ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

G. CHRISTOL
Z. MEBKHOUT

Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 5 (1993), p. 1545-1574
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1545_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 5 (1993), 1545-1574

SUR LE THÉORÈME DE L'INDICE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES I

par G. CHRISTOL et Z. MEBKHOUT

Dédié à Bernard Malgrange

Introduction.

Dans cet article nous poursuivons le programme de Philippe Robba sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques ([R$_1$], [R$_2$], [R$_3$], [R$_4$], [R$_5$], [R$_6$]).

Soit $p > 0$ un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le complété du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique, $\mathbb{Z}_p$ l'adhérence de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ un polynôme

---

Mots-clés : Exposants p-adiques – Indice – Structure faible de Frobenius – Nombre de Fuch-Malgrange.
Classification A.M.S. : 12H25.

différentiel de $\mathbb{C}_p\left[x, \dfrac{d}{dx}\right]$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}_p$. Pour tout réel $r > 0$, nous définissons $\exp_0^r(P)$, l'ensemble des exposants de P dans le disque ouvert $D(0, r^-)$, qui est une partie de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$. Nous montrons que si les exposants de P dans le disque ouvert $D(0, r^-)$ ont la propriété (N-L) (non Liouville) alors l'opérateur P est à indice dans l'espace des fonctions analytiques $\mathcal{A}_0^r$ dans le disque ouvert $D(0, r^-)$.

Nous conjecturons que $\exp_0^r(P)$ est une partie *finie* et que si P est un polynôme différentiel à coefficients dans le corps des nombres algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$ alors les exposants de P dans le disque ouvert $D(0, r^-)$ sont des nombres *algébriques*, en particulier ont la propriété (N-L). Les propriétés des exposants, c'est-à-dire de la monodromie, restent le principal obstacle pour avoir un théorème général d'indice pour les équations différentielles p-adiques. Nous espérons surmonter dans un prochain travail cet obstacle au moins pour les équations provenant de la géométrie dont les exposants dans chaque classe résiduelle devraient être rationnels.

Un point clef est la structure des modules fuchiens sur une couronne de diamètre non nul, c'est-à-dire des modules dont le rayon de convergence sur chaque circonférence de la couronne est maximal. Nous montrons qu'un tel module admet, au voisinage de chaque circonférence de la couronne, une solution de la forme $x^\alpha f(x)$ où α est un entier p-adique et $f(x)$ une fonction analytique non nulle dans une couronne de diamètre *non nul* à côté de cette circonférence. Nous utilisons pour cela la structure de Frobenius faible d'un tel module établie par Christol-Dwork dans ([CD$_2$]). Nous faisons qu'indiquer dans le §2 le principe de la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à ([CM]) pour les démonstrations complètes. Nous utilisons ensuite le théorème de Robba ([R$_1$]) sur l'existence de l'indice des équations *injectives* et le théorème de factorisation de Dwork-Robba ([DR]). Enfin, nous ferons usage de façon essentielle pour passer à la limite, du théorème des homomorphismes de Banach pour les espaces $\mathcal{LF}$ démontré par Grothendieck ([G]) dans le contexte des corps valués complets.

Comme l'a montré Robba dans ([R$_4$]) le théorème de l'indice est à la base de la définition du nombre de Fuchs-Malgrange des équations différentielles p-adiques. Il fournit un support à la définition de la monodromie p-adique. Il est aussi clairement à la base des propriétés de finitude de la cohomologie p-adique des variétés algébriques définies sur des corps de caractéristique $p > 0$ (*cf.* [MN] et le §6). C'est dire l'importance d'un tel théorème. Il doit s'inscrire dans la recherche de la difficile question des coefficients p-adiques qui a aussi été entreprise par P. Berthelot (*cf.* [B$_1$],

$[B_2]$).

A cette occasion nous voulons rendre hommage à Bernard Malgrange dont l'idée, entre autres, de définir le nombre de Fuchs d'une équation différentielle à l'aide d'un *théorème d'indice* s'est révélée être le point crucial dans l'étude de la cohomologie de de Rham des variétés algébriques définies sur le corps des nombres complexes et par la suite sur des corps de caractéristique $p > 0$.

Nous voudrions remercier Alberto Arabia pour l'aide qu'il nous a apportée dans la réalisation de ce travail.

1. Rappel des résultats de Philippe Robba.

1.1. Rayon de convergence au bord d'un disque.

1.1.1. Soit $\mathbb{C}_p \to \Omega$ une extension de corps valués complets dont l'extension résiduelle correspondante est transcendante. Soit $r > 0$ un réel positif, un disque générique au bord du disque ouvert $D(0, r^-)$ de $\mathbb{C}_p$ est un disque ouvert $D(t_r, r^-)$ de Ω contenu dans la circonférence de centre 0 et de rayon r et qui ne rencontre pas $\mathbb{C}_p$. Un centre t_r de ce disque est un point générique. Une extension $\mathbb{C}_p \to \Omega$ pour laquelle on a un disque générique pour tout $r > 0$ existe (*cf.* $[R_6]$, III.9.1). En vertu du théorème de Krasner (*cf.* $[C_1]$) le corps $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos. Un polynôme différentiel $P = P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ n'a donc pas de points singuliers dans tout disque générique. L'espace vectoriel sur Ω, $\mathrm{Ker}(P, \Omega[[x - t_r]])$ des solutions formelles centrées en t_r est de dimension m, degré en $\dfrac{d}{dx}$ de P. Le théorème de Lutz affirme de même que l'espace $\mathrm{Ker}(P, \Omega\{x - t_r\})$ des solutions convergentes centrées en t_r est de dimension m. Nous notons par $|.|$ la valeur absolue dans un corps et par $||.||$ la norme dans un espace fonctionnel.

DÉFINITION 1.1.1. — *Le rayon de convergence $\rho_0^r(P)$ du polynôme différentiel P au bord du disque $D(0, r^-)$ est le plus grand réel $\rho \leq r$ tel que P possède une base fondamentale de solutions convergentes dans le disque ouvert $D(t_r, \rho^-)$.*

On l'appellera le rayon de convergence en $r > 0$ de P, c'est un nombre strictement positif au plus égal à r en vertu du théorème de Lutz.

1.1.2. De même si $\frac{d}{dx} - G(x)$ est un système différentiel d'ordre un de rang m où G est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}_p(x)$ on définit son rayon de convergence en r, $\rho_0^r(G)$. En fait une matrice fondamentale au voisinage du point générique t_r est donnée par

$$\mathcal{U}_{G,t_r}(x) = \sum_{s\geq 0} G_s(t_r)\frac{(x-t_r)^s}{s!},$$

où les matrices G_s sont définies par récurrence, $G_0 = I$ et $G_{s+1} = \frac{d}{dx}G_s + G_sG$. Si $f(x) = \sum_k a_k x^k$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ sa norme $||f||_r$ en r est le nombre $\sup_k |a_k|r^k$. Cette norme se prolonge aux fractions rationnelles $f(x)$ à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et aux matrices à coefficients fractions rationnelles. On trouve alors que le rayon $\rho_0^r(G)$ de convergence en r du système $\frac{d}{dx} - G(x)$ est égal à

$$\inf\bigl(r, \liminf_{s\to\infty} ||G_s/s!||_r^{-1/s}\bigr).$$

Cette expression montre que le rayon $\rho_0^r(G)$ de convergence en r du système $\frac{d}{dx} - G(x)$ ne dépend que de r en non du point générique. La fonction $r \to \rho_0^r(G)$ est logarithmiquement concave sur tout intervalle $[r_1, r_2]$ ne contenant pas de valeur singulière à l'intérieur. C'est donc une fonction continue dans $]r_1, r_2[$ et par le théorème de Christol-Dwork ([CD$_2$]) elle est aussi continue aux extrémités. Rappelons qu'une fonction h de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est dite avoir *logarithmiquement une propriété* si la fonction composée $\mathrm{Log} \circ h \circ \exp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a cette propriété.

1.2. Les théorèmes de Ph. Robba.

1.2.1. Soit $P\left(x, \frac{d}{dx}\right)$ un polynôme différentiel à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et $r > 0$ un réel positif. On dit que P est *complètement soluble* en r si la dimension de l'espace de ses solutions analytiques dans le disque générique $D(t_r, r^-)$ est égal à son ordre m en $\frac{d}{dx}$. A l'opposé on dit qu'il est *injectif* en r si cette dimension est nulle.

THÉORÈME 1.2.1 ([R$_1$]). — *Soit $P\left(x, \frac{d}{dx}\right)$ un polynôme différentiel à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et $r > 0$ un réel positif, si P est injectif en r alors c'est un opérateur à indice dans l'espace des fonctions analytiques $\mathcal{A}_0^r$ dans le disque ouvert $D(0, r^-)$ de $\mathbb{C}_p$.*

Donc $\chi(P, \mathcal{A}_0^r) := \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Ker}(P, \mathcal{A}_0^r) - \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}(P, \mathcal{A}_0^r)$ est finie. En fait si P est injectif dans l'espace $\mathcal{A}_{t_r}^r$ il est aussi injectif dans l'espace $\mathcal{A}_0^r$.

1.2.2. Soit $P\Big(x, \dfrac{d}{dx}\Big) = a(x)\dfrac{d}{dx}+b(x)$ un polynôme différentiel d'ordre un. Notons $\exp_0^r(P)$ la classe modulo $\mathbb{Z}$ de la somme des résidus aux pôles de la fraction rationnelle b/a contenus dans le disque ouvert $D(0,r^-)$ de $\mathbb{C}_p$. Pour un nombre α de $\mathbb{C}_p$ posons

$$\lambda_+(\alpha) := \liminf_{n\to\infty} |\alpha+n|^{1/n}$$

et

$$\lambda_-(\alpha) := \liminf_{n\to\infty} |\alpha-n|^{1/n}.$$

On dit que α a la propriété (N-L) (non Liouville) si $\lambda_+(\alpha)$ et $\lambda_-(\alpha)$ sont ≥ 1. Les nombres $\lambda_+(\alpha)$ et $\lambda_-(\alpha)$ ne dépendent que de la classe modulo $\mathbb{Z}$ de α. Les nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$ ont la propriété (N-L) (*cf.* [C1], prop. 6.3.5).

Notons $\mathcal{R}_0(r)$ l'espace des séries de Laurent $\sum\limits_{k=-\infty,\infty} a_k x^k$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}_p$, qui convergent dans la couronne ouverte $r-\epsilon < |x| < r$ pour un $\epsilon > 0$, et $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ l'espace des séries $\sum\limits_{k=-\infty,-1} a_k x^k$ telles que $\lim\limits_{k\to-\infty} |a_k|(r-\epsilon)^{-k} = 0$ pour un $\epsilon > 0$.

THÉORÈME 1.2.2 ([R4]). — *Soit* $P\Big(x, \dfrac{d}{dx}\Big) = a(x)\dfrac{d}{dx} + b(x)$ *un polynôme différentiel d'ordre un.*

a) *Supposons que* $\rho_0^r(P) = r$ *et* $\rho_0^{r-\epsilon}(P) < r-\epsilon$ *pour* $\epsilon > 0$ *assez petit, alors* P *est à indice dans les espaces* $\mathcal{A}_0^r$ *et* $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$.

b) *Supposons que* $\rho_0^r(P) = r$ *et* $\rho_0^{r-\epsilon}(P) = r-\epsilon$ *pour* $\epsilon > 0$ *assez petit, alors* P *est simultanément à indice dans l'espace* $\mathcal{A}_0^r$ *et dans l'espace* $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$, *si et seulement si* $\exp_0^r(P)$ *a la propriété (N-L).*

c) *Supposons que* $\rho_r(P) = r$ *et* $\rho_0^{r-\epsilon}(P) = r-\epsilon$ *pour* $\epsilon > 0$ *assez petit, alors* P *est à indice dans l'espace* $\mathcal{R}_0(r)$ *si et seulement si* $\exp_0^r(P)$ *a la propriété (N-L) et alors* $\chi(P,\mathcal{R}_0(r)) = 0$.

d) *Si* P *est à indice dans l'espace* $\mathcal{A}_0^r$ *alors* $\chi(P,\mathcal{A}_0^r)$ *est égal à* $\dfrac{d^-}{d\operatorname{Log} r}(\rho_0^r(P)) - \operatorname{ord}_0^{r^-}(a)$.

On a noté $\operatorname{ord}_0^{r^-}(a)$ le degré du diviseur des zéros de a contenus dans le disque ouvert $D(0,r^-)$ et $\dfrac{d^-}{d\operatorname{Log} r}(\rho_0^r(P))$ la dérivée à gauche de la fonction $\operatorname{Log}\circ\rho_0^r(P)\circ\exp$. En particulier tout polynôme différentiel à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ d'ordre un est à indice dans l'espace $\mathcal{A}_0^r$. On aimerait avoir un tel théorème pour tous les polynômes différentiels à coefficients dans le corps des nombres algébriques. Le cas d'un opérateur à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ soluble en r et ayant au plus une seule singularité régulière dans le disque $D(0, r^-)$ est résolu par le théorème de transfert de Christol ([C$_2$]).

1.3. Nous avons besoin de considérer les opérateurs différentiels définis dans des couronnes. Le nombre $\sup_{r-\epsilon \leq |x| < r} |f(x)|$ est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions rationnelles sans pôles sur la couronne $r - \epsilon \leq |x| < r$ (*cf.* [C$_1$]). L'espace des éléments analytiques $E_0(r-\epsilon, r)$ dans la couronne $r - \epsilon \leq |x| < r$ est le complété de cet espace pour cette norme. L'espace des éléments analytiques au bord $E_0(r)$ est la réunion des espaces $E_0(r-\epsilon, r)$ pour $\epsilon > 0$ variable. L'espace $E_0(r)$ est une sous-algèbre différentielle de l'algèbre $\mathcal{R}_0(r)$ qui est en fait un corps (*cf.* [C$_1$], 2.4.10).

Pour un opérateur différentiel $P\left(x, \frac{d}{dx}\right)$ à coefficients dans l'espace $E_0(r)$ le rayon de convergence en r', $\rho_0^{r'}(P)$ est défini pour $r - \epsilon \leq r' \leq r$. C'est encore une fonction continue ([CD$_2$]). Un tel opérateur opère sur $\mathcal{A}_{t_r}^r$. On a alors la généralisation du théorème de Robba ([R$_1$], [DR]) :

THÉORÈME 1.3.1. — *Soit P un opérateur différentiel à coefficients dans l'espace $E_0(r)$ qui est* injectif *dans l'espace $\mathcal{A}_{t_r}^r$, alors P est* bijectif *dans l'espace $\mathcal{R}_0(r)$.*

1.4. Soit P un opérateur différentiel à coefficients dans l'espace $E_0(r)$ qui est *injectif* dans l'espace $\mathcal{A}_{t_r}^r$ alors P reste *injectif* dans l'espace $\mathcal{A}_{t_{r-\epsilon}}^{r-\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$ assez petit ([R$_1$], [DR]).

2. Modules p-adiques fuchsiens.

2.1. Structure de Frobenius.

Soient $0 \leq r_1 < r_2$ deux réels, qui sont fixés dans ce paragraphe, et soit E_C l'anneau des éléments analytiques dans la couronne $C = \{x \in \mathbb{C}_p; |x| \in [r_1, r_2[\}$. Nous considérons un opérateur "sans singularité dans la couronne C", c'est-à-dire un opérateur $P = \delta^m + a_{m-1}\delta^{m-1} + \cdots + a_0$ de $E_C[\delta]$ où $\delta := x.\frac{d}{dx}$.

Lorsque les coefficients a_i de P sont suffisamment "gros", on peut calculer facilement son rayon de convergence $\rho_0^r(P)$ dans le disque générique $D(t_r, r^-)$.

PROPOSITION 2.1.1 ([CD_2]). — *Soit r un nombre de $[r_1, r_2]$.*

1) *Si, pour un indice i_0, $\|a_{i_0}\|_r > 1$, alors :*
$$\rho_0^r(P) = r\,p^{-1/(p-1)} \min_{0 \le i \le m-1} \|a_i\|_r^{-1/(i+1)}$$

2) *Si, pour $0 \le i < m$, $\|a_i\|_r \le 1$, alors $\rho_0^r(P) \ge r\,p^{-1/(p-1)}$.*

Ce résultat, apparaît pour la première fois dans les travaux de Dwork. Son analogue x-adique a été mis en évidence et utilisé par Katz ([Ka]) pour démontrer le théorème de Turritin. Il a eu, depuis, de nombreux avatars. L'un des plus intéressants est le "lemme de Hensel" pour les opérateurs différentiels ([R_7]).

Pour aller plus loin, c'est-à-dire préciser le rayon de convergence dans le deuxième cas du théorème, il faut recourir à la "structure de Frobenius". Heuristiquement, on peut dire que celle-ci rend compte des simplifications p-adiques qui apparaissent, lorsque $\rho_0^r(P) > r\,p^{-1/(p-1)}$, dans le calcul de la matrice G_{s+p} à partir de la matrice G_s.

DÉFINITION 2.1.2. — *On dira qu'un module différentiel $\mathcal{M}$ sur l'anneau E_C possède un antécédent de Frobenius s'il existe un module différentiel, sur l'anneau E_C^ψ des éléments analytiques dans la couronne $C^p = \{x; |x|^p \in [r_1, r_2[\}$, dont l'image inverse par l'application de Frobenius $x \mapsto x^p$ soit $\mathcal{M}$.*

Plus généralement, on dira que $\mathcal{M}$ possède un antécédent d'ordre h s'il existe un module différentiel, sur l'anneau $E_C^{\psi^h}$ des éléments analytiques dans la couronne $C^{p^h} = \{x; |x|^{p^h} \in [r_1, r_2[\}$, dont l'image inverse par l'application $x \mapsto x^{p^h}$ soit $\mathcal{M}$.

THÉORÈME ([CD_2]). — *Si $\rho_0^r(P) > r\,p^{-1/p}$ pour tout nombre r de l'intervalle $[r_1, r_2]$, le module différentiel $\mathcal{M} = E_C[\delta]/E_C[\delta]P$ possède un antécédent de Frobenius $\mathcal{M}^\psi$.*

La démonstration de ce théorème se fait en deux temps. En raffinant la méthode déjà utilisée dans le cas des circonférences ([C_2]), on montre d'abord que chaque nombre r est contenu dans un petit intervalle où un antécédent de Frobenius existe. Ceci utilise le résultat 2.1.1 et son analogue x-adique après passage en caractéristique p. Ensuite, on "recolle" les différents antécédents obtenus. Les outils de base sont alors l'unicité de l'antécédent et le théorème de décomposition des matrices en facteurs singuliers, analogue p-adique de la décomposition de Birkhoff.

Notons K_C^ψ le corps des fractions de E_C^ψ. Le théorème du vecteur cyclique (tout module différentiel sur un corps possède une base cyclique c'est-à-dire de la forme $\{e, \delta e, \cdots \delta^{m-1} e\}$) dit que $\mathcal{M}^\psi \otimes K_C^\psi$ est isomorphe à un module différentiel de la forme $K_C^\psi[\delta]/K_C^\psi[\delta]Q$ pour un polynôme différentiel Q de $K_C^\psi[\delta]$. Mais, en général, $\mathcal{M}^\psi$ lui-même n'aura pas de base cyclique. Autrement dit, l'opérateur Q aura des singularités “apparentes” dans la couronne C^p. L'existence de telles singularités, qui dépendent du choix du polynôme Q et non du module $\mathcal{M}^\psi$ mais que l'on ne peut jamais supprimer, complique beaucoup les démonstrations.

On peut définir un rayon de convergence pour le polynôme Q. On démontre que l'on a :

$$\rho_0^{r^p}(Q) = (\rho_0^r(P))^p > r^p p^{-p/(p-1)}$$

pour tout nombre r de l'intervalle $[r_1, r_2]$. De plus, on vérifie que le module différentiel $\mathcal{M}^\psi$ est entièrement déterminé par cette dernière propriété(*).

Nous avons énoncé le théorème 2.2.1 dans le cas où le module différentiel $\mathcal{M}$ avait une base cyclique. En fait il est vrai pour des modules généraux. On peut, en particulier, l'appliquer au module $\mathcal{M}^\psi$, puis itérer le procédé tant que le rayon de convergence restera supérieur à $r p^{-1/p}$. On construit ainsi, par récurrence, une suite d'antécédents, appelée “structure de Frobenius faible” du module différentiel $\mathcal{M}$. Cette suite sera infinie dans le cas des modules fuchsiens, c'est-à-dire lorsque $\rho_0^r(P)$ est maximal pour tout nombre r.

DÉFINITION 2.1.4. — *On dira que P est fuchsien dans la couronne C si le rayon de convergence $\rho_0^r(P)$ est égal à r pour tout r de l'intervalle $[r_1, r_2]$.*

Par le théorème de transfert de Dwork ([D]) l'opérateur P est fuchsien dans la couronne C si et seulement si pour tout point x_0 à l'intérieur de la couronne, toute solution locale de P au voisinage de x_0 a un rayon de convergence au moins égal à $|x_0|$.

COROLLAIRE 2.1.5. — *L'opérateur P est fuchsien dans la couronne C, si et seulement si, pour tout entier h, le module différentiel $E_C[\delta]/E_C[\delta]P$ possède un antécédent d'ordre h.*

(*) Si un module différentiel possède un antécédent, il en a p qui ne sont pas isomorphes. Par exemple, les opérateurs $Q_i = \delta - i/p$ $(0 \leq i < p)$ donnent des antécédents non isomorphes de $E_C[\delta]/E_C[\delta]\delta$. Cependant, il n'y en a qu'un seul qui a un grand rayon de convergence.

Notons $\mathcal{M}^{\psi^h}$ l'antécédent d'ordre h. Choisissons une base de $\mathcal{M}$ (par exemple $1, \delta, \cdots, \delta^{m-1}$) et une base de $\mathcal{M}^{\psi^h}$ et notons G (resp. F_h) la matrice de la multiplication par δ dans ces bases. L'isomorphisme entre l'image inverse de $\mathcal{M}^{\psi^h}$ et $\mathcal{M}$ est donné par une matrice K_h de $\mathrm{Gl}_n(E_C)$ qui vérifie :

$$(*) \qquad \delta(K_h) + K_h\, G = p^h\, F_h(x^{p^h})\, K_h.$$

Un calcul naïf consiste à faire tendre h vers l'infini de façon à obtenir une matrice $K = \lim K_h$ vérifiant $\delta(K) + K\,G = 0$! Chaque ligne de la matrice K donne alors une solution de P. Pour mettre en œuvre une telle stratégie, il faut, d'abord, prouver que la suite de matrices $F_h(x^{p^h})$ reste bornée sur la couronne C, puis que la suite K_h converge vers une matrice non nulle K dans un espace raisonnable de fonctions. L'existence, éventuelle, de logarithmes dans les solutions fait qu'on ne peut pas espérer que K soit inversible.

2.2. Existence de solutions.

Soit r un nombre de l'intervalle $[r_1, r_2]$. En choisissant, dans chacun des modules $\mathcal{M}^{\psi^h}$, une base $\mathcal{E}_r$ formée à partir d'un "petit vecteur cyclique" dont l'existence est prouvée dans [CD₁], on montre que l'on peut trouver des matrices K_h et F_h vérifiant $(*)$ et telles que :

$$\|F_h\|_{r^{p^h}} \leq 1 \qquad\qquad \|K_h\|_r\, \|K_h^{-1}\|_r \leq \lambda = c(m,p)\, p^{m-1}$$

où $c(m,p)$ est une constante valant 1 dès que $p > m$. La proposition 2.1.1 montre que la première de ces deux majorations est vérifiée dès que $\mathcal{E}_r$ est une base cyclique. Cependant, en général, il n'existe pas de base cyclique. On construit donc la base $\mathcal{E}_r$ à partir d'une base cyclique de $\mathcal{M}^{\psi^h} \otimes K_C^{\psi^h}$. On "fait disparaître" les singularités apparentes en utilisant le théorème de décomposition de matrices en facteurs singuliers. Ceci exclut que l'on puisse obtenir directement une majoration des matrices F_h, K_h et K_h^{-1} valable sur toute la couronne. Or on veut, justement, passer à la limite sur une couronne et non sur une circonférence! Il faut donc "recoller" ces majorations. C'est le but du résultat suivant :

THÉORÈME 2.2.1. — *Soient r et s deux nombres de l'intervalle $[r_1, r_2]$ et soit K une matrice de $\mathrm{Gl}_n(E_C)$. Il existe une matrice L de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}_p(x) \cap E_C)$ et une matrice diagonale D à coefficients dans $\mathbb{Q}$ telles que :*

$$\|x^D\, L\|_r\, \|L^{-1}\, x^{-D}\|_r = \|x^D\, L\, K\|_s\, \|K^{-1}\, L^{-1}\, x^{-D}\|_s = 1.$$

On commence par établir le théorème en remplaçant le corps des constantes $\mathbb{C}_p$ par un corps de valuation discrète. On utilise ensuite le fait que l'ensemble des nombres algébriques (sur $\mathbb{Q}$) est dense dans $\mathbb{C}_p$.

On applique le théorème 2.2.1 à la matrice faisant passer de la base $\mathcal{E}_{r_1}$ à la base $\mathcal{E}_{r_2}$. On construit ainsi des matrices K_h et F_h vérifiant $(*)$ et des matrices diagonales D_h à coefficients dans $\mathbb{Q}$ telles que :

$$\|x^{D_h} F_h x^{-D_h}\|_{r^{p^h}} \leq 1$$

$$\|x^{pD_{h+1}} K_{h+1} K_h^{-1} x^{-D_h}\|_r \, \|x^{D_h} K_h \, , K_{h+1}^{-1} x^{-pD_{h+1}}\|_r \leq \lambda.$$

Pour tout nombre r de l'intervalle $[r_1, r_2]$ (les propriétés de convexité font que ces majorations sont vraies pour tout r si elles sont vraies aux extrémités de l'intervalle).

On remarque que les matrices D_h, que nous venons de définir, gardent leurs propriétés si on les remplace par $D_h + \alpha_h I$ où I est la matrice unité.

LEMME 2.2.2. — *Soit D une matrice $m \times m$ diagonale à coefficients rationnels. Il existe un rationnel α et une matrice E, diagonale à coefficients dans $\mathbb{Q} \cap \left[\dfrac{1-m}{2m}, \dfrac{m-1}{2m}\right]$, tels que les coefficients de la matrice $D - \alpha I - E$ soient des entiers.*

Le lemme 2.2.2 et le fait que $K_{h+1} K_h^{-1} = H_h(x^{p^h})$ pour une matrice H_h de $\mathrm{Gl}_m(E_C^{\psi^h})$ permettent de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2.3. — *Pour h suffisamment grand, il existe une matrice diagonale A_h à coefficients entiers, une matrice Λ_h de $Gl_n(\mathbb{C}_q)$ et une matrice U_h à coefficients dans $E_C^{\psi^h}$ telles que :*

$$H_h = x^{-A_h} \Lambda_h (I + U_h) \qquad \|\Lambda_h\| \, \|\Lambda_h^{-1}\| \leq \lambda$$

$$\|U_h\|_{r^{p^h}} \leq \lambda^2 \left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/m} \max\left(\frac{r_1}{r}, \frac{r}{r_2}\right)\right)^{p^h}.$$

On remarque que la norme de la matrice U_h tend vers 0 sur la couronne :

$$\left\{x \in \mathbb{C}_p, |x| \in \left] r_1 \sqrt[m]{r_2/r_1}, r_2 \sqrt[m]{r_1/r_2} \right[\right\}.$$

On en déduit que la matrice :

$$x^{p^h D_h} K_h = x^{p^h D_h} H_h(x^{p^h}) \, x^{-p^{h-1} D_{h-1}} \cdots x^{p^{h_0} D_{h_0}} K_{h_0}$$

reste bornée dans une petite couronne de la forme :

$$\left\{x \in \mathbb{C}_p, |x| \in \left[\sqrt{r_2/r_1} - \varepsilon, \sqrt{r_1/r_2} + \varepsilon\right]\right\}$$

et que son terme constant ne tend pas vers zéro. L'une des lignes de cette matrice ne tend pas vers zéro, le coefficient correspondant de la matrice diagonale $p^h D_h$ a une valeur d'adhérence α dans $\mathbb{Z}_p$. Par passage à la limite, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2.4. — *Si l'opérateur P est fuchsien dans la couronne C, alors pour chaque nombre r de l'intervalle ouvert $]r_1, r_2[$, il existe un entier p-adique α et une fonction f, non nulle, analytique dans une couronne $\{|x| \in]r - \varepsilon, r[\}$, tels que $P(x^\alpha f) = 0$.*

La démonstration de ce théorème est rendue compliquée par l'existence d'éventuels exposants dont la *différence est un nombre de Liouville.* Ce théorème justifie la terminologie de "fuchsien" pour un opérateur défini sur une couronne dont le rayon de convergence est maximal partout (*cf.* 6.2.3). Les détails de ce paragraphe apparaîtront dans [CM].

3. Exposants p-adiques.

3.1. Soit $P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans le corps $E_0(r)$ pour un nombre réel $r > 0$. Donc P opère dans l'espace $\mathcal{A}_{t_{r-\epsilon}}^{r-\epsilon}$ pour ϵ assez petit. Nous définissons les deux nombres $d_{0,r}^{\min}(P)$ et $d_{0,r}^{\max}(P)$ par :

$$d_{0,r}^{\min}(P) := \lim_{\epsilon \to 0} \min_{r-\epsilon \le r' < r} \dim_\Omega \operatorname{Ker}(P, \mathcal{A}_{t_{r'}}^{r'})$$

et

$$d_{0,r}^{\max}(P) := \lim_{\epsilon \to 0} \max_{r-\epsilon \le r' < r} \dim_\Omega \operatorname{Ker}(P, \mathcal{A}_{t_{r'}}^{r'}).$$

Par construction on a les inégalités

$$0 \le d_{0,r}^{\min}(P) \le d_{0,r}^{\max}(P) \le m.$$

Si l'ordre de P est égal à un, on a toujours égalité $d_{0,r}^{\min}(P) = d_{0,r}^{\max}(P)$.

CONJECTURE 3.1.1. — *Pour un polynôme différentiel $P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ soluble en $r > 0$, on a l'égalité $d_{0,r}^{\min}(P) = d_{0,r}^{\max}(P)$.*

Si P est injectif en r, alors $d_{0,r}^{\min}(P) = d_{0,r}^{\max}(P) = 0$ par 1.4. Si P est complètement soluble en r alors si $d_{0,r}^{\max}(P) = m$ on a l'égalité $d_{0,r}^{\min}(P) = d_{0,r}^{\max}(P) = m$, en vertu de la logarithme concavité de la fonction $\rho_0^r(P)$.

Plus généralement on conjecture que la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans l'ensemble $\{0, \cdots, m\}$, $r \mapsto \dim_\Omega \mathrm{Ker}(P, \mathcal{A}_{t_r}^r)$ est constructible pour tout polynôme différentiel P.

3.2. Soit $P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ un opérateur différentiel de la forme $\dfrac{d^m}{dx^m} - a_{m-1}(x)\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \cdots - a_0(x)$ où les fonctions a_k sont analytiques dans la couronne $]r_1, r_2[$. Supposons que $\rho^r(P)$ est égal à r pour tout $r, r_1 < r < r_2$, donc que P est fuchsien dans la couronne ouverte $]r_1, r_2[$. En vertu du théorème 2.2.4 de structure des modules fuschsiens, il existe une sous-couronne de diamètre non nul de la couronne $]r_1, r_2[$ au-dessus de laquelle le fibré d'ordre m à connexion défini par P admet une filtration par des sous fibrés dont les quotients successifs sont des fibrés fuchsiens de rang un.

DÉFINITION 3.2.1. — *Soit P un opérateur différentiel défini sur une couronne $]r_1, r_2[$ ouverte sans singularités et fuchsien, on définit l'ensemble $\exp_0(P,]r_1, r_2[)$ comme les classes modulo $\mathbb{Z}$ des exposants des sous-facteurs de P d'ordre un fuchsien dans une sous-couronne de $]r_1, r_2[$.*

En vertu du théorème 2.2.4 l'ensemble $\exp_0(P,]r_1, r_2[)$ est une partie de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ non vide pour un opérateur fuchsien.

DÉFINITON 3.2.2. — *Si P est un opérateur différentiel à coefficients dans le corps $E_0(r)$ fuchsien il est alors défini sur une couronne $]r - \epsilon, r[$, on définit l'ensemble des exposants $\exp_0^r(P)$ en r comme $\exp_0(P,]r - \epsilon, r[)$.*

En vertu du théorème 2.2.4 l'ensemble $\exp_0^r(P)$ est une partie de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ non vide pour un opérateur fuchsien à coefficients dans le corps $E_0(r)$.

3.3. Soit P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans le corps $E_0(r)$ pour un nombre réel $r > 0$. On a le théorème de factorisation de Dwork-Robba ([DR]) :

THÉORÈME 3.3.1. — *L'opérateur P se factorise en P_1P_2 par des opérateurs différentiels à coefficients dans le corps $E_0(r)$, où P_1 est injectif dans l'espace $\mathcal{A}_{t_r}^r$ et où P_2 est complètement soluble en r.*

Autrement dit P est extension d'un opérateur complètement soluble par un opérateur injectif et donc $\mathrm{Ker}(P,\mathcal{A}^r_{t_r})=\mathrm{Ker}(P_2,\mathcal{A}^r_{t_r})$. En vertu de 1.4 P_1 est injectif en $r-\epsilon$ pour ϵ assez petit. Donc si $\dim_\Omega \mathrm{Ker}(P,\mathcal{A}^{r-\epsilon}_{t_{r-\epsilon}}) \geq \dim_\Omega \mathrm{Ker}(P,\mathcal{A}^r_{t_r})$ pour tout ϵ assez petit alors $\rho_{r-\epsilon}(P_2)=r-\epsilon$ et P_2 est fuchsien en r.

DÉFINITION 3.3.2. — *Soit P un opérateur différentiel à coefficients dans le corps $E_0(r)$ pour un nombre réel $r>0$, considérons $d^{\min}_{0,r}$. On définit l'ensemble* $\exp^r_0(P)$ *par :*

a) *Si $d^{\min}_{0,r}$ est nulle alors $\exp^r_0(P)$ est l'ensemble vide. Nous dirons que P est totalement irrégulier.*

b) *Si $d^{\min}_{0,r} \geq 1$ pour ϵ assez petit on définit $\exp^r_0(P,\epsilon)$ comme la réunion des exposants des quotients fuchiens de P aux points $r', r-\epsilon \leq r' < r$, tels que $\dim_\Omega \mathrm{Ker}(P,\mathcal{A}^{r'}_{t_{r'}})$ est égal à $d^{\min}_{0,r}$, on définit alors $\exp^r_0(P)$ comme $\exp^r_0(P,\epsilon_0)$ où ϵ_0 est le maximum des ϵ tels que $d^{\min}_{0,r} \leq \dim_\Omega \mathrm{Ker}(P,\mathcal{A}^{r-\epsilon}_{t_{r-\epsilon}}) \leq d^{\max}_{0,r}$.*

Donc si $d^{\min}_{0,r} \geq 1$ l'ensemble $\exp^r_0(P)$ est une partie non vide de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ en vertu du théorème 2.2.4 de structure des modules fuchsiens, a priori, infinie.

CONJECTURE 3.3.3. — *Soit P un opérateur différentiel à coefficients dans le corps $E_0(r)$ pour un nombre réel $r>0$, alors $\exp^r_0(P)$ est une partie* finie.

CONJECTURE 3.3.4. — *Soit P un polynôme différentiel à coefficients dans le corps des nombres algébriques et $r>0$, alors toute classe de l'ensemble $\exp^r_0(P)$ est* algébrique.

Un cas particulier de la conjecture 3.3.4 est

CONJECTURE 3.3.5. — *Soit P un polynôme différentiel à coefficients dans le corps des nombres algébriques, $r>0$ un réel positif, α un nombre de $\mathbb{Z}_p$ et $f(x)$ une série non nulle de $\mathcal{R}_0(r)$ tels que $P(x^\alpha f(x))=0$, alors α est* algébrique.

La conjecture 3.3.4 p-adique suggère l'analogue complexe suivant :

CONJECTURE 3.3.6. — *Soit P un polynôme différentiel à coefficients dans le corps des nombres algébriques si $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$ est une valeur propre de la monodromie complexe le long d'un cercle du plan complexe* *centré à l'origine ne rencontrant pas une singularité de P alors α est* algébrique.

La conjecture 3.3.5 et son analogue complexe sont vraies pour les équations d'ordre 1 et pour les équations hypergéométriques :

PROPOSITION 3.3.7. — *Soit P une équation hypergéométrique à coefficients dans le corps des nombres algébriques et α un entier p-adique. S'il existe une fonction f, non nulle, de $\mathcal{R}_0(r)$ telle que $P(x^\alpha f) = 0$, alors α est une racine du polynôme indiciel de P en 0 ou du polynôme indiciel de P à l'infini (en particulier, α est algébrique).*

Preuve. — Sous les hypothèses de la proposition, les coefficients de la fonction f sont de la forme :

$$a_n = \begin{cases} a_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} G(k+\alpha) & \text{pour } n > 0 \\ a_0 \prod\limits_{k=0}^{-n-1} \dfrac{1}{G(-k-1+\alpha)} & \text{pour } n < 0 \end{cases}$$

où G désigne la fraction rationnelle dont le numérateur (resp. le dénominateur) est le polynôme indiciel de P à l'infini (resp. en 0). Notons μ_i les pôles et les zéros de G. On constate que les coefficients a_n sont des produits de nombres $(\alpha - \mu_i)_n := \prod\limits_{k=0}^{n-1} (k + \alpha - \mu_i)$ et $(1 + \mu_i - \alpha)_n$. L'estimation de ces nombres est classique :

LEMME 3.3.8. — *Si μ est (N-L), alors la suite $|(\mu)_n|^{1/n}$ converge et sa limite ne dépend que de la distance de μ à $\mathbb{Z}_p$. En particulier, si μ est un entier p-adique, cette limite vaut $p^{1/(1-p)}$. Si μ est un nombre de Liouville, on a encore* $\limsup |(\mu)_n|^{1/n} = p^{1/(1-p)}$.

Il résulte du lemme 3.3.8 que, si les nombres $\alpha - \mu_i$ sont (N-L), les suites $|a_n|^{1/n}$ et $|a_{-n}|^{1/n}$ convergent et le produit de leurs limites vaut 1. On en déduit que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$ ne converge dans aucune couronne. Si $\lambda_+(\alpha - \mu_i) < 1$ (resp. $\lambda_-(\alpha - \mu_i) < 1$) pour un seul indice i, on a $\limsup |a_n|^{1/n} \limsup |a_{-n}|^{1/n} \geq 1$ et la conclusion est la même. Finalement, on ne peut pas avoir $\lambda_+(\alpha - \mu_i) < 1$ et $\lambda_+(\alpha - \mu_j) < 1$ pour $i \neq j$, car, sinon, on aurait $\lambda_+(\mu_i - \mu_j) < 1$ ce qui n'est pas puisque, par hypothèse, $\mu_i - \mu_j$ est un nombre algébrique.

Notons cependant que l'on peut trouver deux nombres μ_1 et μ_2, non nuls et, bien entendu, de Liouville, tels que le polynôme

$$\Big(x\frac{d}{dx}-\mu_1\Big)\Big(x\frac{d}{dx}-\mu_2\Big)-x$$

ait une solution analytique dans une couronne non vide, c'est-à-dire ait 0 pour exposant dans cette couronne.

L'analogue complexe de la proposition précédente est évident.

Considérons l'opérateur de Monsky :

$$M_a := p(1-x)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} - a.$$

C'est un opérateur qui n'est pas hypergéométrique dont le rayon de convergence en 1 est égal à $\omega := |\pi| := p^{-1/p-1}$ mais admet une solution non nulle dans $\mathcal{A}^1_{t_1}$. Si a est dans $\mathbb{Z}_p - \mathbb{Z}$ alors M_a admet la classe de a comme unique exposant dans le disque $D(0,1^-)$ ([DR], 7.4). Les conjectures précédentes sont vraies pour l'opérateur de Monsky. La classe résiduelle de zéro est une singularité p-adique de M_a bien que ce ne soit pas une singularité au sens classique. Mais cette singularité apparaît modulo p. Considérons l'opérateur

$$M'_a := x\frac{d^2}{dx^2} - (x^p+p-2)\frac{d}{dx} - apx^{p-1}$$

que l'on peut obtenir à partir de M_a par image inverse par le morphisme de Frobenius. Le rayon de convergence de M'_a est égal à $p^{-1/p(p-1)}$. Si a est dans $\mathbb{Z}_p - \mathbb{Z}$ l'opérateur M'_a admet les classes résiduelles des racines p-ème de l'unité comme singularités avec a comme exposant. Ces singularités ne se lisent pas modulo p. Le principe général qui semble se dégager est que si le rayon de convergence d'un opérateur est ω on peut lire ses singularités modulo p mais si ce rayon est $> \omega$ les singularités de cet opérateur apparaissent seulement dans son antécédent de Frobenius de Christol-Dwork ([CD$_2$]). Ceci doit contribuer à éclaircir le rapport entre les méthodes des paragraphes 4 et 6 de l'article de Dwork-Robba ([DR]). Remarquons que si un opérateur est soluble alors par le théorème de transfert de Dwork les singularités p-adiques coïncident avec les singularités classiques.

4. Le théorème de dualité.

4.1. Soit $r > 0$ un réel positif et $\mathcal{A}^r_0 = \mathcal{A}_0(r)$ l'espace des fonctions analytiques dans le disque ouvert $D(0,r^-)$. C'est un sous-espace de l'espace

$\mathcal{R}_0^r = \mathcal{R}_0(r)$ des fonctions analytiques au bord. On définit l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}_0(r) \to \mathcal{R}_0(r) \to \mathcal{H}_0^\dagger(r) \to 0.$$

C'est en fait une suite exacte de $\mathcal{A}_0(r)\left[\frac{d}{dx}\right]$-modules à gauche. L'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ s'identifie à l'espace des séries $\sum_{n=0,\infty} \frac{b_n}{x^{n+1}}$ telles que $\lim_{n\to\infty} |b_n|(r-\epsilon)^{-n-1} = 0$ pour un $\epsilon > 0$. C'est la cohomologie du disque ouvert $D(0, r^-)$ à *supports compacts*. C'est un cas particulier de la cohomologie à supports compacts des espaces analytiques rigides (*cf.* [Ch]).

4.2. Soit $r > 0$ notons $H(0, r)$ l'espace des séries $f(x) = \sum_{n=0,\infty} a_n x^n$ telles que $\lim_{n\to\infty} ||a_n||r^n = 0$, c'est l'espace des fonctions analytiques dans le disque fermé $D(0, r^+)$, et soit $W(\infty, r)$ l'espace des séries $g(x) = \sum_{n=0,\infty} \frac{b_n}{x^{n+1}}$ telles que $\sup_n |b_n| r^{n+1} < \infty$, c'est l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque fermé $D(\infty, r^+)$. La norme Sup en fait des espaces de Banach munis de l'accouplement :

$$\langle f, g\rangle := \mathrm{Res}(fg) := \sum_{n=0,\infty} a_n b_n.$$

4.3. L'espace $\mathcal{A}_0(r)$ apparaît comme la limite projective des espaces $H(0, r-\epsilon)$ et l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ apparaît comme la limite inductive des espaces $W(\infty, r-\epsilon)$. Nous pouvons munir l'espace $\mathcal{A}_0(r)$ de la topologie d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$ localement convexe limite projective et l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ de la topologie d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}_p$ localement convexe limite inductive (*cf.* [G]). Si f est un élément de l'espace $\mathcal{A}_0(r)$ et g un représentant d'un élément de l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ le produit est un élément de l'espace $\mathcal{R}_0(r)$ et donc $\langle f, g\rangle := \mathrm{Res}(fg) = \sum_{n=0,\infty} a_n b_n$ est défini, c'est une application bilinéaire à valeur dans $\mathbb{C}_p$. On a alors le théorème de dualité ([MS]) :

THÉORÈME 4.3.1. — *L'espace $\mathcal{A}_0(r)$ est un espace métrique complet reflexif, l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ est complet séparé réflexif et l'accouplement* Res *est une dualité parfaite.*

Le problème dans le théorème précédent est que le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas sphériquement complet, en particulier on ne dispose pas du théorème de Hahn-Banach, il faut utiliser les structures particulières des espaces $\mathcal{A}_0(r)$ et $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$. L'espace $\mathcal{A}_0(r)$ est un espace $\mathcal{F}$, l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ est un espace $\mathcal{LF}$ mais aussi un espace $\mathcal{DF}$ ([G]).

4.4. On note par F^* le dual algébrique d'un espace vectoriel F.

THÉORÈME 4.4.1. — *Soit u un endomorphisme $\mathbb{C}_p$-linéaire continu de l'espace $\mathcal{A}_0(r)$ et ${}^t u$ l'endomorphisme de l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ transposé, alors u est à indice* si et seulement si *${}^t u$ est à indice et l'on a alors les isomorphismes de dualité d'espaces vectoriels de dimension finie*

$$\operatorname{Ker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(u, \mathcal{A}_0(r))^*$$

et

$$\operatorname{Coker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(u, \mathcal{A}_0(r))^*,$$

en particulier $\chi(u, \mathcal{A}_0(r)) = -\chi({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r))$.

Preuve. — Supposons que u est à indice, alors en vertu du théorème des homomorphismes de Banach pour les espaces $\mathcal{F}$, l'image $\operatorname{Im}(u)$ de u admet un supplémentaire topologique et le conoyau $\operatorname{Coker}(u, \mathcal{A}_0(r))$ est un espace de dimension finie, séparé pour la topologie quotient. On a alors une application naturelle

$$\operatorname{Ker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) \to \operatorname{Coker}(u, \mathcal{A}_0(r))^*$$

qui est injective et surjective de façon évidente. De même nous avons une application naturelle

$$\operatorname{Coker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) \to \operatorname{Ker}(u, \mathcal{A}_0(r))^*$$

dont nous allons voir qu'elle est injective. Soit ϕ un élément de $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$ relevant un élément de $\operatorname{Coker}({}^t u)$ dont l'image dans $\operatorname{Ker}(u)^*$ est nulle. Alors par passage au quotient on obtient une forme linéaire continue sur $\operatorname{Im}(u)$. Mais comme $\operatorname{Im}(u)$ admet un supplémentaire topologique en vertu du théorème des homomorphismes de Banach, cette forme linéaire se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}_0(r)$ dont l'image par ${}^t u$ est égale à ϕ. D'où l'injectivité, en particulier $\operatorname{Coker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r))$ est de dimension finie et ${}^t u$ est à indice. Mais on ne peut pas invoquer le théorème de Hahn-Banach, qui n'a pas lieu pour les corps non sphériquement complets, pour conclure à la surjectivité de l'application précédente : un espace vectoriel de dimension finie n'a pas en général de supplémentaire topologique. Il faut un autre argument. Mais ${}^t u$ est à indice et nous allons voir que l'image $\operatorname{Im}({}^t u)$ de ${}^t u$ *admet* un suplémentaire topologique. C'est une conséquence du théorème des homomorphismes pour les espaces $\mathcal{LF}$ démontré par Grothendieck dans ([G],chap. IV, §1, théorème 2, page 200) :

THÉORÈME 4.4.2. — *Une application linéaire continue surjective entre espaces vectoriels de type $\mathcal{LF}$ sur un corps valué complet est un homomorphisme, c'est-à-dire une application ouverte.*

La démonstration de Grothendieck n'utilise que le théorème des homomorphismes de Banach et le théorème du graphe fermé pour les espaces de type $\mathcal{F}$ qui restent vrais dans le contexte général des corps valués complets. En appliquant ce théorème à ${}^t u$ on trouve que le conoyau $\mathrm{Coker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r))$ muni de la topologie quotient est séparé. Par le raisonnement précédent on obtient une application

$$\mathrm{Ker}({}^{tt}u, \mathcal{A}_0(r)) \to \mathrm{Coker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r))^*$$

qui est un isomorphisme. Mais par dualité $\mathrm{Ker}(u, \mathcal{A}_0(r)) = \mathrm{Ker}({}^{tt}u, \mathcal{A}_0(r))$. Les espaces $\mathrm{Coker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r))$ et $\mathrm{Ker}(u, \mathcal{A}_0(r))^*$ sont *de même de dimension finie* et l'injection

$$\mathrm{Coker}({}^t u, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) \to \mathrm{Ker}(u, \mathcal{A}_0(r))^*$$

est un isomorphisme.

Si ${}^t u$ est à indice alors par le théorème des homomorphismes pour les espaces $\mathcal{LF}$ on en déduit par le raisonnement précédent que u est à indice puis par dualité les isomorphismes de dualité du théorème 4.4.1 dans tous les cas.

4.5. Nous allons déduire du théorème de dualité le théorème suivant :

THÉORÈME 4.5.1. — *Soit $P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ un polynôme différentiel à coefficient dans $\mathbb{C}_p$, $r > 0$ un réel positif et r_n une suite de réels tendant vers r par valeurs inférieures telle que $\chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n})$ est fini. Alors $\chi(P, \mathcal{A}_0^r)$ est fini, la suite $\chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n})$ est stationnaire et*

$$\chi(P, \mathcal{A}_0^r) = \lim_{n\to\infty} \chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n}).$$

Preuve. — En vertu du théorème 4.4.1 $\chi({}^t P, \mathcal{H}_c^\dagger(r_n))$ est fini et égal à $-\chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n})$. L'espace $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$ n'est pas une algèbre différentielle mais ${}^t P$ étant un polynôme différentiel, la dimension de l'espace $\mathrm{Ker}({}^t P, \mathcal{H}_c^\dagger(r))$ est *finie* pour tout r. Donc la suite $\dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Ker}({}^t P, \mathcal{H}_c^\dagger(r_n))$ est stationnaire et

$$\dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Ker}({}^t P, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) = \lim_{n\to\infty} \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Ker}({}^t P, \mathcal{H}_c^\dagger(r_n)).$$

Le sous-espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r_n)$ de l'espace $\mathcal{H}_0^\dagger(r_{n+1})$ est *dense*. Mais en vertu du théorème des homomorphismes pour les espaces $\mathcal{LF}$ l'application induite

$$\mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n) \to \mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}_0^\dagger(r_{n+1}))$$

est *surjective* parce que le dernier espace est de dimension finie séparé pour la topologie quotient. La suite $\dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n))$ est stationnaire et on a l'égalité

$$\dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) = \lim_{n\to\infty} \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}({}^t P, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n)).$$

Donc $\chi({}^tP, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n))$ est fini et on a l'égalité

$$\chi({}^tP, \mathcal{H}_0^\dagger(r)) = \lim_{n\to\infty} \chi({}^tP, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n)).$$

En vertu du théorème 4.4.1 $\chi(P, \mathcal{A}_0^r)$ est fini et l'on a l'égalité

$$\chi(P, \mathcal{A}_0^r) = \lim_{n\to\infty} \chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n}).$$

D'où le théorème 4.5.1. L'intérêt d'un tel théorème c'est qu'on ne fait aucune hypothèse sur les $\chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n})$ autre que la finitude. Par exemple on a le corollaire :

COROLLAIRE 4.5.2. — *Soit $P\left(x, \frac{d}{dx}\right)$ un polynôme différentiel à coefficient dans $\mathbb{C}_p$, $r > 0$ un réel positif tel que $\dim_{0,r}^{\min}(P)$ est nulle, alors $\chi(P, \mathcal{A}_0^r)$ est fini.*

En effet puisque $\dim_{0,r}^{\min}(P)$ est nulle, il existe une suite r_n tendant vers r par valeurs inférieures telle que $\mathrm{Ker}(P, \mathcal{A}_0^{r_n})$ est nulle. En vertu du théorème de Ph. Robba $\chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n})$ est fini. En vertu du théorème 4.5.1 $\chi(P, \mathcal{A}_0^r)$ est fini et l'on a l'égalité

$$\chi(P, \mathcal{A}_0^r) = \lim_{n\to\infty} \chi(P, \mathcal{A}_0^{r_n}).$$

L'hypothèse $\dim_{0,r}^{\min}(P)$ est nulle est plus faible que l'hypothèse $\mathrm{Ker}(P, \mathcal{A}_{t_r}^r)$ est nul. Par exemple pour $r = 1$, l'hypothèse $\mathrm{Ker}(P, \mathcal{A}_{t_1}^1)$ est nul n'est jamais satisfaite par les équations ayant une structure de Frobenius forte alors qu'il se peut que $\dim_{0,1}^{\min}(P)$ soit nulle. C'est la situation des équations totalement irrégulières munies d'une structure de Frobenius forte.

COROLLAIRE 4.5.3. — *Soit $P\left(x, \frac{d}{dx}\right)$ un polynôme différentiel à coefficient dans $\mathbb{C}_p$, $r > 0$ un réel positif et r_n une suite de réels tendant vers r par valeurs inférieures telle que $\chi(P, \mathcal{R}_0(r_n))$ est nul. Alors $\chi(P, \mathcal{R}_0(r))$ est nul.*

Preuve. — La suite exacte de $\mathbb{C}_p\left[x, \frac{d}{dx}\right]$-modules à gauche

$$0 \to \mathcal{A}_0(r_n) \to \mathcal{R}_0(r_n) \to \mathcal{H}_0^\dagger(r_n) \to 0,$$

donne naissance à une suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to \mathrm{Ker}(P, \mathcal{A}_0(r_n)) \to \mathrm{Ker}(P, \mathcal{R}_0(r_n)) \to \mathrm{Ker}(P, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n)) \to$$
$$\to \mathrm{Coker}(P, \mathcal{A}_0(r_n)) \to \mathrm{Coker}(P, \mathcal{R}_0(r_n)) \to \mathrm{Coker}(P, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n)) \to 0.$$

Comme P est à coefficients polynomiaux la dimension de l'espace $\mathrm{Ker}(P, \mathcal{H}_0^\dagger(r_n))$ est finie et la finitude de $\chi(P, \mathcal{R}_0(r_n))$ entraîne la finitude de $\chi(P,\mathcal{A}_0(r_n))$ et de $\chi(P,\mathcal{H}_0^\dagger(r_n))$. La nullité de $\chi(P,\mathcal{R}_0(r_n))$ entraîne l'égalité

$$\chi(P,\mathcal{A}_0(r_n)) = -\chi(P,\mathcal{H}_0^\dagger(r_n)).$$

Le théorème 4.5.1 permet de conclure. Le corollaire 4.5.3 permet d'éviter, dans la démonstration du théorème de l'indice pour les polynômes différentiels, le recours à la notion d'indice généralisé de Robba ([R5]).

Bien entendu les résultats du paragraphe précédent restent valables pour des corps valués complets autres que $\mathbb{C}_p$, par exemple pour une extension finie du complété $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$.

5. Le théorème de l'indice.

5.1. Soit $P\left(x,\frac{d}{dx}\right)$ un polynôme différentiel à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et $r>0$ un réel positif. On a défini dans le §3 l'ensemble $\exp_0^r(P)$ qui est une partie de $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 5.1.1. — *Soit $P\left(x,\frac{d}{dx}\right)$ un polynôme différentiel à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et $r>0$ un réel positif. Supposons que les éléments de $\exp_0^r(P)$ ont la propriété (N-L) alors $\chi(P,\mathcal{A}_0^r)$ est fini, $\chi(P,\mathcal{H}_0^\dagger(r))$ est fini et on a l'égalité*

$$\chi(P,\mathcal{H}_0^\dagger(r)) = -\chi(P,\mathcal{A}_0(r)).$$

Donc $\chi(P,\mathcal{R}_0(r))=0$.

Preuve. — Par le corollaire 4.5.3 il suffit de construire une suite de points r_n tendant vers r par valeurs inférieures telle que $\chi(P,\mathcal{R}_0(r_n))=0$. Par définition de $\dim_{0,r}^{\min}(P)$ il existe une suite de points r_n tendant vers r par valeurs inférieures telle que $\dim_\Omega \operatorname{Ker}(P,\mathcal{A}_{t_{r_n}}^{r_n}) = \dim_{0,r}^{\min}(P)$. Appliquant le théorème de Dwork-Robba ([DR]) à P aux points r_n on trouve une factorisation de P en $P_{1,n}P_{2,n}$ à coefficients dans le corps $E_0(r_n)$ telle que $\dim_\Omega \operatorname{Ker}(P_{1,n},\mathcal{A}_{t_{r_n}}^{r_n})=0$ et $\dim_\Omega \operatorname{Ker}(P_{2,n},\mathcal{A}_{t_{r_n}}^{r_n}) = \dim_{0,r}^{\min}(P)$. Comme $P_{1,n}$ reste injectif en $r_n-\epsilon$ pour tout $\epsilon>0$ assez petit, d'après la définition de $\dim_{0,r}^{\min}(P)$, $P_{2,n}$ reste complètement soluble en $r_n-\epsilon$ pour tout $\epsilon>0$ assez petit, donc que $P_{2,n}$ est fuchsien entre $r_n-\epsilon$ et r_n pour $\epsilon>0$ assez petit. En vertu du théorème 1.3.1 $\chi(P_{1,n},\mathcal{R}_0(r'))=0$ tout point r' de $]r_n-\epsilon,r_n[$. Mais d'après le théorème 2.2.4 de structure des modules fuchsiens, il existe un point r' de $]r_n-\epsilon,r_n[$ tel que $P_{2,n}$ admet une factorisation par des opérateurs $P_{r',i}$ d'ordre un fuchsiens au voisinage de r'. Mais l'obstruction pour l'opérateur $P_{r',i}$ d'avoir un indice nul dans l'espace $\mathcal{R}_0(r')$ est la propriété (N-L) pour son exposant $\alpha_{r',i}$, qui est un exposant de $P_{2,n}$ en r_n et donc un élément de $\exp_0^r(P)$ pour n assez grand par définition. En vertu de l'hypothèse du théorème de l'indice $\chi(P_{2,n}, \mathcal{R}_0(r')) = 0$. Donc $\chi(P, \mathcal{R}_0(r')) = 0$ et $\chi(P, \mathcal{R}_0(r_n)) = 0$ d'après le corollaire 4.5.3. D'où le théorème de l'indice.

6. Nombre de Fuchs, nombre de Malgrange.

6.1. Nombre de Fuchs d'une équation différentielle sur un corps de caractéristique nulle.

Soit k un corps de caractéristique nulle et $P\Big(x, \dfrac{d}{dx}\Big) = \sum\limits_{k=0,m} a_k(x)\dfrac{d^k}{dx^k}$ un opérateur différentiel à coefficients dans l'anneau $k[[x]]$ des séries formelles à coefficients dans k. Rappelons que le nombre de Fuchs $\mathrm{irr}_0(P)$ est l'entier positif ou nul :

$$\mathrm{irr}_0(P) := \sup_{0 \le k \le m} (k - v_0(a_k)) - (m - v_0(a_m)),$$

où v_0 désigne la valuation x-adique. Par le théorème de Malgrange ([M]) l'entier $\sup\limits_{0\le k\le m} (k - v_0(a_k))$ est égal à l'indice $\chi(P, k[[x]])$ de P opérant dans l'espace $k[[x]]$. Le terme $(m - v_0(a_m))$ ne dépend que du symbole principal par construction. En fait m est la multiplicité de la composante horizontale de la variété caractéristique de P alors que $v_0(a_m)$ est la multiplicité de la composante verticale de la variété caractéristique de P. Sous cette forme on peut définir $\mathrm{irr}_0(I)$ pour un idéal voire un module à gauche de type fini sur l'algèbre $k[[x]]\left[\dfrac{d}{dx}\right]$. Mais peu importe, à une variable ceci est sans importance, le cas crucial est celui d'un opérateur. La nullité de $\mathrm{irr}_0(P)$ caractérise une singularité régulière en ce sens que P admet une solution de la forme $x^\alpha f(x)$ où $f(x)$ est une série formelle en x et par suite P admet une base de solutions formée d'éléments qui sont des sommes finies $\sum\limits_{\alpha,k} c_{\alpha,k}(x)x^\alpha(\mathrm{Log}(x))^k$ où les $c_{\alpha,k}$ sont des séries formelles en x. On notera dans la suite

$$\mathrm{irr}_0(P, \infty) := \mathrm{irr}_0(P),$$

le nombre de Fuchs en un point singulier d'une équation différentielle définie sur un corps de caractéristique nulle.

6.2. Nombre de Fuchs-Malgrange d'une équation différentielle p-adique.

Soit $L = \dfrac{d}{dx} + G(x)$ un système différentiel d'ordre un et de rang m à coefficients dans $\mathbb{C}_p(x)$ et $r > 0$ un réel positif. Sous l'hypothèse de l'existence de l'indice de L dans l'espace $[\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^m$, Ph. Robba ([R₄], 10.1) définit le nombre $\mathrm{irr}_0^r(L,p)$:

DÉFINITION 6.2.1. — *Si L admet un indice dans l'espace $[\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^m$ on pose alors*

$$\mathrm{irr}_0^r(L,p) := -\chi(xL, [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^m).$$

Il faut comprendre dans cette définition $\chi(xL, [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^m)$ comme l'indice généralisé :

$$\chi(xAL, [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^m) - \chi(A, [\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^m),$$

pour un polynôme $A(x)$ de $\mathbb{C}_p[x]$ tel que xAG n'a pas de pôles dans le disque ouvert $D(0,r^-)$. Ceci ne dépend pas du polynôme A.

Donc en vertu du théorème de l'indice, si les exposants $\exp_0^r(L)$ dans le disque $D(0,r^-)$ ont la propriété (N-L) alors $\chi(L, [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^m)$ est fini et l'on a

$$\mathrm{irr}_0(L,p) := \chi(xL, [\mathcal{A}_0^r]^m).$$

PROPOSITION 6.2.2. — *Supposons que L est le système associé à l'opérateur*

$$P\Big(x, \frac{d}{dx}\Big) = \sum_{k=0,m} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

d'ordre m à coefficients dans $\mathbb{C}_p[x]$ qui admet un indice dans l'espace $\mathcal{A}_0^r$, alors on a

$$\mathrm{irr}_0^r(L,p) := \chi(xL, [\mathcal{A}_0^r]^m) = \chi(P, \mathcal{A}_0^r) - (m - \mathrm{ord}_0^{r^-}(a_m)).$$

Preuve. — On a

$$L = \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} \end{pmatrix}$$

où $b_k, k = 0, \cdots, m-1$ est la fraction rationnelle a_k/a_m. Donc $\mathrm{irr}_0^r(L,p) + \chi(a_m, [\mathcal{A}_0^r]^m)$ est égal à l'indice de

$$xa_m \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & -xa_m & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -xa_m \\ xa_0 & xa_1 & \dots & xa_{m-1} \end{pmatrix}$$

opérant sur $[\mathcal{A}_0^r]^m$. Comme $\chi(x, [\mathcal{A}_0^r]^m) = -m$ et $\chi(a_m, [\mathcal{A}_0^r]^m) = -m \operatorname{ord}_0^{r^-}(a_m)$ il suffit de démontrer que

$$\chi(a_m L, [\mathcal{A}_0^r]^m) = \chi(P, \mathcal{A}_0^r) - (m-1) \operatorname{ord}_0^{r^-}(a_m).$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathcal{A}_0^r & \xrightarrow{P} & \mathcal{A}_0^r & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & [\mathcal{A}_0^r]^m & \xrightarrow{a_m L} & (a_m\mathcal{A}_0^r, \dots, a_m\mathcal{A}_0^r, \mathcal{A}_0^r) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & [\mathcal{A}_0^r]^m & \xrightarrow{a_m L} & [\mathcal{A}_0^r]^m & \to & 0 \end{array}$$

où les deux premiers morphismes verticaux sont $f \to \left(f, \frac{d}{dx}f, \dots, \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}f\right)$ et $f \to (0, \dots, 0, f)$ alors que les deux derniers sont les injections canoniques. Les deux premiers complexes sont quasi-isomorphes alors que la différence des caractéristiques d'Euler-Poincaré des deux derniers est égale à $(m-1)\operatorname{ord}_0^{r^-}(a_m)$. D'où la proposition.

L'ordre d'annulation en chaque zéro de a_m est égal à la multiplicité de la composante verticale de la variété caractéristique de P au-dessus de ce point singulier. On peut alors définir $\mathrm{irr}_0^r(M,p)$ pour un $\mathbb{C}_p\left[x, \frac{d}{dx}\right]$-module holonome admettant un indice dans l'espace $\mathcal{A}_0^r$:

DÉFINITION 6.2.3. — *Soit M un $\mathbb{C}_p\left[x, \frac{d}{dx}\right]$-module holonome admettant un indice dans l'espace $\mathcal{A}_0^r$, on définit*

$$\mathrm{irr}_0^r(M,p) := \chi(M, \mathcal{A}_0^r) - (m - \operatorname{ord}_0^{r^-}(M)).$$

Dans cette définition

$$\chi(M, \mathcal{A}_0^r) = \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Hom}_{C_p[x, \frac{d}{dx}]}(M, \mathcal{A}_0^r) - \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Ext}^1_{C_p[x, \frac{d}{dx}]}(M, \mathcal{A}_0^r),$$

m est le rang de M c'est-à-dire la multiplicité de la section nulle du fibré $T^*\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$ et $\operatorname{ord}_0^{r^-}(M)$ désignant la somme des multiplicités des composantes de la variété caractéristique au-dessus des points singuliers contenus dans le disque ouvert $D(0, r^-)$. Les propriétés de $\mathrm{irr}_0^r(M,p)$ sont similaires aux propriétés du nombre de Fuchs des modules holonomes sur l'algèbre $k[[x]]\left[\frac{d}{dx}\right]$ pour un corps k de caractéristique nulle sauf en ce qui concerne la positivité. Il se peut très bien que que le nombre $\mathrm{irr}_0^r(M,p)$ soit négatif. Il faut alors comprendre le théorème de semi-continuité 6.5.1 comme l'analogue du théorème de positivité. Mais nous démontrerons ultérieurement que si M est complètement soluble en r, c'est-à-dire que $\dim_\Omega \mathrm{Hom}_{C_p[x,\frac{d}{dx}]}(M,\mathcal{A}_{t_r}^r) = m$ et si l'on a la propriété (N-L) pour ses exposants ainsi que leurs différences alors $\mathrm{irr}_0^r(M,p)$ est positif et qu'il est nul si et seulement si M est fuchsien en ce sens que $\dim_\Omega \mathrm{Hom}_{C_p[x,\frac{d}{dx}]}(M,\mathcal{A}_{t_{r-\epsilon}}^{r-\epsilon}) = m$ pour $\epsilon > 0$ assez petit. A cet égard il faut comprendre le théorème de structure 2.2.4 comme l'analogue p-adique du théorème de Fuchs en caractéristique nulle. En fait un module fuchsien en r dont les différences des exposants ont la propriété (N-L) admet une base fondamentale de solution de la forme $\sum_{\alpha,k} c_{\alpha,k}(x)x^\alpha(\mathrm{Log}(x))^k$ où les $c_{\alpha,k}$ sont des éléments de $\mathcal{R}_0(r)$.

Proposition 6.2.4. — *Soit P un polynôme différentiel à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et $r > 0$ un réel positif tels que les éléments de* $\exp_0^r(P)$ *ont la propriété (N-L), alors*

$$\mathrm{irr}_0^r(P,p) = \mathrm{irr}_0^r({}^tP,p).$$

Preuve. — Si α est un élément de $\exp_0^r({}^tP)$ alors $-\alpha$ est un élément de $\exp_0^r(P)$, et donc les éléments de $\exp_0^r({}^tP)$ ont la propriété (N-L). En vertu du théorème de l'indice $\chi({}^tP,\mathcal{R}_0^r) = 0$. En vertu du théorème de dualité ceci entraîne que $\chi(P,\mathcal{A}_0^r) = \chi({}^tP,\mathcal{A}_0^r)$ et donc que $\mathrm{irr}_0^r(P,p) = \mathrm{irr}_0^r({}^tP,p)$. La proposition se généralise aux modules grâce au théorème de division.

6.3. Soit $P\left(x,\frac{d}{dx}\right) = a_m(x)\frac{d^m}{dx^m} + \ldots$ un polynôme différentiel d'ordre m à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ complètement soluble en $r > 0$. En vertu du théorème de Dwork-Frobenius (*cf.* [CD$_2$], 4-1) on a $||a_m||_r \geq ||a_k||_r, k = m-1,\ldots,k=0$. Si $r=1$, on peut supposer que P est à coefficients dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ des entiers de $\mathbb{C}_p$ et que $||a_m||_1 = 1$. On peut considérer $\overline{P}$, la réduction de P, modulo l'idéal maximal de l'anneau des entiers, qui est un polynôme différentiel d'ordre m à coefficients dans le corps le résiduel $\mathbb{F}_\infty$. D'autre part $\mathrm{ord}_0^{1^-}(a_m) = v_0(\overline{a_m})$ en vertu du lemme de Hensel. On trouve alors que

$$\mathrm{irr}_0^1(P,p) = \chi(P,\mathcal{A}_0(1)) - (m - v_0(\overline{a_m})),$$

(*cf.* [Ga], V.1.1.1)

6.4. Le théorème de semi-continuité.

Nous allons définir le nombre de Fuchs-Malgrange à l'aide du théorème de semi-continuité (*cf.* [Me]). Rappelons d'abord la situation du théorème de semi-continuité de l'irrégularité des équations différentielles complexes (ou sur un corps de caractéristique nulle) . Soit $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ le produit de la droite projective complexe par un plan complexe, Z une courbe de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ finie sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ par la deuxième projection, et $\mathcal{O}_U^m$ un fibré de rang m sur le complémentaire U de Z muni d'une connexion relative $\Delta_{\frac{d}{dx}}$. Si η est un point de la base on note $Z_\eta, U_\eta, \mathcal{O}_{U_\eta}^m, \Delta_{\frac{d}{dx}}$ les fibres au-dessus de η de $Z, U, \mathcal{O}_U^m, \Delta_{\frac{d}{dx}}$. Si η_0 est un point spécial et η est un point général voisin de η_0 on définit la fonction saut :

$$\phi(\eta_0) := \sum_{x \in Z_\eta} \operatorname{irr}_x(\mathcal{O}_{U_\eta}^m, \infty) + m) - \sum_{x \in Z_{\eta_0}} \operatorname{irr}_x(\mathcal{O}_{U_{\eta_0}}^m, \infty) + m).$$

THÉORÈME 6.4.1 ([DELIGNE]). — *Sous les conditions précédentes l'entier $\phi(\eta_0)$ est positif ou nul.*

L'entier $\phi(\eta_0)$ est somme d'entiers positifs des contributions de chaque point point de Z_{η_0}. Rappelons qu'on a la formule de type Riemann-Roch

$$\chi(U_\eta, DR(O_{U_\eta}^m)) = m\chi(U_\eta) - \sum_{x \in Z_\eta} \operatorname{irr}_x(\mathcal{O}_{U_\eta}^m, \infty).$$

En vertu de cette formule, on trouve que le saut $\phi(\eta_0)$ est égal au saut des caractéristiques globales d'Euler-Poincaré :

$$\phi(\eta_0) = \chi(U_{\eta_0}, DR(O_{U_{\eta_0}}^m)) - \chi(U_\eta, DR(O_{U_\eta}^m)).$$

6.5. Dans la situation p-adique les caractéristiques globales d'Euler-Poincaré gardent un sens. Pour l'expliquer nous allons nous restreindre à une situation simple considérée par Robba ([R$_4$]) mais qui est le cas crucial. Soit $\overline{f}$ un polynôme à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_\infty$ résiduel et f un polynôme à coefficients dans l'anneau des entier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ qui relève $\overline{f}$. Notons $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[x,T])^\dagger$ l'algèbre des séries à deux variables à coefficients dans l'anneau des entiers dont le rayon de convergence est *strictement plus grand que 1.* On définit :

$$A_f := (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[x,T])/(1 - fT)$$

et

$$A_f^\dagger := (\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[x,T])^\dagger/(1 - fT).$$

L'anneau $A_f^\dagger$ est le complété p-adique faible de l'anneau A_f, il ne dépend que de $\overline{f}$ [MW]. Notons, par analogie avec la situation du théorème de semi-continuité en caractéristique nulle, $Z_{\mathbb{F}_\infty}$ la courbe définie par $\overline{f}$ de la droite projective sur le corps $\mathbb{F}_\infty$ et $U_{\mathbb{F}_\infty}$ son complémentaire. Notons de même $Z_{\mathbb{C}_p}$ la courbe définie par f de la droite projective sur le corps $\mathbb{C}_p$ et $U_{\mathbb{C}_p}$ son complémentaire. Soit une $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-connexion sur A_f^m noté M_f d'où une connexion sur $(A_{\overline{f}}^\dagger)^m$, noté $M_f^\dagger$. On peut alors considérer

$$\chi(U_{\mathbb{C}_p}, DR(M_f)) := \chi(DR(M_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})),$$

$$\chi(U_{\mathbb{F}_\infty}, DR(M_f^\dagger)) := \chi(DR(M_f^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}))$$

et le saut $\phi(0)$ qui est un entier a priori infini :

$$\phi(0) := \chi(U_{\mathbb{F}_\infty}, DR(M_f^\dagger)) - \chi(U_{\mathbb{C}_p}, DR(M_f)).$$

THÉORÈME 6.5.1. — *Le saut $\phi(0)$ est fini si et seulement si M_f est à indice dans l'espace des fonctions analytiques dans les classes résiduelles des points $Z_{\mathbb{F}_\infty}$, dans ce cas on a l'égalité*

$$\phi(0) = \sum_{\overline{x} \in Z_{\mathbb{F}_\infty}} \dim_{\mathbb{C}_p} \operatorname{Coker}(M_f, \mathcal{A}_{\overline{x}}^{1^-}).$$

Preuve. — Pour un point $\overline{x}$ de $Z_{\mathbb{F}_\infty}$ notons $H^1_{\overline{x}}$ la cohomologie locale algébrique des points de $Z_{\mathbb{C}_p}$ contenus dans la classe résiduelle de $\overline{x}$ et $H^\dagger_{\overline{x}}$ la cohomologie locale p-adique de ce point, c'est-à-dire la cohomologie à supports compacts de la classe résiduelle de ce point. On dispose du morphisme de spécialisation

$$A_f \longrightarrow A_f^\dagger$$

qui est injectif et dont le conoyau est $\bigoplus_{\overline{x} \in Z_{\mathbb{F}_\infty}} \operatorname{Coker}(H^1_{\overline{x}} \to H^\dagger_{\overline{x}})$ en vertu du théorème de Mittag-Leffler. Mais $DR(M_f \otimes H^1_{\overline{x}}) = 0$. On a donc la suite exacte

$$0 \to H^0(U_{\mathbb{C}_p}, DR(M_f)) \to H^0(U_{\mathbb{F}_\infty}, DR(M_f^\dagger)) \to H^0\Big(\bigoplus_{\overline{x} \in Z_{\mathbb{F}_\infty}} DR(M_f \otimes H^\dagger_{\overline{x}})\Big) \to$$

$$\to H^1(U_{\mathbb{C}_p}, DR(M_f)) \to H^1(U_{\mathbb{F}_\infty} DR(M_f^\dagger)) \to H^1\Big(\bigoplus_{\overline{x} \in Z_{\mathbb{F}_\infty}} DR(M_f \otimes H^\dagger_{\overline{x}})\Big) \to 0.$$

Si $\phi(0)$ est fini cela entraîne que l'espace $H^1(U_{\mathbb{F}_\infty}, DR(M_f^\dagger))$ est de dimension finie. L'espace A_f est dense dans l'espace $A_{\overline{f}}^\dagger$ de type $\mathcal{LF}$, en vertu du théorème des homomorphismes pour les espaces $\mathcal{LF}$ le morphisme $H^1(U_{\mathbb{C}_p}, DR(M_f)) \longrightarrow H^1(U_{\mathbb{F}_\infty}, DR(M_f^\dagger))$ est surjectif. Donc l'espace $H^1\Big(\bigoplus_{\overline{x}\in Z_{\mathbb{F}_\infty}} DR(M_f \otimes H^\dagger_{\frac{1}{\overline{x}}})\Big)$ est nul et vertu du théorème de dualité l'espace $\mathrm{Coker}\Big(M_f, \bigoplus_{\overline{x}\in Z_{\mathbb{F}_\infty}} \mathcal{A}_{\frac{1}{\overline{x}}}\Big)$ est de dimension finie et $\phi(0) = \sum_{\overline{x}\in Z_0} \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}(M_f, \mathcal{A}_{\frac{1}{\overline{x}}})$. Dans l'autre sens, si $\sum_{\overline{x}\in Z_{\mathbb{F}_\infty}} \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}(M_f, \mathcal{A}_{\frac{1}{\overline{x}}})$ est fini, en vertu du théorème de dualité $\phi(0)$ est fini et l'on a l'égalité précédente. Le saut $\phi(0)$ est alors un entier positif ce qui constitue l'analogue du théorème de semi-continuité de Deligne et qui est aussi l'analogue du théorème de positivité de l'irrégularité en caractéristique nulle. C'est sous cette forme que l'on a rencontré dans ([MN]) le problème de la finitude du conoyau.

6.6. Le théorème de semi-continuité suggère de poser la

DÉFINITION 6.6.1. — *Soit $(\overline{f}, f, M_f)$ un triplet comme précédemment. On pose*

$$\mathrm{irr}_{\overline{x}}(M_f, p) := \mathrm{irr}_{Z_{\overline{x}}}(M_f, \infty) + m(\# Z_{\overline{x}} - 1) - \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}(M_f, \mathcal{A}_{\frac{1}{\overline{x}}^-})$$

et

$$\mathrm{irr}_{Z_{\mathbb{F}_\infty}}(M_f, p) := \mathrm{irr}_{Z_{\mathbb{C}_p}}(M_f, \infty) + m(\# Z_{\mathbb{C}_p} - \# Z_{\mathbb{F}_\infty}) - \sum_{\overline{x}\in Z_{\mathbb{F}_\infty}} \dim_{\mathbb{C}_p} \mathrm{Coker}(M_f, \mathcal{A}_{\frac{1}{\overline{x}}^-}).$$

Dans cette définition $Z_{\overline{x}}$ désigne l'ensemble des points de $Z_{\mathbb{C}_p}$ contenus dans la classe résiduelle d'un point $\overline{x}$. Comme $\mathrm{Ker}(M_f, \mathcal{A}_{\frac{1}{\overline{x}}^-}) = 0$ on trouve que cette définition coïncide avec la définition 6.2.3. De plus on trouve la formule :

$$\chi(U_{\mathbb{F}_\infty}, DR(M_f^\dagger)) = m\chi(U_{F_\infty}) - \sum_{\overline{x}\in Z_{\mathbb{F}_\infty}} \mathrm{irr}_{\overline{x}}(M_f, p),$$

qui est l'analogue p-adique de la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevitch. Cette formule était dans Robba ([R$_4$], 10.5), (voir aussi [Ga], V.1.3.1). La démonstration que donne Garnier ([Ga], V.1.3) repose sur une formule d'indice de nature globale due à Berthelot.

6.7. C'est sous cette forme que la définition de l'irrégularité se généralise en dimension supérieure à condition de démontrer la conjecture de finitude ([MN], 4.5.3) ce qui nécessite l'introduction des opérateurs différentiels d'ordre infini, complété faible des opérateurs d'ordre fini à puissances divisées.

6.8. Le théorème de semi-continuité explique pourquoi les singularités des équations différentielles qui contrôlent la cohomologie p-adique des variétés algébriques, sont irrégulières du point de vue p-adique. Parce que ce sont des confluences en général de plusieurs singularités en caractéristique nulle. Les situations, comme celles de ([C_2], [BC_1]), qui donnent naissance à des singularités régulières sont plutôt rares.

BIBLIOGRAPHIE

[BC_1] F. BALDASSARRI, B. CHIARELLOTTO, Algebraic versus rigid cohomologie with logarithmic coefficients, In The proceeding of the Barsotti Memorial Symposium, Abano Terme Padova, june 24-27, 1991, Perspectives in Math., Academic Press (à paraître).

[BC_2] F. BALDASSARRI, B. CHIARELLOTTO, Formal and p-adique theory of differential systems with logarithmic coefficients singularities depending upon parameters, Duke Math. J., (à paraître).

[B_1] P. BERTHELOT, Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique $p > 0$, dans l'Introduction aux cohomologies p-adiques, Mémoire de la SMF, 23 (1986),7-32.

[B_2] P. BERTHELOT, Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules, p-adic analysis, Lecture Notes in Math., 1454 (1990), 80-124.

[Be] D. BERTRAND, Travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, Séminaire Bourbaki, n 2 538, 31e année, 1978-79.

[Ch] B. CHIARELLOTTO, Duality in rigid analysis, p-adic analysis, Lecture Notes in Math., 1454 (1990), 142-172.

[C_1] G. CHRISTOL, Modules différentiels et équations différentielles p-adiques, Queen's Papers in Pures Math. 66, Queen's University, Kingston (1983).

[C_2] G. CHRISTOL, Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers, Astérisque, 119-120 (1984), 151-132.

[CD_1] G. CHRISTOL, B. DWORK, Effective p-adic bounds, at regular singular points, Duke J. Math., 62 (1991), 689-720.

[CD_2] G. CHRISTOL, B. DWORK, Modules différentiels sur des couronnes, Ann. Inst. Fourier, (à paraître).

[CM] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II, (en préparation).

[D] B. DWORK, On p-adic differential equation II, Annals of Math., 98 (1973), 366-376.

[DR] B. DWORK, Ph. ROBBA, On ordinary linear differential equations, Trans. A.M.S., 231 (1977), 1-46.

[Ga] L. GARNIER, Quelques propriétés des $\mathcal{D}^{\dagger}$-modules sur une courbe, Thèse Université de Rennes, 1993.

[G] A. GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, Sao Paulo, 1954.

[I] E.L. INCE, Ordinary differential equations, Dover, New York, 1956.

[Ka] N. KATZ, Nilpotent connections and the monodromy theorem, I.H.E.S, 39 (1970), 176-332.

[M] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, Ens. Math., XX (1974), 147-176.

[Me] Z. MEBKHOUT, Sur le Théorème de semi-continuité des équations différentielles, Astérisque, 130 (1985), 365-417.

[MN] Z. MEBKHOUT, L. NARVAEZ, Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques, p-adic analysis, Lecture Notes in Math., 1454 (1990), 267-309.

[MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER, Formal cohomology I, Ann. of Math., 88 (1968), 51-62.

[MS] Y. MORITA, W. SCHIKHOF, Duality of projective limit spaces and inductive limit spaces over non spherical complete field, Tohoku Math. J., 38 (1986), 387-397.

[R1] Ph. ROBBA, On the index of p-adic differential operators I, Annals of Math., 101 (1975), 280-316.

[R2] Ph. ROBBA, On the index of p-adic differential operators II Duke Math. J., 43 (1976), 19-31.

[R3] Ph. ROBBA, On the index of p-adic differential operators III, Application to twisted exponential sums, Astérisque, 119-120 (1984), 191-266.

[R4] Ph. ROBBA, Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV. Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque, Ann. Inst. Fourier, 35–2 (1985), 13-55.

[R5] Ph. ROBBA, Conjectures sur les équations différentielles p-adiques linéaires, G.E.A.U., 12e année, (1984-85), n°2, 8 pages, Secrétariat de Mathématiques I.H.P..

[R6] Ph. ROBBA, Equations différentielles p-adiques et applications aux sommes exponentielles, rédigé et complété par G. Christol d'après un manuscrit de Ph. Robba, Hermann (à paraître).

[R7] Ph. ROBBA, Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels, Ens. Math., 26 (1980), 279-311.

G. CHRISTOL,
UFR de Mathématiques
Université Paris VI
4 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 5.

Z. MEBKHOUT,
UFR de Mathématiques
URA 212 du CNRS
Université Paris VII
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 5.