ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

A. BARKATOU

ANNE DUVAL

Sur les séries formelles solutions d'équations aux différences polynomiales

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 2 (1994), p. 495-524

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_2_495_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 2 (1994), 495-524

SUR LES SÉRIES FORMELLES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES POLYNOMIALES

par A. BARKATOU et A. DUVAL

Dans cet article, nous montrons que toute série formelle (en $1/x$), *resp.* toute série de factorielles formelle, solution d'une équation linéaire aux différences finies à coefficients polynômes est Gevrey d'un ordre qui peut se lire sur un, ou plutôt deux, polygone(s) de Newton convenable(s). Nous calculons également l'indice d'un tel opérateur agissant sur des espaces de séries Gevrey factorielles ou ordinaires.

Parmi les travaux antérieurs sur le sujet, il faut citer l'article de Gérard et Lutz [3]. Dans cet article le caractère Gevrey des séries obtenues est établi (en fait pour une classe beaucoup plus vaste d'opérateurs), mais les auteurs ne donnent pas la valeur optimale de l'ordre Gevrey. La partie des travaux d'Écalle consacrée aux équations aux différences [2] contient aussi des résultats de ce type. Les polygones de Newton que nous sommes amenés à introduire se trouvent d'ailleurs dans le travail cité. Dans son article [7], Praagman donne l'ordre Gevrey précisé exact dans le cas de séries formelles ordinaires et prouve qu'un opérateur aux différences Δ (à coefficients séries convergentes à l'infini) est de Fredholm sur les espaces de séries formelles ou Gevrey d'ordre $s > 1$. Il montre enfin que Δ n'est en général plus de Fredholm pour $s \leq 1$.

Tous ces auteurs travaillent directement sur l'opérateur aux différences, alors que notre méthode consiste à se ramener par transformation de Mellin à un opérateur différentiel et à utiliser pour celui-ci les résultats de Ramis [8] dans le cas Gevrey et ceux de Malgrange [4] dans le cas formel ou convergent. Nous obtenons ainsi «sans calculs» des résultats dont certains doivent s'étendre, par d'autres méthodes, au cas non polynomial.

Mots-clés : Equations aux différences – Séries de factorielles – Séries Gevrey – Polygone de Newton – Indices – Transformation de Mellin.
Classification A.M.S. : 39A10 – 44A15.

En particulier notre étude montre que pour les séries de factorielles la situation est très semblable au cas différentiel et il est certainement utile de faire avec ces séries l'analogue du travail de Praagman, c'est-à-dire le lien entre ces théorèmes d'indices et certains groupes de cohomologies du faisceau des solutions plates et la mise en évidence d'un phénomène de Stokes approprié. Nous espérons aborder ces points dans un article ultérieur.

1. La transformée de Mellin formelle.

1.1. La transformée de Mellin formelle d'un opérateur.

On note τ l'opérateur de translation de pas $+1$ et $\theta = t\dfrac{d}{dt}$ l'opérateur d'Euler. On note $\mathbb{C}[x,\tau]$ l'algèbre non commutative des polynômes en x et τ. La multiplication correspond à la composition des opérateurs et est caractérisée par les règles :

- $\tau x = (x+1)\tau$
- $\mathbb{C}[x]$ et $\mathbb{C}[\tau]$ sont des anneaux commutatifs.

On note $\mathbb{C}[t,\theta]$ l'algèbre des polynômes en t et θ. La multiplication correspond à la composition des opérateurs et est caractérisée par les règles :

- $\theta t = t(\theta+1)$
- $\mathbb{C}[t]$ et $\mathbb{C}[\theta]$ sont des anneaux commutatifs.

PROPOSITION 1. — *La correspondance $x \mapsto -\theta$, $\tau \mapsto t$ définit un isomorphisme d'algèbre $\widehat{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{C}[x,\tau]$ sur $\mathbb{C}[t,\theta]$. Cet isomorphisme est appelé transformation de Mellin formelle.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\widehat{\mathcal{M}}(x\tau) = \widehat{\mathcal{M}}(x)\widehat{\mathcal{M}}(\tau) = -\theta t = -t(\theta+1) = t(-\theta-1) = \widehat{\mathcal{M}}(\tau)\widehat{\mathcal{M}}(x-1) = \widehat{\mathcal{M}}(\tau(x-1))$. Or $x\tau = \tau(x-1)$. □

Pour $x \in \mathbb{C}$ et $j \in \mathbb{N}$, on définit $\langle x\rangle_j = x(x+1)(x+2)\cdots(x+j-1)$ si $j > 0$ et $\langle x\rangle_0 = 1$. Tout opérateur $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$ peut s'écrire sous l'une des deux formes

$$\Delta = \sum_{\substack{i=0\cdots r\\ j=0\cdots q}} \alpha_{i,j}\tau^i x^j$$

$$\Delta = \sum_{\substack{i=0\cdots r\\ j=0\cdots q}} \beta_{i,j}\tau^i \langle x\rangle_j .$$

On définit l'*ordre* (*resp.* le *degré*) de Δ comme étant son degré en la variable τ (*resp.* x).

On définit de même l'*ordre* d'un opérateur $D \in \mathbb{C}[t,\theta]$ comme étant son degré en la variable θ et le *degré* de D désigne son degré en la variable t. L'opérateur $t^i\left(\frac{d}{dt}\right)^j$, qui appartient à $\mathbb{C}[t,\theta]$ si $i \geq j$, est donc d'ordre j et de degré $i-j$.

PROPOSITION 2. — *La transformée de Mellin formelle vérifie :*

$$\widehat{\mathcal{M}}\left(\sum_{\substack{i=0\cdots r\\ j=0\cdots q}} \alpha_{i,j}\tau^i x^j\right) = \sum_{\substack{i=0\cdots r\\ j=0\cdots q}} (-1)^j \alpha_{i,j} t^i \theta^j$$

$$\widehat{\mathcal{M}}\left(\sum_{\substack{i=0\cdots r\\ j=0\cdots q}} \beta_{i,j}\tau^i \langle x\rangle_j\right) = \sum_{\substack{i=0\cdots r\\ j=0\cdots q}} (-1)^j \beta_{i,j} t^{i+j}\left(\frac{d}{dt}\right)^j.$$

L'opérateur $\widehat{\mathcal{M}}$ *échange donc ordre et degré.*

Démonstration. — La deuxième formule provient de la relation

$$t^j\left(\frac{d}{dt}\right)^j = \theta(\theta-1)\cdots(\theta-j+1). \qquad \square$$

1.2. La transformée de Mellin formelle d'une série de factorielles.

On considère des séries formelles de factorielles généralisées :

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n+\rho+1)}\\ &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{(x+\rho)(x+\rho+1)\cdots(x+\rho+n)}\end{aligned}$$

où $\rho \in \mathbb{C}$.

Le cas des séries de factorielles formelles correspond à $\rho = 0$.

DÉFINITION 1. — *Soit* $\hat{f}$ *une série formelle de factorielles généralisées, sa transformée de Mellin formelle est la série formelle ramifiée de puissances de* $(1-t)$, *donnée (avec les notations précédentes) par*

$$\widehat{\mathcal{M}}(\hat{f})(t) = (1-t)^\rho \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{\Gamma(n+\rho+1)}(1-t)^n.$$

L'algèbre $\mathbb{C}[x,\tau]$ agit sur les séries formelles de factorielles généralisées tandis que l'algèbre $\mathbb{C}[t,\theta]$ agit sur les séries formelles ramifiées.

Remarque 1. — Si ρ n'est pas un entier strictement négatif, $\widehat{\mathcal{M}}$ définit une bijection entre les séries formelles correspondantes puisque dans ce cas $\dfrac{1}{\Gamma(n+\rho+1)}$ n'est jamais nul.

Proposition 3. — *Si $\hat{f}$ est une série formelle de factorielles généralisées, alors pour tout opérateur $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$,*

$$\widehat{\mathcal{M}}(\Delta(\hat{f})) = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)(\widehat{\mathcal{M}}(\hat{f})).$$

Démonstration. — Par linéarité, il suffit d'établir pour $j,k \in \mathbb{N}$ et $\rho \in \mathbb{C}$ la formule :

$$\widehat{\mathcal{M}}\left(\tau^j\langle x\rangle_k\left(\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}\right)\right) = (-1)^k t^{k+j}\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left(\frac{(1-t)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right).$$

Or $\hat{f}(x) = \tau^j\langle x\rangle_k(\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}) = \dfrac{\Gamma(x+j+k)}{\Gamma(x+j+\rho)}$.

En exprimant le polynôme de degré $j+k$

$$x(x+1)\cdots(x+j+k-1) = \frac{\Gamma(x+j+k)}{\Gamma(x)}$$

sur la base $\dfrac{\Gamma(x-\beta+j+k)}{\Gamma(x-\beta+i)}$, $i = 0,\cdots,j+k$, on obtient la formule suivante qui est un cas particulier des formules de translation ([5]) :

$$\Gamma(x+j+k) = \sum_{i=0}^{j+k}\binom{j+k}{i}\beta(\beta-1)\cdots(\beta-i+1)\frac{\Gamma(x)\Gamma(x+j+k-\beta)}{\Gamma(x-\beta+i)}$$

donc

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{j+k}\binom{j+k}{i}\beta(\beta-1)\cdots(\beta-i+1)\frac{\Gamma(x)\Gamma(x+j+k-\beta)}{\Gamma(x-\beta+i)\Gamma(x+j+\rho)}.$$

En prenant $\beta = k-\rho$, on trouve

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{j+k}\binom{j+k}{i}(k-\rho)(k-\rho-1)\cdots(k-\rho-i+1)\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho-k+i)}$$

dont la transformée de Mellin est

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}(t) &= \sum_{i=0}^{j+k} \binom{j+k}{i} (k-\rho)(k-\rho-1)\cdots(k-\rho-i+1)\frac{(1-t)^{\rho-k+i-1}}{\Gamma(\rho-k+i)} \\
&= \sum_{i=0}^{j+k} \binom{j+k}{i} (-1)^i \frac{(1-t)^{\rho-k+i-1}}{\Gamma(\rho-k)} \\
&= \frac{t^{j+k}(1-t)^{\rho-k-1}}{\Gamma(\rho-k)} = (\rho-1)(\rho-2)\cdots(\rho-k)\frac{t^{j+k}(1-t)^{\rho-k-1}}{\Gamma(\rho)} \\
&= (-1)^k t^{k+j}\left(\frac{d}{dt}\right)^k \left(\frac{(1-t)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)}\right).
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2. — La définition de la transformée de Mellin formelle choisie pour une série de factorielles généralisées est, à multiplication près par une fonction 1-périodique, la seule compatible avec la propriété de commutativité traduite par la proposition 3.

En effet, si $\widehat{\mathcal{M}}\left(\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}\right) = \varphi_\rho(t)$, l'égalité

$$\widehat{\mathcal{M}}\left(\tau^j \langle x\rangle_k \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}\right) = (-1)^k t^{k+j}\left(\frac{d}{dt}\right)^k \varphi_\rho(t)$$

se traduit par les relations

$$
\begin{aligned}
&(-1)^k t^{k+j}\left(\frac{d}{dt}\right)^k \varphi_\rho(t) \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{j+k} \binom{j+k}{i} (k-\rho)(k-\rho-1)\cdots(k-\rho-i+1)\varphi_{\rho-k+i}(t).
\end{aligned}
$$

Pour $k=0, j=1$ on trouve $\rho\varphi_{\rho+1}(t) = (1-t)\varphi_\rho(t)$ et pour $k=1, j=0$, on a $t\varphi'_\rho(t) + (1-\rho)\varphi_\rho(t) + \varphi_{\rho-1}(t) = 0$.

Ces deux équations ont pour seules solutions communes $\pi(\rho)$ $(1-t)^{\rho-1}/\Gamma(\rho)$, où $\pi(\rho)$ est une fonction 1-périodique.

2. Polygone de Newton – Équations caractéristiques.

2.1. Polygones de Newton d'un opérateur aux différences.

2.1.1. Le τ−polygone de Newton.

Soit $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$:

$$\Delta = \sum_{\substack{i=0\cdots r\\ j=0\cdots q}} \alpha_{i,j} x^j \tau^i.$$

Le τ−polygone de Newton de Δ, noté $N_\tau(\Delta)$ est défini de la manière suivante :

Soit $\mathcal{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \le 0 \text{ et } y \ge 0\}$ le deuxième quadrant de $\mathbb{R}^2$. On pose, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Q}(u,v) = \mathcal{Q} + (u,v)$. Soit $M(\Delta)$ la réunion des $\mathcal{Q}(i,-j)$ pour $0 \le i \le r$, $0 \le j \le q$ et $\alpha_{i,j} \ne 0$. Le τ−polygone de Newton de Δ est l'intersection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec l'enveloppe convexe de $M(\Delta)$. Ce polygone possède un côté horizontal (éventuellement réduit à un point), un côté vertical (illimité vers le haut) et, entre les deux, un nombre fini de côtés de pentes rationnelles positives. Pour $p > 0$ fixé, on définit le poids : $w_p(x^j\tau^i) = -j - pi$. A ce poids on associe la valuation $v_p(\Delta) = \text{Inf}$ des poids des monômes de Δ. On désigne par $\sigma_p(\Delta)$ la somme des monômes de Δ de valuation minimale. Lorsque $p > 0$ est une pente de $N_\tau(\Delta)$, $\sigma_p(\Delta)$ est la somme d'au moins deux monômes :

$$\sigma_p(\Delta) = \sum_{h=0}^{\eta_p} \alpha_{i_h(p),j_h(p)} x^{j_h(p)} \tau^{i_h(p)}$$

avec $i_0(p) < \cdots < i_{\eta_p}(p)$. Les points $(i_h(p), -j_h(p))$ sont sur le côté de $N_\tau(\Delta)$ de pente p et on a :

$$\frac{j_h(p) - j_0(p)}{i_h(p) - i_0(p)} = -p$$

pour $h = 1, \ldots, \eta_p$.

DÉFINITION 2. — *Le polynôme caractéristique associé à la pente p ($p > 0$) de $N_\tau(\Delta)$ est*

$$P_p(T) = \sum_{h=0}^{\eta_p} \alpha_{i_h(p),j_h(p)} T^{(i_h(p) - i_0(p))}.$$

C'est un polynôme en T de degré $l_p = i_{\eta_p}(p) - i_0(p)$ («longueur» du côté de pente p), à terme constant non nul.

L'équation $P_p(T) = 0$ s'appelle l'équation caractéristique associée à la pente p.

Les p-caractéristiques de Δ sont les inverses des modules des racines de $P_p(T) = 0$.

2.1.2. Le $\delta-$polygone de Newton.

On note δ l'opérateur aux différences $\tau - 1$. Soit $\Delta \in \mathbb{C}[x, \tau]$, Δ peut s'écrire

$$\Delta = \sum_{\substack{i=0\cdots r \\ j=0\cdots q}} c_{i,j} x^j \delta^i.$$

Le $\delta-$polygone de Newton de Δ, noté $N_\delta(\Delta)$ est défini de la manière suivante :

Soit $\mathcal{J} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0 \text{ et } y \geq x\}$. On pose, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{J}(u,v) = \mathcal{J} + (u,v)$. Soit $U(\Delta)$ la réunion des $\mathcal{J}(i, i-j)$ pour $0 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq q$ et $c_{i,j} \neq 0$. Le $\delta-$polygone de Newton de Δ est l'intersection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec l'enveloppe convexe de $U(\Delta)$. Ce polygone comporte à gauche un côté horizontal (éventuellement réduit à un point), à droite un côté de pente 1 de «longueur» infinie et entre les deux un nombre fini de côtés dont les pentes sont des nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1.

Pour $0 \leq p \leq 1$ fixé, on définit le poids : $w_p(x^j\delta^i) = -j + (1-p)i$. A ce poids on associe la valuation $v_p(\Delta) = \text{Inf}$ des poids des monômes de Δ. On désigne par $\sigma_p(\Delta)$ la somme des monômes de Δ de valuation minimale. Lorsque p $(0 < p < 1)$ est une pente de $N_\delta(\Delta)$, $\sigma_p(\Delta)$ est la somme d'au moins deux monômes :

$$\sigma_p(\Delta) = \sum_{h=0}^{\eta_p} c_{i_h(p), j_h(p)} x^{j_h(p)} \delta^{i_h(p)}$$

avec $i_0(p) < \cdots < i_{\eta_p}(p)$. Les points $(i_h(p), j_h(p))$ sont sur le côté de $N_\delta(\Delta)$ de pente p et on a :

$$\frac{j_h(p) - j_0(p)}{i_h(p) - i_0(p)} = 1 - p$$

pour $h = 1, \ldots, \eta_p$.

DÉFINITION 3. — *Le polynôme caractéristique associé à la pente* p $(0 < p < 1)$ *de* $N_\delta(\Delta)$ *est*

$$P_p(T) = \sum_{h=0}^{\eta_p} c_{i_h(p),j_h(p)} T^{(i_h(p)-i_0(p))}.$$

C'est un polynôme en T *de degré* $l_p = i_{\eta_p}(p) - i_0(p)$ *(«longueur» du côté de pente* p*), à terme constant non nul.*

L'équation $P_p(T) = 0$ *s'appelle l'équation caractéristique associée à la pente* p*. A toute racine* $\lambda_{p,\nu}$ *de cette équation on associe le réel positif* $\Lambda_{p,\nu} = |\lambda_{p,\nu}|^{-1/p}$, $(\nu = 1, \ldots, l_p)$*. On dit que* $\Lambda_{p,\nu}$ *est une* p*-caractéristique de* Δ*.*

Pour $p = 1$, on pose $w_1(x^j\delta^i) = -j$. On associe à ce poids la valuation $v_1(\Delta) =$ Inf des poids des monômes de Δ ($= -q$ ici). Soit $\sigma_1(\Delta)$ la somme des monômes de Δ de valuation minimale. Alors $\sigma_1(\Delta)$ peut s'écrire :

$$\sigma_1(\Delta) = \sum_{h=0}^{\eta_1} c_{i_h,q} x^q \delta^{i_h}.$$

DÉFINITION 4. — *Le polynôme caractéristique associé à la pente* 1 *de* $N_\delta(\Delta)$ *est*

$$P_1(T) = \sum_{h=0}^{\eta_1} c_{i_h,q} (T-1)^{i_h}.$$

L'équation $P_1(T) = 0$ *s'appelle l'équation caractéristique associée à la pente* 1*.*

Les $1-$*caractéristiques de* Δ *sont* 1 *et les* $|a-1|^{-1}$ *où* a *désigne une racine de l'équation caractéristique* $P_1(T) = 0$ *telle que* $a \neq 1$*.*

Terminons par le cas $p = 0$. L'équation caractéristique correspondante est remplacée par l'équation *indicielle* (*cf.*. [6]). Pour définir l'équation indicielle, il est plus commode d'écrire Δ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j} \delta^i \langle x \rangle_j.$$

On pose $w_0(\delta^i\langle x\rangle_j) = i - j$. On associe à ce poids la valuation $v_0(\Delta) = \mathrm{Inf}\{i - j | \beta_{i,j} \neq 0\}$. Soit $\sigma_0(\Delta)$ la somme des termes de Δ de valuation minimale :

$$\sigma_0(\Delta) = \sum_{i-j=v_0(\Delta)} \beta_{i,j}\delta^i \langle x\rangle_j.$$

Le polynôme indiciel de Δ est défini par

$$P_0(T) = \sum_{j-i=\mu} \beta_{i,j}\langle -T+\mu\rangle_i$$

où $\mu = -v_0(\Delta) = \sup\{j-i|\beta_{i,j} \neq 0\}$. C'est un polynôme en T de degré l_0 («longueur» du côté de pente 0).

L'équation $P_0(T) = 0$ s'appelle l'équation indicielle de Δ. Ses racines sont appelées exposants caractéristiques de Δ.

Ce sont les valeurs possibles du nombre complexe ρ tel que Δ possède une solution $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{\Gamma(x+\rho)}{\Gamma(x+\rho+n+1)}$ avec $a_0 \neq 0$.

Le δ-polygone de Newton coïncide avec le «petit» polygone de Newton de J. Écalle [2] qui s'obtient en utilisant la formule $\tau = e^{d/dx} = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n$. L'équivalence entre les deux définitions provient du fait que $\delta = \tau - 1 \in \dfrac{d}{dx} + \left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 \mathbb{C}\left[\dfrac{d}{dx}\right]$ et donc la contribution du terme $c_{i,j}x^j\delta^i$ $(c_{i,j} \neq 0)$ est constituée du point $(i, i-j)$ et de points situés sur la parallèle à la première bissectrice issue de ce point. Le τ-polygone de Newton coïncide avec la partie positive du «grand» polygone de Newton défini dans Écalle [2] et qui correspond à ceux introduits antérieurement par Birckhoff, Nörlund etc.

Remarquons aussi que, contrairement au cas différentiel, les pentes possibles du δ-polygone de Newton d'un opérateur d'ordre r sont en nombre fini :

- $0, 1$ pour un opérateur d'ordre 1,
- $0, 1/2, 1$ pour un opérateur d'ordre 2,
- $0, 1/3, 2/3, 1/2, 1$ pour un opérateur d'ordre 3, etc ...

Remarque 3. — On obtient le même δ *resp.* τ-polygone de Newton si on exprime Δ sous la forme $\sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{q} \beta_{i,j}\delta^i\langle x\rangle_j$, *resp.* $\sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{q} \gamma_{i,j}\tau^i\langle x\rangle_j$.

2.2. Polygone de Newton d'un opérateur différentiel.

Nous allons maintenant rappeler les définitions du polygone de Newton et des équations caractéristiques d'un opérateur différentiel (pour plus de détails voir Ramis [8]).

2.2.1. Polygone de Newton en un point $t = t_0$.

Soit

$$D = \sum_{j=0}^{q} d_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j$$

un opérateur différentiel et t_0 un point de $\mathbb{C}$. On pose

$$d_j(t) = \sum_{i=0}^{m} d_{j,i}(t - t_0)^i.$$

Soit $\mathcal{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ le deuxième quadrant de $\mathbb{R}^2$. On pose, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{Q}(u,v) = \mathcal{Q} + (u,v)$. Soit $M(D)$ la réunion des $\mathcal{Q}(j, i-j)$ pour $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq q$ et $d_{j,i} \neq 0$. On appelle polygone de Newton de D au point $t = t_0$ et on note $N_{t_0}(D)$ l'intersection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec l'enveloppe convexe de $M(D)$. Les pentes de ce polygone sont des nombres rationnels positifs ou nuls.

Pour $k \geq 0$ fixé, on définit le poids : $w_k\left((t - t_0)^i \left(\frac{d}{dt}\right)^j\right) = i - (k+1)j$. A ce poids on associe la valuation $v_k(D) = \text{Inf}$ des poids des monômes de D. On désigne par $\sigma_k(D)$ la somme des monômes de D de valuation minimale. Lorsque k est une pente strictement positive de $N_{t_0}(D)$, $\sigma_k(D)$ est la somme d'au moins deux monômes :

$$\sigma_k(D) = \sum_{h=0}^{\eta_k} d_{j_h(k), i_h(k)} (t - t_0)^{i_h(k)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{j_h(k)}$$

avec $j_0(k) < \cdots < j_{\eta_k}(k)$.

Définition 5. — *Le polynôme caractéristique associé à la pente k ($k > 0$) de $N_{t_0}(D)$ est*

$$P_k(X) = \sum_{h=0}^{\eta_k} d_{j_h(k), i_h(k)} X^{(j_h(k) - j_0(k))}.$$

C'est un polynôme en X de degré $l_k = j_{\eta_k}(k) - j_0(k)$ («longueur» du côté de pente k), à terme constant non nul.

L'équation $P_k(X) = 0$ *s'appelle l'équation caractéristique associée à la pente* k. *A toute racine* $\gamma_{k,\nu}$ *de cette équation on associe le réel positif* $\Gamma_{k,\nu} = |\gamma_{k,\nu}|^{-1/k}$, $(\nu = 1, \dots, l_k)$. *On dit que* $\Gamma_{k,\nu}$ *est une* k*-caractéristique de* D *en* t_0.

Si 0 est l'une des pentes de $N_{t_0}(D)$, l'équation caractéristique correspondante est remplacée par l'équation indicielle $P_0(X) = 0$ où P_0 est le polynôme de degré $l_0 = j_{\eta_0}(0)$ («longueur» du côté de pente 0),

$$P_0(X) = \sum_{h=0}^{\eta_0} (-1)^{j_h(0)} d_{j_h(0), i_h(0)} \langle -X \rangle_{j_h(0)}.$$

Les racines de l'équation indicielle sont les exposants caractéristiques de D en t_0.

Terminons par le cas du côté vertical de $N_{t_0}(D)$. L'équation caractéristique est par définition l'équation $d_q(t) = 0$. Les racines de cette équation sont les points singuliers de D à distance finie. Les ∞-caractéristiques de D en t_0 sont les $|a - t_0|^{-1}$ où a désigne une racine de l'équation $d_q(t) = 0$ telle que $a \neq t_0$.

Remarquons que nous n'avons pas supposé que t_0 est un point singulier de D. Si t_0 est un point ordinaire de D, $N_{t_0}(D)$ a pour seules pentes 0 et ∞ et les exposants caractéristiques en t_0 sont les entiers $0, 1, \dots, q-1$.

2.2.2. Polygone de Newton à l'infini.

Soit

$$D = \sum_{j=0}^{q} d_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j$$

un opérateur différentiel. On pose

$$d_j(t) = \sum_{i=0}^{m} d_{j,i} t^i.$$

Soit $M(D)$ la réunion des $\mathcal{Q}(j, -i + j)$ pour $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq q$ et $d_{j,i} \neq 0$. On appelle polygone de Newton de D à l'infini et on note $N_\infty(D)$ l'intersection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec l'enveloppe convexe de $M(D)$. Les pentes de ce polygone sont des nombres rationnels positifs ou nuls. Pour $k > 0$ fixé, on définit le poids : $w_k(t^i \left(\frac{d}{dt}\right)^j) = -i + (1-k)j$. A ce poids on associe la valuation $v_k(D) =$ Inf des poids des monômes de D. On désigne par $\sigma_k(D)$ la somme des monômes de D de valuation minimale. Lorsque $k > 0$ est une pente de $N_\infty(D)$, $\sigma_k(D)$ est la somme d'au moins deux monômes :

$$\sigma_k(D) = \sum_{h=0}^{\eta_k} d_{j_h(k),i_h(k)} t^{i_h(k)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{j_h(k)}$$

avec $j_0(k) < \cdots < j_{\eta_k}(k)$.

DÉFINITION 6. — *Le polynôme caractéristique associé à la pente k ($k > 0$) de $N_\infty(D)$ est*

$$P_k(X) = \sum_{h=0}^{\eta_k} d_{j_h(k),i_h(k)} X^{(j_h(k)-j_0(k))}.$$

C'est un polynôme en X de degré $l_k = j_{\eta_k}(k) - j_0(k)$ («longueur» du côté de pente k), à terme constant non nul.

L'équation $P_k(X) = 0$ s'appelle l'équation caractéristique associée à la pente k. A toute racine $\gamma_{k,\nu}$ de cette équation on associe le réel positif $\Gamma_{k,\nu} = |\gamma_{k,\nu}|^{1/k}$, $(\nu = 1, \ldots, l_k)$. On dit que $\Gamma_{k,\nu}$ est une k-caractéristique de D.

2.3. Polygones de Newton et transformation de Mellin.

PROPOSITION 4. — *Soient $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$ et $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$ sa transformée de Mellin formelle. Alors :*

(i) *On passe de $N_\delta(\Delta)$ à $N_1(D)$ par la transformation linéaire : $(x,y) \mapsto (x-y,y)$. Un côté de $N_\delta(\Delta)$ de pente p, $0 \le p \le 1$, se transforme en le côté de $N_1(D)$ de pente $k = \dfrac{p}{1-p}$.*

(ii) *Soit p $(0 < p \le 1)$ une pente de $N_\delta(\Delta)$, on pose $k = \dfrac{p}{1-p}$. Alors les k-caractéristiques de D sont identiques aux p-caractéristiques de Δ.*

Démonstration. — Pour montrer (i) il suffit de remarquer que :

1. la transformée de Mellin formelle du monôme $x^j\delta^i$ est l'opérateur $(-1)^j\theta^j(t-1)^i$.
2. Les monômes du développement de $(-1)^j\theta^j(t-1)^i$ ont leurs points représentatifs (dans le plan (u,v)) dans $\mathcal{Q}(j, i-j)$.

Pour montrer (ii), notons d'abord que pour $0 < p < 1$ et $k = \dfrac{p}{1-p}$ on a

$$v_k((-1)^j\theta^j(t-1)^i) = w_k\left((t-1)^i\left(\frac{d}{dt}\right)^j\right) = i-(k+1)j$$

et

$$\frac{1}{p}v_p(x^j\delta^i) = \frac{1}{k}v_k((-1)^j\theta^j(t-1)^i).$$

Posons

$$\Delta = \sum_{i=0}^{r} c_i(x)\delta^i$$

avec

$$c_i(x) = \sum_{j=0}^{q} c_{i,j}x^j.$$

Soit $0 < p < 1$ une pente de $N_\delta(\Delta)$ et $k = \dfrac{p}{1-p}$. Si

$$\sigma_p(\Delta) = \sum_{h=0}^{\eta_p} c_{i_h(p),j_h(p)}x^{j_h(p)}\delta^{i_h(p)}$$

désigne la partie isobare de poids minimal de Δ (pour le poids associé à p) alors la partie isobare de D de poids minimal (pour le poids associé à k) est donnée par :

$$\sigma_k(D) = \sum_{h=0}^{\eta_p}(-1)^{j_h(p)}c_{i_h(p),j_h(p)}(t-1)^{i_h(p)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j_h(p)}.$$

Les polynômes caractéristiques associés à p et k sont respectivement :

$$P_p(T) = \sum_{h=0}^{\eta_p} c_{i_h(p),j_h(p)}T^{(i_h(p)-i_0(p))}$$

et

$$P_k(X) = \sum_{h=0}^{\eta_p}(-1)^{j_h(p)}c_{i_h(p),j_h(p)}X^{(j_h(p)-j_0(p))}.$$

Puisque $j_h(p) - j_0(p) = (1-p)(i_h(p) - i_0(p))$, on peut écrire :

$$P_k(X) = (-1)^{j_0(p)}\sum_{h=0}^{\eta_p} c_{i_h(p),j_h(p)}(-X)^{(1-p)(i_h(p)-i_0(p))}.$$

On en déduit que si γ est racine de l'équation $P_k(X) = 0$ alors $(-\gamma)^{(1-p)}$ est racine de l'équation $P_p(T) = 0$. Or $|\gamma|^{1/k} = |(-\gamma)^{(1-p)}|^{1/p}$, donc les k-caractéristiques de D sont exactement les p-caractéristiques de Δ.

Il reste à étudier le cas $p = 1$ $(k = +\infty)$. Il suffit de remarquer que les singularités à distance finie de D sont 0 et les racines de l'équation caractéristique de Δ associée à la pente 1 de $N_\delta(\Delta)$. □

PROPOSITION 5. — *Soient* $\Delta = \sum_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ *où* $B_i(x) = \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j}\langle x\rangle_j$ *et* $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$. *On note* $P_{0,\Delta}$ *(resp.* $P_{0,D}$*) le polynôme indiciel de* Δ *(resp.* D*),* E_Δ *(resp.* E_D*) l'ensemble des exposants caractéristiques de* Δ *(resp.* D*) et* $\mu_\Delta = \sup\{j - i \mid \beta_{i,j} \neq 0\}$. *Alors :*

(i) *si* $\mu_\Delta > 0$, *on a* $P_{0,D}(X) = \langle -X\rangle_{\mu_\Delta} P_{0,\Delta}(X)$ *et* $E_D = \{0, 1, \cdots, \mu_\Delta - 1\} \cup E_\Delta$

(ii) *si* $\mu_\Delta < 0$, *on a* $P_{0,\Delta}(T) = \langle -T + \mu_\Delta\rangle_{-\mu_\Delta} P_{0,D}(T)$ *et* $E_\Delta = \{\mu_\Delta, \mu_\Delta + 1, \cdots, -1\} \cup E_D$

(iii) *enfin si* $\mu_\Delta = 0$, $P_{0,\Delta} = P_{0,D}$ et $E_\Delta = E_D$.

Démonstration. — On a

$$D = \sum (-1)^j \beta_{i,j} (t-1)^i t^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j .$$

Les polynômes indiciels associés à Δ et D sont respectivement :

$$P_{0,\Delta}(T) = \sum_{j-i=\mu} \beta_{i,j}\langle -T + \mu\rangle_i$$

(on a abrégé μ_Δ en μ) et

$$P_{0,D}(X) = \sum_{j-i=\mu} \beta_{i,j}\langle -X\rangle_j .$$

Si $\mu \geq 0$, on peut écrire $\langle -X\rangle_j = \langle -X\rangle_\mu \langle -X + \mu\rangle_i$ pour $j - i = \mu$ et donc $P_{0,D}(X) = \langle -X\rangle_\mu P_{0,\Delta}(X)$.

Si $\mu < 0$, on peut écrire $\langle -T + \mu\rangle_i = \langle -T + \mu\rangle_{-\mu} \langle -T + \mu\rangle_j$ pour $j - i = \mu$ et donc $P_{0,\Delta}(T) = \langle -T + \mu\rangle_{-\mu} P_{0,D}(T)$. □

PROPOSITION 6. — *Soient* $\Delta \in \mathbb{C}[x, \tau]$ *et* $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$ *sa transformée de Mellin formelle. Alors :*

(i) *On passe de* $N_\tau(\Delta)$ *à* $N_\infty(D)$ *par la transformation linéaire :* $(x,y) \mapsto (-y,-x)$. *Un côté de* $N_\tau(\Delta)$ *de pente* p, $p > 0$, *se transforme en le côté de* $N_\infty(D)$ *de pente* $k = \dfrac{1}{p}$.

(ii) *Soit* p ($p > 0$) *une pente de* $N_\tau(\Delta)$, *on pose* $k = \dfrac{1}{p}$. *Alors les* k*-caractéristiques de* D *sont identiques aux* p*-caractéristiques de* Δ.

Démonstration. — Pour montrer (i) il suffit de remarquer que :

1. la transformée de Mellin formelle du monôme $x^j\tau^i$ est l'opérateur $(-1)^j\theta^j t^i$.
2. Les monômes du développement de $(-1)^j\theta^j t^i$ ont leurs points représentatifs (dans le plan (u,v)) dans $\mathcal{Q}(j,-i)$.

Pour montrer (ii), notons d'abord que pour $p > 0$ et $k = \dfrac{1}{p}$ on a

$$v_k((-1)^j\theta^j t^i) = w_k\left(t^{i+j}\left(\frac{d}{dt}\right)^j\right) = -i-j+(1-k)j = -i-kj$$

et

$$\frac{1}{k}v_k((-1)^j\theta^j t^i) = w_p(x^j\tau^i).$$

Posons

$$\Delta = \sum_{i=0}^{r}\alpha_i(x)\tau^i$$

avec

$$\alpha_i(x) = \sum_{j=0}^{q}\alpha_{i,j}x^j.$$

Soit $p > 0$ une pente de $N_\tau(\Delta)$ et $k = \dfrac{1}{p}$. Si

$$\sigma_p(\Delta) = \sum_{h=0}^{\eta_p}\alpha_{i_h(p),j_h(p)}x^{j_h(p)}\tau^{i_h(p)}$$

désigne la partie isobare de poids minimal de Δ (pour le poids associé à p) alors la partie isobare de D de poids minimal (pour le poids associé à k) est donnée par :

$$\sigma_k(D) = \sum_{h=0}^{\eta_p}(-1)^{j_h(p)}\alpha_{i_h(p),j_h(p)}t^{i_h(p)+j_h(p)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{j_h(p)}.$$

Les polynômes caractéristiques associés à p et k sont respectivement :

$$P_p(T) = \sum_{h=0}^{\eta_p} \alpha_{i_h(p),j_h(p)} T^{(i_h(p)-i_0(p))}$$

et

$$P_k(X) = \sum_{h=0}^{\eta_p} (-1)^{j_h(p)} \alpha_{i_h(p),j_h(p)} X^{(j_h(p)-j_0(p))}.$$

Puisque $j_h(p) - j_0(p) = -p(i_h(p) - i_0(p))$, on peut écrire :

$$P_k(X) = (-1)^{j_0(p)} \sum_{h=0}^{\eta_p} \alpha_{i_h(p),j_h(p)} (-X)^{-p(i_h(p)-i_0(p))}.$$

On en déduit que si γ est racine de l'équation $P_k(X) = 0$ alors $(-\gamma)^{(-p)}$ est racine de l'équation $P_p(T) = 0$. Or $|\gamma|^{1/k} = |(-\gamma)^{-p}|^{-1}$, donc les k-caractéristiques de D sont exactement les p-caractéristiques de Δ. $\square$

3. Solutions séries de factorielles formelles.

Pour $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$x^{-[n]} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} & \text{si} \quad n \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ (x-1)(x-2)\cdots(x+n) & \text{si} \quad n < 0. \end{cases}$$

Rappelons maintenant la définition des séries formelles Gevrey.

DÉFINITION 7. — *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Soient s et A deux nombres réels avec $A > 0$. S'il existe $C > 0$ tel que $|a_n| < C(n!)^s A^n$, pour tout entier $n \geq 0$, on dira que les séries $\hat{f}(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n n! x^{-[n+1]}$, $\hat{\varphi}(t) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n (1-t)^n$ sont Gevrey d'ordre s et d'ordre précisé (s,A).*

La définition est faite pour que $\widehat{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\mathcal{M}}^{-1}$ transforment une série Gevrey d'ordre s (*resp.* d'ordre précisé (s, A)) en une série Gevrey d'ordre s (*resp.* d'ordre précisé (s, A)).

Il faut noter qu'une série entière formelle $\hat{\varphi}$ est Gevrey d'ordre 0 si et seulement si elle est convergente. Par contre une série de factorielles formelle Gevrey d'ordre s et d'ordre précisé (s, A) est convergente si et seulement si $s = 0$ et $0 < A \leq 1$. Rappelons que le domaine naturel de convergence d'une série de factorielles est un demi-plan $\{\Re x > \lambda\}$ où λ est l'abscisse de convergence de la série (voir par exemple Nörlund [5]). Si $\hat{f}$ est Gevrey précisé $(0, A)$ avec $A < 1$ alors le domaine de convergence est $\mathbb{C}$.

Si $\hat{f}$ est convergente alors $\hat{\varphi}$ est convergente mais la réciproque est fausse sauf dans le cas où $\hat{\varphi}$ possède un rayon de convergence ≥ 1.

THÉORÈME 1. — *Soient $\Delta \in \mathbb{C}[x, \tau]$, et g une série de factorielles convergente. On suppose qu'il existe une série $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} n! a_n x^{-[n+1]}$ telle que $\Delta(\hat{f}) = g$. Alors $\hat{f}$ est Gevrey 0 ou il existe un unique réel $s > 0$ et un unique réel $A > 0$ tels que $\limsup((n!)^{-s}|a_n|)^{1/n} = A$. De plus $s = 1/p - 1$ où p est l'une des pentes strictement positives du polygone de Newton $N_\delta(\Delta)$ et A est l'une des p-caractéristiques associées.*

Démonstration. — Soient D, $\hat{\varphi} = \sum_{n \geq 0} a_n (1-t)^n$ et $\hat{\gamma}$ les transformées de Mellin formelles respectives de Δ, $\hat{f}$ et g. D'après la proposition 3, on a $D(\hat{\varphi}) = \hat{\gamma}$. Puisque g est convergente, $\hat{\gamma}$ l'est aussi on peut donc appliquer le théorème 1.5.17 de Ramis [8] ; $\hat{\varphi}$ est convergente ou il existe un unique réel $s > 0$ et un unique réel $A > 0$ tels que $\limsup((n!)^{-s}|a_n|)^{1/n} = A$. De plus $s = 1/k$ où k est l'une des pentes strictement positives de $N_1(D)$ et A est l'une des k-caractéristiques associées. On applique la proposition 4 pour conclure. □

Exemples. — On considère l'équation aux différences :

$$\Delta(y) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{-2}{x(x+1)(x+2)}$$

où Δ est l'opérateur

$$\Delta = (x+2)\tau^2 - (1+2x)\tau + x = (x+2)\delta^2 + 3\delta + 1.$$

Le δ-polygone de Newton de Δ possède un côté de pente $1/2$ et un côté de pente 1. Le polynôme caractéristique associé à la pente $1/2$ est $T^2 + 1$ et celui associé à la pente 1 est $(T-1)^2$.

Si on cherche une solution de la forme $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n n! x^{-[n+1]}$ on trouve $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ et $a_{n+2} + n a_{n+1} - n a_n = 0$ pour tout

$n \geq 1$. On vérifie que la suite $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = (-1)^n n!$, $n \geq 0$ convient (il n'y en a pas d'autres). Donc la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n n!(n+1)! x^{-[n+2]}$ est solution formelle de l'équation considérée. C'est une série Gevrey d'ordre 1 $(= \frac{1}{(1/2)} - 1)$ et de type 1 ($= 1/2$-caractéristique de Δ).

THÉORÈME 2. — *Soit $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$. Soient $p_1, \ldots, p_l$ les pentes strictement positives de $N_\delta(\Delta)$ et $p_{l+1}, \ldots, p_{l'}$ les pentes strictement positives de $N_\tau(\Delta)$, on pose $s_j = -1 + 1/p_j$ pour $1 \leq j \leq l$ et $s_j = -p_j$ pour $l+1 \leq j \leq l'$. Soient g une série de factorielles tronquée $g = \sum_{n=0}^{m} b_n x^{-[n+1]}$ et $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} n! a_n x^{-[n+1]}$ une série de factorielles telle que $\Delta(\hat{f}) = g$. Alors $\hat{f}$ est une série de factorielles tronquée ou il existe un unique réel s et un unique réel $A > 0$ tels que $\limsup((n!)^{-s}|a_n|)^{1/n} = A$. De plus s est l'un des s_j et A est l'une des p-caractéristiques associées.*

Démonstration. — Soient D, $\hat{\varphi} = \sum_{n\geq 0} a_n (1-t)^n$ et $\hat{\gamma}$ les transformées de Mellin formelles respectives de Δ, $\hat{f}$ et g. Soient $k_1, \ldots, k_l$ les pentes strictements positives de $N_1(D)$ et $k_{l+1}, \ldots, k_{l'}$ les pentes strictement positives de $N_\infty(D)$, on pose $\kappa_j = 1/k_j$ pour $1 \leq j \leq l$ et $\kappa_j = -1/k_j$ pour $l+1 \leq j \leq l'$.

D'après la proposition 3, on a $D(\hat{\varphi}) = \hat{\gamma}$. Puisque g est une série tronquée, $\hat{\gamma}$ est un polynôme, on peut donc appliquer le théorème 3.2.8 de Ramis [8] ; $\hat{\varphi}$ est un polynôme ou il existe un unique réel s et un unique réel $A > 0$ tels que $\limsup((n!)^{-s}|a_n|)^{1/n} = A$. De plus s est l'un des $\kappa_1, \ldots, \kappa_{l'}$ et A est l'une des k-caractéristiques associées. On applique les propositions 4 et 6 pour conclure. □

Exemple 2. — On considère l'équation aux différences :

$$\Delta(y) = y(x+1) + xy(x) = -1.$$

Si on cherche une solution de la forme $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n n! x^{-[n+1]}$ on trouve $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $(n+2)a_{n+2} - n a_{n+1} - a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. On vérifie que $a_n = (-1)^n/n!$, $n \geq 0$. Donc la série $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{-[n+1]}$ est solution formelle de l'équation considérée. C'est une série Gevrey d'ordre

-1 et de type 1. (Le $\tau-$polygone de Δ possède un côté de pente 1 et un côté vertical. L'équation caractéristique associée à la pente 1 est $T+1=0$.)

Remarque 4. — Les théorèmes 1 et 2 restent valables si on remplace g par $g+$ un polynôme en x.

THÉORÈME 3. — *Soit $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$. Si $\hat{f}$ est une série de factorielles généralisées vérifiant $\Delta(\hat{f})=0$, alors $\hat{f}(x)=\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}\hat{g}(x+\rho)$ où ρ est une racine de $P_{0,\Delta}$ et $\hat{g}$ est Gevrey d'ordre précisé $(s,A+\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$ quelconque) où $(s+1)^{-1}$ est l'une des pentes de $N_\delta(\Delta)$ et A l'une des p-caractéristiques associées.*

Démonstration. — Si $\hat{f}(x)=\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\rho)}\hat{g}(x+\rho)$ est une série formelle de factorielles généralisées vérifiant $\Delta(\hat{f})=0$, alors d'après la proposition 3 sa transformée de Mellin formelle est une série $\hat{\varphi}\in(1-t)^\rho\mathbb{C}[[1-t]]$ qui vérifie $D(\hat{\varphi})=0$, si $D=\widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$. Le résultat se déduit alors des résultats classiques sur les équations différentielles et de la proposition 5 en remarquant que les séries de factorielles formelles de coefficients a_n et $a_n n!/\Gamma(n+\rho+1)$ ont même ordre Gevrey et si la seconde est Gevrey précisé (s,A), la première est Gevrey précisé $(s,A+\varepsilon), \forall\varepsilon>0$. □

Remarque 5. — On retrouve ainsi la partie formelle des résultats de Nörlund [6] qui concernent le cas où le δ-polygone de Newton a une pente nulle de longueur égale à l'ordre de l'opérateur. Dans ce cas Nörlund établit aussi la convergence des séries de factorielles obtenues.

4. Théorèmes d'indices (séries de factorielles).

4.1. Indices formels.

Notons $\widehat{\mathcal{K}_f}=\{\hat{f}=\sum_{n\geq n_0} a_n x^{-[n]} \mid n_0\in\mathbb{Z}\}$ l'espace vectoriel des séries de factorielles méromorphes formelles.

On définit une valuation sur $\widehat{\mathcal{K}_f}$ en posant pour $\hat{f}\in\widehat{\mathcal{K}_f}$,

$$\mathrm{val}(\hat{f})=\inf\{n\in\mathbb{Z}\mid a_n\neq 0\},$$

avec la convention $\mathrm{val}(0)=+\infty$.

Notons $\widehat{\mathcal{O}_f} = \{\hat{f} \in \widehat{\mathcal{K}_f} \mid \mathrm{val}(\hat{f}) \geq 1\} = \Big\{\hat{f} = \sum\limits_{n\geq 1} a_n x^{-[n]}\Big\}$.

Il est facile de constater (*cf.* [1] par exemple) que $\widehat{\mathcal{O}_f}$ *resp.* $\widehat{\mathcal{K}_f}$ est isomorphe à $\dfrac{1}{x}\mathbb{C}\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right]$ *resp.* $\mathbb{C}\left[\left[\dfrac{1}{x}\right]\right][x]$. D'autre part $\mathbb{C}[x]$ s'identifie au sous-espace de $\widehat{\mathcal{K}_f}$ constitué des séries de valuation négative dont tous les coefficients d'indices strictement positifs sont nuls.

LEMME 1. — *La suite d'espaces vectoriels*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[x] \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}_f} \xrightarrow{\hat{\mathcal{M}}} \mathbb{C}[[1-t]] \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. — Si $\hat{f}(x) = \sum\limits_{n\geq n_0} a_n \dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+n)}$, alors

$$\widehat{\mathcal{M}}(\hat{f})(t) = \sum_{n\geq n_0} \frac{a_n}{\Gamma(n)}(1-t)^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!}(1-t)^n$$

et le résultat s'en déduit immédiatement. □

Soit $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$, alors Δ opère sur $\mathbb{C}[x]$ et sur $\widehat{\mathcal{K}_f}$, de plus si $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{K}_f} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]] \\ \downarrow \Delta & & \downarrow D \\ \widehat{\mathcal{K}_f} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]] \end{array}$$

est commutatif (c'est la proposition 3). En général, Δ n'opère pas sur $\widehat{\mathcal{O}_f}$, cependant si on définit $\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta) = \{\hat{f} \in \widehat{\mathcal{O}_f} \mid \Delta(\hat{f}) \in \widehat{\mathcal{O}_f}\}$, on prouve le

LEMME 2. — *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\widehat{\mathcal{O}_f}/\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta)$ est de dimension finie $d_\Delta \leq q$ si q est le degré de Δ. L'espace vectoriel $\mathbb{C}[[1-t]]/\widehat{\mathcal{M}}(\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta))$ lui est isomorphe.*

Démonstration. — Si $\hat{f} = \sum\limits_{n\geq 1} a_n x^{-[n]}$, la condition $\Delta(\hat{f}) \in \widehat{\mathcal{O}_f}$ se traduit par un nombre fini de relations linéaires de la forme $f_i(a_1,\dots,a_i) = 0$ où $i = 1,\dots,q$ si q est le degré de Δ. Ceci prouve la première partie de l'assertion. La deuxième s'en déduit puisque l'action de $\widehat{\mathcal{M}}$ sur $\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta)$ est injective. □

PROPOSITION 7. — *Soit $\Delta = \sum\limits_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ où $B_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{q} \beta_{i,j}\langle x\rangle_j$.*

L'opérateur $\Delta : \widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_f}$ *est de Fredholm et son indice est*

$$\chi^+_\infty(\Delta) = \mu_\Delta - d_\Delta.$$

Démonstration. — Le résultat de Malgrange [4] et le lemme 2 appliqués au diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta) & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]] & \longrightarrow & \mathbb{C}[[1-t]]/\widehat{\mathcal{M}}(\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta)) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \Delta & & \downarrow D & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}_f} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]] & \longrightarrow & 0 & \end{array}$$

montre que Δ est un opérateur de Fredholm d'indice $\chi^+_\infty(\Delta) = \chi_\infty(D,1) - d_\Delta$ où $\chi_\infty(D,1)$ est l'indice formel au point 1 de l'opérateur $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$.

Or

$$D = \sum_{i=0}^{r} (t-1)^i B_i(-\theta) = \sum_{j=0}^{q} d_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j$$

où

$$d_j(t) = (-1)^j t^j \sum_{i=0}^{r} \beta_{i,j} (t-1)^i$$

et $\chi^+_\infty(D,1) = \sup\limits_{j=0\ldots q} [j - \mathrm{val}_1(d_j)]$.

Le résultat s'en déduit puisque pour j fixé,

$$j - \mathrm{val}_1(d_j) = j - \inf\{i \mid \beta_{i,j} \neq 0\} = \sup_{i=0\ldots r} \{j - i \mid \beta_{i,j} \neq 0\} = \mu_\Delta. \ \square$$

Lemme 3. — *Soit* $\Delta = \sum\limits_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ *où* $B_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{q} \beta_{i,j} \langle x \rangle_j$.

L'opérateur $\Delta : \widehat{\mathcal{K}_f}/\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta) \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}_f}/\widehat{\mathcal{O}_f}$ *est un opérateur de Fredholm d'indice* $-\mu_\Delta + d_\Delta$.

Démonstration. — On procède comme dans Malgrange [4], Lemme 2.2.

On pose $\mu = \mu_\Delta$. Pour $p > 0$, $\mathcal{V}_{-p}$ désigne l'ensemble des éléments de $\widehat{\mathcal{K}_f}$ de valuation $\geq -p$. Si $\hat{f} = \sum\limits_{n \geq -p} a_n x^{-[n]} \in \mathcal{V}_{-p}$, on a

$$\Delta(\hat{f}) = \sum_{n \geq -p} a_n \sum_{\substack{i=0\cdots r \\ j=0\cdots q}} \beta_{i,j} (j-n)(j-n-1)\cdots(j-n-i+1) \frac{\Gamma(x+j)}{\Gamma(x+n+i)}.$$

La formule de translation montre que val $\left(\dfrac{\Gamma(x+j)}{\Gamma(x+n+i)}\right) = n+i-j.$

On en déduit que $\Delta(\mathcal{V}_{-p}) \subset \mathcal{V}_{-p-\mu}$.

Soit $B = \{(i,j) \mid \beta_{i,j} \neq 0\}$. Pour tout $p \geq -\mu$, on a

$$\Delta(x^{-[-p]}) = \left(\sum_{(i,j)\in B} \beta_{i,j}(j+p)(j+p-1)\cdots(j+p-i+1)\right) x^{-[-p-\mu]} \\ +O(x^{-[-p-\mu+1]})$$

et le coefficient du terme de plus bas degré est un polynôme non identiquement nul donc non nul si p est assez grand. Ceci montre que, si p est assez grand, Δ réalise un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{K}_f}/\mathcal{V}_{-p}$ sur $\widehat{\mathcal{K}_f}/\mathcal{V}_{-p-\mu}$. On a donc le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{V}_{-p} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f}/\mathcal{V}_{-p} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & & \downarrow \wr & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{V}_{-p-\mu} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f}/\mathcal{V}_{-p-\mu} & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Le résultat s'en déduit en quotientant la première ligne par $\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta)$, la deuxième par $\widehat{\mathcal{O}_f}$ et en utilisant le fait que $\forall p > 0$, $\mathcal{V}_{-p}/\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta)$ est de dimension finie égale à la somme des dimensions de $\mathcal{V}_{-p}/\widehat{\mathcal{O}_f}$ et de $\widehat{\mathcal{O}_f}/\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta)$. □

PROPOSITION 8. — *Soit* $\Delta = \sum_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ *où* $B_i(x) = \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j}\langle x\rangle_j$.

1. *L'opérateur* $\Delta : \widehat{\mathcal{K}_f} \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}_f}$ *est de Fredholm d'indice* 0.
2. *L'opérateur* $\Delta : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$ *est de Fredholm et son indice est* $-\mu_\Delta$.

Démonstration. — La première assertion se déduit de la proposition 7 et du lemme 3 en considérant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta) \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}_f} \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}_f}/\widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta) \longrightarrow 0$$

et son image par Δ.

La deuxième propriété s'en déduit en utilisant le lemme 1 et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathbb{C}[x] & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]] & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & & \downarrow D & \\ 0 \longrightarrow & \mathbb{C}[x] & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]] & \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$. □

4.2. Indices Gevrey.

Pour tout réel s on note $\widehat{\mathcal{O}_f}(s)$ le sous-espace de $\widehat{\mathcal{O}_f}$ constitué des séries Gevrey d'ordre s et on pose $\widehat{\mathcal{K}_f}(s) = \widehat{\mathcal{O}_f}(s) \oplus \mathbb{C}[x]$. Un élément $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$ opère sur $\widehat{\mathcal{K}_f}(s)$. On note $\widehat{\mathcal{O}_f}(s)(\Delta)$ le sous-espace (de codimension finie) de $\widehat{\mathcal{O}_f}(s)$ défini par $\widehat{\mathcal{O}_f}(s)(\Delta) = \widehat{\mathcal{O}_f}(s) \cap \widehat{\mathcal{O}_f}(\Delta)$.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_l$, les pentes (> 0) de $N_\delta(\Delta)$ et $p_{l+1}, \ldots, p_{l'}$ celles de $N_\tau(\Delta)$.

On pose $s_i = \begin{cases} 1/p_i - 1 & \text{si} \quad i = 1, \ldots, l \\ -p_i & \text{si} \quad i = l+1, \ldots, l'. \end{cases}$

Soit s un réel non nul,

- si $s > 0$, on pose $p = (1+s)^{-1}$,
- si $s < 0$, on pose $p = -s$.

Si $s > 0$, la droite d'appui de pente p rencontre $N_\delta(\Delta)$

- en un unique sommet S_p de coordonnées $(i(p), i(p) - j(p))$ si $s \notin \{s_1, \ldots, s_l\}$,
- suivant l'arête de pente p_i si $s = s_i$. On note alors $(i(p), i(p) - j(p))$ les coordonnées de S_p, point d'abscisse minimum de cette arête.

Si $s < 0$, la droite d'appui de pente p rencontre $N_\tau(\Delta)$

- en un unique sommet S'_p de coordonnées $(i'(p), -j'(p))$ si $s \notin \{s_{l+1}, \ldots, s_{l'}\}$,
- suivant l'arête de pente p_i si $s = s_i$. On note alors $(i'(p), -j'(p))$ les coordonnées de S'_p point d'abscisse minimum de cette arête.
- Si $s = 0$, le point S_0 d'abscisse minimum du côté de pente 1 de $N_\delta(\Delta)$ a pour coordonnées $(i(1), i(1) - q)$. En effet, si $(i(1), i(1) - j(1))$ est ce point, alors pour tout (i,j) tel que $\beta_{i,j} \neq 0$, $i - j - i(1) + j(1) \geq i - i(1)$, c'est-à-dire $j \leq j(1)$. Or il existe un (i,q) tel que $\beta_{i,q} \neq 0$, donc $j(1) = q$.

Théorème 4. — *Soit* $\Delta = \sum_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ *où* $B_i(x) = \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j} \langle x \rangle_j$ *un opérateur d'ordre* r *et de degré* q.

1. *Pour tout réel* s, $\Delta : \widehat{\mathcal{K}_f}(s) \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}_f}(s)$ *est de Fredholm et son indice est (avec les notations ci-dessus)*

- *si* $s = 0$, $\chi_0(\Delta) = q - i(1) - \mu_\Delta$,
- *si* $s > 0$, $\chi_s(\Delta) = j(p) - i(p) - \mu_\Delta$,
- *si* $s < 0$, $\chi_s(\Delta) = -\mu_\Delta - i'(p)$.

2. *Pour tout réel* s, $\Delta : \widehat{\mathcal{O}_f}(s)(\Delta) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_f}(s)$ *est de Fredholm et son indice est*
   - *si* $s = 0$, $\chi_0^+(\Delta) = q - i(1) - d_\Delta$,
   - *si* $s > 0$, $\chi_s^+(\Delta) = j(p) - i(p) - d_\Delta$,
   - *si* $s < 0$, $\chi_s^+(\Delta) = -i'(p) - d_\Delta$.

Démonstration. — En remarquant que $\widehat{\mathcal{M}}(\widehat{\mathcal{K}_f}(s)) = \mathbb{C}[[1-t]]_s$, espace des séries formelles Gevrey d'ordre s, le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x] & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f}(s) & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]]_s & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & & \downarrow D & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[x] & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{K}_f}(s) & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{M}}} & \mathbb{C}[[1-t]]_s & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(où $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$) montre, compte tenu de la proposition 8 que Δ agissant sur $\widehat{\mathcal{K}_f}(s)$ est de Fredholm et que son indice est $\chi_s(\Delta) = \chi_s(D,1) + \chi_{pol}(\Delta)$ où l'indice $\chi_s(D,1)$ est calculé dans Ramis [8] (si $s = 0$, c'est le résultat de Malgrange [4]). En reprenant les notations de la démonstration du lemme 7 on a

- si $s = 0$, $\chi_0(D,1) = q - \mathrm{val}_1(d_q) = q - \inf\{i \mid \beta_{i,q} \neq 0\} = q - i(1)$, puisque par définition de $i(1)$, si $i < i(1)$, alors pour tout j tel que $\beta_{i,j} \neq 0$, $i - j + q > i$, c'est-à-dire $j < q$ et donc si $\beta_{i,q} \neq 0$, c'est que $i \geq i(1)$.
- si $s > 0$, la transformation $(x,y) \mapsto (x-y,y)$ transforme droite d'appui de pente p, *resp.* point d'appui, *resp.* arête d'appui, en droite d'appui de pente $k = \dfrac{p}{1-p}$, *resp.* point d'appui, *resp.* arête d'appui et, lorsqu'il s'agit d'une arête, le point d'abscisse minimum est transformé en le point d'abscisse minimum. Les résultats de Ramis [8] donnent donc $\chi_s(D,1) = j(p) - \mathrm{val}_1(d_{j(p)})$, d'où le résultat, en remarquant que pour tout (i,j) tel que $\beta_{i,j} \neq 0$, on a, $i - j - i(p) + j(p) \geq p(i - i(p))$, et donc si $j = j(p)$, $i \geq i(p)$ puisque $1 - p > 0$.
- si $s < 0$, la transformation $(x,y) \mapsto (-y,-x)$ a les mêmes propriétés mais échange l'ordre des deux extrêmités d'une même arête. Toujours à l'aide de Ramis [8] on trouve $\chi_s(D,1) = j'(p) - \mathrm{d}^\circ(d_{j'(p)}) =$

$-\sup\{i \mid \beta_{i,j'(p)} \neq 0\} = -i'(p)$, comme le montre l'inégalité $-j + j'(p) \geq p(i - i'(p))$, valable pour tout (i,j) tel que $\beta_{i,j} \neq 0$ et appliquée à $j = j'(p)$.

Les affirmations relatives à $\widehat{\mathcal{O}_f}(s)(\Delta) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_f}(s)$ s'en déduisent ou se démontrent directement comme la proposition 7. $\square$

Pour $s \geq 0$ les indices «méromorphes» se lisent sur le δ-polygone de Newton de l'opérateur :

- $\chi_0(\Delta)$ est l'opposé de la différence entre l'ordonnée du point S_0 et celle du point S_∞.
- si $s > 0$ et $p = (1+s)^{-1}$, $\chi_s(\Delta)$ est l'opposé de la différence entre l'ordonnée du point S_p et celle de S_∞.

Remarque 6. — Pour $s = 0$, l'indice calculé n'est pas l'indice de Δ opérant sur les séries de factorielles méromorphes convergentes. Le calcul de cet indice par la méthode proposée ici nécessiterait celui de D dans un espace Gevrey «surprécisé» $(0, 1, \lambda)$ défini par une majoration des coefficients du type $|a_n| \leq Cn^\lambda$.

Il est également facile d'obtenir des théorèmes d'indices pour les espaces Gevrey précisés à partir des résultats correspondants pour les opérateurs différentiels (Ramis [8]) et du lien entre les caractéristiques établi dans les propositions 4 et 6.

On peut enfin profiter du fait que Δ est à coefficients polynômes pour le faire opérer sur les séries de factorielles tronquées

$$\mathcal{K}_f^t = \{\hat{f} \in \widehat{\mathcal{K}_f} \mid \exists N \in \mathbb{Z}, a_n = 0 \text{ si } n > N\}.$$

Cette fois il s'agit d'un espace de «vraies» fonctions (méromorphes dans $\mathbb{C}$, dont les pôles sont tous simples et situés en des points de $-\mathbb{N}$).

Le fait que Δ opére sur $\mathcal{K}_f^t$ est une conséquence de la formule suivante, déduite de la formule de translation,

$$\delta^i \langle x \rangle_j (x^{[n]}) = \sum_{k=0}^{j} \binom{k}{j} (-1)^k (n+i-j)(n+i-j+1) \\ \cdots (n+i-j+k-1) x^{-[n+i-j+k]}.$$

PROPOSITION 9. — *Soit* $\Delta = \sum_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ *où* $B_i(x) = \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j}\langle x\rangle_j$ *un opérateur d'ordre* r *et de degré* q.

L'opérateur $\Delta : \mathcal{K}_f^t \longrightarrow \mathcal{K}_f^t$ *est de Fredholm et son indice est*

$$\chi_t(\Delta) = -\mu_\Delta - r.$$

Démonstration. — L'image par $\widehat{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{K}_f^t$ est $\mathbb{C}[1-t] = \mathbb{C}[t]$ sur lequel $D = \widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$ a pour indice $\chi_{-\infty}(D) = \inf_{j=0,\dots,q} [j - \mathrm{d}^\circ(d_j)] = \inf_{j=0,\dots,q} -\sup\{i \mid \beta_{i,j} \neq 0\} = -\sup_{j=0,\dots,q} \sup\{i \mid \beta_{i,j} \neq 0\} = -r$, puisqu'il existe un indice j tel que $\beta_{r,j} \neq 0$. Le résultat s'en déduit comme dans la proposition 8. □

L'injection canonique de $\mathcal{K}_f^t$ est d'image dense, si on munit $\widehat{\mathcal{K}_f}$ de la distance (ultramétrique) associée à la valuation définie ci-dessus et qui en fait un Banach. En appliquant un lemme général (Ramis [8]) on en déduit la

PROPOSITION 10. — *Soit* $\Delta = \sum_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ *où* $B_i(x) = \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j}\langle x\rangle_j$ *un opérateur d'ordre* r *et de degré* q.

L'opérateur $\overline{\Delta} : \widehat{\mathcal{K}_f}/\mathcal{K}_f^t \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}_f}/\mathcal{K}_f^t$ *est surjectif et son noyau est de dimension finie égale à* $r + \mu_\Delta$.

On peut énoncer des résultats analogues pour les espaces Gevrey s dans lesquels $\mathcal{K}_f^t$ est également dense.

5. La transformée de Laplace formelle.

5.1. Transformée de Laplace d'un opérateur.

On note ∂_z l'opérateur de dérivation $\dfrac{d}{dz}$. On note $\mathbb{C}[e^{-z}, \partial_z]$ l'algèbre non commutative des polynômes en e^{-z} et ∂_z. La multiplication correspond à la composition des opérateurs et est caractérisée par les règles :

- $\partial_z e^{-z} = e^{-z}(\partial_z - 1)$
- $\mathbb{C}[e^{-z}]$ et $\mathbb{C}[\partial_z]$ sont des anneaux commutatifs.

En écrivant $e^{-z} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-z)^n}{n!}$ on peut voir $\mathbb{C}[e^{-z}, \partial_z]$ comme une sous-algèbre de l'algèbre $\mathbb{C}\{z\}[\partial_z]$.

PROPOSITION 11. — *La correspondance $x \mapsto \partial_z$, $\tau \mapsto e^{-z}$ définit un isomorphisme d'algèbre $\widehat{\mathcal{L}}$ de $\mathbb{C}[x,\tau]$ sur $\mathbb{C}[e^{-z}, \partial_z]$. Cet isomorphisme est appelé transformation de Laplace formelle.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\widehat{\mathcal{L}}(x\tau) = \widehat{\mathcal{L}}(x)\widehat{\mathcal{L}}(\tau) = \partial_z e^{-z} = e^{-z}(\partial_z - 1) = \widehat{\mathcal{L}}(\tau)\widehat{\mathcal{L}}(x-1) = \widehat{\mathcal{L}}(\tau(x-1))$. Or $x\tau = \tau(x-1)$. □

PROPOSITION 12. — *Soit $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$. On passe de $\widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$ à $\widehat{\mathcal{L}}(\Delta)$ par le changement de variable $t = e^{-z}$. En particulier le polygone de Newton de $\widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$ en $t = 1$ et celui de $\widehat{\mathcal{L}}(\Delta)$ en $z = 0$ sont identiques. Si k désigne une pente de $N_1(\widehat{\mathcal{M}}(\Delta))$ alors les k-caractéristiques de $\widehat{\mathcal{M}}(\Delta)$ et les k-caractéristiques de $\widehat{\mathcal{L}}(\Delta)$ sont les mêmes.*

On en déduit la

PROPOSITION 13. — *Soient $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$ et P sa transformée de Laplace formelle. Alors :*

(i) *On passe de $N_\delta(\Delta)$ à $N_0(P)$ par la transformation linéaire : $(x,y) \mapsto (x-y,y)$. La pente p, $0 \leq p \leq 1$, est changée en $\frac{p}{1-p}$.*

(ii) *Soit p $(0 < p \leq 1)$ une pente de $N_\delta(\Delta)$, on pose $k = \frac{p}{1-p}$. Alors les k-caractéristiques de P sont identiques aux p-caractéristiques de Δ.*

5.2. Transformée de Laplace d'une série formelle.

DÉFINITION 8. — *Soit $\hat{F}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{-(\lambda+n+1)}$ une série formelle ramifiée de puissances de $1/x$, sa transformée de Laplace formelle est la série formelle ramifiée de puissances de z définie par*

$$\hat{\phi}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(\lambda+n+1)} z^{\lambda+n}.$$

PROPOSITION 14. — *Si $\hat{F}$ est une série formelle ramifiée de puissance de $1/x$, pour tout $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$,*

$$\widehat{\mathcal{L}}(\Delta(\hat{F})) = \widehat{\mathcal{L}}(\Delta)(\widehat{\mathcal{L}}(\hat{F})).$$

Démonstration. — Il suffit d'établir pour $j, i \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ la formule :

$$\widehat{\mathcal{L}}(\tau^j x^i (x^{-(\lambda+1)}) = e^{-jz}\partial_z^i \left(\frac{z^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right).$$

On pose $\hat{F}(x) = \tau^j x^i (x^{-(\lambda+1)}) = (x+j)^{-(\lambda-i+1)}$. On peut écrire

$$\hat{F}(x) = (x+j)^{-(\lambda-i+1)} = x^{-(\lambda-i+1)} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \langle \lambda - i + 1 \rangle_n \frac{j^n}{n! x^n}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}(\hat{F})(z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-jz)^n}{n!} \langle \lambda - i + 1\rangle_n \frac{z^{\lambda-i}}{\Gamma(\lambda+n-i+1)} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(-jz)^n}{n!} \frac{z^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \\
&= e^{-jz}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)\frac{z^{\lambda-i}}{\Gamma(\lambda+1)} \\
&= e^{-jz}\partial_z^i\left(\frac{z^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right).
\end{aligned}$$

□

6. Solutions séries formelles.

THÉORÈME 5. — *Soient $\Delta \in \mathbb{C}[x,\tau]$, et G une série formelle de puissances de $1/x$ Gevrey d'ordre 1. On suppose qu'il existe $\hat{F}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{-(n+1)}$ telle que $\Delta(\hat{F}) = G$. Alors la série $\hat{F}$ est Gevrey d'ordre 1 ou il existe un unique réel $s > 1$ et un unique réel $A > 0$ tels que $\limsup((n!)^{-s}|a_n|)^{1/n} = A$. De plus $s = 1/p$ où $0 < p < 1$ est l'une des pentes de $N_\delta(\Delta)$ et A est l'une des p-caractéristiques associées.*

Démonstration. — Soient P, $\hat{\phi} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\hat{\Gamma}$ les transformées de Laplace formelles respectives de Δ, $\hat{F}$ et G. D'après la proposition 14, on a $P(\hat{\phi}) = \hat{\Gamma}$. Puisque G est Gevrey d'ordre 1, $\hat{\Gamma}$ est convergente, on peut donc appliquer le théorème 1.5.17 de Ramis [8] ; $\hat{\phi}$ converge ou il existe un unique réel $s > 0$ et un unique réel $A > 0$ tels que $\limsup((n!)^{-s}|a_n/n!|)^{1/n} = A$.

De plus $s = 1/k$ où k est l'une des pentes strictement positives du polygone de Newton de P en 0 et A est l'une des $k-$caractéristiques associées. On applique la proposition 13 pour conclure. $\square$

Remarque 7. — Le théorème reste valable si on remplace G par $G +$ un polynôme en x.

7. Théorèmes d'indices (séries formelles).

On introduit les espaces $\hat{K} = \mathbb{C}[[x^{-1}]][x]$ et pour $s \geq 1$, $\hat{K}_s = \mathbb{C}[[x^{-1}]]_s[x]$ sur lesquels Δ opère. La transformation de Laplace formelle définit une application linéaire surjective de $\hat{K}$ sur $\mathbb{C}[[z]]$, *resp.* de $\hat{K}_s$ sur $\mathbb{C}[[z]]_{s-1}$, de noyau $\mathbb{C}[x]$. En appliquant la même méthode que dans la proposition 8 et dans le théoreme 4, on établit le

THÉORÈME 6. — *Soit* $\Delta = \sum_{i=0}^{r} \delta^i B_i(x)$ *où* $B_i(x) = \sum_{j=0}^{q} \beta_{i,j} x^j$ *un opérateur d'ordre* r *et de degré* q.

1. *L'opérateur* $\Delta : \hat{K} \longrightarrow \hat{K}$ *est de Fredholm d'indice* 0.

2. *Pour* $s \geq 1$ *l'opérateur* $\Delta : \hat{K}_s \longrightarrow \hat{K}_s$ *est de Fredholm, d'indice* $j(p) - i(p) - \mu_\Delta$, *où le point* $(i(p), j(p) - i(p))$ *de* $N_\delta(\Delta)$ *est défini comme dans le théorème 4 avec* $p = 1/s$.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que le calcul de l'indice Gevrey de $P = \widehat{\mathcal{L}}(\Delta)$ conduit à déterminer la valuation en 0 des coefficients de $P = \sum_{j=0}^{q} d_j(z) \partial_z^j$.

Or $d_j(z) = \sum_{i=0}^{r} \beta_{i,j} (e^{-z} - 1)^i$ a pour valuation $\inf\{i \mid \beta_{i,j} \neq 0\} = i(p)$. L'action de Δ sur $\mathbb{C}[z]$ a pour indice $\chi_{\mathrm{pol}}(\Delta) = -\mu_\Delta$. $\square$

Remarque 8. — L'opérateur $\widehat{\mathcal{L}}(\Delta)$ n'étant plus à coefficients polynômes, on ne peut plus calculer d'indices pour $s < 1$. On retrouve donc par cette méthode les résultats que Praagman obtient autrement (pour une classe plus étendue d'opérateurs), mais on ne peut pas plus que lui atteindre le cas $s < 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DUVAL, Lemmes de Hensel et factorisation formelle pour les opérateurs aux différences., Funkcial Ekvac., 26 (1983), 349-368.

[2] J. ÉCALLE, Les fonctions résurgentes tome 3, Publications Mathématiques d'Orsay, 85.05 (1985).

[3] R. GÉRARD et D. LUTZ, Maillet type theorems for algebraic difference equations, Kumamoto J. Math., Vol 3, March (1990), 11-26.

[4] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, L'Enseignement Math., 20 (1974), 147-176.

[5] N.E. NÖRLUND, Leçons sur les séries d'interpolation, Gauthiers Villars et Cie, Paris, 1926.

[6] N.E. NÖRLUND, Leçons sur les équations linéaires aux différences finies, Gauthiers Villars et Cie, Paris, 1929.

[7] C. PRAAGMAN, Stokes and Gevrey Phenomena in Relation to Index Theorems in the Theory of Meromorphic Linear Difference Equations, Funkcialaj Ekvac., 29 (1986), 259-279.

[8] J.P. RAMIS, Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Memoirs of the A.M.S., Nr. 296 (1984).

Manuscrit reçu le 15 avril 1993,
révisé le 20 août 1993.

A. BARKATOU,
INPG – LMC
46 avenue Félix Viallet
38031 Grenoble Cedex (France)
&
A. DUVAL,
Université des Sciences et Technologies de Lille I
UFR de Mathématiques-URA 751
Géométrie, Analyse et Topologie
59655 Villeneuve d'Asq Cedex (France).