'abord le cas des structures isométriques symétriques.

Pour  $m \neq 2$ , nous traduisons le problème de classification en un problème de classification de formes hermitiennes sur  $\mathbb{K}_m$  en utilisant la méthode indiquée par Milnor [Mi2]. La classification de ces formes, due à Landherr [La], permet alors d'obtenir une classification en termes d'un ensemble complet d'invariants. Les invariants de cette liste liés aux places à l'infini de  $\mathbb{L}_m$  ont été calculés par Neumann [Ne] en utilisant l'homologie

à coefficients réels  $H_1(F, \mathbb{R})$ . Nous adopterons une présentation qui permet de faire le lien entre les points de vue de Milnor et Neumann.

Si  $m = 2$ , l'automorphisme  $t$  est alors l'opposé de l'identité, le problème de classification est donc ramené à la classification des formes quadratiques sur le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $V$ .

En conclusion de cette section, le théorème 2.13 (resp. 2.16) détermine à isomorphisme (resp. à Witt-équivalence) près la structure isométrique  $(S, t)$  sur  $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$ .

**2.2.** — Considérons le  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$ . L'automorphisme  $t$  de  $V$  s'étend en un automorphisme  $\mathbb{K}_m$ -linéaire, qu'on notera encore  $t$ , de  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$  et la forme bilinéaire symétrique  $R$  s'étend en une forme  $\mathbb{K}_m$ -hermitienne  $t$ -équivariante  $R^{\mathbb{K}}$ .

Considérons

$$P_{m,k}(s) := \frac{\phi_m(s)}{\phi'_m(\lambda_m^k)(s - \lambda_m^k)} \in \mathbb{K}_m[s].$$

On a donc

$$\sum_{\substack{0 < k < m \\ \text{pgcd}(k, m) = 1}} P_{m,k}(s) = 1.$$

Pour  $v$  dans  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$  et  $\text{pgcd}(k, m) = 1$ , on a  $tP_{m,k}(t)v = \lambda_m^k P_{m,k}(t)v$  et l'égalité, où l'on somme sur  $k$  tel que  $0 < k < m$  et  $\text{pgcd}(k, m) = 1$ ,

$$v = \sum_k P_{m,k}(t)v,$$

nous donne la décomposition de  $v$  en somme de vecteurs propres pour  $t$ .

On notera  $W_k$  le sous-espace propre de  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$  associé à la valeur propre  $\lambda_m^k$ .

L'application  $v \mapsto P_{m,k}(t)v$  est un isomorphisme de  $V$  sur  $W_k$  vu comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Cet isomorphisme est compatible à l'action de  $t$ ; par suite l'isomorphisme de  $V$  sur  $W_1$  est aussi un isomorphisme de  $\mathbb{K}_m$ -espaces vectoriels si l'on munit  $V$  de la structure de  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel définie en 2.1 par  $\lambda_m v = tv$ .

Le point clé de la construction est l'égalité suivante. Pour  $v$  et  $w$  dans  $V$ , on a

$$R(v, w) = \sum_{\substack{0 < k < m \\ \text{pgcd}(k, m) = 1}} R^{\mathbb{K}}(P_{m,k}(t)v, P_{m,k}(t)w),$$

car  $R^{\mathbb{K}}(P_{m,k}(t)v, P_{m,h}(t)w)$  est nul pour  $k \neq h$ . Si  $g_k$  est l'élément de  $\text{Gal}(\mathbb{K}_m/\mathbb{Q})$  qui envoie  $\lambda_m$  sur  $\lambda_m^k$ , on a :

$$R^{\mathbb{K}}(P_{m,k}(t)v, P_{m,k}(t)w) = g_k(R^{\mathbb{K}}(P_{m,1}(t)v, P_{m,1}(t)w)).$$

Par suite,  $R(v, w) = \text{Tr}_{\mathbb{K}_m/\mathbb{Q}}(R^{\mathbb{K}}(P_{m,1}(t)v, P_{m,1}(t)w))$ . La formule

$$R^{\bullet}(v, w) = R^{\mathbb{K}}(P_{m,1}(t)v, P_{m,1}(t)w),$$

où  $v$  et  $w$  sont dans  $V$ , définit un produit hermitien  $R^{\bullet}$  sur  $V$ , vu comme  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel, car  $(t - \lambda_m)P_{m,1}(t)v = 0$ . L'identité donnée plus haut donne le résultat suivant.

**2.3. PROPOSITION.** — *La forme bilinéaire  $R$  sur  $V$  vérifie l'identité :*

$$R(v, w) = \text{Tr}_{\mathbb{K}_m/\mathbb{Q}}(R^{\bullet}(v, w)).$$

**2.4.** — Dans [Mi2], Milnor démontre qu'il existe une unique forme hermitienne  $R^{\bullet}$  vérifiant cette identité. Notre démonstration permet de décrire explicitement  $R^{\bullet}$ . Par suite, déterminer à isomorphisme près une structure isométrique  $(V, R, t)$  vérifiant (2.1.1) équivaut à déterminer à isomorphisme près la forme hermitienne  $R^{\bullet}$  associée sur  $V$ , vu comme  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel. Pour établir cette classification, nous avons besoin de définir quelques invariants.

**2.5. Notation.** — On notera  $e(k/m)$  le nombre  $\exp(2i\pi k/m)$ . Dans cette expression  $k$  et  $m$  représenteront toujours des nombres entiers, premiers entre eux, tels que  $0 < k < m$ .

**2.6. DÉFINITION.** — Considérons le plongement  $\omega_k : \mathbb{K}_m \rightarrow \mathbb{C}$  défini par  $\omega_k(\lambda_m) = e(k/m)$ . Après extension des scalaires, la forme  $\mathbb{K}_m$ -hermitienne  $R^{\bullet}$  sur  $V$  donne une forme  $\mathbb{C}$ -hermitienne  $R_k^{\bullet}$  sur  $V \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$  où  $V$  est muni de la structure de  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel, et l'automorphisme  $t$  s'étend en la multiplication par  $\omega_k(\lambda_m)$ . La signature  $e(k/m)$ -équivariante, au sens de Milnor, de la structure isométrique  $(R, t)$  est la signature de la forme  $\mathbb{C}$ -hermitienne  $R_k^{\bullet}$  sur  $V \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$ . On notera  $\sigma_{e(k/m)}(R)$  cette signature.

En notant  $R^{\mathbb{C}}$  l'extension hermitienne de  $R$  à  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ , pour  $v$  et  $w$  dans  $V$ , et  $\omega_k(P_{m,1})(s)$  l'image de  $P_{m,1}(s)$  dans  $\mathbb{C}[s]$  par  $\omega_k$ , on a donc :

$$R_k^{\bullet}(v, w) = R^{\mathbb{C}}(\omega_k(P_{m,1})(t)v, \omega_k(P_{m,1})(t)w).$$

Dans [Ne], Neumann considère la décomposition de  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  en somme des sous-espaces  $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$  propres par l'action de  $t$  (on utilise ici  $\omega_1 : \mathbb{K}_m \rightarrow \mathbb{C}$  et on remarque que l'action de  $t$  sur  $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$  est la multiplication par  $\omega_1(\lambda_m^k) = \omega_k(\lambda_m) = e(k/m)$ ). La signature  $\omega_k(\lambda_m)$ -équivariante, au sens de Neumann, de  $(R, t)$  est la signature de la restriction à  $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$  de la forme  $\mathbb{C}$ -hermitienne qui étend  $R$  à  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ , puisque l'endomorphisme  $\omega_k(P_{m,1})(t)$  est la projection de  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  sur  $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$ . On voit donc que les définitions de Milnor et Neumann coïncident.

## 2.7. PROPOSITION. — Les signatures équivariantes

$$\sigma_{e(k/m)}(R) \quad \text{et} \quad \sigma_{e((m-k)/m)}(R)$$

sont égales.

*Démonstration.* — Quand on diagonalise la forme hermitienne  $R_k^*$ , on trouve une matrice à coefficients dans  $\omega_k(\mathbb{L}_m)$ , d'où le résultat car  $\omega_k$  et  $\omega_{m-k}$  coïncident sur  $\mathbb{L}_m$ .

**2.8. DÉFINITION.** — Soit  $R^*$  une forme  $\mathbb{K}_m$ -hermitienne sur  $V$ , on appelle déterminant de  $R^*$  et on note  $\det(R^*)$  la classe dans  $\mathbb{L}_m/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}(\mathbb{K}_m^*)$  du déterminant de la matrice de  $R^*$  dans une base du  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel  $V$ .

**2.9. Le cas des formes antisymétriques.** — Les objets élémentaires sont ici les  $(V, S, t)$  suivants :  $V$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme  $t$  de polynôme minimal  $\phi_m$ , et d'une forme bilinéaire antisymétrique  $t$ -équivariante non dégénérée  $S$ .

On notera  $r$  la dimension de  $V$  vu comme  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel.

Pour  $m = 2$ , le problème de classification se ramène à la classification des formes antisymétriques non dégénérées sur  $V$ . On sait que le rang de  $V$  est un invariant complet.

Pour  $m \neq 2$ , on peut se ramener au cas symétrique de deux façons :

(i) On définit une forme bilinéaire symétrique  $R$  en posant

$$R(v, w) = S((t - t^{-1})v, w).$$

En définissant  $S^*$  à partir de  $S$  comme on a défini  $R^*$  en 2.2 à partir de  $R$ , on a alors :

$$R^* = (\lambda_m - \lambda_m^{-1})S^*.$$

La *signature*  $e(k/m)$ -équivalente, au sens de Milnor, de  $(S, t)$  est

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Mil}}(S) = \sigma_{e(k/m)}(R)$$

et on a

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Mil}}(S) = \sigma_{e((m-k)/m)}^{\text{Mil}}(S).$$

(ii) On définit une forme  $\mathbb{C}$ -hermitienne  $R^{\mathbb{C}}$  à partir de la forme anti-hermitienne  $S^{\mathbb{C}}$  qui étend  $S$  à  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$  en posant, pour  $v$  et  $w$  dans  $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ ,

$$R^{\mathbb{C}}(v, w) = iS^{\mathbb{C}}(v, w).$$

La *signature*  $e(k/m)$ -équivalente de  $(S, t)$  au sens de Neumann, qu'on notera  $\sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S)$ , est la signature de la forme  $\mathbb{C}$ -hermitienne  $R_k^{\mathbb{C}}$ , restriction de  $R^{\mathbb{C}}$  au sous-espace propre pour la valeur propre  $e(k/m)$ , et on a :

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S) = -\sigma_{e((m-k)/m)}^{\text{Neu}}(S).$$

Pour  $0 < k < \frac{1}{2}m$ ,  $-i\omega_k(\lambda_m - \lambda_m^{-1})$  est un nombre réel positif, on a donc dans ce cas

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Mil}}(S) = \sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S).$$

Nous utiliserons les signatures au sens de Neumann, car elles simplifient le calcul effectif, cf. 3.7. Nous noterons  $\sigma_{e(k/m)}(S)$  la signature  $e(k/m)$ -équivalente  $\sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S)$ .

Le déterminant de la matrice  $M_S$  qui représente  $S^{\bullet}$  dans une base de  $V$  est un élément de  $(\lambda_m - \lambda_m^{-1})\mathbb{L}_m^*$  (resp.  $\mathbb{L}_m^*$ ) si  $r$  est impair (resp. pair). Le *déterminant* de la forme antihermitienne  $S^{\bullet}$  est la classe de  $\det(M_S)$  dans  $\mathbb{K}_m/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}(\mathbb{K}_m^*)$ .

**2.10. THÉORÈME (Landherr).** — Soit  $m > 2$  un nombre entier, soit  $V_m$  un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel muni d'un automorphisme  $t$  de polynôme minimal  $\phi_m$  et d'une forme bilinéaire  $t$ -équivalente symétrique (resp. antisymétrique) non dégénérée  $S$ . La structure isométrique  $(S, t)$  sur  $V_m$  est déterminée à isomorphisme près par les données suivantes :

- (i) la dimension  $r_m$  de  $V_m$  vu comme  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel,
- (ii) le déterminant  $d_m$  de la forme  $\mathbb{K}_m$ -hermitienne (resp.  $\mathbb{K}_m$ -anti-hermitienne)  $S^{\bullet}$  construite à partir de  $S$ ,
- (iii) les signatures équivariantes  $\sigma_{\alpha}(S)$  pour  $\alpha$  racine de  $\phi_m(t)$ .

*Démonstration.* — Nous omettrons l'indice  $m$  dans  $V_m$ ,  $\mathbb{K}_m$ ,  $\mathbb{L}_m$ ,  $\lambda_m$ ,  $\phi_m$ ,  $r_m$  et  $d_m$ . D'après 2.4, il suffit de démontrer que la forme  $\mathbb{K}$ -hermitienne  $H = S^\bullet$  sur  $V$  est déterminée à isomorphisme près par les invariants  $r, d, \sigma_\alpha(S)$ , où les  $\alpha$  sont les racines de  $\phi(t)$ .

Ce résultat est une reformulation d'un résultat de Landherr [La]. Nous donnons ici une autre démonstration, qui s'appuie sur le théorème de Jacobson [J] : deux formes hermitiennes  $H_1$  et  $H_2$  sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  sont isomorphes si et seulement si les formes quadratiques associées  $Q_1$  et  $Q_2$  sur  $V$  vu comme  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel sont isomorphes. D'après Hasse, une forme quadratique non dégénérée  $Q$  sur un  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel est définie à isomorphisme près par les invariants suivants :

- (i) la dimension  $\dim_{\mathbb{L}} V$  ;
- (ii) le déterminant  $\det(Q) \in \mathbb{L}^*/\mathbb{L}^{*2}$  ;
- (iii) les signatures  $\sigma_{e(k/m)}(Q)$  de l'extension de  $Q$  à  $V \otimes_{\mathbb{L}} \mathbb{R}$ , associées aux plongements  $\omega_k$  de  $\mathbb{L}$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $0 < k < \frac{1}{2}m$  et  $\text{pgcd}(k, m) = 1$  ;
- (iv) les invariants de Hasse  $\mathcal{H}_{\wp}(Q)$  associés aux places discrètes  $\wp$  de  $\mathbb{L}$ .

On rappelle que si la forme quadratique  $Q$  est représentée par une matrice diagonale  $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ , en notant  $\left(\frac{a_i, a_j}{\wp}\right)$  le symbole de Hilbert en  $\wp$ , on a :

$$\mathcal{H}_{\wp}(Q) = \prod_{i < j} \left(\frac{a_i, a_j}{\wp}\right).$$

Soit  $\theta$  un élément de  $\mathbb{L}$  tel que  $\mathbb{K} = \mathbb{L}(\sqrt{\theta})$  ; par exemple, on peut prendre  $\theta = \lambda^2 + \bar{\lambda}^2 - 2$ , où  $\lambda$  est la classe de  $x$  dans  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[x]/\phi(x)$ . Si la forme hermitienne  $H$  admet la matrice diagonale  $\text{Diag}(b_1, \dots, b_r)$  dans une  $\mathbb{K}$ -base  $\{e_j\}_{1 \leq j \leq r}$  de  $V$ , la matrice de la forme quadratique  $Q$  associée est  $\text{Diag}(b_1, -\theta b_1, \dots, b_r, -\theta b_r)$  dans la  $\mathbb{L}$ -base associée.

Pour démontrer le théorème, il suffit de voir que la liste des invariants de la forme hermitienne  $H$  détermine la liste des invariants de la forme quadratique  $Q$ . Il est clair que la dimension  $\dim_{\mathbb{K}} V$  et les signatures  $\sigma_{e(k/m)}(S)$  déterminent la dimension  $\dim_{\mathbb{L}} V$  et les signatures  $\sigma_{e(k/m)}(Q)$  ; en effet,  $\dim_{\mathbb{L}} V = 2 \dim_{\mathbb{K}} V$  et  $\sigma_{e(k/m)}(Q) = 2 \sigma_{e(k/m)}(S)$ , car  $\omega_k(\theta) = 2 \cos(4\pi k/m) - 2$  est négatif. Le déterminant de la forme quadratique ne dépend que de la dimension :

$$\det(Q) = (-\theta)^r \in \mathbb{L}^*/\mathbb{L}^{*2}.$$

D'autre part, la donnée du déterminant  $d = b_1 \cdots b_r$  de la forme hermitienne  $H$  détermine les invariants de Hasse associés aux places discrètes  $\wp$  de  $\mathbb{L}$ . On a en effet :

$$\mathcal{H}_{\wp}(Q) = \left( \frac{-\theta, -\theta}{\wp} \right)^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{1 \leq i \leq r} \left( \frac{b_i, \theta}{\wp} \right) = \left( \frac{-\theta, -1}{\wp} \right)^{\frac{r(r-1)}{2}} \left( \frac{d, \theta}{\wp} \right).$$

**2.11.** — Nous allons tirer du théorème 2.10 les corollaires relatifs à la classification des structures isométriques  $(S^1, t)$  et  $(S^2, t)$  rencontrées en 1.7. Le calcul effectif des invariants est donné dans le chapitre suivant.

**2.12. PROPOSITION.** — Avec les notations 1.7 et ci-dessus,

a) la structure isométrique  $(\mathrm{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t)$  est caractérisée à isomorphisme près par les données suivantes :

- (i) le polynôme caractéristique  $\Delta_{-1}$  de la monodromie sur  $\mathrm{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$ ,
- (ii) pour chaque  $m > 2$  tel que  $\phi_m$  divise  $\Delta_{-1}$ , le déterminant  $d_m^1$  de la forme  $\mathbb{K}_m$ -anti-hermitienne  $S_m^{\bullet 1}$  construite à partir de la restriction  $S_m^1$  de  $S^1$  à  $\ker(\phi_m(t); \mathrm{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ ,
- (iii) pour chaque racine  $\alpha = e(k/m)$  de  $\Delta_{-1}$  telle que  $\alpha \neq -1$ , la signature  $\alpha$ -équivariante  $\sigma_{\alpha}(S^1) := \sigma_{\alpha}(S_m^1)$ ;

b) la structure isométrique  $(\mathrm{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^2, t)$  est caractérisée à isomorphisme près par les données suivantes :

- (iv) le polynôme caractéristique  $\Delta_0$  de la monodromie sur  $\mathrm{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ ,
- (v) si  $\phi_2$  divise  $\Delta_0$ , la classe d'équivalence de la forme quadratique associée à la forme symétrique  $S_2^2$  restriction de  $S^2$  à

$$\ker(\phi_2(t); \mathrm{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})) = \ker(\phi_2^2(t); H_1(F, \mathbb{Q})) / \ker(\phi_2(t); H_1(F, \mathbb{Q})),$$

- (vi) pour chaque  $m > 2$  tel que  $\phi_m$  divise  $\Delta_0$ , le déterminant  $d_m^2$  de la forme  $\mathbb{K}_m$ -hermitienne  $S_m^{\bullet 2}$  construite à partir de la restriction  $S_m^2$  de  $S^2$  à  $\ker(\phi_m(t); \mathrm{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ ,

- (vii) pour chaque racine  $\alpha = e(k/m)$  de  $\Delta_0$  telle que  $\alpha \neq -1$ , la signature  $\alpha$ -équivariante  $\sigma_{\alpha}(S^2) := \sigma_{\alpha}(S_m^2)$ .

*Remarque.* — Nous verrons en 3.11 que  $S^2$  est définie positive, le polynôme  $\Delta_0(t)$  détermine donc les signatures équivariantes de  $S^2$ .

*Démonstration.* — Nous avons vu en (1.7.2) que la structure isométrique  $(S^1, t)$  sur  $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$  est la somme directe orthogonale des structures isométriques antisymétriques  $(S_m^1, t)$  sur

$$\ker(\phi_m(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})) \quad \text{pour les } m \geq 2.$$

La classe d'isomorphisme de la structure isométrique  $(S_2^1, t)$  est déterminée par la classe d'isomorphisme de la forme antisymétrique  $S_2^1$  sur le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\ker(\phi_2(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ , c'est-à-dire par le rang de  $S_2^1$  qui est égal à la multiplicité de  $-1$  comme racine du polynôme  $\Delta_{-1}(t)$ . Pour les  $m > 2$ , on applique le théorème 2.10 en remarquant que le polynôme  $\Delta_{-1}$  donne les dimensions  $r_m$  pour  $m \geq 2$ . Ceci donne le point a).

On procède de même pour le point b) en partant de (1.7.3). La structure isométrique  $(S_2^2, t)$  est déterminée par la forme bilinéaire symétrique  $S_2^2$  ou par la forme quadratique associée, sur le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\ker(\phi_2(t); \text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ .

**2.13. THÉORÈME.** — *La classe d'isomorphisme de la forme bilinéaire symétrique  $A^0$  et les données (i)–(vi) de la proposition 2.12 déterminent la forme de Seifert  $A$  sur  $H_1(F, \mathbb{Q})$  à isomorphisme près.*

*Démonstration.* — Compte tenu de la remarque, ceci est un corollaire de la proposition 2.12 et du théorème 1.7.

En particulier, on retrouve ainsi le théorème suivant.

**2.14. THÉORÈME** (voir [SSS], §3). — *Le nombre  $b$  de branches irréductibles du germe  $f$  et les données (i), (iii) et (iv) de la proposition 2.12 déterminent la forme de Seifert réelle  $A_{\mathbb{R}}$  sur  $H_1(F, \mathbb{R})$  à isomorphisme près.*

**2.15. PROPOSITION.** — *Soit  $m > 2$  un nombre entier, soit  $V_m$  un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel muni d'un automorphisme  $t$  de polynôme minimal  $\phi_m$  et d'une forme bilinéaire  $t$ -équivariante antisymétrique non dégénérée  $S$ . La structure isométrique  $(S, t)$  sur  $V_m$  est déterminée à Witt-équivalence près par les données suivantes :*

- (i) le déterminant  $d_m$  de la forme  $\mathbb{K}_m$ -antihermitienne  $S^\bullet$  construite à partir de  $S$ ,
- (ii) les signatures équivariantes  $\sigma_\alpha(S)$  pour  $\alpha$  racine de  $\phi_m(t)$ .

*Démonstration.* — Nous dirons que deux formes  $\mathbb{K}_m$ -antihermitiennes  $R_1^\bullet$  et  $R_2^\bullet$  définies sur des  $\mathbb{K}_m$ -espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  de dimensions

respectives  $r_1$  et  $r_2$ , sont *Witt-équivalentes* s'il existe un sous-espace vectoriel de  $V_1 \oplus V_2$  de dimension  $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  sur lequel  $R_1^* \oplus (-R_2^*)$  est identiquement nulle (on vérifie que cette relation est une relation d'équivalence en adaptant au cas antihermitien la démonstration relative au cas bilinéaire).

Un métaboliseur  $N$  pour une structure isométrique antisymétrique  $(V, R, t)$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel stable par l'action de  $t$  (cf. 1.10). On peut donc considérer  $N$  comme un  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel. Par définition, la forme antihermitienne  $R^*$  définie en fonction de  $R$  comme indiqué en 2.9 est identiquement nulle sur  $N$ , par suite  $N$  est également un métaboliseur pour  $R^*$ . Réciproquement, soit  $N$  un métaboliseur pour une forme  $\mathbb{K}_m$ -antihermitienne  $R^*$ , définie sur un  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel  $V$ . On peut considérer  $N$  et  $V$  comme des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels. Soit  $R$  la forme antisymétrique définie sur  $V$ , par

$$R(u, v) = \text{Tr}_{\mathbb{K}_m/\mathbb{Q}}(R^*(u, v))$$

pour  $u$  et  $v$  dans  $V$ . Alors pour  $x$  et  $y$  dans  $N$ , on a  $R(x, y) = 0$ . Par suite,  $N$  est un métaboliseur pour la structure isométrique  $(V, R, t)$ .

Il suffit donc de montrer que le déterminant et les signatures équivariantes forment un système complet d'invariants pour la classification à Witt-équivalence près d'une forme antihermitienne sur un  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel.

Soit  $R$  une forme antihermitienne non dégénérée sur un  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel  $V$ . Montrons que  $R$  se décompose en une somme directe orthogonale de deux formes antihermitiennes  $R_X \oplus R_Y$ , définies respectivement sur  $X$  et  $Y$ , telles que  $R_X$  soit anisotrope (i.e. si  $x \in X$ ,  $R(x, x)$  n'est nul que si  $x = 0$ ) et  $R_Y$  soit Witt-équivalente à 0. Si  $R$  est anisotrope sur  $V$ , on prend  $X = V$  et  $Y$  est réduit à  $\{0\}$ . Sinon, soit  $x_1 \in V$ , avec  $x_1 \neq 0$ , tel que  $R(x_1, x_1) = 0$ ;  $R$  étant non dégénérée, il existe  $y_1 \in V$  tel que  $R(x_1, y_1) = 1$ . Notons  $Y_1$  le sous-espace de  $V$  engendré par  $x_1$  et  $y_1$ . La matrice de la restriction de  $R$  à  $Y_1$  dans la base  $\{x_1, y_1\}$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c_1 \end{pmatrix}$  avec  $c_1 = R(y_1, y_1)$ . De plus,  $R$  étant non dégénérée sur  $Y_1$ , l'orthogonal pour  $R$  de  $Y_1$  est un supplémentaire de  $Y_1$  :

$$V = Y_1 \oplus Y_1^\perp.$$

Une récurrence décroissante nous donne

$$V = Y_1 \oplus^\perp Y_2 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp Y_k$$

avec  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c_1 \end{pmatrix}$  pour matrice de la restriction de  $R$  à  $Y_i$  dans la base  $\{x_i, y_i\}$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $X = Y^\perp$  anisotrope ou réduit à  $\{0\}$ . De plus, le sous-espace engendré par  $\{x_1, \dots, x_k\}$  est un métaboliseur pour la restriction de  $R$  à  $Y$ , cette restriction est donc Witt-équivalente à 0.

Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux formes antihermitiennes non dégénérées sur les  $\mathbb{K}_m$ -espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$ , et  $X_1 \oplus^\perp Y_1$  et  $X_2 \oplus^\perp Y_2$  des décompositions comme ci-dessus, i.e. la restriction de  $R_i$  à  $X_i$  est anisotrope et la restriction de  $R_i$  à  $Y_i$  est Witt-équivalente à 0. Les restrictions aux  $Y_i$  étant Witt-équivalentes à 0, les formes  $R_1$  et  $R_2$  sont Witt-équivalentes si et seulement si  $R_1|_{X_1} \oplus (-R_2|_{X_2})$  est Witt-équivalente à 0, c'est-à-dire si et seulement si il existe un métaboliseur pour  $R_1|_{X_1} \oplus (-R_2|_{X_2})$ . Supposons qu'il existe un tel métaboliseur, et notons  $\{x_k^1 \oplus x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$  une base de ce métaboliseur (ici  $x_k^i \in X_i$  et  $\dim_{\mathbb{K}_m}(X_1 \oplus X_2) = 2n$ ).

La forme bilinéaire  $R_1|_{X_1}$  (resp.  $R_2|_{X_2}$ ) étant anisotrope, la famille  $\{x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$  (resp.  $\{x_k^1\}_{1 \leq k \leq n}$ ) est libre. En effet, soient  $a_k$  pour  $1 \leq k \leq n$  des éléments de  $\mathbb{K}_m$  tels que

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^2 = 0.$$

Alors  $\{x_k^1 \oplus x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$  étant une base d'un métaboliseur de  $R_1|_{X_1} \oplus (-R_2|_{X_2})$ , on a :

$$\begin{aligned} R_1|_{X_1} \left( \sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^1, \sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^1 \right) &= R_2|_{X_2} \left( \sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^2, \sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^2 \right) \\ &= R_2|_{X_2}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

De plus,  $R_1|_{X_1}$  étant anisotrope on a

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^1 = 0$$

et par suite,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k (x_k^1 \oplus x_k^2) = 0.$$

Il s'ensuit que  $a_k = 0$  pour tout  $k$  entre 1 et  $n$  et la famille  $\{x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$  est donc libre. Par suite,  $\dim_{\mathbb{K}_m} X_1 = \dim_{\mathbb{K}_m} X_2 = n$  et  $\{x_k^i\}_{1 \leq k \leq n}$  est une base pour  $X_i$  pour  $i = 1, 2$ . De plus,

$$R_1(x_k^1, x_\ell^1) = R_2(x_k^2, x_\ell^2) \quad \text{pour } 1 \leq k, \ell \leq n.$$

Nous avons donc montré que si  $R_1|_{X_1} \oplus (-R_2|_{X_2})$  est Witt-équivalente à 0 alors  $R_1|_{X_1}$  est isomorphe à  $R_2|_{X_2}$ .

Revenons maintenant à la première partie de cette démonstration, en notant  $\lambda = \lambda_m$ . L'égalité matricielle suivante, vérifiée pour tout  $c \in \mathbb{K}_m$  tel que  $\bar{c} = -c$ ,

$$\begin{pmatrix} \lambda - \bar{\lambda} + \frac{1}{2}c & -1 \\ \lambda - \bar{\lambda} - \frac{1}{2}c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - \bar{\lambda} + \frac{1}{2}c & \lambda - \bar{\lambda} - \frac{1}{2}c \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2(\lambda - \bar{\lambda}) & 0 \\ 0 & 2(\lambda - \bar{\lambda}) \end{pmatrix}$$

montre que les formes antihermitiennes  $R$  et  $R_X$  ont même déterminant dans  $\mathbb{K}_m / N_{\mathbb{K}_m / \mathbb{L}_m} \mathbb{K}_m^*$  et mêmes signatures équivariantes. Par suite, si  $R_1$  et  $R_2$  deux formes antihermitiennes non dégénérées sur les  $\mathbb{K}_m$ -espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$  sont Witt-équivalentes, elles ont mêmes signatures équivariantes, même déterminant et même rang modulo 2.

On notera que le rang d'une forme antihermitienne est égal aux signatures équivariantes modulo 2.

Réciproquement, soient  $R_1$  et  $R_2$  deux formes antihermitiennes non dégénérées, sur des  $\mathbb{K}_m$ -espaces vectoriels  $V_1$  et  $V_2$ , ayant mêmes signatures équivariantes et même déterminant. Soient  $r_1$  et  $r_2$  les dimensions respectives de  $V_1$  et  $V_2$ ; les signatures étant égales, les dimensions  $r_1$  et  $r_2$  ont donc même parité; on peut supposer sans perte de généralité qu'il existe un entier positif  $r$  tel que  $r_1 + 2r = r_2$ . Soit  $M$  la forme  $\mathbb{K}_m$ -antihermitienne (métabolique) sur  $(\mathbb{K}_m)^{2r}$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice diagonale

$$\text{Diag}(\underbrace{\lambda - \bar{\lambda}, \dots, \lambda - \bar{\lambda}}_{r \text{ termes}}, \underbrace{\bar{\lambda} - \lambda, \dots, \bar{\lambda} - \lambda}_{r \text{ termes}}).$$

Les formes  $R_1 \oplus M$  et  $R_2$  ont même déterminant, mêmes signatures équivariantes et même rang; elles sont donc isomorphes d'après le théorème 2.10. Par suite,  $M$  étant Witt-équivalente à 0, les formes  $R_1$  et  $R_2$  sont Witt-équivalentes.

**2.16. THÉORÈME.** — *La classe d'isomorphisme de la bilinéaire symétrique  $A^0$  et les données (ii) et (iii) de la proposition 2.12 déterminent la forme de Seifert  $A$  sur  $H_1(F, \mathbb{Q})$  à Witt-équivalence près.*

*Démonstration.* — La classe de Witt-équivalence de  $(S, t)$  sur  $(t-1)H_1(F, \mathbb{Q})$  est déterminée par l'ensemble, pour  $m \geq 2$ , des classes de Witt-équivalence des structures isométriques  $(S_m^1, t)$  sur

$\ker(\phi_m(t); \operatorname{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$  (cf. 1.11). La classe de Witt-équivalence de la structure isométrique  $(S_2^1, t)$  sur  $\ker(\phi_2(t); \operatorname{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$  est donnée par la classe de Witt-équivalence de la forme antisymétrique  $S_2^1$  sur le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\ker(\phi_2(t); \operatorname{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ , cette dernière étant Witt-équivalente à 0, il est suffisant de prendre  $m > 2$ .

La proposition 2.15 permet alors de conclure.

### 3. Calcul explicite des invariants.

**3.1.** — Soient  $f_1, \dots, f_b$  les composantes irréductibles de  $f$ . On note  $\varphi_j$  un développement de Puiseux de la  $j$ -ième branche  $f_j^{-1}(0)$ , c'est-à-dire une série formelle de  $\mathbb{C}[[x^{1/n_j}]]$  telle que  $f_j(t^{n_j}, \varphi_j(t)) = 0$ . On pose :

$$\varphi_j(x^{1/n_j}) = \sum_{k \geq 1} a_{j,k} x^{k/n_j}.$$

On suppose que l'entier  $n_j$  est minimal, c'est-à-dire qu'il existe  $k$  premier avec  $n_j$  tel que  $a_{j,k}$  soit non nul ;  $n_j$  est la multiplicité en l'origine de  $f_j^{-1}(0)$ . On suppose également que l'axe des  $y$  n'est pas tangent à la courbe  $f_j^{-1}(0)$ , autrement dit,  $a_{j,k} = 0$  pour  $k < n_j$ , ce qui est toujours possible, quitte à faire un changement de variables.

En 1.7, nous avons montré que la forme de Seifert rationnelle associée à un germe de courbe plane  $f$  est déterminée, à isomorphisme près, par la donnée de la forme bilinéaire symétrique  $A^0$  sur  $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Q}))$  et de la structure isométrique  $((t-1)H_1(F, \mathbb{Q}), S, t)$  ; pour cette dernière, nous avons donné, en 2.12, un ensemble complet d'invariants.

Dans cette section, nous allons montrer comment déterminer explicitement ces différents invariants en fonction du type topologique du germe  $f$ . On rappelle que le type topologique d'un germe de courbe plane  $f$  est caractérisé par les données de Puiseux, c'est-à-dire :

- (i) pour chaque composante irréductible  $f_j$  de  $f$  les exposants caractéristiques de Puiseux, i.e. les  $k/n_j$  tels que  $a_{j,k}$  soit non nul et il n'existe pas d'entier  $\ell$  vérifiant  $\ell < k$ ,  $a_{j,\ell} \neq 0$  et  $\operatorname{pgcd}(\ell, n_j) = \operatorname{pgcd}(k, n_j)$  ;
- (ii) pour tout couple  $(j, k)$  avec  $1 \leq j < k \leq b$ , l'exposant de coïncidence  $c_{j,k}$  entre  $\varphi_j$  et  $\varphi_k$ , i.e. en notant  $\sigma_j$  (resp.  $\sigma_k$ ) un générateur du groupe de Galois de  $\varphi_j$  (resp.  $\varphi_k$ ),  $c_{j,k}$  est le maximum de l'ensemble des valuations des séries  $\sigma_j^r(\varphi_j) - \sigma_k^s(\varphi_k)$  pour  $1 \leq r \leq n_j$  et  $1 \leq s \leq n_k$ .

À chaque composante irréductible  $f_j$  de  $f$  est associée une composante de l'entrelacs de  $f$  donné par

$$K(f) = \prod_{j=1}^b (S_\varepsilon^3 \cap f_j^{-1}(0))$$

avec  $\varepsilon$  assez petit. Il lui correspond donc une composante de bord de la fibre de Milnor  $F$ .

### 3.2. Détermination de $A^0$ à isomorphisme près.

3.2.1. Soient  $c_1, \dots, c_b$  les classes des composantes de bord de  $F$  dans  $H_1(F, \mathbb{Z})$ , munies de l'orientation induite par l'orientation de  $F$ . Ces  $b$  classes forment un système générateur pour  $\ker((t-1), H_1(F, \mathbb{Z}))$ , avec pour seule relation  $c_1 + \dots + c_b = 0$ . Si  $j \neq k$ ,  $A^0(c_j, c_k)$  est égal au nombre d'enlacement entre  $c_j$  et  $c_k$ , ou encore au nombre d'intersection entre les composantes  $f_j^{-1}(0)$  et  $f_k^{-1}(0)$  du germe  $f^{-1}(0)$ , qui est égal à la valuation de la série  $f_k(t^{n_j}, \varphi_j(t))$  (voir par exemple [C], §9.3, p. 183). En tenant compte de la relation ci-dessus, ceci donne la restriction de  $A$  à  $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Q}))$  ou de  $A_{\mathbb{Z}}$  à  $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$ .

On peut facilement voir que la forme quadratique associée à  $A^0$  est définie négative. En effet, la relation  $c_1 + \dots + c_b = 0$  donne l'égalité suivante :

$$A^0\left(\sum_{k=0}^b x_k c_k, \sum_{k=0}^b x_k c_k\right) = - \sum_{0 \leq i < j \leq b} A^0(c_i, c_j)(x_i - x_j)^2.$$

3.2.2. La classification des formes quadratiques non dégénérées sur  $\mathbb{Q}$ , déjà utilisée en 2.10, donne ici le résultat suivant ( voir par exemple J.-P. Serre [Se] ) :

**THÉOREME.** — *La forme quadratique définie négative associée à  $A^0$  est déterminée à isomorphisme ou à Witt-équivalence près par :*

- (i) le nombre  $b$  de branches irréductibles du germe  $f$ ,
- (ii) le déterminant de  $A^0$  dans  $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ , et
- (iii) les invariants de Hasse  $\mathcal{H}_p(A^0)$  pour  $p$  premier,  $p \neq 2$ .

En pratique, il est plus commode de déterminer les invariants de Hasse de  $(-A^0)$ . Si  $(-A^0)$  est représentée par une matrice diagonale

$\text{Diag}(a_1, \dots, a_{b-1})$ , on calcule

$$\mathcal{H}_p(-A^0) = \prod_{1 \leq j < k \leq b-1} \left( \frac{a_j, a_k}{p} \right)$$

en utilisant la bimultiplicativité du symbole de Hilbert et les égalités suivantes, où  $\ell, \ell'$  et  $p$  sont des nombres premiers distincts, différents de 2 :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\ell, \ell}{\ell} \right) &= \left( \frac{-1}{\ell} \right) = (-1)^{(\ell-1)/2}, & \left( \frac{\ell, 2}{\ell} \right) &= \left( \frac{2}{\ell} \right) = (-1)^{(\ell^2-1)/8}, \\ \left( \frac{\ell, \ell'}{\ell} \right) &= \left( \frac{\ell'}{\ell} \right), & \left( \frac{2, 2}{p} \right) &= \left( \frac{\ell, \ell}{p} \right) = \left( \frac{\ell, 2}{p} \right) = \left( \frac{\ell, \ell'}{p} \right) = 1. \end{aligned}$$

3.2.3. Bien que la classification des formes quadratiques définies positives sur  $\mathbb{Z}$  soit impraticable, on peut déterminer la forme bilinéaire  $A_{\mathbb{Z}}^0$ , restriction de  $A_{\mathbb{Z}}$  à  $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$ , à isomorphisme près. On a en effet le résultat suivant dû à R. Kaenders.

THÉOREME (voir [Ka], th. 1.3). — Soient  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_b\}$  et  $\{\beta_1, \dots, \beta_b\}$  deux systèmes générateurs de  $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$  tels que :

- (i)  $A(\alpha_j, \alpha_k) > 0$  et  $A(\beta_j, \beta_k) > 0$  pour  $1 \leq j < k \leq b$ ,
- (ii)  $\alpha_1 + \dots + \alpha_b = 0$  et  $\beta_1 + \dots + \beta_b = 0$ ,
- (iii) les familles  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_b\}$ ,  $\{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_b\}$  sont des bases de  $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$  pour tout  $j \in \{1, \dots, b\}$ .

Il existe alors une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, b\}$  et  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tels que pour tout  $j \in \{1, \dots, b\}$  on ait  $\alpha_j = \varepsilon \beta_{\sigma(j)}$ .

On voit donc que les  $A(c_j, c_k)$ , pour  $1 \leq j < k \leq b$ , sont déterminés par la donnée de  $A_{\mathbb{Z}}^0$  à isomorphisme près. Ce résultat nous sera utile en 4.2.

### 3.3. Arbre de désingularisation.

3.3.1. Soit  $\Pi$  la résolution minimale de  $f$  obtenue par éclatements successifs de points. Soient :

- $E := \Pi^{-1}(0)$  son diviseur exceptionnel,
- $E_0 := \overline{\Pi^{-1}(f^{-1}(0) \setminus 0)}$  la transformée stricte de  $f^{-1}(0)$ , et
- $E_i$  les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel.

Le diviseur à croisements normaux  $\Pi^{-1}(f^{-1}(0))$  est égal à

$$E_0 + \sum e_i E_i,$$

où  $e_i$  est la multiplicité de  $E_i$ .

3.3.2. L'arbre dual de désingularisation  $T(f)$  d'un germe de courbe plane  $f$  est construit de la façon suivante.

Chaque composante  $E_i$  du diviseur exceptionnel est représentée par un sommet  $i$  pondéré de la multiplicité  $e_i$ . Deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les composantes du diviseur exceptionnel qu'ils représentent s'intersectent. On ajoute en chaque sommet  $i$  autant de flèches qu'il existe de points d'intersection entre  $E_0$  et  $E_i$ . On considère l'extrémité de chaque flèche comme un sommet supplémentaire de l'arbre, pondéré de la multiplicité 1.

3.3.3. Le type topologique d'un germe de courbe plane  $f$  est caractérisé par l'arbre de désingularisation  $T(f)$  pondéré par les multiplicités  $e_i$ .

3.3.4. On dit que deux sommets  $i$  et  $j$  de  $T(f)$  sont *voisins* si ils sont reliés par une arête ou une flèche, et on note  $V(i)$  l'ensemble des voisins de  $i$ . Le cardinal de  $V(i)$  est appelé la *valence* de  $i$  et est noté  $v_i$ . Si  $i$  et  $j$  sont voisins, on note  $m_{ij}$  le pgcd de  $e_i$  et  $e_j$ , et  $r_i$  le pgcd des  $m_{ij}$  pour  $j \in V(i)$ . On dit que  $i$  est un *sommet de rupture* si  $v_i \geq 3$ , et on note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des indices des sommets de rupture. Pour tout sommet  $i$ , et pour  $j$  dans  $V(i)$ , on note  $\varepsilon_j$  la classe de  $(-e_j)$  modulo  $e_i$ ; on appelle *halo* de  $i$ , et on note  $\Theta_i$ , l'élément  $(e_i, (\varepsilon_j)_{j \in V(i)})$  de  $\mathbb{N} \times (\mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z})^{V(i)}$ .

### 3.4. Décomposition de la fibre de Milnor.

3.4.1. On construit dans [DM1], en fonction de l'arbre  $T(f)$ , une décomposition  $F = \bigcup_i F_i$  de la fibre de Milnor  $F = F(f)$ ,  $i$  décrivant l'ensemble des sommets de  $T(f)$ , et une monodromie géométrique  $h$  qui laisse stables les  $F_i$ . D'après [DM3], §§1.4 à 1.6, les propriétés de cette décomposition sont les suivantes :  $F_i$  est une surface à bord dont le bord est la réunion des  $F_i \cap F_j$  pour  $j \in V(i)$ ; de plus,  $F_i \cap F_j$  est la réunion de  $m_{ij}$  cercles disjoints. Notons  $\tilde{F}_i$  la surface obtenue en privant  $F_i$  d'un petit col pour chaque cercle de bord, la restriction  $h_i$  de la monodromie  $h$  à  $\tilde{F}_i$  est d'ordre fini et admet la description précise suivante.

Chaque composante  $E_i$  du diviseur exceptionnel est une droite projective. On pose

$$\tilde{E}_i = E_i \setminus \bigcup_{j \in V(i)} B_{ij},$$

où  $B_{ij}$  est un petit disque ouvert de centre  $E_i \cap E_j$ , on note  $\delta_{ij}$  le bord de  $B_{ij}$  muni de l'orientation induite par celle de  $\tilde{E}_i$  et  $[\delta_{ij}]$  la classe de  $\delta_{ij}$  dans  $H_1(\tilde{E}_i)$ . On construit dans *loc. cit.* une application

$p_i : \check{F}_i \rightarrow \check{E}_i$  qui est un revêtement cyclique régulier d'ordre  $e_i$  associé à l'homomorphisme  $\rho_i : H_1(\check{E}_i, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z}$  défini par  $\rho_i([\delta_{ij}]) = \varepsilon_j$ . De plus,  $h_i$  est un générateur du groupe de Galois de  $p_i$ . On voit que le halo  $\Theta_i$  décrit complètement  $(\check{F}_i, h_i)$ . La description de  $h$  le long des cylindres qui joignent  $\check{F}_i$  à  $\check{F}_j$  sera donnée en 3.9.

3.4.2. Soit  $D_i$  la surface obtenue en recollant, pour tout  $j \in V(i)$ ,  $m_{ij}$  disques sur les composantes de bord de  $F_i$  au-dessus de  $\delta_{ij}$ . Le revêtement  $p_i$  s'étend en un revêtement cyclique ramifié  $D_i \rightarrow E_i$  d'ordre  $e_i$ , ramifié au-dessus des points  $E_i \cap E_j$  pour  $j \in V(i)$ . Cette description fait de  $D_i$  une courbe algébrique projective lisse. On peut donner une construction purement géométrique de  $D_i$ , voir Steenbrink [St], §2.1. Nous noterons encore  $h_i$  l'extension de  $h_i$  à  $D_i$ ,  $t$  l'endomorphisme induit par  $h_i$  et  $S_i$  la forme d'intersection sur  $H_1(D_i, \mathbb{Q})$ .

3.4.3. D'après [DM2], §2.14, la structure isométrique

$$(\mathrm{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t)$$

est isomorphe à la somme directe orthogonale des structures isométriques  $(H_1(D_i, \mathbb{Q}), S_i, t)$ . De plus, si  $v_i < 3$ , on a  $H_1(D_i, \mathbb{Q}) = 0$ ; on a donc l'isomorphisme suivant :

$$(3.4.3) \quad (\mathrm{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t) \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{R}} (H_1(D_i, \mathbb{Q}), S_i, t).$$

**3.5.** *Calcul de  $\Delta_{-1}$  (cf. 2.12, (i)).* — La description de  $D_i$  comme revêtement ramifié de  $\mathbb{CP}^1$  donne tout de suite le polynôme caractéristique de la monodromie sur  $H_1(D_i, \mathbb{Q})$  (voir aussi [DM3], §2.8) :

$$\Delta_i(t) = \frac{(t^{e_i} - 1)^{v_i - 2} (t^{r_i} - 1)^2}{\prod_{j \in V(i)} (t^{m_{ij}} - 1)}.$$

D'après (3.4.3), le polynôme caractéristique  $\Delta_{-1}$  de la monodromie sur  $\mathrm{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$  est :

$$\Delta_{-1}(t) = \prod_{i \in \mathcal{R}} \Delta_i(t).$$

**3.6.** *Calcul des  $d_m^1$  pour  $m > 2$  (cf. 2.12, (ii)).* — La description des  $D_i$  comme revêtements ramifiés permet de calculer les structures isométriques  $(H_1(D_i, \mathbb{Z}), S_i, t)$  et d'en déduire les invariants  $d_m^1$ .

3.6.1. On trouve dans [DM3], §1.17 la description d'une famille de  $(v_i - 2)$  générateurs  $g_i^k$ , où  $1 \leq k \leq v_i - 2$ , du  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(D_i, \mathbb{Q})$ . Pour les  $m > 2$  tels que  $\phi_m(t)$  divise  $\Lambda_i(t)$ , on a donc une famille de générateurs du  $\mathbb{K}_m$ -espace vectoriel  $\ker(\phi_m(t); H_1(D_i, \mathbb{Q}))$  :

$$g_{m,i}^k = \frac{\Lambda_i(t)}{\phi_m(t)} g_i^k, \quad 1 \leq k \leq v_i - 2.$$

La description des  $g_i^k$  (voir 3.6.2) nous permettra en 3.6.3 de calculer les séries de Laurent :

$$\mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_i(g_i^k, t^a g_i^\ell),$$

pour  $1 \leq k, \ell \leq v_i - 2$ . On vérifie immédiatement l'égalité suivante :

$$\mathbb{S}(g_{m,i}^k, g_{m,i}^\ell) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_i(g_{m,i}^k, t^a g_{m,i}^\ell) = \frac{\Lambda_i(u) \Lambda_i(u^{-1})}{\phi_m(u) \phi_m(u^{-1})} \mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell).$$

On a alors, d'après 2.2, et avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_{m,i}^\bullet(g_{m,i}^k, t^a g_{m,i}^\ell) &= \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_{m,i}^{\mathbb{K}_m}(P_{m,1}(t) g_{m,i}^k, t^a P_{m,1}(t) g_{m,i}^\ell) \\ &= \frac{\Lambda_i(u) \Lambda_i(u^{-1})}{\phi'_m(\lambda_m) \phi'_m(\lambda_m^{-1}) (u - \lambda_m) (u^{-1} - \lambda_m^{-1})} \mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell), \end{aligned}$$

et par suite  $S_{m,i}^\bullet(g_{m,i}^k, g_{m,i}^\ell)$  est égal au terme constant de cette série de Laurent. On notera

$$\sigma_{m,i}^{k,\ell} = \phi'_m(\lambda_m) \phi'_m(\lambda_m^{-1}) S_{m,i}^\bullet(g_{m,i}^k, g_{m,i}^\ell),$$

le terme constant de la série de Laurent

$$\frac{\Lambda_i(u) \Lambda_i(u^{-1})}{(u - \lambda_m) (u^{-1} - \lambda_m^{-1})} \mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell).$$

La forme bilinéaire  $S_i$  est non dégénérée, il en est de même de la forme  $S_{m,i}$  et de la forme antihermitienne  $S_{m,i}^\bullet$ . Par suite, si  $I$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, v_i - 2\}$ , le déterminant

$$d_{m,i}(I) = \det((\sigma_{m,i}^{k,\ell})_{(k,\ell) \in I^2})$$

est non nul si et seulement si la famille  $\{g_{m,i}^k\}_{k \in I}$  est libre. On trouve donc que la famille  $\{g_{m,i}^k\}_{k \in I_0}$  est une base de  $\ker(\phi_m(t); H_1(D_i, \mathbb{Q}))$  si  $I_0$  est de cardinal maximal parmi les  $I$  tels que  $d_{m,i}(I)$  soit non nul, et le déterminant  $d_{m,i}$  de  $S_{m,i}^\bullet$  est égal (dans  $\mathbb{K}_m^*/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}(\mathbb{K}_m^*)$ ) à  $d_{m,i}(I_0)$  pour un tel  $I_0$ . On trouve donc en utilisant 3.4.3 la proposition suivante :

PROPOSITION. — Le déterminant  $d_m^1$  de  $S_m^{\bullet 1}$  est donné par l'égalité :

$$d_m^1 = \prod_{i \in \mathcal{R}} d_{m,i}.$$

Remarque. — Si  $i$  est un point de rupture de valence 3, le  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(D_i, \mathbb{Q})$  est cyclique engendré par  $g_i^1$ , on a alors

$$d_{m,i} = \sigma_{m,i}^{1,1}$$

et l'expression de  $\mathbb{S}(g_i^1, g_i^1)$  donnée ci-dessous en 3.6.3 se simplifie également. Cette situation simple est la plus fréquente, car les points de rupture sont en général de valence 3. De façon précise, soient  $f_1, \dots, f_b$  les composantes irréductibles du germe  $f$ , et  $p_j$  le nombre de paires de Puiseux de  $f_j$ , le nombre de points de rupture de  $T(f)$  est majoré par  $p_1 + \dots + p_b + b - 1$  et le nombre de points de rupture de valence supérieure ou égale à 4 est majoré par  $(b - 1)$ .

3.6.2. La description de la famille génératrice du  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(D_i, \mathbb{Q})$  est la suivante. Pour  $j \in V(i)$ , on choisit  $\varepsilon_j$  tel que  $0 \leq \varepsilon_j < e_i$ . Soit  $*$  un point de base de  $E_i$ . Soit  $\gamma_{i,j}$  un 1-cycle basé en  $*$  homotope à  $\delta_{ij}$  et tel que pour tout  $j$  et  $k$  appartenant à  $V(i)$  avec  $j \neq k$ , on ait  $\gamma_{i,j} \cap \gamma_{i,k} = *$ . On réindice ces différents cycles par  $i, k$  avec  $1 \leq k \leq v_i$  en demandant par exemple que la suite des  $e_k$  soit décroissante. On choisit un point 0 parmi les antécédents de  $*$  par  $p_i$  et on identifie  $p_i^{-1}(*)$  avec  $\mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z}$ , de façon à avoir  $h_i^\ell(0) \equiv \ell \pmod{e_i}$ . On note  $\hat{\gamma}_{i,j}$  le relevé de  $\gamma_{i,j}$  qui commence en 0 et finit donc en  $\varepsilon_j$ .

On définit successivement :

$$d_{i,1} = \text{pgcd}(e_i, \varepsilon_1),$$

$$d_{i,j} = \text{pgcd}(d_{i,j-1}, \varepsilon_j) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq v_i - 1.$$

Il existe des polynômes  $\alpha_j(t)$  et  $\beta_j(t)$  de  $\mathbb{Z}[t]$  vérifiant :

$$t^{d_{i,1}} - 1 = \alpha_1(t)(t^{\varepsilon_1} - 1) + \beta_1(t)(t^{e_i} - 1),$$

$$t^{d_{i,j}} - 1 = \alpha_j(t)(t^{\varepsilon_j} - 1) + \beta_j(t)(t^{d_{i,j-1}} - 1) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq v_i - 1.$$

On définit les cycles  $g_i^1, \dots, g_i^{v_i-2}$  par les égalités suivantes :

$$g_i^1 = \alpha_1(t) \frac{t^{\varepsilon_2} - 1}{t^{d_{i,2}} - 1} \hat{\gamma}_{i,1} - \frac{t^{d_{i,1}} - 1}{t^{d_{i,2}} - 1} \hat{\gamma}_{i,2}$$

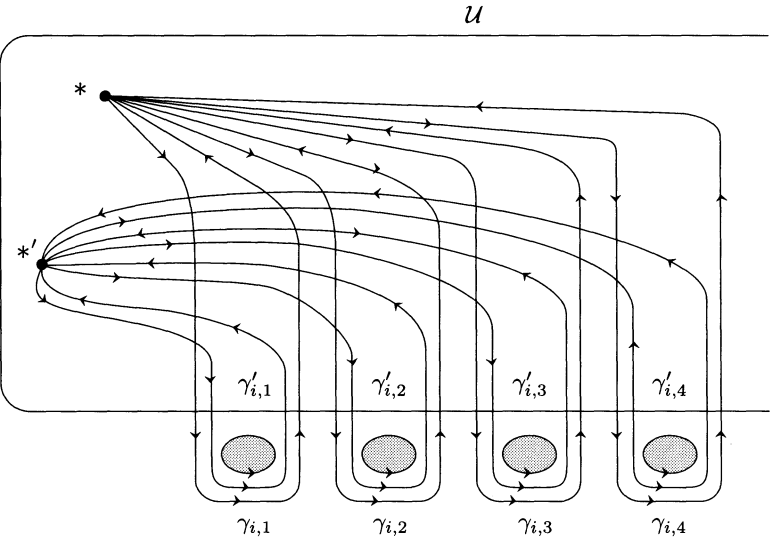
et pour  $2 \leq j \leq v_i - 2$ ,

$$g_i^j = \frac{t^{\varepsilon_{j+1}} - 1}{t^{d_{i,j+1}} - 1} \left( \alpha_j(t) \hat{\gamma}_{i,j} + \sum_{k=1}^{j-1} \beta_j(t) \cdots \beta_{k+1}(t) \alpha_k(t) \hat{\gamma}_{i,k} \right) - \frac{t^{d_{i,j}} - 1}{t^{d_{i,j+1}} - 1} \hat{\gamma}_{i,j+1}.$$

D'après [DM3], §1.17, la famille  $\{g_i^1, \dots, g_i^{v_i-2}\}$  engendre  $H_1(D_i, \mathbb{Z})$ . On notera  $p_{i,j}^k(t)$  les polynômes de  $\mathbb{Z}[t]$  tels que

$$g_i^j = \sum_{k=1}^{j+1} p_{i,j}^k(t) \hat{\gamma}_{i,k}.$$

3.6.3. Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $*$  tel que la restriction de  $p_i$  au-dessus de  $\mathcal{U}$  soit triviale. Soit  $*'$  un autre point de base dans  $\mathcal{U}$ , et  $0'$  le point de  $p_i^{-1}(*')$  appartenant à la composante connexe de  $p_i^{-1}(\mathcal{U})$  contenant 0. Soient  $\gamma'_{i,j}$  les 1-cycles construits de la même façon que les  $\gamma_{i,j}$ , avec  $*'$  pour point de base, et tels que les intersections entre les  $\gamma_{i,j}$  et les  $\gamma'_{i,k}$  soient comme indiqué dans la figure ci-dessous. On demande aussi que les  $\gamma_{i,j}$  et les  $\gamma'_{i,k}$  ne s'intersectent pas en dehors de  $\mathcal{U}$ .



Nous allons maintenant calculer les séries de Laurent  $\mathbb{S}(g_i^j, g_i^k)$  pour  $1 \leq j, k \leq v_i - 2$ . Les points  $*$ ,  $*'$  et les points d'intersection entre les  $\gamma_{i,j}$  et  $\gamma'_{i,k}$  devant rester dans  $\mathcal{U}$ , les conditions données ne définissent donc pas

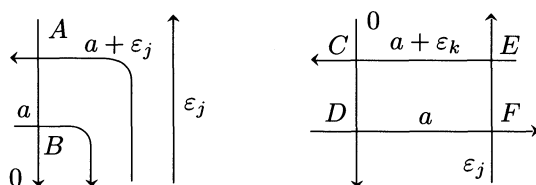
la figure de façon unique à homotopie près. Cependant les séries de Laurent ne dépendent pas du tracé choisi pour les  $\gamma_{i,j}$  et  $\gamma'_{i,k}$ . D'autre part, dès que  $v_i \geq 4$ , la disposition des points  $E_i \cap E_j$  pour  $j \in V(i)$ , dans  $E_i$  n'est pas nécessairement celle indiquée sur la figure qu'on utilise pour le calcul : les séries de Laurent dépendent effectivement de cette disposition, mais le type topologique du germe  $f$ , et donc l'invariant  $d_{m,i}$ , n'en dépendent pas.

Déterminons d'abord le nombre d'intersection entre les relevés  $\hat{\gamma}_{i,j}$  et  $t^a \hat{\gamma}'_{i,k}$  :

(i) si  $j > k$ , les relevés  $\hat{\gamma}_{i,j}$  et  $t^a \hat{\gamma}'_{i,k}$  ne s'intersectent pas ;

(ii) si  $j = k$ , le relevé  $\hat{\gamma}_{i,j}$  rencontre  $t^a \hat{\gamma}'_{i,j}$  au-dessus de deux points  $A$  et  $B$  (voir figure). Comme  $\hat{\gamma}_{i,j}$  (resp.  $t^a \hat{\gamma}'_{i,j}$ ) est en 0 (resp.  $a + \varepsilon_j$ ) au-dessus de  $A$  et en 0 (resp.  $a$ ) au-dessus de  $B$ , la contribution au nombre d'intersection  $S_i(g_i^j, t^a g_i^k)$  de  $(\hat{\gamma}_{i,j}, t^a \hat{\gamma}'_{i,j})$  est donc  $-1$  (resp.  $+1$ ) au-dessus de  $A$  (resp.  $B$ ) si  $a \equiv -\varepsilon_j \pmod{e_i}$  (resp.  $a \equiv 0 \pmod{e_i}$ ).

(iii) si  $j < k$ , le relevé  $\hat{\gamma}_{i,j}$  rencontre  $t^a \hat{\gamma}'_{i,k}$  au-dessus de quatre points  $C, D, E$ , et  $F$  (voir figure). La contribution de  $(\hat{\gamma}_{i,j}, t^a \hat{\gamma}'_{i,k})$  au nombre d'intersection  $S_i(g_i^j, t^a g_i^k)$  est  $-1$  au-dessus de  $C$  (resp.  $F$ ) si  $a \equiv -\varepsilon_k \pmod{e_i}$  (resp.  $a \equiv \varepsilon_j \pmod{e_i}$ ), et  $+1$  au-dessus de  $D$  (resp.  $E$ ) si  $a \equiv 0 \pmod{e_i}$  (resp.  $a \equiv \varepsilon_j - \varepsilon_k \pmod{e_i}$ ).



Un calcul simple donne le résultat suivant.

PROPOSITION. — La forme d'intersection  $S_i$  est déterminée par les séries de Laurent suivantes pour  $1 \leq j, k \leq v_i - 2$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(g_i^j, g_i^k) &= \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_i(g_i^j, t^a g_i^k) \\ &= \left[ \sum_{\ell=1}^{j+1} p_{i,j}^\ell(u) \left[ \sum_{m=\ell+1}^{k+1} p_{i,k}^m(u^{-1}) (1 - u^{-\varepsilon_m} + u^{\varepsilon_\ell - \varepsilon_m} - u^{\varepsilon_\ell}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^{\inf\{j+1, k+1\}} p_{i,j}^\ell(u) p_{i,k}^\ell(u^{-1}) (1 - u^{-\varepsilon_\ell}) \right] \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^{ae_i}. \end{aligned}$$

**3.7. Calcul des signatures équivariantes  $\sigma_\alpha(S^1)$**  (cf. 2.12, (iii)). — Notons  $\sigma_\alpha(S_i)$  la signature de la restriction de la forme  $\mathbb{C}$ -hermitienne  $iS_i^{\mathbb{C}}$  au sous-espace propre pour la valeur propre  $\alpha$ , où  $S_i^{\mathbb{C}}$  est l'extension  $\mathbb{C}$ -antihermitienne de  $S_i$  à  $H_1(D_i, \mathbb{C})$ . D'après 3.4.3, la signature équivariante  $\sigma_\alpha(S^1)$  est la somme des  $\sigma_\alpha(S_i)$ ,  $i \in \mathcal{R}$ . L'application de la théorie de Hodge à  $H^1(D_i, \mathbb{C})$  va nous permettre de calculer ces signatures de façon très simple (comparer avec le calcul de  $d_{m,i}$ ).

On note :

- $\{x\}$  la partie fractionnaire de  $x \in \mathbb{R}$ , i.e.  $\{x\} \in [0, 1[$  et  $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$ ,
- $\langle\langle x \rangle\rangle = \frac{1}{2} - \{x\}$  si  $x \notin \mathbb{Z}$  et  $\langle\langle x \rangle\rangle = 0$  si  $x \in \mathbb{Z}$ .

Si  $i$  est un sommet de l'arbre  $T(f)$ , on pose :

$$d_i(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ divise } e_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle que dans l'expression  $e(k/m) = \exp(2\pi i k/m)$ , nous supposons que  $k$  et  $m$  sont des entiers premiers entre eux tels que  $0 < k < m$ . Avec ces notations, on a :

**PROPOSITION.** — *Pour  $m > 2$ , les signatures équivariantes de  $S^1$  sont données par :*

$$\sigma_{e(k/m)}(S^1) = 2 \sum_{i \in \mathcal{R}} d_i(m) \sum_{j \in V(i)} \left\langle\left\langle \frac{k}{m} e_j \right\rangle\right\rangle.$$

**Démonstration.** — Ce résultat est une reformulation du théorème [Ne], §1.9, démontré par Neumann à l'aide des signatures de Novikov. Posons :

$$M_{\ell i} = \sum_{i \in V(i)} \left\{ \frac{\ell e_j}{e_i} \right\}.$$

La description de la courbe algébrique  $D_i$  donnée en 3.4.2 conduit à l'isomorphisme suivant (voir Steenbrink [St], §3.14) :

$$p_{i*} \mathcal{O}_{D_i} \cong \bigoplus_{l=0}^{e_i-1} \mathcal{O}_{E_i}(-M_{\ell i}),$$

et l'action de la monodromie sur  $\mathcal{O}_{E_i}(-M_{\ell i})$  est la multiplication par  $\exp(2\pi i \ell / e_i)$ . De plus, si  $\omega$  (resp.  $\bar{\omega}$ ) est une forme holomorphe (resp.

antiholomorphe) non nulle sur  $D_i$ , un calcul en coordonnées locales montre que  $iS^C(\omega, \omega) > 0$  (resp.  $iS^C(\bar{\omega}, \bar{\omega}) < 0$ ) ; par suite :

$$\sigma_\alpha(S_i) = -\dim(H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}))_\alpha + \dim(H^0(D_i, \Omega_{D_i}^1))_\alpha,$$

où l'on note  $V_\alpha$  le sous-espace propre de  $V$  pour la valeur propre  $\alpha$ . On a donc aussi :

$$\sigma_\alpha(S_i) = \dim(H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}))_{\bar{\alpha}} - \dim(H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}))_\alpha,$$

et en utilisant [EGAI], §2.1 :

$$\begin{aligned} & \sigma_{\exp(2\pi i \ell / e_i)}(S_i) \\ &= \dim H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(-M_{e_i-\ell, i})) - \dim H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(-M_{\ell, i})), \\ & \sigma_{\exp(2\pi i \ell / e_i)}(S_i) \\ &= M_{e_i-\ell, i} - M_{\ell, i} = \sum_{j \in V(i)} \left( \left\{ \frac{-\ell e_j}{e_i} \right\} - \left\{ \frac{\ell e_j}{e_i} \right\} \right) = 2 \sum_{j \in V(i)} \left\langle \left\langle \frac{\ell e_j}{e_i} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

En sommant sur  $i$ , on trouve le résultat indiqué.

**3.8. Calcul de  $\Delta_0$  (cf. 2.12, (iv)).** — Soit  $G$  le graphe, construit en [DM1], §5.4, dont les sommets représentent les composantes connexes de chaque  $F_i$  et les arêtes représentent les composantes connexes de  $F_i \cap F_j$ . Pour chaque sommet  $i$  de l'arbre de la résolution, on a  $r_i$  sommets dans  $G$  et chaque composante de bord commune à une composante connexe de  $F_i$  et une composante connexe de  $F_j$  (pour  $j \neq i$ ) est représentée par une arête reliant les deux sommets correspondants.

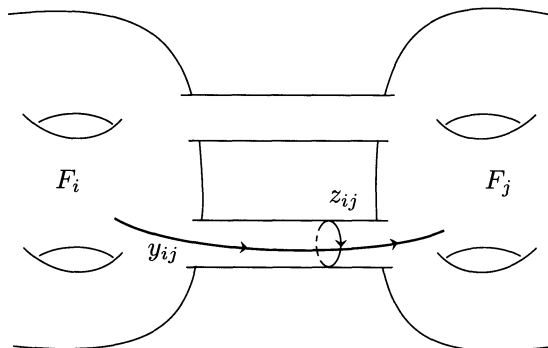
On note encore  $h$  l'action induite sur  $G$  par la monodromie sur  $F$  et  $t$  l'isomorphisme induit par  $h$  sur  $H_1(G, \mathbb{Q})$ . Par construction,  $H_1(G, \mathbb{Q})$  est isomorphe à  $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant à la décomposition de  $G$  en une union de voisinages des arêtes permet de calculer le polynôme caractéristique de la monodromie sur  $H_1(G, \mathbb{Q})$ , qui est égal au polynôme caractéristique  $\Delta_0(t)$  de l'action de la monodromie sur  $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$  (voir aussi [DM2], §2.14), on trouve :

$$\Delta_0(t) = (t-1) \frac{\prod_{i < j; j \in V(i)} (t^{m_{ij}} - 1)}{\prod_i (t^{r_i} - 1)}.$$

**3.9. Calcul des  $d_m^2$  pour  $m > 2$  (cf. 2.12, (vi)).**

3.9.1. Nous allons maintenant décrire l'action de la monodromie  $h$  le long des cylindres qui joignent  $\tilde{F}_i$  à  $\tilde{F}_j$ .

Soient  $i$  et  $j$  deux sommets voisins de l'arbre de résolution  $T(f)$ ,  $z_{ij}$  une composante connexe orientée de  $F_i \cap F_j$  et  $y_{ij}$  une 1-chaîne orientée dont les extrémités appartiennent respectivement à  $F_i$  et  $F_j$  et intersectant  $(F_i \cap F_j)$  en un point de  $z_{ij}$ . On a alors :



PROPOSITION (Neumann [Ne], §2). — On a l'égalité :

$$(h^e - \text{Id})y_{ij} = -S(y_{ij}, z_{ij}) \frac{em_{ij}}{e_i e_j} z_{ij}.$$

Bien que cette formule ne donne que l'action de  $h^e$ , elle permet de calculer les invariants qui restent à déterminer.

3.9.2. La formule de Neumann permet de calculer  $(t^e - 1)y$  pour tout  $y$  dans  $H_1(F, \mathbb{Q})$  en considérant l'intersection  $y_{ij}$  de  $y$  avec chacun des cylindres de recollement. On dispose aussi d'une formule close appelée *formule du twist* pour laquelle nous renvoyons le lecteur à [DM3], th. 2.21 et dont les termes se calculent à partir de l'arbre  $T(f)$  et en fonction du tracé de  $y$  dans le graphe  $G$ . Vu la définition de la filtration  $W$ ,  $(t^e - 1)y$  ne dépend que de la classe de  $y$  dans  $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ ; de plus,  $(t^e - 1)y$  est de la forme  $(t - 1)x$  où  $x$  est un élément bien défini de  $W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q})/\ker(t - 1)$ . Par dualité de Poincaré, ce module est isomorphe au dual  $(\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))^*$  de  $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ . En procédant comme dans [DM1], §5.10 et en utilisant l'interprétation géométrique de la filtration  $W$  (voir [DM1], §2.1) :

$$W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q}) = \text{im} \left\{ H_1 \left( \bigcup_{i < j} (F_i \cap F_j), \mathbb{Q} \right) \longrightarrow H_1(F, \mathbb{Q}) \right\},$$

on trouve une matrice de présentation  $W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q})/\ker(t - 1)$ .

Les lignes de la matrice sont indexées par les arêtes de  $T(f)$ . Les colonnes de la matrice sont indexées par les arêtes et les sommets propres de  $T(f)$  (on ne considère ici que les sommets propres de l'arbre, sans

tenir compte des extrémités des flèches). Dans la colonne correspondant à l'arête entre les sommets  $i$  et  $j$  le seul terme non nul est sur la ligne correspondant à l'arête entre  $i$  et  $j$  et a pour valeur  $(t^{m_{ij}} - 1)$ . Dans la colonne correspondant à un sommet  $i$ , les seuls termes non nuls sont les termes sur les lignes correspondants aux arêtes entre le sommet  $i$  et les sommets  $j \in V(i)$ , et ont pour valeur  $(t^{m_{ij}} - 1)/(t^{r_i} - 1)$ .

Après réduction de cette matrice, on trouve de nouveaux générateurs  $x_a$  et une décomposition en somme directe :

$$W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q})/\ker(t-1) \cong (\mathrm{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))^* = \bigoplus_a \mathbb{Q}[t]/\Lambda_a(t) \cdot x_a.$$

Soit  $A_m$  l'ensemble des  $a$  tels que  $\phi_m(t)$  divise  $\Lambda_a(t)$ . Pour  $a$  dans  $A_m$ , on pose

$$x_a^m = (\Lambda_a(t)/\phi_m(t))x_a$$

et on a donc :

$$\ker(\phi_m(t); (\mathrm{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))^*) = \bigoplus_{a \in A_m} \mathbb{Q}[t]/\phi_m(t) \cdot x_a^m.$$

On prend donc  $\{x_a^m, tx_a^m, \dots, t^{\varphi(m)-1}x_a^m\}_{a \in A_m}$  pour base de ce  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel et la base duale pour base de  $\ker(\phi_m(t); \mathrm{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ . On note  $y_a^m$  le cycle dual de  $x_a^m$ . Les cycles  $x_a^m$  et  $y_a^m$  sont connus explicitement en fonction du graphe  $G$ , on peut donc calculer les nombres d'intersection  $S(t^c x_a^m, t^d y_b^m)$  pour  $a$  et  $b$  dans  $A_m$  et  $c$  et  $d$  dans  $\mathbb{Z}$ .

La formule du twist permet de calculer les polynômes  $Tw_m^{a,b}(t)$  tels que :

$$(t^e - 1)y_a^m = \sum_{b \in A_m} Tw_m^{a,b}(t)x_b^m.$$

Ceci permet de calculer les séries de Laurent :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(y_a^m, y_b^m) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k S_m((t^e - 1)y_a^m, t^k y_b^m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k \sum_{c \in A_m} S_m(Tw_m^{a,c}(t)x_c^m, t^k y_b^m), \end{aligned}$$

pour  $a$  et  $b$  dans  $A_m$ .

En reprenant les notations de 3.6, on en déduit la série de Laurent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k S_m^{2\bullet}(y_a^m, t^k y_b^m) = P_{m,1}(u) \overline{P_{m,1}(u^{-1})} \mathbb{S}(y_a^m, y_b^m) \quad (\in \mathbb{K}_m[u, u^{-1}]),$$

où  $\overline{P_{m,1}}$  est le polynôme déduit de  $P_{m,1}$  par l'involution de  $\mathbb{K}_m$ , et  $S_m^{2\bullet}(y_a^m, y_b^m) (\in \mathbb{L}_m)$  est égal au terme constant de cette série.

PROPOSITION. — Le déterminant  $d_m^2$  de  $S_m^2$  est l'élément suivant de  $L_m^*/N_{\mathbb{K}_m/L_m}(\mathbb{K}_m^*)$  :

$$d_m^2 = \det(S_m^{2\bullet}(y_a^m, y_b^m))_{a,b \in A_m}.$$

**3.10.** Calcul des signatures équivariantes  $\sigma_\alpha(S^2)$  pour chaque valeur propre  $\alpha$ ,  $\alpha \neq -1$ , racine de  $\Delta_0$  (cf. 2.12, (vii)). — Avec les notations de 3.9.1, la formule de Neumann donne :

$$S((h^e - \text{Id})y_{ij}, y_{ij}) = [S(y_{ij}, z_{ij})]^2 (em_{ij}/e_i e_j) > 0.$$

Il s'ensuit que  $S^2(y, y)$  est strictement positif pour tout  $y$  non nul dans  $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ . La forme quadratique associée à  $S^2$  est donc définie positive et pour tout  $\alpha$ , la signature  $\sigma_\alpha(S^2)$  est égale à l'ordre de multiplicité de  $\alpha$  comme racine de  $\Delta_0$ .

**3.11.** Détermination de  $S_2^2$  à isomorphisme près (cf. 2.12, (v)). — En utilisant 3.9, on peut trouver une matrice de la forme quadratique définie positive associée à  $S_2^2$ . On en déduit comme en 3.2.2 un ensemble complet d'invariants qui classe  $S_2^2$  à isomorphisme près.

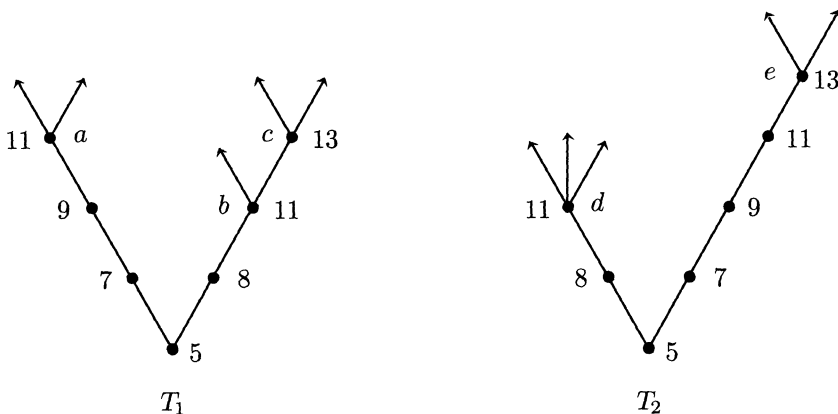
#### 4. Exemples et applications.

4.1. Considérons les germes de courbe plane  $g_1$  et  $g_2$  suivants :

$$g_1(x, y) = (y + x)(y + x + x^4)(y + 2x)(y + 2x + x^3)(y + 2x + x^4),$$

$$g_2(x, y) = (y + x)(y + x + x^3)(y + x + 2x^3)(y + 2x)(y + 2x + x^5),$$

dont les arbres de désingularisation  $T_1$  et  $T_2$  sont :



PROPOSITION. — Les formes de Seifert rationnelles  $A_1$  et  $A_2$  associées aux germes de courbe plane  $g_1$  et  $g_2$  sont isomorphes, et donc aussi Witt-équivalentes. Les structures isométriques sur  $H_1(F(g_1), \mathbb{Z})/\ker(t-1)$  et  $H_1(F(g_2), \mathbb{Z})/\ker(t-1)$  sont isomorphes et la monodromie est d'ordre fini. Par contre, les formes de Seifert entières  $A_{\mathbb{Z}}(g_1)$  et  $A_{\mathbb{Z}}(g_2)$  ne sont pas isomorphes.

Démonstration. — Les arbres de désingularisation montrent que

$$\mathrm{gr}_0^W H_1(F(g_i), \mathbb{Q}) = \{0\};$$

la monodromie est donc d'ordre fini. La démonstration comporte les deux points suivants.

(i) En prenant pour base quatre des cinq composantes de bord, on trouve pour matrices des restrictions  $A_i^0$  de  $A_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) à  $\mathrm{Ker}(t-1)$  :

$$B_1 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique entière  $A_{\mathbb{Z}}^0(g_i)$  est impaire si  $i = 1$ , paire si  $i = 2$ ;  $A_{\mathbb{Z}}(g_1)$  et  $A_{\mathbb{Z}}(g_2)$  ne sont donc pas isomorphes. On peut mettre  $-A_1^0$  (resp.  $-A_2^0$ ) sous forme diagonale, avec pour diagonale  $(1, 3 \cdot 11, 3 \cdot 5 \cdot 11, 5 \cdot 13)$  (resp.  $(2, 2 \cdot 5 \cdot 11, 2 \cdot 5 \cdot 19, 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19)$ ); on en déduit que les formes quadratiques rationnelles  $A_i^0$  pour  $i = 1, 2$  ont pour invariants :

$$\det A_i^0 = 13, \quad \mathrm{sign}(-A_i^0) = 4,$$

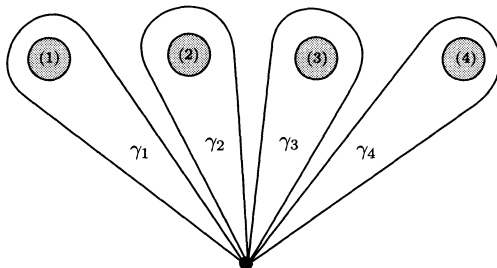
$$\mathcal{H}_{11}(-A_i^0) = \mathcal{H}_{13}(-A_i^0) = -1, \quad \mathcal{H}_p(-A_i^0) = +1,$$

si  $p$  est un nombre premier distinct de 2, 11 et 13; par suite,  $A_1^0$  et  $A_2^0$  sont isomorphes.

(ii) Étudions maintenant les points de rupture de  $T_1$  et  $T_2$  : les halos  $\Theta(c)$  et  $\Theta(e)$  sont identiques, donc les structures isométriques  $(H_1(D_c, \mathbb{Z}), S_c, t)$  et  $(H_1(D_e, \mathbb{Z}), S_e, t)$  sont isomorphes et les invariants (déterminant  $d_{13}^1$  et signatures équivariantes) de  $A_1$  et  $A_2$  associés à  $\phi_{13}$  sont égaux. Nous allons démontrer que la structure isométrique  $(H_1(D_d, \mathbb{Z}), S_d, t)$  est isomorphe à la somme directe orthogonale des structures isométriques  $(H_1(D_a, \mathbb{Z}), S_a, t)$  et  $(H_1(D_b, \mathbb{Z}), S_b, t)$ . Il s'ensuit que les invariants (déterminant  $d_{11}^1$  et

signatures équivariantes) de  $A_1$  et  $A_2$  associés à  $\phi_{11}$  sont égaux et que les formes de Seifert rationnelles  $A_1$  et  $A_2$  sont isomorphes.

La surface close  $D_d$  associée à l'arbre  $T_2$  est un revêtement ramifié de  $\mathbb{CP}^1$  de degré 11, ramifié au-dessus de quatre points. Avec les notations utilisées plus haut, on peut numéroter les points de ramification dans  $\mathbb{CP}^1$  comme indiqué, de telle sorte que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10$  et  $\varepsilon_4 = 3$ .



Considérons les cycles :

$$g_1 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2, \quad g_2 = (t + t^2 + t^3)\hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4, \quad g_3 = \hat{\gamma}_3 - \hat{\gamma}_1.$$

D'après [DM3], §1.19, les cycles  $g_1$  et  $g_3$  engendrent  $H_1(D_d, \mathbb{Z})$ . La relation

$$t^3 \hat{\gamma}_1 + t^2 \hat{\gamma}_2 + t \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4 = 0$$

montre que  $g_2 = t^2 g_1 + (t^2 + t^3) g_3$ , donc  $g_1$  et  $g_2$  engendrent  $H_1(D_d, \mathbb{Z})$  car  $(t^2 + t^3)$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_{11}$ . On a donc :

$$H_1(D_d, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_{11} \cdot g_1 \oplus^\perp \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_{11} \cdot g_2.$$

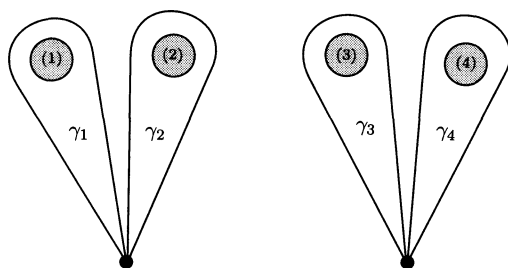
En effet, d'après la figure, pour tout  $P_1(t)$  et  $P_2(t)$  dans  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , on a :

$$S_d(P_1(t)g_1, P_2(t)g_2) = 0.$$

Cette somme directe est donc orthogonale pour  $S_d$ .

Les surfaces closes  $D_a$  et  $D_b$  associées à l'arbre  $T_1$  sont des revêtements ramifiés de  $\mathbb{CP}^1$  de degré 11, ramifiés au-dessus de trois points (voir la figure page suivante où l'on représente les deux copies de  $\mathbb{CP}^1$ .)

On a  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10$  et  $\varepsilon_4 = 3$ . On peut prendre  $g'_1 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2$  (resp.  $g'_2 = (t + t^2 + t^3)\hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4$ ) pour générateur de  $H_1(D_a, \mathbb{Z})$  (resp. de  $H_1(D_b, \mathbb{Z})$ ), on trouve donc que les structures isométriques  $(H_1(D_d, \mathbb{Z}), S_d, t)$  et  $(H_1(D_a, \mathbb{Z}), S_a, t) \oplus^\perp (H_1(D_b, \mathbb{Z}), S_b, t)$  sont isomorphes, d'où la proposition.



**4.2. Nœuds algébriques cobordants.** — Considérons les germes de fonction holomorphe à singularité isolée suivants, où  $g_1$  et  $g_2$  sont les germes considérés ci-dessus et  $n, p, q$  sont des entiers supérieurs ou égaux à 3 :

$$f_{p,q,i}(z_0, \dots, z_n) = g_i(z_0, z_1) + z_2^p + z_3^q + \sum_{j=4}^n z_j^2.$$

**THÉOREME.** — Soit  $K_{p,q,i}$  l'entrelacs algébrique du germe  $f_{p,q,i}$  ; supposons que  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers distincts supérieurs ou égaux à 17 ; alors les nœuds algébriques  $K_{p,q,1}$  et  $K_{p,q,2}$  sont cobordants et non isotopes. De plus, la monodromie associée est d'ordre fini.

**Démonstration.** — Notons  $A_{p,q}$  la forme de Seifert du germe  $z_2^p + z_3^q$ , on a alors, d'après K. Sakamoto [Sa],

$$A(f_{p,q,i}) = (-1)^{n+1} A(g_i) \otimes A_{p,q}.$$

Utilisant [DM2], §§1.4 à 1.7 et l'hypothèse sur  $p$  et  $q$ , on trouve que les formes de Seifert  $A(f_{p,q,1})$  et  $A(f_{p,q,2})$  sont Witt-équivalentes et que les nœuds algébriques  $K(f_{p,q,1})$  et  $K(f_{p,q,2})$  sont des nœuds sphériques cobordants. La monodromie associée à  $g_i$  est d'ordre fini, il en est donc de même pour  $f_{p,q,i}$ .

Il reste à démontrer que ces nœuds ne sont pas isotopes, en démontrant que les formes de Seifert ne sont pas isomorphes. Le point de départ est le résultat obtenu en 4.1 :  $A_{\mathbb{Z}}(g_1)$  et  $A_{\mathbb{Z}}(g_2)$  ne sont pas isomorphes. La forme de Seifert du germe  $z \mapsto z^p$  admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base  $\{\varpi, t\varpi, \dots, t^{p-2}\varpi\}$  où l'on note  $\varpi$  un générateur de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_p(t)$ . On note de même  $\chi$  un générateur de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_q(t)$ ,  $\delta_n$  un générateur de  $(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t+1))^{\otimes(n-3)}$  et  $M_{n,p,q}$  le module de monodromie entière associé au germe

$$z_2^p + z_3^q + \sum_{j=4}^n z_j^2.$$

En notant  $c_1$  le premier élément dans la base de  $\text{Ker}((t-1); H_1(F(g_1), \mathbb{Z}))$  utilisée en 4.1, on a :

$$A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,1})(c_1 \otimes \varpi \otimes \chi \otimes \delta_n, c_1 \otimes \varpi \otimes \chi \otimes \delta_n) = (-1)^{n-1} 7.$$

On voit donc que la fonction

$$\begin{aligned} \text{Ker}((t-1); H_1(F(g_1), \mathbb{Z})) \otimes M_{n,p,q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ x &\longmapsto A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,1})(x, x), \end{aligned}$$

peut prendre des valeurs impaires. Au contraire, la fonction

$$\begin{aligned} \text{Ker}((t-1); H_1(F(g_2), \mathbb{Z})) \otimes M_{n,p,q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ x &\longmapsto A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,2})(x, x), \end{aligned}$$

ne prend que des valeurs paires puisque la forme quadratique  $A_{\mathbb{Z}}^0(g_2)$  est paire. Il s'ensuit que  $A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,1})$  et  $A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,2})$  ne sont pas isomorphes et que les nœuds  $K(f_{p,q,1})$  et  $K(f_{p,q,2})$  ne sont pas isotopes.

**4.3.** — Nous dirons qu'un germe de courbe plane  $g$  a un *arbre de désingularisation symétrique* si  $g$  est le produit de deux germes  $g_1$  et  $g_2$  qui ont le même type topologique et dont les cônes tangents sont transverses et réduits à une seule droite.

**PROPOSITION.** — *Si le germe de courbe plane  $g$  a un arbre symétrique, la classe d'isomorphisme de  $A^0(g)$  et les signatures équivariantes déterminent la forme de Seifert  $A(g)$  à Witt-équivalence près. En particulier, les invariants  $d_m^1$  de  $A(g)$  sont donnés par la formule :*

$$d_m^1 = (-1)^{\sigma_{e(k/m)}(S^1)/2}.$$

**Démonstration.** — Notons  $r = r(m)$  le plus grand entier tel que  $\phi_m^{2r}$  divise  $\Delta_{-1}$  (remarque :  $\Delta_{-1}$  est un carré). D'après l'hypothèse de symétrie, la forme hermitienne  $S_m^{\bullet 1}$  admet dans une base bien choisie une matrice diagonale de la forme (où  $\ell_1, \dots, \ell_{r(m)} \in \mathbb{L}_m$ ) :

$$\begin{aligned} \text{Diag}((\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_1, \dots, (\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_{r(m)}, \\ (\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_1, \dots, (\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_{r(m)}). \end{aligned}$$

Mais  $(\lambda_m - \lambda_m^{-1})^2 = -1$  dans  $\mathbb{K}_m/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}\mathbb{K}_m^*$ , donc  $d_m^1 = (-1)^{r(m)}$ . D'autre part, on voit facilement, en considérant l'arbre  $T(g)$ , que  $\frac{1}{2}\sigma_{e(k/m)}(S^1)$  a la même parité que  $r(m)$ .

*Remarque.* — La forme de Seifert  $A$  est déterminée à Witt-équivalence près par une liste d'invariants beaucoup plus courte que la liste d'invariants qui détermine  $A$  à isomorphisme près, tout particulièrement si le germe a un arbre symétrique. On peut donc conjecturer qu'il existe des germes de courbe plane  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  dont les formes de Seifert sont Witt-équivalentes et tels que  $\nu_0(\Phi_1) \neq \nu_0(\Phi_2)$ , où  $\nu_0$  désigne la multiplicité du germe en 0. Considérons les germes

$$f_i(z_0, \dots, z_n) = \Phi_i(z_0, z_1) + z_2^{p_2} + \dots + z_n^{p_n},$$

où  $p_2, \dots, p_n$  sont des nombres premiers distincts assez grands,  $i = 1$  ou  $2$  et  $n \geq 3$ . On a donc  $\nu_0(f_i) = \nu_0(\Phi_i)$  et, en suivant 4.2, on est conduit à poser la question suivante, variante «à cobordisme près» de la conjecture de Zariski.

*Question.* — Existe-t-il des germes de fonction holomorphe à singularité isolée  $f_1, f_2 : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  dont les multiplicités  $\nu_0(f_1)$  et  $\nu_0(f_2)$  sont distinctes et dont les entrelacs algébriques  $K(f_1)$  et  $K(f_2)$  sont des noeuds (sphériques) cobordants?

*Remerciements.* — Le second auteur remercie le Professeur C.T.C. Wall des discussions utiles sur le sujet de ce travail, ainsi que le Département de Mathématiques de l'Université de Liverpool pour son accueil pendant l'année 1992-93. Le premier auteur remercie R. Kaenders pour ses remarques sur la première version de cet article.

## BIBLIOGRAPHIE

- [C] A. CHENCINER, Courbes algébriques planes, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, 1978.
- [DM1] P. DU BOIS, F. MICHEL, Filtration par le poids et monodromie entière, Bull. Soc. Math. de France, 120 (1992), 129-167.
- [DM2] P. DU BOIS, F. MICHEL, Cobordism of algebraic knots via Seifert forms, Invent. Math., 111 (1993), 151-169.
- [DM3] P. DU BOIS, F. MICHEL, The integral Seifert form does not determine the topology of plane curves, J. Alg. Geometry, 3 (1994), 1-38.
- [DS] M. VAN DOORN, J. STEENBRINK, A supplement to monodromy theorem, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 59 (1989), 225-233.

- [Du] A. DURFEE, Fibred knots and algebraic singularities, *Topology*, 13 (1974), 47–59.
- [EGAI] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique III*, Publ. Math. IHES, 11 (1961).
- [J] N. JACOBSON, A Note on Hermitian Forms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (1940), 264–268.
- [Ka] R. KAENDERS, The Seifert Form of a Plane Curve Singularity determines its Intersection Multiplicities, à paraître dans *Indag. Math.*.
- [Ke] M. KERVAIRE, Knot cobordism in codimension two Manifolds Amst. 1970, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, t. 197 (1971), 83–105.
- [La] W. LANDHERR, Äquivalenz Hermitescher Formen über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.*, 11 (1935), 245–248.
- [Le] J. LEVINE, Knot cobordism groups in codimension two, *Comment. Math. Helv.*, 44 (1969), 229–244.
- [Mil1] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Annals Math. Studies* 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [Mil2] J. MILNOR, On isometries of inner product spaces, *Invent. Math.*, 8 (1969), 83–97.
- [MiH] J. MILNOR, D. HUSEMOLLER, *Symmetric bilinear forms*, Springer-Verlag, 1973.
- [Ne] W.D. NEUMANN, Invariants of plane curves singularities, *Nœuds, tresses et sing.*, Monog. de l'Enseignement. Math., Univ. de Genève, 1983.
- [Sa] K. SAKAMOTO, The Seifert matrices of Milnor fiberings defined by holomorphic functions, *J. Math. Soc. Japan*, 26 (1974), 4.
- [SSS] R. SCHRAUWEN, J. STEENBRINK, J. STEVENS, Spectral pairs and the topology of curve singularities, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 53 (1991), 305–328.
- [Se] J.-P. SERRE, *Cours d'Arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1970.
- [St] J. STEENBRINK, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, *Nordic Summer School NAVF, Symposium in Math. Oslo*, 1976.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1995,  
 accepté le 2 février 1996.

P. DU BOIS,  
 Département de Mathématiques,  
 Université d'Angers  
 2, Boulevard Lavoisier  
 49045 Angers (France).  
 philippe.dubois@univ-angers.fr

O. HUNAUT,  
 Département de Mathématiques  
 Université de Nantes  
 2, rue de la Houssinière  
 44072 Nantes (France).