

PIERRE PIGEAUD

**Généralisation des schémas matière pure et
fluide parfait en théorie pentadimensionnelle
de Jordan-Thiry**

Annales de l'institut Fourier, tome 13, n° 1 (1963), p. 181-217

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_1_181_0

© Annales de l'institut Fourier, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRALISATION DES SCHÉMAS MATIÈRE PURE ET FLUIDE PARFAIT EN THÉORIE PENTADIMENSIONNELLE DE JORDAN-THIRY

par Pierre PIGEAUD (Dijon).

Notations utilisées.

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$: tout indice grec prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

i, j, k, \dots : ces indices latins prennent les valeurs 1, 2, 3, 4.

u, ν : ces indices latins prennent les valeurs 0, 1, 2, 3.

A, B : ces majuscules latines prennent les valeurs 1, 2, 3.

x^A désigne la variable temporelle.

x^0 désigne la cinquième variable pentadimensionnelle.

$\partial_\alpha f$ désigne la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

$\partial_{\alpha\beta} f$ désigne la dérivée partielle du second ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$.

D_α et $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ représentent respectivement le symbole de dérivation covariante et les symboles de Christoffel dans la variété V_5 munie de la métrique naturelle $d\sigma$.

$\overset{*}{D}_\alpha$ et $\overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ représentent ces mêmes symboles dans la variété V_5 munie de sa métrique conforme $d\sigma^*$. D'une façon générale, tout élément (opérateur, symbole, etc.) exprimé en métrique conforme sera muni d'un astérisque.

∇_i et $\overset{*}{\nabla}_i$ sont ainsi respectivement les symboles de dérivation covariante dans la variété V_4 munie de la métrique quotient ou de la métrique conforme de M^{me} Hennequin.

Le champ de vecteurs $\vec{\nu}$ engendre les lignes de courant de V_5 . Le champ de vecteurs \vec{u} engendre les trajectoires spatio-temporelles dans la variété quotient.

La forme φ définit le potentiel-vecteur du champ électromagnétique.

La constante β_0 est reliée au coefficient de gravitation par la relation $\chi_0 = \frac{2\pi\beta_0^2}{c^2} = \frac{8\pi G}{c^2}$

G est la constante figurant dans la loi d'attraction de Newton.

Les notations sont, de façon générale, celles utilisées par A. Lichnérowicz dans [5] ⁽¹⁾ et par M^{me} Hennequin dans [1].

⁽¹⁾ Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie page 216.

**I. — Rappels sommaires
concernant la théorie pentadimensionnelle.**

La théorie de Jordan-Thiry [5] [9] est élaborée dans le cadre géométrique d'une variété différentiable à cinq dimensions de classe C^2 . Sur cette variété V_5 est définie une métrique riemannienne partout de type hyperbolique normal :

$$(I-1) \quad d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4.)$$

La variété V_5 est supposée admettre un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales, à trajectoires orientées $d\sigma^2 < 0$. Ce groupe d'isométries induit une relation d'équivalence, la variété quotient V_4 sera munie de la métrique :

$$(I-2) \quad ds^2 = \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i} \gamma_{0j}}{\gamma_{00}} \right) dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j. \\ (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

Les composantes du tenseur fondamental de V_5 (et par suite celles du tenseur g_{ij}) sont déterminées par un système d'équations tensorielles généralisant formellement celui de la relativité, soit :

$$(I-3) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \gamma_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} \equiv r \nu_{\alpha\nu\beta}$$

$R_{\alpha\beta}$ étant le tenseur de Ricci de V_5 .

Les conditions de conservation appliquées au tenseur énergétique $\Theta_{\alpha\beta}$ montrent que la trajectoire pentadimensionnelle d'une masse d'épreuve est géodésique de la métrique de V_5 . Le long d'une telle géodésique, dite ligne de courant pentadimensionnelle, est vérifiée l'intégrale première $\nu_0 = h = \text{const}$. Le principe de descente d'Yves Thiry [9] permet de faire correspondre à cette ligne de courant, par projection sur V_4 , une trajectoire quadridimensionnelle géodésique de la métrique finslérienne :

$$(I-4) \quad \sqrt{1 - h^2/\gamma_{00}} ds + h\beta_0\varphi.$$

Le caractère propre à la théorie de Jordan-Thiry consiste à supposer (en opposition à la théorie de Kaluza-Klein) le quinzième potentiel γ_{00} variable. Posant $\gamma_{00} = -\xi^2$, l'étude

des équations tensorielles, en repères orthonormés adaptés, conduit à interpréter ξ^3 comme représentant un pouvoir diélectrique variable de l'espace vide [5].

Il est a priori naturel de désirer identifier, dans la mesure du possible, la variété quotient V_4 et l'espace-temps de la relativité générale. Les calculs approchés des potentiels sont réalisés en égalant, dans les développements des deux membres des équations tensorielles, les termes du même ordre en $1/c$ (c vitesse de la lumière). Les coordonnées utilisées sont adaptées au groupe d'isométries et constituent un système isotherme dans V_5 ; les potentiels g_{ij} possèdent, dans ces conditions, les développements suivants :

$$(I-5) \quad \begin{cases} g_{AB} = -\delta_A^B + 2c^{-2} \delta_A^B (\alpha_{00} - U) + 0(c^{-4}) \\ g_{44} = c^2 - 2U - 2\alpha_{00} + 0(c^{-2}) \end{cases}$$

$\alpha_{00} = U/3 + Q/6$: U est le potentiel newtonnien, Q est un potentiel relatif à une densité fictive e^2/m , (e et m sont respectivement les densités énergétiques de charge et de masse).

Ces résultats montrent que, dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle, l'identification de la variété V_4 avec l'espace-temps relativiste est irréalisable : la contribution du terme α_{00} rend en effet inacceptables les expressions ci-dessus. Les potentiels corrects sont obtenus à la seule condition d'effacer le terme α_{00} , (c'est-à-dire de poser $\xi = 1$), ce qui revient à considérer les équations de la théorie provisoire puisqu'il faut également effacer la quinzième équation de champ.

M^{me} Hennequin résoud la difficulté en envisageant de munir l'espace quotient d'une nouvelle métrique, dite métrique conforme, [1], définie par la relation :

$$(I-6) \quad ds^{*2} = \xi ds^2.$$

On constate que les potentiels conformes ($g_{ij}^* = \xi g_{ij}$) coïncident avec les potentiels relativistes, du moins en première approximation; soit :

$$(I-7) \quad \begin{cases} g_{AB}^* = -\delta_A^B - 2c^{-2} \delta_A^B U + 0(c^{-4}) \\ g_{44}^* = c^2 - 2U + 0(c^{-2}). \end{cases}$$

L'interprétation, en métrique conforme, des équations tensorielles possède en outre des avantages annexes :

Les conditions d'isothermie pentadimensionnelles conduisent aux conditions classiques d'isothermie en métrique conforme de V_4 .

Le coefficient de gravitation ne dépend plus du quinzième potentiel, il est maintenant constant et peut être identifié au coefficient classique.

Les dix premières équations de champ ($S_{ij} = \Theta_{ij}$) ne font plus intervenir, en repères orthonormés adaptés, les dérivées secondes du quinzième potentiel.

II. — Calculs en seconde approximation.

Des expressions approchées (I-7) des potentiels conformes ⁽²⁾, nous ne pouvons pas déduire le coefficient du terme en c^{-2} dans le développement du ds^{*2} conforme. En effet, le potentiel g_{44}^* n'est pas déterminé avec assez de précision par les seuls calculs de la première approximation.

Le but d'une seconde approximation sera donc de déterminer ce coefficient. Pour cela, il faut évaluer les développements des premiers et seconds membres des équations de champ, évaluation effectuée en explicitant les termes d'ordre immédiatement supérieur à celui de la partie principale.

Sans préciser le détail des calculs [8], nous présentons uniquement le résultat final. Le calcul est effectué en conservant exactement les hypothèses de M^{me} Hennequin, c'est-à-dire :

— Le tenseur énergétique pentadimensionnel choisi généralise formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure.

— L'interprétation s'effectue en métrique conforme de la variété quotient.

Le potentiel U est ainsi défini par $\Delta U = -4\pi G m^*$, m^* étant la densité énergétique de masse évaluée en métrique conforme, soit :

$$m^* = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*}.$$

⁽²⁾ Le potentiel g_{4A}^* ($A = 1,2,3$) est, en première approximation, identique au potentiel relativiste correspondant.

Dans ces conditions, il vient :

$$(II-1) \quad g_{44}^* = c^2 - 2U + 2c^{-2}(U^2 - \zeta') + 0(c^{-4})$$

$$\zeta' = \zeta + Z.$$

ζ n'est autre que le terme de gravitation pure obtenu de façon classique en relativité, ce terme est défini par la relation :

$$\Delta\zeta = \delta_{44}U - U\Delta U + \frac{3}{2}V^2\Delta U.$$

où V désigne la vitesse spatiale.

Z est déterminé par

$$(II-3) \quad \Delta Z = -\frac{\beta_0^2}{4}(E^2 + H^2)$$

E et H sont respectivement les champs électrique et magnétique.

Ce terme Z , spécifique de la théorie de Jordan-Thiry, représente ainsi, au coefficient $1/4\pi$ près, un potentiel relatif à la densité d'énergie d'origine électromagnétique.

L'expression (II-1) du potentiel conforme g_{44}^* est donc très voisine de celle du potentiel relativiste correspondant g_{44R} . Ce fait résulte de nombreuses simplifications intervenant au cours des calculs, simplifications éliminant la contribution du quinzième potentiel γ_{00} . Soulignons par contre que les expressions des potentiels γ_{44} et g_{44} demeurent très complexes.

Le schéma considéré étant supposé purement gravitationnel, en l'absence de champ électromagnétique : $Z = 0$. Le potentiel conforme est alors rigoureusement égal au potentiel relativiste; il en est de même (à une troisième approximation près) du développement du ds^{*2} [2]

$$(II-4) \quad \frac{ds^{*2}}{dt^2} = c^2 - (V^2 + 2U) + 2c^{-2}(U^2 - \zeta - UV^2 + \alpha_{4A}V^A) + 0(c^{-4}).$$

Il semble donc possible d'identifier la variété quotient V_4 douée de la métrique conforme de M^{me} Hennequin avec l'espace-temps relativiste, cette identification étant réalisée en seconde approximation.

Nous constatons ainsi que la métrique conforme ds^* apparaît comme « osculatrice » à la métrique einsteinienne, ceci

dans le cadre d'un schéma gravitationnel pur. Ce fait est très important puisqu'il permet de supposer que nous pourrions rendre compte, en théorie pentadimensionnelle, des effets mécaniques relativistes (déplacement du périhélie en mécanique céleste [2]).

L'examen des difficultés et la façon de surmonter celles-ci nous conduiront cependant à modifier légèrement le résultat exposé. Nous devons en effet faire choix d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ plus complet, faisant intervenir (en seconde approximation) la contribution du pouvoir diélectrique ξ^3 .

III. — Étude critique des équations de mouvement.

Le principe de descente permet d'écrire les équations de mouvement d'une masse d'épreuve sous la forme variationnelle :

$$(III-1) \quad \delta \left\{ \int \sqrt{1 + h^2/\xi^2} \xi^{-1/2} ds^* + h\beta_0\varphi \right\} = 0.$$

La variation étant envisagée dans V_4 , la variable temporelle $x^4 = t$ n'étant pas variée, (III-1) s'écrit :

$$(III-2) \quad \delta \left\{ \int L dt \right\} = 0.$$

On évalue la partie principale de L en utilisant les calculs en première approximation des potentiels. Considérons le cas gravitationnel pur, c'est-à-dire par exemple l'étude du mouvement d'un neutron ($h = 0$) en l'absence de champ électromagnétique, il vient :

$$(III-3) \quad L = V^2/2 + U + \alpha_{00} + 0(c^{-2}).$$

Si nous envisageons le cas particulier de la théorie de Kaluza-Klein ($\xi = 1$ d'où $\alpha_{00} = 0$) nous retrouvons bien la fonction de Lagrange classique. Par contre, si nous considérons le cas gravitationnel pur dans le cadre de la théorie à quinze variables de champ, nous devons simplement annuler Q dans l'expression de α_{00} , c'est-à-dire prendre :

$$\alpha_{00} = U/3.$$

L'expression de la fonction à rendre extrémale est alors inacceptable; nous devons en effet obtenir la fonction lagran-

gienne classique en première approximation ainsi que cela est réalisé en théorie de Kaluza-Klein.

La principale difficulté est évidemment l'expression incorrecte de la fonction L obtenue ci-dessus. Examinons la cause de ce désaccord. Les équations (III-1) s'écrivent :

$$(III-4) \quad \delta \left\{ \int \xi^{-1/2} ds^* \right\} = 0$$

lorsqu'elles définissent la trajectoire d'une particule non chargée ($h = 0$).

Nous constatons ainsi que la présence du terme $\xi^{-1/2}$ est à l'origine de la difficulté rencontrée : la projection sur l'espace quotient de la trajectoire pentadimensionnelle d'un neutron n'est pas géodésique de la métrique conforme ds^* . En d'autres termes, le principe des géodésiques, principe fondamental de la relativité générale, n'est pas réalisé dans la variété quotient munie de cette métrique conforme.

La difficulté mise ainsi en évidence est capitale; il s'agit en effet de calculs effectués en première approximation; la fonction lagrangienne L est perturbée dans sa partie principale par le terme surabondant α_{00} alors que les variations de ξ sont d'ordre c^{-2} . Ceci tient au fait suivant : si l'on cherche un développement de la fonction L , il faut effectuer la multiplication des deux développements

$$\begin{aligned} \xi^{-1/2} &= 1 - \alpha_{00}c^{-2} + 0(c^{-4}), \\ \frac{ds^*}{dt} &= c - c^{-1}(V^2/2 + U) + 0(c^{-3}). \end{aligned}$$

Le premier terme est la constante c ; le terme suivant constitue la partie principale de la fonction lagrangienne; le coefficient du terme du second ordre dans le développement de ξ aura donc un effet du premier ordre dans les équations de mouvement.

Cette incohérence ruine a priori les résultats présentés précédemment et relatifs à un calcul en seconde approximation du potentiel g_{44}^* . Nous verrons cependant qu'il nous sera possible de préserver, dans une certaine mesure, la validité de ces calculs, tout en obtenant des équations de mouvement correctes.

Nous avons envisagé le cas d'une masse d'épreuve non

chargée. Examinons le cas général : nous devons remplacer α_{00} par sa valeur, soit $\alpha_{00} = U/3 + Q/6$, dans l'expression de la fonction à rendre extrémale. Une nouvelle difficulté apparaît : le potentiel Q , relatif à la densité fictive e^{*2}/m^* , figure dans la partie principale de la fonction lagrangienne ; le terme Q ne peut pourtant pas recevoir d'interprétation classique et apparaît de ce fait comme propre à la théorie pentadimensionnelle. Un rapide calcul présenté par M^{me} Hennequin [1] montre cependant que sa contribution est d'un ordre de grandeur prohibitif en comparaison avec les ordres de grandeur des termes classiques.

Le terme α_{00} doit finalement être considéré comme un terme parasite ; sa contribution doit être tenue pour étrangère et dans toute tentative pour obtenir une formulation correcte nous devons la faire disparaître.

Notons enfin une dernière difficulté. L'équation de continuité

$$\nu^\beta D_\alpha \Theta_\beta^\alpha = 0;$$

permet d'affirmer que la quantité

$$n = \frac{\chi_0 m^* \xi^{1/2}}{\sqrt{1 + h^2/\xi^2}} \quad \left(m^* = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*} \right)$$

est conservée le long de chaque ligne de courant de V_4 . Envisageons une particule non chargée ($h = 0$), nous constatons que la densité énergétique conforme m^* n'est pas conservative ainsi que cela est réalisé en relativité. Seule l'expression $m^* \sqrt{\xi}$ possède cette propriété, ce qui n'est pas susceptible d'être interprété de façon classique.

IV. — Généralisation des schémas matière pure et fluide parfait en théorie unitaire pentadimensionnelle.

A. — Schéma matière pure généralisé.

1. Généralités.

Nous avons signalé que la coïncidence obtenue entre les potentiels conformes g_i^* et les potentiels relativistes pouvait être prolongée en seconde approximation des calculs. Cela nous incite fortement à poursuivre nos recherches dans le

but de faire jouer à l'espace quotient V_4 doué de la métrique conforme le rôle de l'espace-temps relativiste, et cela malgré les difficultés analysées ci-dessus.

Pour qu'il en soit ainsi, nous devons faire en sorte que le principe relativiste des géodésiques soit vérifié dans l'espace quotient muni de la métrique conforme. Nous posons donc a priori le principe suivant : la trajectoire quadridimensionnelle d'une masse d'épreuve non chargée est géodésique de la métrique de M^{me} Hennequin.

Nous orientons ainsi nos recherches sur une modification du tenseur second membre, de façon que ce tenseur possède la propriété énoncée ci-dessus. Il est naturel de considérer un tenseur possédant le degré de complexité immédiatement supérieur à celui envisagé précédemment, c'est-à-dire un tenseur généralisant le tenseur relativiste du schéma fluide parfait holonome :

$$(IV-1) \quad \Theta_{\alpha\beta} = r\nu_{\alpha}\nu_{\beta} - k\gamma_{\alpha\beta}.$$

Précisons que notre intention est de généraliser à la théorie pentadimensionnelle le schéma matière pure et non, pour l'instant, le schéma fluide parfait ; nous choisissons cependant un tenseur de la forme (IV-1) puisque le tenseur généralisant formellement le tenseur relativiste du schéma matière pure (correspondant à $k = 0$) ne respecte pas le principe des géodésiques en métrique conforme de V_4 .

2. Schéma holonome dans la variété V_5 .

Le tenseur adopté étant de la forme (IV-1), on caractérise le fait que le schéma est holonome dans V_5 en supposant les scalaires r et k liés par une relation, soit :

$$r = f(k).$$

Dans ces conditions, on peut définir un troisième scalaire Φ par l'expression :

$$(IV-2) \quad \Phi = \exp \varepsilon \int_{k_0}^k \frac{du}{f(u)}$$

$\varepsilon = \pm 1$ suivant que le vecteur ν , tangent à la ligne de courant pentadimensionnelle issue du point considéré, est orienté $d\sigma^2 > 0$ ou $d\sigma^2 < 0$.

Φ est appelé indice pentadimensionnel du schéma.

On généralise aisément les propriétés du schéma holonome relativiste; les équations de conservation s'écrivent :

$$(IV-3) \quad \begin{cases} D_{\alpha}(r\nu^{\alpha}) = r\partial_{\alpha}(\text{Log } \Phi)\nu^{\alpha} \\ \nu^{\alpha}D_{\alpha}\nu_{\beta} = (\varepsilon\gamma_{\beta}^{\alpha} - \nu^{\alpha}\nu_{\beta})\partial_{\alpha}(\text{Log } \Phi). \end{cases}$$

Elles expriment que les lignes de courant de V_5 sont géodésiques de cette variété munie de la métrique :

$$(IV-4) \quad \begin{aligned} d\bar{\sigma}^2 &= \Phi^2 d\sigma^2 = \bar{\mathcal{L}}^2 du^2, \\ \bar{\mathcal{L}}^2 &= \Phi^2 \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{du} \frac{dx^{\beta}}{du}. \end{aligned}$$

Dans cette nouvelle métrique (dont les potentiels sont $\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \Phi^2 \gamma_{\alpha\beta}$) on peut considérer le vecteur $\bar{\nu}$ de composantes :

$$\bar{\nu}_{\alpha} = \Phi\nu_{\alpha}, \quad \bar{\nu}^{\alpha} = \bar{\gamma}^{\alpha\beta}\bar{\nu}_{\beta} = \nu^{\alpha}/\Phi.$$

On observera que le vecteur $\bar{\nu}$ est unitaire dans la métrique $d\bar{\sigma}$; \bar{D}_{α} étant l'opérateur de dérivation covariante associé à la métrique $d\bar{\sigma}$, les équations de conservation (IV-3) entraînent dans cette métrique :

$$(IV-5) \quad \bar{\nu}^{\alpha}\bar{D}_{\alpha}\bar{\nu}_{\beta} = 0$$

système auquel il faut ajouter l'équation de continuité :

$$(IV-6) \quad D_{\alpha}(r\nu^{\alpha}/\Phi) = 0,$$

que nous interpréterons ultérieurement en termes de métrique $d\bar{\sigma}$.

Nous pouvons appliquer le principe de descente aux géodésiques définies par (IV-5); celles-ci, satisfaisant à l'intégrale première :

$$(IV-7) \quad \partial_0 \bar{\mathcal{L}} = \bar{\nu}_0 = \Phi\nu_0 = h, \quad (du = d\bar{\sigma}),$$

se projettent sur la variété quotient suivant les extrémales de l'intégrale :

$$(IV-8) \quad \int \sqrt{1 + h^2/\Phi^2 \zeta^2} d\bar{s} + \beta_0 h \varphi.$$

$d\bar{s}$ étant la métrique quotient définie par le tenseur fondamental :

$$\bar{g}_{ij} = \bar{\gamma}_{ij} - \frac{\bar{\gamma}_{0i}\bar{\gamma}_{0j}}{\bar{\gamma}_{00}} = \Phi^2 g_{ij}, \quad d\bar{s} = \Phi ds,$$

la forme φ étant déterminée par :

$$\beta_{0\varphi} = \frac{\bar{\gamma}_{0i}}{\bar{\gamma}_{00}} dx^i = \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}} dx^i.$$

3. *Détermination d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ tel que le principe des géodésiques soit vérifié en métrique conforme de V_4 .*

Les trajectoires quadridimensionnelles sont extrémales, pour des variations à extrémités fixes, de l'intégrale (IV-8). Cette intégrale peut s'exprimer en mettant en évidence le ds^* conforme.

$$(IV-8') \quad \int \sqrt{1 + h^2/\Phi^2 \xi^2} \Phi \xi^{-1/2} ds^* + h\beta_{0\varphi}.$$

Considérons un schéma gravitationnel pur. Les équations de la trajectoire d'une masse d'épreuve non chargée (neutron) s'écrivent :

$$(IV-9) \quad \delta \left(\int \Phi \xi^{-1/2} ds^* \right) = 0, \quad (h = 0).$$

Pour satisfaire au principe des géodésiques en métrique conforme de V_4 , nous devons avoir la relation :

$$(IV-10) \quad \Phi = \xi^{1/2}.$$

Le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ doit donc définir dans V_5 un indice penta-dimensionnel égal à $\xi^{1/2}$. Les scalaires r et k caractérisant ce tenseur seront liés par la relation :

$$(IV-11) \quad \frac{\varepsilon dk}{r} = d(\text{Log } \xi^{1/2}).$$

Rappelons que les géodésiques orientées $d\sigma^2 < 0$ décrivent le mouvement de particules élémentaires chargées telles que le proton et l'électron. Comme nous limiterons les applications à l'étude, en théorie unitaire, des phénomènes classiques de mécanique céleste, nous considérons exclusivement les géodésiques orientées $d\sigma^2 > 0$ et choisirons donc $\varepsilon = +1$; de plus la constante h sera supposée très petite lorsque nous étudierons un schéma chargé.

Les calculs approchés, dont nous avons présenté les résultats, ont été réalisés en utilisant la relation :

$$r = \frac{\chi_{0\rho}\xi}{1 + h^2/\xi^2}.$$

Le choix de cette expression est motivé par deux raisons a priori indépendantes :

D'une part le souci d'obtenir un coefficient de gravitation constant et égal au coefficient χ_0 de la relativité, ceci lors de l'interprétation des équations de champ en métrique conforme de V_4 .

D'autre part ce choix se trouve confirmé lorsqu'on effectue le calcul en seconde approximation du potentiel g_{44}^* : le fait que r contienne ξ en facteur permet d'effacer le terme étranger Q en éliminant les termes contenant α_{00} .

Avec l'hypothèse d'un indice pentadimensionnel $\xi^{1/2}$, nous choisisons :

$$(IV-12) \quad r = \frac{\chi_0 \rho \xi}{1 + h^2/\xi^3}$$

les composantes des vecteurs ν et u , respectivement tangents aux lignes de courant de V_5 et V_4 , étant liées par les relations ⁽³⁾ :

$$\nu_i = \sqrt{1 + h^2/\xi^3} u_i$$

r étant défini par (IV-12), le scalaire k doit vérifier la relation différentielle :

$$(IV-13) \quad dk = \frac{\chi_0 \rho}{1 + h^2/\xi^3} d\xi/2.$$

Nous étudierons plus loin les conditions d'existence d'un tel scalaire k , celles-ci dépendant évidemment de la distribution que l'on désire représenter.

4. Conséquences du choix de l'indice pentadimensionnel.

a) Rappelons pour mémoire que nous avons été conduits à choisir cet indice de façon que la projection sur l'espace quotient, de la trajectoire d'une masse d'épreuve non chargée (neutron), soit géodésique de cette variété quotient douée de la métrique conforme de M^m e Hennequin.

Il est clair que, si nous obtenons par ce procédé des équations de mouvement en accord avec le principe relativiste des géodésiques, l'introduction dans les équations de champ du

⁽³⁾ Cette expression de r permet donc de conserver un coefficient de gravitation constant en métrique conforme de V_4

$$r\nu_i\nu_j = \chi_0\rho u_i^*u_j^*.$$

terme $k\gamma_{\alpha\beta}$ va perturber les expressions des potentiels conformes, expressions calculées avec l'hypothèse d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ correspondant à $k = 0$. Nous éviterons cet inconvénient en choisissant k d'ordre $1/c^2$ vis-à-vis de r ; le calcul des potentiels ne sera pas altéré en première approximation. En seconde approximation, la contribution du terme nouveau devra être considérée comme caractéristique de la théorie unitaire: k est en relation directe avec le quinzième potentiel, c'est-à-dire le pouvoir diélectrique.

b) Le choix d'un indice pentadimensionnel $\xi^{1/2}$ modifie l'application du principe de descente. Considérons la métrique définie par (IV-4), expression où l'on a remplacé Φ par sa valeur $\xi^{1/2}$. Nous obtenons:

$$(IV-14) \quad d\sigma^2 = \xi\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\sigma^{*2},$$

c'est-à-dire la métrique conforme construite sur la variété V_5 à l'aide du scalaire ξ . Le principe de descente doit ainsi, avec nos hypothèses, être effectué à partir de la variété V_5 douée de la métrique conforme $\xi d\sigma^2$.

Nous sommes conduits à distinguer dans V_5 deux métriques: — la métrique initiale définie par la relation:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

les composantes du tenseur $\gamma_{\alpha\beta}$ étant déterminées directement par les équations de champ dans V_5 . Cette métrique sera qualifiée de «métrique naturelle de la variété V_5 »;

— la métrique conforme, associée à la métrique naturelle, définie par la relation:

$$d\sigma^{*2} = \xi d\sigma^2, \quad (\gamma_{\alpha\beta}^* = \xi\gamma_{\alpha\beta}).$$

Observons que la métrique conforme de la variété V_5 fournit directement, en passant à la variété quotient, la métrique de M^{me} Hennequin. En effet:

$$g_{ij}^* = \xi \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0j}}{\gamma_{00}} \right) = \gamma_{ij}^* - \frac{\gamma_{0i}^*\gamma_{0j}^*}{\gamma_{00}^*}.$$

La trajectoire pentadimensionnelle d'une masse d'épreuve étant géodésique de la métrique conforme de V_5 , le principe de descente s'applique sans modifications nouvelles. Les

géodésiques de la métrique $d\sigma^*$, satisfaisant à l'intégrale première :

$$\partial_0 \varrho^* = \gamma_{0\alpha}^* \rho^\alpha = \rho_0 = h, \quad (\varrho^{*2} = \gamma_{\alpha\beta}^* \rho^\alpha \rho^\beta = 1)$$

se projettent sur la variété quotient suivant les extrémales de l'intégrale :

$$\int \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}^*}\right) g_{ij}^* dx^i dx^j + h \frac{\gamma_{0i}^*}{\gamma_{00}^*} dx^i},$$

c'est-à-dire :

$$(IV-15) \quad \int \sqrt{1 + h^2/\xi^3} ds^* + \beta_0 h \varphi.$$

En l'absence de charges, les trajectoires quadridimensionnelles sont géodésiques de la métrique $ds^*(h=0)$. On obtient donc, dans ce cas, une correspondance simple entre les géodésiques des variétés riemanniennes V_5 et V_4 munies de leurs métriques conformes respectives, les secondes étant projections des premières et s'en déduisant à l'aide du principe de descente.

Notons que, dans le cas où $h \neq 0$, c'est le pouvoir diélectrique ξ^3 lui-même qui intervient, de façon simple, dans la métrique de Finsler associée à la variété quotient.

c) L'équation de continuité (IV-6) associée au schéma s'écrit :

$$D_\alpha(r\xi^{-1/2}\rho^\alpha) = 0;$$

cette équation exprime la conservation, le long des lignes de courant de V_4 , de la quantité :

$$(IV-16) \quad n' = n\xi^{-1/2} = \frac{\chi_0 m^*}{\sqrt{1 + h^2/\xi^3}}$$

il suffit en effet de substituer au scalaire r le scalaire $r\xi^{-1/2}$, les calculs classiques restant inchangés.

La dernière difficulté signalée (III) disparaît : en l'absence de charges, la densité énergétique conforme m^* est conservée le long de chaque ligne de courant de V_4 . Nous retrouvons ainsi le résultat relativiste.

5. *Etude des conditions de conservation en métrique conforme de V_5 .*

L'équation de continuité envisagée ci-dessus peut être

interprétée en termes de métrique conforme de V_5 . Explicitons la dérivation covariante :

$$D_\alpha(r\xi^{-1/2}\rho^\alpha) \equiv \partial_\alpha(r\xi^{-1/2}\rho^\alpha) + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha r\xi^{-1/2}\rho^\beta.$$

Les symboles de Christoffel relatifs à la métrique conforme de V_5 sont définis par :

$$\overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\gamma \partial_\beta \xi / \xi + \delta_\beta^\gamma \partial_\alpha \xi / \xi - \gamma_{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\lambda} \partial_\lambda \xi / \xi)$$

il vient :

$$\overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha + \frac{5}{2} \partial_\beta \xi / \xi$$

Compte tenu de la relation :

$$\rho^\alpha = \xi^{1/2} \overset{*}{\rho}^\alpha,$$

nous obtenons :

$$D_\alpha(r\xi^{-1/2}\rho^\alpha) \equiv \partial_\alpha(r\overset{*}{\rho}^\alpha) + \left(\overset{*}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\alpha - \frac{5}{2} \partial_\beta \xi / \xi \right) r\overset{*}{\rho}^\beta.$$

D'où l'identité :

$$(IV-17) \quad D_\alpha(r\xi^{-1/2}\rho^\alpha) \equiv \xi^{5/2} \overset{*}{D}_\alpha(r\xi^{-5/2}\overset{*}{\rho}^\alpha) = 0.$$

Le système des conditions de conservation, exprimées en termes de métrique conforme de V_5 , s'obtient en réunissant (IV-5) et (IV-17), soit :

$$(IV-18) \quad \begin{cases} \overset{*}{\rho}^\alpha \overset{*}{D}_\alpha \overset{*}{\rho}^\beta = 0, \\ \overset{*}{D}_\alpha(r\xi^{-5/2}\overset{*}{\rho}^\alpha) = 0. \end{cases}$$

On constate que ce dernier système résulte des conditions de conservation, en métrique conforme de V_5 , du tenseur :

$$(IV-19) \quad \overset{*}{X}_{\alpha\beta} = r\xi^{-5/2} \overset{*}{\rho}^\alpha \overset{*}{\rho}^\beta.$$

Cette propriété peut être mise directement en évidence. Les scalaires r et k étant liés par la relation (IV-11), on peut établir l'identité :

$$(IV-20) \quad D_\alpha(r\rho^\alpha \rho_\beta - k\gamma_\beta^\alpha) \equiv \xi^{5/2} \overset{*}{D}_\alpha(r\xi^{-5/2} \overset{*}{\rho}^\alpha \overset{*}{\rho}_\beta).$$

Cette identité nous permet de substituer au tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ (conservatif en métrique naturelle de V_5) un nouveau tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$, conservatif en métrique conforme. Observons que ce dernier tenseur généralise formellement le tenseur relativiste

du schéma « matière pure ». Le terme relatif au pouvoir diélectrique, soit $k\gamma_{\alpha\beta}$, a en effet disparu dans le changement de métrique.

Envisageons les équations de mouvement résultant de ces conditions de conservation. Considérant à part l'intégrale des géodésiques ainsi que l'équation de continuité, il reste trois équations :

$$\overset{*}{D}_\alpha(\overset{*}{X}_\lambda^\alpha) = 0 \quad (A = 1, 2, 3.),$$

ces équations, après une transformation classique, peuvent s'écrire :

$$(IV-21) \quad \frac{d}{dt}(\overset{*}{X}_\lambda^* \sqrt{\gamma^*}) = \frac{1}{2} \partial_\lambda \gamma_{\alpha\beta}^* (\overset{*}{X}^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*}).$$

Notons que seules les composantes de la densité tensorielle $\overset{*}{X}_{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*}$ interviennent effectivement dans les équations de mouvement proprement dites. Explicitons ces composantes :

$$\overset{*}{X}_{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*} = r \xi^{-5/2} \nu_\alpha^* \nu_\beta^* \sqrt{\gamma^*}.$$

Compte tenu de la relation :

$$\sqrt{\gamma^*} = \xi^{3/2} \sqrt{-g^*},$$

nous obtenons :

$$r \xi^{-5/2} \sqrt{\gamma^*} = \frac{\chi_0 \rho}{1 + h^2/\xi^3} \sqrt{-g^*}.$$

Soit $\overset{*}{u}$ le vecteur, unitaire en métrique conforme de V_4 , tangent aux lignes de courant de cette variété; nous pouvons exprimer les quinze composantes de la densité tensorielle $\overset{*}{X}_{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*}$ en termes de V_4 munie de la métrique conforme, soit :

$$\begin{aligned} \overset{*}{X}_{00} \sqrt{\gamma^*} &= \frac{\chi_0 \rho h^2}{1 + h^2/\xi^3} \sqrt{-g^*}; \\ \overset{*}{X}_{0i} \sqrt{\gamma^*} &= \frac{\chi_0 \rho h}{\sqrt{1 + h^2/\xi^3}} \overset{*}{u}_i \sqrt{-g^*}; \\ \overset{*}{X}_{ij} \sqrt{\gamma^*} &= \chi_0 \rho \overset{*}{u}_i \overset{*}{u}_j \sqrt{-g^*} = \overset{*}{\mathcal{C}}_{ij}. \end{aligned}$$

$\overset{*}{\mathcal{C}}_{ij}$ étant exactement la densité tensorielle envisagée en relativité générale [1].

Envisageons l'hypothèse d'un schéma gravitationnel pur :

$${}^* \nu_0 = {}^* \nu^0 = 0, \quad {}^* \gamma_{0i} = {}^* \gamma^{0i} = 0,$$

les équations de mouvement (IV-21) s'écrivent :

$$(IV-22) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{C}_A^4 = \frac{1}{2} \delta_A g_{ij}^* \mathcal{C}^{ij}.$$

Nous retrouvons, ainsi que le principe de descente le laissait prévoir, les équations relativistes [1] exprimées en termes de métrique conforme de V_4 .

Soulignons le fait qu'en définitive, seule la densité tensorielle construite sur le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ est justifiable d'une interprétation énergétique dans V_4 .

Pour achever l'étude des conditions de conservation, considérons à nouveau l'équation de continuité et interprétons la quantité n' , explicitée en (IV-16), en fonction de la densité énergétique de charge e^* . Pour cela, il nous faut préciser l'expression de e^* en écrivant les équations de champ relatives aux indices (o, i) . Ces équations sont en effet directement comparables aux équations de Maxwell.

En repères orthonormés adaptés :

$$S_{0i} = r \nu_0 \nu_i,$$

c'est-à-dire (en utilisant les calculs effectués par Y. Thiry [9], ainsi que l'adaptation de ces calculs en métrique conforme, réalisée par M^{me} Hennequin [1]) :

$$(IV-23) \quad \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{H}^i = \frac{4\pi\rho\beta_0 h}{\sqrt{1+h^2/\xi^3}} \overset{*}{u}_i$$

(ν_0 est ici donné par l'expression : $\nu_0 = \frac{\rho_0}{\xi} = \frac{h}{\xi^{3/2}}$.)

La densité classique de charge μ se trouve précisée :

$$(IV-24) \quad \mu = \frac{\beta_0 \rho h}{\sqrt{1+h^2/\xi^3}}$$

La densité e^* peut ainsi être évaluée :

$$e^* = \mu \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*} = \frac{\beta_0 h m^*}{\sqrt{1+h^2/\xi^3}}, \quad \left(m^* = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*} \right),$$

soit :

$$e^* = \frac{h\beta_0}{\gamma_0} n',$$

n' étant défini par la relation (IV-16).

La densité énergétique de charge, évaluée en métrique conforme, est donc conservée le long de chaque ligne de courant de V_4 .

La relation :

$$(IV-25) \quad \frac{e^*}{m^*} = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\beta_0 h}{\sqrt{1 + h^2/\xi^3}},$$

diffère de la relation analogue établie en théorie provisoire par la présence du pouvoir diélectrique variable, terme caractéristique de la théorie pentadimensionnelle.

B. — Schéma fluide parfait généralisé.

1. Généralisation du schéma fluide parfait non chargé.

Rappelons une remarque effectuée précédemment : la densité tensorielle construite, en métrique conforme de V_5 , à partir du tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$, joue un rôle déterminant dans les équations de mouvement associées au schéma. Les composantes d'indices i, j de cette densité, composantes devant représenter une contribution énergétique classique, seront donc identifiées, en l'absence de charges, aux composantes de mêmes indices de la densité tensorielle relativiste $\overset{*}{\mathcal{C}}_{ij}$.

Il vient ainsi :

$$(IV-26) \quad \overset{*}{X}_{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*} = \gamma_0 \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{\nu}_{\alpha} \overset{*}{\nu}_{\beta} - \frac{p}{c^2} \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} \right] \sqrt{-g^*}.$$

Les composantes d'indices $0, i$ sont alors nulles

$$(\overset{*}{\nu}_0 = \overset{*}{\gamma}_{0i} = 0);$$

par contre la quinzième composante a pour expression :

$$\overset{*}{X}_{00} \sqrt{\gamma^*} = - \frac{\gamma_0}{c^2} p \sqrt{-g^*} \overset{*}{\gamma}_{00}.$$

La contribution de cette quinzième composante a donc pour effet de modifier légèrement les équations de mouvement.

Interprétons ce fait en étudiant les conditions de conservation relatives au tenseur $X_{\alpha\beta}$. Ce tenseur a pour expression :

$$(IV-27) \quad \overset{*}{X}_{\alpha\beta} = \chi_0 \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{\nu}_\alpha \overset{*}{\nu}_\beta - \frac{p}{c^2} \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} \right] \xi^{-3/2}.$$

Le scalaire p doit être considéré comme décrivant la pression au sens classique.

Les conditions de conservation écrites en métrique conforme de V_5 :

$$\overset{*}{D}_\alpha \overset{*}{X}^{\alpha_A} = 0,$$

donnent naissance aux équations de mouvement suivantes :

$$(IV-28) \quad \partial_i (\overset{*}{X}^i_A \sqrt{\gamma^*}) = \frac{1}{2} \partial_A \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} (\overset{*}{X}^{\alpha\beta} \sqrt{\gamma^*}).$$

Le premier membre de ces équations peut s'exprimer de façon simple; il vient en effet :

$$\begin{aligned} \overset{*}{X}^4_A \sqrt{\gamma^*} &= \chi_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{\nu}^4 \overset{*}{\nu}_A \sqrt{-g^*}, \\ \overset{*}{X}^B_A \sqrt{\gamma^*} &= \chi_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{\nu}^B \overset{*}{\nu}_A \sqrt{-g^*} - \frac{\chi_0}{c^2} p \delta^B_A \sqrt{-g^*}, \end{aligned}$$

soit :

$$\overset{*}{X}^B_A \sqrt{\gamma^*} = (\overset{*}{X}^4_A \sqrt{\gamma^*}) V^B - \frac{\chi_0}{c^2} p \delta^B_A \sqrt{-g^*};$$

V^B : composantes de la vitesse spatiale, $\nu^B = \nu^A V^B$.

Mettant en évidence la dérivée totale par rapport au temps,

$\frac{d}{dt} = \partial_4 + V^B \partial_B$, nous obtenons :

$$\partial_i (\overset{*}{X}^i_A \sqrt{\gamma^*}) = \frac{d}{dt} (\overset{*}{X}^4_A \sqrt{\gamma^*}) - \frac{\chi_0}{c^2} \partial_A (p \sqrt{-g^*}).$$

Examinons les seconds membres des équations. En plus des termes classiques, exprimés en métrique conforme de V_4 , apparaît un terme nouveau provenant de la quinzième composante $\overset{*}{X}_{00} \sqrt{\gamma^*}$, soit :

$$\frac{1}{2} \partial_A \overset{*}{\gamma}_{00} \left(-\frac{\chi_0}{c^2} p \overset{*}{\gamma}^{00} \sqrt{-g^*} \right).$$

Cette expression s'évalue simplement en observant que le

quinzième potentiel conforme γ_{00}^* est égal à l'opposé du pouvoir diélectrique du vide; supposant $\gamma_{0i}^* = 0$ (en l'absence de champ électromagnétique), nous écrivons :

$$\gamma_{00}^* \gamma^{00} = +1 \quad \text{soit} \quad \gamma^{00} = -\xi^{-3}.$$

Le terme nouveau a pour expression :

$$-\frac{\chi_0}{c^2} p \sqrt{-g^*} \frac{\partial_A \xi^{3/2}}{\xi^{3/2}}.$$

Observons que ce terme, issu du second membre et dépendant essentiellement du pouvoir diélectrique (donc caractéristique de la théorie unitaire), se trouve être harmonieusement fusionné avec le terme classique, relatif à la pression, isolé au premier membre.

Finalement, dans le cadre d'un schéma fluide parfait non chargé, les équations de mouvement reçoivent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{(IV-29)} \quad \frac{d}{dt} \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^A u_A \sqrt{-g^*} \right] \\ = \frac{1}{2} \partial_A g^{ij} \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^j - \frac{p}{c^2} g^{ij} \right] \sqrt{-g^*} \\ + \frac{1}{c^2} \xi^{3/2} \partial_A (p \xi^{-3/2} \sqrt{-g^*}) \end{aligned}$$

où la seule différence avec les équations relativistes réside dans l'intervention, au dernier terme, de la racine carrée du pouvoir diélectrique.

Considérant le développement de $\xi^{3/2}$:

$$\xi^{3/2} = 1 + U c^{-2} + O(c^{-4})$$

nous constatons que, dans les équations de mouvement, cette contribution directe du pouvoir diélectrique est d'ordre $1/c^2$ vis-à-vis des termes de pression et, de ce fait, peut être considérée comme sans influence dans des calculs effectifs.

Cette remarque est également valable lorsque l'on envisage le développement de l'indice F^* défini par le tenseur $X_{\alpha\beta}^*$. Cet indice est déterminé par la relation différentielle :

$$\text{(IV-30)} \quad d(\text{Log } F^*) = \frac{\xi^{3/2}}{\rho c^2 + p} d[p \xi^{-3/2}],$$

soit, de façon approchée :

$$d(\text{Log } F^*) = dp/\rho c^2 + 0(c^{-4}).$$

2. *Extension au cas du schéma fluide parfait chargé.*

Dans le cadre d'un schéma fluide parfait chargé, le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ et l'indice F^* seront définis par les relations :

$$(IV-31) \quad \overset{*}{X}_{\alpha\beta} = \frac{\chi_0}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \overset{*}{\nu}_\alpha \overset{*}{\nu}_\beta - \frac{p}{c^2} \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} \right] \xi^{-3/2}.$$

$$(IV-32) \quad d(\text{Log } F^*) = \frac{\xi^{3/2} + h^2/F^{*2}\xi^{3/2}}{\rho c^2 + p} d \left[\frac{p}{\xi^{3/2} + h^2/F^{*2}\xi^{3/2}} \right]$$

de façon à retrouver les expressions relatives à un schéma non chargé en annulant la constante h . Cette constante intervient d'ailleurs dans les formules précédentes pour la seule raison suivante : le passage d'un schéma gravitationnel pur à un schéma chargé s'effectue en substituant, dans les équations de champ, aux composantes u_i les composantes :

$$\sqrt{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} \overset{*}{u}_i;$$

il est donc nécessaire de diviser par $1 + h^2/F^{*2}\xi^3$ l'expression de r (relative à un schéma non chargé), soit $\chi_0 \rho \xi$, de façon à conserver un coefficient de gravitation constant dans les équations de champ.

L'indice F^* s'identifie, en première approximation, à l'indice relativiste d'un schéma fluide parfait. Les lignes de courant pentadimensionnelles sont géodésiques de la variété V_5 munie de la métrique :

$$d\bar{\sigma} = F^* d\sigma^*;$$

ces lignes, satisfaisant à l'intégrale première des géodésiques, se projettent sur la variété V_4 suivant les extrémales de l'intégrale :

$$\int \sqrt{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} F^* ds^* + \beta_0 h \varphi.$$

A ces équations de mouvement quadridimensionnelles, on peut associer un indice dans la variété quotient; cet indice a pour expression :

$$\Phi^* = \sqrt{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} F^*.$$

F^* et Φ^* sont égaux en l'absence de charges ($h = 0$); de

façon générale, ces indices seront égaux en première approximation, la constante h devant être considérée comme très petite dans les schémas chargés étudiés.

3. Retour à la métrique naturelle.

Le tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ ayant été choisi de façon à obtenir des équations de mouvement satisfaisantes, c'est-à-dire proches des équations de la théorie provisoire (le terme de pouvoir diélectrique n'intervient qu'en seconde approximation dans des calculs effectifs); le problème qui se pose maintenant est le suivant :

Déterminer en métrique naturelle de V_5 un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$, conservatif dans cette métrique, équivalent au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ au point de vue des conditions de conservation.

Une première condition évidente : le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ doit définir sur V_5 munie de la métrique naturelle un indice F tel que :

$$F = F^* \xi^{1/2}.$$

D'autre part, l'équation de continuité relative au tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta}$ s'écrit en métrique conforme :

$$\overset{*}{D}_\alpha \left[\frac{\chi_0}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} \cdot \frac{\xi^{-3/2}}{F^*} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \nu^\alpha \right] = 0.$$

Exprimons cette équation en métrique naturelle de V_5 , nous utiliserons pour cela la relation (IV-17), il vient :

$$D_\alpha \left[\frac{\chi_0}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} \cdot \frac{\xi^{1/2}}{F^*} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \nu^\alpha \right] = 0,$$

soit :

$$D_\alpha \left[\frac{\chi_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \xi}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} \cdot \frac{1}{F} \nu^\alpha \right] = 0 \quad (F = F^* \xi^{1/2})$$

Le tenseur cherché doit naturellement être de la forme suivante :

$$\Theta_{\alpha\beta} = r' \nu_\alpha \nu_\beta - k' \gamma_{\alpha\beta},$$

il en résulte que le scalaire r' est déterminé :

$$(IV-33) \quad r' = \frac{\chi_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \xi}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3}.$$

Pour définir complètement le tenseur, il faut préciser l'expression du second scalaire k' , ce scalaire doit vérifier la relation différentielle exprimant que l'indice est égal à $F^*\xi^{1/2}$ en métrique naturelle.

$$\frac{dk'}{r'} = d(\text{Log } F^*\xi^{1/2})$$

c'est-à-dire :

$$dk' = \frac{\chi_0 \rho^2}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} \cdot \frac{d\xi}{2} + \frac{\chi_0}{c^2} \left[\xi dp' + p' \xi^{5/2} d(\xi^{-3/2}) + \frac{p'}{2} d\xi \right]$$

ayant posé pour simplifier les calculs :

$$p' = \frac{p}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3}$$

Finallement nous obtenons après réduction :

$$(IV-34) \quad dk' = \frac{\chi_0 \rho^2}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} \frac{d\xi}{2} + \frac{\chi_0 \xi^2}{c^2} d(p'/\xi).$$

Remarquons la forme simple sous laquelle s'écrit cette différentielle; le choix du tenseur $\tilde{X}_{\alpha\beta}^*$ correspond à une simplification dans l'expression du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$. Si nous effaçons le terme de pression ($p = 0$, $F^* = 1$), nous retrouvons la relation caractéristique du schéma matière pure en théorie unitaire.

On peut aisément vérifier l'identité :

$$(IV-35) \quad D_\alpha(r' \nu^\alpha \nu_\beta - k' \gamma_\beta^\alpha) \equiv \xi^{5/2} D_\alpha \tilde{X}_\beta^\alpha = 0,$$

où \tilde{X}_β^α est défini par (IV-31); cette identité généralise (IV-20) au cas du schéma fluide parfait pentadimensionnel; elle met en évidence la substitution des tenseurs lors du changement de métrique dans V_5 .

4. Etude des densités énergétiques de masse et de charge.

L'équation de continuité d'un tel schéma fluide parfait exprime la conservation, le long de chaque ligne de courant de V_4 , de la quantité :

$$n' = \frac{\chi_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \xi^{-3/2} \nu^4 \sqrt{\gamma^*}}{F^* (1 + h^2/F^{*2}\xi^3)} = \frac{\chi_0 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*}}{F^* \sqrt{1 + h^2/F^{*2}\xi^3}},$$

compte tenu du développement limité de F^* , il vient (ρ étant considéré comme constant en première approximation) :

$$(IV-36) \quad n' = \frac{\chi_0 m^*}{\sqrt{1 + h^2/F^{*2}\zeta^3}} [1 + 0(c^{-4})]$$

La densité énergétique $m^* = \rho \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*}$ (densité identique en seconde approximation à la densité énergétique relativiste), apparaît ainsi comme la densité la plus conservative (en l'absence de charges) associée au schéma fluide parfait généralisé; en présence de charges, il faudra lui substituer la quantité :

$$M^* = \frac{m^*}{\sqrt{1 + h^2/F^{*2}\zeta^3}}, \quad dM^*/dt = 0(c^{-4}),$$

ceci constitue une extension cohérente d'un résultat classique obtenu en relativité [1].

Envisageons maintenant l'expression, en repères orthonormés de V_4 , des équations de Maxwell :

$$(IV-37) \quad \nabla_j \dot{H}^j_i = 4\pi \frac{\beta_0 h \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)}{F^* \sqrt{1 + h^2/F^{*2}\zeta^3}} \cdot u_i;$$

nous en déduisons l'expression de la densité de charges ainsi que celle de la densité énergétique associée (évaluée naturellement en métrique conforme), soit :

$$(IV-38) \quad \mu = \frac{\beta_0 h \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)}{F^* \sqrt{1 + h^2/F^{*2}\zeta^3}}, \quad e^* = \mu \frac{dt}{ds^*} \sqrt{-g^*} = \frac{\beta_0 h}{\chi_0} n'.$$

Nous constatons que la densité énergétique e^* est conservative. Notons également la relation approchée :

$$(IV-39) \quad \frac{\mu}{\rho} = \frac{e^*}{m^*} = \frac{\beta_0 h}{\sqrt{1 + h^2/F^{*2}\zeta^3}} [1 + 0(c^{-4})],$$

où nous observons que, conformément aux résultats relativistes, l'indice du fluide n'apporte aucune contribution en seconde approximation.

C. — Examen du problème de Cauchy.

Sans reprendre l'étude détaillée de ce problème [5], nous envisagerons plus particulièrement la détermination du scalaire r' et du vecteur ν à la traversée de l'hypersurface portant les données initiales du problème de Cauchy, (cette hypersurface sera définie localement par $x^4 = 0$, l'indice 4 n'étant plus supposé correspondre à la variable temporelle).

Cette détermination est obtenue en considérant le système des conditions de conservation relatif au tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$; ce tenseur ayant été essentiellement modifié, il est indispensable d'examiner les conséquences de cette modification du point de vue du problème de Cauchy dans le cas intérieur.

Les dérivées $\partial_4 r'$, $\partial_4 k'$, $\partial_4 \nu^4$ satisfont aux relations :

$$(IV-40) \quad \begin{cases} r' \nu^4 \partial_4 \nu^4 - (\gamma^{44} - \nu^{4*}) \partial_4 k' = A^4, \\ r' \partial_4 \nu^4 + \nu^4 (\partial_4 r' - \partial_4 k') = B, \end{cases}$$

où A^4 et B ont des valeurs connues, fonctions des données de Cauchy sur l'hypersurface.

Dans le but de retrouver exactement les résultats relativistes, nous adopterons en premier lieu l'attitude suivante : nous supposerons données a priori les relations définissant r' et k' en fonction de ρ , p , ξ . La dérivée $\partial_4 \xi$ étant une donnée de Cauchy, cela revient à substituer directement les scalaires ρ et p aux scalaires r' et k' ; il en résulte (dans le cas gravitationnel pur), le système :

$$(IV-41) \quad \begin{cases} (\rho + p/c^2) \nu^4 \partial_4 \nu^4 - (\gamma^{44} - \nu^{4*}) \partial_4 p/c^2 = A'^4, \\ (\rho + p/c^2) \partial_4 \nu^4 + \nu^4 \varphi' \partial_4 p/c^2 = B', \quad [\rho = \varphi(p/c^2)], \end{cases}$$

c'est-à-dire exactement le système envisagé en relativité. Il est intéressant de noter que l'étude peut être effectuée sans modification en métrique conforme, ceci résulte du fait suivant : dans l'expression du tenseur $\overset{*}{X}_{\alpha\beta} = r'^* \nu_{\alpha}^* \nu_{\beta}^* - k'^* \gamma_{\alpha\beta}$, les scalaires r'^* et k'^* contiennent en facteur une même puissance de ξ , soit $\xi^{-3/2}$.

Étudions maintenant la généralisation des résultats précédents en théorie pentadimensionnelle. Considérons le système initial (IV-40); supposons, conformément aux études anté-

rieures, le schéma holonome dans V_5 , soit :

$$r' = f(k'),$$

le système (IV-40) s'écrit :

$$(IV-40') \quad \begin{cases} r' \nu^4 \partial_4 \nu^4 - (\gamma^{44} - \nu^{4^2}) \partial_4 k' = A^4, \\ r' \partial_4 \nu^4 + \nu^4 (f' - 1) \partial_4 k' = B. \end{cases}$$

Les variétés, à la traversée desquelles ne peuvent être déterminées simultanément les dérivées, sont telles que :

$$(IV-42) \quad \gamma^{44} - \nu^{4^2} (2 - f') = 0.$$

Définies localement par $\Phi(x^a) = 0$, ces variétés satisfont à l'équation :

$$(IV-42') \quad [\gamma^{\lambda\mu} - \nu^\lambda \nu^\mu (2 - f')] \partial_\lambda \Phi \partial_\mu \Phi = 0.$$

Dans un système de coordonnées adaptées, il vient en termes de V_4 :

$$(IV-42'') \quad [g^{ij} - u^i u^j (2 - f') (1 + h^2 / F^{*2} \xi^3)] \partial_i \Phi \partial_j \Phi = 0.$$

La vitesse de propagation des fronts d'onde est ainsi donnée par [5] :

$$(IV-43) \quad V^{-2} = c^{-2} [1 - (2 - f') (1 + h^2 / F^{*2} \xi^3)].$$

Supposant les fronts d'onde orientés dans le temps, nous devons retenir l'inégalité :

$$f' - 2 \geq 0.$$

Cette généralisation étant ainsi présentée de façon formelle, il faut maintenant considérer les résultats physiques qui en sont les conséquences et constater que ceux-ci sont compatibles avec les résultats classiques.

r' et k' étant supposés fonctions d'une même quantité variable, nous pouvons écrire :

$$f' = dr' / dk'.$$

a) *Schéma matière pure généralisé.*

Les scalaires r et k définissent un indice pentadimensionnel égal à $\xi^{1/2}$, soit :

$$dk = rd (\text{Log } \xi^{1/2}).$$

Dans ces conditions :

$$f' = 2 \frac{d(\text{Log } r)}{d(\text{Log } \xi)}.$$

Supposons que nous voulions décrire un schéma tel que la vitesse de propagation des ondes soit celle de la lumière. Alors nécessairement :

$$f' = 2 \quad \text{soit} \quad d(\text{Log } r) = d(\text{Log } \xi),$$

soit :

$$\rho^2 \partial_\alpha(r/\xi) = 0.$$

Nous déduisons de ceci que la quantité r/ξ doit être conservée le long des lignes de courant. Appliquons ce dernier résultat à un schéma gravitationnel pur. En l'absence de charges, de multiples raisons nous ont conduits à choisir :

$$r = \chi_0 \rho \xi.$$

Interprétons le fait que r soit effectivement proportionnel à ξ . Nous pouvons affirmer l'équivalence des deux propositions suivantes :

- les fronts d'onde se propagent avec la vitesse de la lumière;
- la densité massique ρ est conservée le long des lignes de courant.

Envisageons maintenant l'existence de charges, alors :

$$r = \frac{\chi_0 \rho \xi}{1 + h^2/\xi^3} \quad (h \neq 0),$$

la condition $f' \geq 2$ est bien réalisée, en effet :

$$f' = 2 - 2 \frac{d[\text{Log}(1 + h^2/\xi^3)]}{d(\text{Log } \xi)} = 2 + \frac{6 h^2}{h^2 + \xi^3}.$$

Nous en déduisons que la vitesse des ondes est donnée par la formule :

$$(IV-44) \quad V = \frac{c}{\sqrt{1 + 6h^2/\xi^3}}.$$

Interprétons ce résultat : nous sommes conduits à affirmer qu'en présence de matière chargée, la vitesse de propagation des ondes dans les solides est nécessairement inférieure à la vitesse de la lumière.

Les divers résultats obtenus sont parfaitement cohérents; ceci n'était pas, en principe, prévisible: le terme $k\gamma_{\alpha\beta}$, relatif au pouvoir diélectrique, étant susceptible d'apporter des modifications propres à la théorie unitaire.

Remarquons cependant que, d'après les hypothèses faites, les hypersurfaces généralisant les fronts d'ondes ne correspondent plus à une non détermination de la dérivée $\partial_4 k$, cette dérivée étant définie par l'expression:

$$\partial_4 k = r \partial_4 (\text{Log } \xi^{1/2}).$$

Il serait néanmoins possible de concevoir que $\partial_4 k$ est indéterminé sur l'hypersurface; pour cela, il faudrait supposer que $\partial_4 \xi$ n'est plus une donnée de Cauchy.

b) *Schéma fluide parfait généralisé.*

Rappelons les expressions de r' et dk' :

$$\begin{aligned} r' &= \chi_0(\rho' + p')\xi, \\ dk' &= \chi_0 \rho' \frac{d\xi}{2} + \chi_0 \xi^2 d(p'/\xi) \end{aligned}$$

ayant posé:

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3}, \quad p' = \frac{p}{c^2(1 + h^2/F^{*2}\xi^3)},$$

Nous obtenons, tous calculs faits:

$$V^{-2} = c^{-2} \left[1 + \frac{d\rho' - \xi^3 d(p'/\xi^3)}{\rho' d(\text{Log } \xi^{1/2}) + \xi d(p'/\xi)} (1 + h^2/F^{*2}\xi^3) \right]$$

Exprimons que la vitesse des ondes est égale à c , il vient:

$$d\rho' - \xi^3 d(p'/\xi^3) = 0,$$

soit, en intégrant:

$$\rho' - p' = \int_1^\xi p' d(\text{Log } \xi^{-3}) + C^c.$$

Remarquons l'intervention simple du pouvoir diélectrique ξ^3 ; l'équation d'état s'écrit en revenant aux grandeurs usuelles ρ et p :

$$(IV-45) \quad \rho - p/c^2 = (1 + h^2/F^{*2}\xi^3) \int_1^\xi \frac{p}{c^2} \frac{d(\text{Log } \xi^{-3})}{1 + h^2/F^{*2}\xi^3} + C^c.$$

Le terme nouveau, relatif au pouvoir diélectrique, n'a

d'influence qu'à l'approximation supérieure; il vient de façon approchée :

$$(IV-45') \quad \rho - p/c^2 = C'' + O(c^{-4}),$$

c'est-à-dire la relation caractéristique, en relativité, du schéma fluide parfait incompressible [5].

V. — Application à l'étude de certaines distributions classiques.

A. — Généralisation du problème de Schwarzschild en théorie unitaire.

1. Généralités.

Rappelons l'énoncé du problème de Schwarzschild envisagé sous son aspect physique : il s'agit de déterminer le champ de gravitation d'une sphère matérielle fixe, homogène ou composée de couches concentriques homogènes.

Le problème de la détermination du champ de gravitation statique et à symétrie sphérique admet, en relativité générale, une solution célèbre constituée par l'expression exacte du dS^2 de Schwarzschild. Dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle, nous reprenons ce problème en ayant simplement pour but de mettre en évidence des solutions approchées successives des potentiels et des équations approchées du mouvement d'une masse d'épreuve infiniment petite.

Le problème essentiel consiste à déterminer de façon explicite le tenseur pentadimensionnel $\Theta_{\alpha\beta}$ qui, relié au tenseur de Ricci de la variété V_5 par les équations de champ, permet le calcul des potentiels en métrique naturelle puis en métrique conforme.

2. Conditions relatives à la détermination du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$.

L'étude effectuée précédemment montre qu'il faut faire choix d'un tenseur de la forme :

$$\Theta_{\alpha\beta} = r\nu_{\alpha}\nu_{\beta} - k\gamma_{\alpha\beta},$$

les deux scalaires r et k définissant, dans l'hypothèse où l'on néglige les pressions, un indice pentadimensionnel égal à $\xi^{1/2}$; soit :

$$r = \frac{\chi_0 \rho \xi}{1 + h^2/\xi^3}, \quad dk = \frac{\chi_0 \rho}{1 + h^2/\xi^3} \frac{d\xi}{2}.$$

La détermination de k appelle certaines remarques. D'une part, désirant conserver le calcul en première approximation des potentiels conformes, calcul effectué avec l'hypothèse d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ réduit à son premier terme, nous avons remarqué qu'il est nécessaire de choisir k de façon que ce scalaire soit d'ordre c^{-2} vis-à-vis de r (c'est-à-dire d'ordre c^{-4}).

Envisageons d'autre part les conditions de raccordement résultant du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur. Soit Σ l'hypersurface définissant la distribution matérielle dans V_5 . Σ doit nécessairement être engendrée par des trajectoires d'isométries; nous supposons que cette hypersurface est définie localement, dans un système de coordonnées adaptées admissible, par $x^4 = 0$.

Les composantes S_λ^4 associées à la métrique extérieure sont identiquement nulles; sur Σ ces composantes ne dépendent que des potentiels, de leurs dérivées premières, et des dérivées secondes d'indice au plus 1 en x^4 . Les conditions de raccordement impliquent donc sur Σ l'annulation des composantes S_λ^4 associées au champ intérieur:

$$(V-1) \quad S_\lambda^4 = \Theta_\lambda^4 = r\nu^4\nu_\lambda - k\gamma_\lambda^4 = 0,$$

soit

$$\nu^4 = 0, \quad k = 0.$$

La condition $\nu^4 = 0$, signifie que l'hypersurface Σ , engendrée par les trajectoires d'isométries, doit également être engendrée par les lignes de courant pentadimensionnelles du champ intérieur.

Le scalaire k doit s'annuler sur l'hypersurface Σ : cette dernière condition ne pourrait être remplie dans le cas d'une distribution quelconque. Cependant, l'hypothèse de la symétrie sphérique dans V_4 jointe au postulat de cylindricité permet de définir une expression convenable du scalaire k .

Il suffit de choisir:

$$(V-2) \quad k = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\chi_0 \rho}{1 + h^2/\xi^2} \frac{d\xi}{2},$$

ξ_0 étant la valeur prise sur Σ par la variable ξ , ξ_0 est une constante d'après nos hypothèses. Le scalaire k , nul sur l'hypersurface, est ainsi d'ordre c^{-4} .

Le tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ étant déterminé, les considérations théo-

riques développées précédemment deviennent valables dans le cadre du problème de Schwarzschild. Le calcul du potentiel conforme g_{44}^* doit comporter une légère correction, en seconde approximation, étant donnée la contribution du terme k . Présentons simplement le résultat, il vient :

$$(V-3) \quad g_{44}^* = c^2 - 2U + 2(U^2 - \zeta)c^{-2} + 0(c^{-4})$$

en l'absence de champ électromagnétique, ζ est défini par la relation :

$$\Delta\zeta = \delta_{44}U - \frac{1}{3}U\Delta U - \frac{2}{3}U_0\Delta U + \frac{3}{2}V^2\Delta U.$$

U_0 étant la valeur (constante) du potentiel U sur l'hyper-surface de séparation.

À titre de comparaison, rappelons l'expression classique du terme ζ_R obtenu en relativité générale [1], [2] :

$$\Delta\zeta_R = \delta_{44}U - U\Delta U + \frac{3}{2}V^2\Delta U.$$

La contribution du terme de pouvoir diélectrique est ainsi fusionnée avec un terme classique, ceci réalisant simplement un changement de coefficient et introduisant le terme

$$-\frac{2}{3}U_0\Delta U.$$

Les calculs ont été réalisés dans l'hypothèse la plus simple d'un schéma matière pure généralisé; dans le cas où nous devrions tenir compte des pressions, il nous faudrait choisir :

$$(V-4) \quad k = \int_{\xi_0}^{\xi} \chi_0 \rho \frac{d\xi}{2} + \frac{\chi_0}{c^2} \xi^2 d(p/\xi), \quad (h = 0)$$

le terme ζ serait alors défini par :

$$\Delta\zeta = \delta_{44}U - \frac{1}{3}U\Delta U - \frac{2}{3}U_0\Delta U + \frac{3}{2}V^2\Delta U - 12\pi Gp.$$

Le terme relatif à la pression est exactement celui prévu par la relativité [1].

Les potentiels conformes g_{ij}^* ne diffèrent donc des potentiels relativistes que par cette seule contribution du pouvoir diélectrique du vide (modification de coefficient dans un terme

de ζ); on constate aisément que ceci n'altère pas les résultats obtenus en relativité. Nous retrouvons en particulier l'expression exacte de l'avance du périhélie prévue par Einstein en considérant une masse d'épreuve non chargée (infiniment petite vis-à-vis de la distribution sphérique considérée).

Dans le cas général (unitaire), la trajectoire pentadimensionnelle d'une masse d'épreuve chargée, trajectoire géodésique de la métrique conforme de V_5 , se projette sur V_4 suivant une extrémale de l'intégrale :

$$\int \sqrt{1 + h^2/\xi^3} ds^* + h\beta_0\varphi,$$

où le pouvoir diélectrique du vide figure de façon simple.

B. — Le problème des deux corps en théorie unitaire.

Le problème abordé maintenant est plus général : il s'agit de décrire le mouvement relatif de deux corps, aucun des corps n'ayant des dimensions et une masse négligeables vis-à-vis de l'autre. Il faut ainsi rendre compte, dans le cadre de la théorie pentadimensionnelle, de deux distributions matérielles en présence. La symétrie sphérique est détruite dans l'espace quotient, il est alors impossible de déterminer un scalaire k tel que le tenseur :

$$\Theta_{\alpha\beta} = r\nu_\alpha\nu_\beta - k\gamma_{\alpha\beta},$$

puisse satisfaire aux conditions de raccordement. Nous pourrions alors faire appel à un tenseur plus complexe rendant compte du caractère dissymétrique de la distribution envisagée.

Il est naturel de considérer un tenseur généralisant formellement le tenseur normal d'impulsion-énergie du schéma fluide quelconque relativiste; un tel tenseur présente en effet le degré de complexité immédiatement supérieur à celui envisagé précédemment.

Dans le cas d'un schéma gravitationnel pur, nous sommes conduits à choisir l'expression suivante du tenseur second membre :

$$(V-5) \quad \Theta_{\alpha\beta} = \chi_{0\rho}\xi\nu_\alpha\nu_\beta - \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\chi_{0\rho}}{2} d\xi \right) \gamma_{\alpha\beta} - \Pi_{\alpha\beta}$$

avec

$$\Pi_{\alpha\beta} = \sum_u l_u V_\alpha^{(u)} V_\beta^{(u)}$$

$V^{(\lambda)}$ vecteurs propres de la matrice $(\Theta_{\alpha\beta})$ par rapport à la matrice $(\gamma_{\alpha\beta})$.

Le tenseur correctif $\Pi_{\alpha\beta}$ permet d'assurer les conditions de raccordement. Les scalaires l_u , en relation avec les pressions partielles de gravitation, seront déterminés avec le souci de ne perturber ni les équations de mouvement, ni le calcul en seconde approximation du potentiel conforme g_{44}^* . Les calculs précédents sont ainsi appliqués à l'étude du problème des deux corps avec les hypothèses de Levi-Civita [2]; nous signalerons simplement les résultats :

— la fonction lagrangienne possède le développement suivant :

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} + \mathcal{D}c^{-2} + 0(c^{-4}).$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} V^2 + U, \text{ (fonction de Lagrange classique).}$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \mathcal{K}^2 - U^2 + \zeta + UV^2 - \sum_A 4 \alpha_{4A} V^A.$$

ζ étant le terme défini dans la relation (V-3).

Dans ces conditions, les calculs effectués par Lévi-Civita demeurent valables compte tenu de la modification signalée dans le terme ζ .

— Le principe d'effacement n'est pas altéré, autrement dit l'artifice, consistant à modifier légèrement les constantes caractérisant les masses des corps (modification d'ordre c^{-2}), permet de mettre en évidence le fait que la trajectoire du centre de gravité d'un corps ne dépend pas, à l'approximation considérée, du champ intérieur dû à ce même corps. Cette propriété traduit en théorie unitaire la validité approchée du principe de réaction classique.

— L'évaluation plus précise du déplacement du périhélie est légèrement modifiée, nous obtenons :

$$\sigma = \sigma_E [1 + 5 M_1 M_2 / 9(M_1 + M_2)^2]$$

σ_E étant le déplacement classique prévu en supposant le corps gravitant infiniment petit. M_1 et M_2 sont les masses respectives des corps (planètes). Nous obtenons le coefficient $5/9$ au lieu du coefficient $1/3$ trouvé en relativité, la différence est due au

terme k (pouvoir diélectrique). Nous en déduisons que la correction de l'avance ne peut excéder $5/36$ (dans le cas de masses égales) de la valeur prévue par la solution du problème de Schwarzschild. Cette modification est sans influence sensible sur l'avance du périhélie de Mercure, les masses en présence étant trop disproportionnées.

VI. — Conclusion.

Nous avons présenté une façon de concevoir la généralisation d'un schéma matière pure, puis d'un schéma fluide parfait, en théorie unitaire pentadimensionnelle. Cette conception nous a été imposée par les considérations suivantes : — d'une part, la métrique conforme de la variété quotient V_4 définit des potentiels qui s'identifient parfaitement aux potentiels relativistes classiques — d'autre part, cette coïncidence paraît inutilisable si l'on observe que les conditions de conservation, résultant des équations de champ adoptées, sont incorrectes dès la première approximation. Nous avons donc été guidés par le souci suivant : obtenir des équations de mouvement correctes en modifiant le tenseur second membre de façon à perturber le moins possible les résultats concernant le calcul des potentiels, résultats très satisfaisants en ce qui concerne l'osculution des métriques conforme et relativiste dans le cas gravitationnel pur.

Considérant la métrique conforme de la variété V_5 elle-même et exigeant que la trajectoire pentadimensionnelle d'une particule soit géodésique de cette métrique conforme, nous retrouvons, à l'aide du principe de descente, le principe relativiste des géodésiques en métrique conforme de V_4 (particule non chargée). La variété quotient, munie de cette métrique conforme, peut alors être identifiée (tant du point de vue des équations de mouvement que du calcul des potentiels) à l'espace-temps de la relativité. Les seules différences, par rapport à la théorie provisoire, relèvent d'une seconde approximation des calculs et sont dues au fait que l'on doit considérer un pouvoir diélectrique variable dans le vide.

En résumé, les études théoriques présentées sont élaborées en munissant la variété V_5 de deux métriques. Dans la métrique

initiale, dite naturelle, sont écrites les équations tensorielles de champ déterminant les potentiels; l'interprétation des conditions de conservation s'effectue en introduisant une seconde métrique, conforme à la métrique initiale.

Cette double conception permet ainsi de simplifier d'une part l'écriture des équations tensorielles de champ, d'autre part l'interprétation physique qui en résulte. En conséquence, il ne paraît pas utile de chercher systématiquement à n'utiliser qu'une seule métrique, ce qui aurait pour effet d'entraîner une complexité plus grande des équations tensorielles à adopter.

Dans le cadre de la solution proposée, nous constatons que toutes les difficultés signalées disparaissent et que l'extension des résultats au cas d'un schéma fluide s'effectue aisément. En l'absence de champ électromagnétique, la théorie pentadimensionnelle rend compte de l'ensemble des phénomènes relativistes. Les résultats concrets propres à la théorie sont, dans tous les cas, facilement interprétables et physiquement satisfaisants.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. HENNEQUIN. Étude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry, *Bull. Scient. Commiss. Trav. hist. et scient.*, t. I, 1956, 2^e partie : Mathématiques, pp. 73-154, Paris, Gauthier-Villars, 1957 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1956).
- [2] T. LÉVI-CIVITA. Le problème des n -corps en relativité générale, Gauthier-Villars, Paris, 1950 (*Mém. Sc. math.* CXVI).
- [3] A. LICHNEROWICZ. *Algèbre linéaire*. Masson, Paris, 1947.
- [4] A. LICHNEROWICZ. *Éléments de calcul tensoriel*. A. Colin, Paris, 1950.
- [5] A. LICHNEROWICZ. *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson, Paris, 1955 (Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).
- [6] A. LICHNEROWICZ. *Problèmes globaux en mécanique relativiste*. Hermann, Paris, 1939.
- [7] P. PIGEAUD. *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. 252, pp. 1731-1733, t. 252, pp. 3005-3007, t. 253, pp. 1912-1914.
- [8] P. PIGEAUD. Contribution à l'étude des approximations en théorie unitaire pentadimensionnelle de Jordan-Thiry. *Thèse*, Paris, 1962.
- [9] Y. THIRY. Etude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ. *J. Math. pures et appl.*, Série 9, t. 30, 1951, pp. 275-396 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1950).
- [10] Y. THIRY. Sur une généralisation du problème de Schwarzschild à une théorie unitaire. *Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. 235, pp. 1480-1482.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS UTILISÉES	181
I. RAPPELS SOMMAIRES CONCERNANT LA THÉORIE PENTADIMENSIONNELLE	183
II. CALCULS EN SECONDE APPROXIMATION	185
III. ÉTUDE CRITIQUE DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT	187
IV. GÉNÉRALISATION DES SCHÉMAS MATIÈRE PURE ET FLUIDE PARFAIT EN THÉORIE UNITAIRE PENTADIMENSIONNELLE	189
(A) <i>Schéma matière pure généralisé</i>	189
1. Généralités	189
2. Schéma holonome dans la variété V_5	190
3. Détermination d'un tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$ tel que le principe des géodésiques soit vérifié en métrique conforme de V_4	192
4. Conséquences du choix de l'indice pentadimensionnel	193
5. Étude des conditions de conservation en métrique conforme de V_5	195
(B). <i>Schéma fluide parfait généralisé</i>	199
1. Généralisation du schéma fluide parfait non chargé	199
2. Extension au cas du schéma fluide parfait chargé	202
3. Retour à la métrique naturelle	203
4. Étude des densités énergétiques de masse et de charge	204
(C) <i>Examen du problème de Cauchy</i>	206
(a) Schéma matière pure généralisé	207
(b) Schéma fluide parfait généralisé	209
V. APPLICATION A L'ÉTUDE DE CERTAINES DISTRIBUTIONS CLASSIQUES.	210
(A) <i>Généralisation du problème de Schwarzschild en théorie unitaire</i> ..	210
1. Généralités	210
2. Conditions relatives à la détermination du tenseur $\Theta_{\alpha\beta}$	210
(B) <i>Le problème des deux corps en théorie unitaire</i>	213
VI. CONCLUSION	215