ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SAÏD ILIAS

Un nouveau résultat de pincement de la première valeur propre du laplacien et conjecture du diamètre pincé

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 3 (1993), p. 843-863

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_3_843_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 3 (1993), 843-863

UN NOUVEAU RÉSULTAT DE PINCEMENT DE LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DU LAPLACIEN ET CONJECTURE DU DIAMÈTRE PINCÉ

par Saïd ILIAS

Introduction.

Dans ce qui suit, (M, g) désignera une variété riemannienne connexe, complète, sans bord et de dimension n. Nous noterons $V(M)$ son volume, $d(M)$ son diamètre, σ_M sa courbure sectionnelle et Ric_M sa courbure de Ricci.

i) La conjecture sur le pincement du diamètre.

Un très vieux résultat de Bonnet (*cf.* [6]) montre que si $\sigma_M \geqq \sigma_{\mathbf{S}^n} = 1$ alors M est compacte et $d(M) \leqq d(\mathbf{S}^n) = \pi$. Myers a montré (*cf.* [6]) que l'hypothèse sur la courbure sectionnelle peut être affaiblie en une hypothèse sur la courbure de Ricci : si $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$, alors M est compacte, $d(M) \leqq \pi$ et de plus $\pi_1(M)$ est fini.

Toponogov (*cf.* [25]) a caractérisé le cas d'égalité dans la majoration du diamètre obtenue par Bonnet. Il a montré que si $\sigma_M \geqq 1$ et $d(M) = \pi$, alors (M, g) est isométrique à $(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$. Restait à obtenir une caractérisation similaire pour le cas d'égalité dans le théorème de Myers; elle a été

Ce travail a été partiellement soutenu par le contrat CEE-GADGET SC1-0105-C.
Mots-clés : Courbure de Ricci - Pincement - Diamètre - Première valeur propre du laplacien - Sphère.
Classification A.M.S. : 53C20.

obtenue par Cheng (*cf.* [7]) : si $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$ et $d(M) = d(\mathbf{S}^n)$, alors (M, g) est isométrique à $(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$.

En généralisant le théorème de la sphère (courbure sectionnelle $\frac{1}{4}$-pincée, *cf.* [6]), Grove et Shiohama (*cf.* [13]) ont montré le résultat suivant (qui au vu du résultat de Bonnet, est un résultat de pincement du diamètre) : si $\sigma_M \geqq 1$ et $d(M) > \frac{d(\mathbf{S}^n)}{2}$, alors M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$. Compte tenu du théorème de Myers, peut-on espérer obtenir un résultat de ce type sous l'hypothèse plus faible $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$? D'où la conjecture du diamètre pincé :

Sous l'hypothèse $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$, *existe-t-il un* $\varepsilon > 0$ *dépendant d'un minimum d'invariants riemanniens, tel que dès que* $d(M) > \pi - \varepsilon$, M *est homéomorphe à* $\mathbf{S}^n$ *?*

Cet ε doit dépendre de la dimension. En effet, pour :

$$M = \mathbf{S}^j\big(\sqrt{(j-1)/(2j-1)}\big) \times \mathbf{S}^j\big(\sqrt{(j-1)/(2j-1)}\big) \qquad (j \neq 1),$$

on a $\mathrm{Ric}_M = 2j-1$ et $\lim_{j\to\infty} d(M) = \lim_{j\to\infty} \pi\Big(\frac{2j-2}{2j-1}\Big)^{1/2} = \pi$. Par ailleurs, des travaux récents de M. Anderson et Y. Otsu (*cf.* [1] et [20]) montrent qu'un tel ε doit dépendre de la courbure : Anderson construit une famille de métriques g_k sur $\mathbf{C}P^2$ et $\mathbf{C}P^2\#\mathbf{C}P^2$ (et comme il le signale, sa construction est aussi valable pour $\mathbf{C}P^n$ et $\mathbf{C}P^n\#\mathbf{C}P^n$) telle que :

$$\mathrm{Ric}_{g_k} \geqq 3 \qquad \text{et} \qquad \lim_k d(g_k) = \pi.$$

Plusieurs travaux ont été faits pour résoudre la conjecture du diamètre pincé. Pour en rendre compte, nous avons choisi d'en citer deux des plus récents :

THÉORÈME (Wu, *cf.* [26]). — *Soit* $k > 0$ *et* $r \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. *Il existe un* $\varepsilon > 0$ *ne dépendant que de* n, *de* k *et de* r, *tel que, si* $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$, $\sigma_M \geqq -k^2$, $V(M) \geqq \alpha(n,r) =$ *le volume de la boule géodésique de rayon* r *de* $\mathbf{S}^n$ *et* $d(M) > \pi - \varepsilon$, *alors* M *est homéomorphe à* $\mathbf{S}^n$.

Un autre théorème fait intervenir un minorant du rayon d'injectivité :

THÉORÈME (Eschenburg [9]). — *Supposons que* $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$, $\sigma_M \geqq -k^2$ *et que le rayon d'injectivité de* (M, g) *soit minoré par* ρ. *Il existe un* $\varepsilon > 0$ *ne dépendant que de* n, ρ *et* k, *tel que* M *est homéomorphe à* $\mathbf{S}^n$ *dès que* $d(M) > \pi - \varepsilon$.

Vu les contre-exemples d'Anderson, la conjecture est-elle vraie si on admet que ε peut dépendre d'un majorant A de la courbure sectionnelle? La réponse est donnée par l'un des théorèmes (*cf.* Théorème 4.1) du présent article :

THÉORÈME. — *Pour tout A, soit $\mathbf{M}_{A,n}$ l'ensemble des variétés riemanniennes complètes de dimension n dont la courbure sectionnelle est bornée supérieurement par A. Il existe un $\varepsilon(A,n) > 0$ (calculable), tel que, pour toute variété riemannienne (M,g) appartenant à $\mathbf{M}_{A,n}$:*

Si $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$ *et* $d(M) > \pi - \varepsilon(A,n)$, *alors M est homéomorphe à* $\mathbf{S}^n$.

ii) La conjecture sur le pincement de la première valeur propre du laplacien.

Le spectre du laplacien de (M,g) est constitué de valeurs propres :

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \to +\infty.$$

Nous nous intéressons à la première valeur propre non nulle du laplacien, à savoir λ_1. A cet égard, rappelons que A. Lichnerowicz (*cf.* [18]) a montré que : si $\mathrm{Ric}_M \geqq n-1$, alors $\lambda_1(M) \geqq n = \lambda_1(\mathbf{S}^n)$. Un autre résultat dû à M. Obata (*cf.* [19]) permet de caractériser le cas d'égalité dans cette minoration; en effet, il montre que : si $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$ et $\lambda_1(M,g) = \lambda_1(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$, alors (M,g) est isométrique à $(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$. Ce dernier résultat découle d'une belle caractérisation des sphères par l'existence d'une solution, non triviale, à une équation aux dérivées partielles : M. Obata montre que s'il existe une fonction f, non identiquement nulle, telle que :

$$T(f) := Ddf + f \cdot g = 0,$$

alors (M,g) est isométrique à $(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$.

Une première question se pose : a-t-on une conclusion similaire si il existe une fonction f telle que $\|T(f)\|_\infty$ soit suffisamment petit?

Un résultat de S. Gallot (*cf.* Lemme 2.1 du présent article ainsi que [10] et [11]. Voir aussi [21] pour une version beaucoup plus faible) montre que si $\mathrm{Ric}_M \geqq n-1$ et sous une certaine hypothèse de petitesse de $\|T(f)\|_\infty$, la variété M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.

Ce qui motive la question de pincement suivante :

QUESTION I (la conjecture du pincement du λ_1). — *Existe-t-il un ε, dépendant d'un minimum d'invariants riemanniens, tel que, dès que* $\mathrm{Ric}_M \geqq n-1$ *et* $\lambda_1 \leqq n + \varepsilon(A,n)$, *$M$ est homéomorphe à* $\mathbf{S}^n$ *?*

A l'instar de ce qui se passait pour le diamètre, cette conjecture admet une version plus faible :

QUESTION II. — *Existe-t-il un ε, dépendant d'un minimum d'invariants riemanniens, tel que, dès que $\sigma_M \geqq 1$ et $\lambda_1 \leqq n+\varepsilon$, M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$?*

A la question I qui est le centre d'intérêt du présent article, il est curieux de noter, qu'à ce jour, la seule réponse partielle que nous connaissions est due à S. Gallot ([10] et [11]). En effet, il répond à la question I, avec un ε dépendant d'un minorant de σ_M, d'un majorant de Ric_M, d'un majorant de $|D\,\mathrm{Ric}_M\,|$ et d'un minorant de $V(M)$ (cette dépendance n'est pas minimale).

En contraste avec la question (I), la question plus faible (II) a été, elle, abondamment étudiée. Li et Zhong ([17]) puis Li et Treibergs ([16]) y ont répondu en dimension 2 et 3 puis en dimension 4; et finalement Croke ([8], voir aussi [2] pour une amélioration de ce résultat) y a répondu en toute dimension avec un ε ne dépendant que de n (cette dépendance est minimale). Il est à noter que dans tous les travaux concernant la question II, l'utilisation du théorème de Grove-Shiohama est essentielle, d'où la nécessité de l'hypothèse $\sigma_M > 0$.

De nombreux auteurs ont confondu ou confondent les questions (I) et (II) et ont cru que C.B. Croke avait résolu la conjecture du pincement du λ_1 (voir par exemple [5] p. 92 et [1] remarque 3). Dans le présent travail, en nous inspirant des idées utilisées par S. Gallot et en les améliorant, nous nous débarrassons de la dépendance de ε en la dérivée de Ric_M et en le minorant de $V(M)$, pour obtenir le théorème suivant (*cf.* théorème 2.2 et remarque 2.3).

THÉORÈME. — *Pour tout A, il existe un $\varepsilon(A,n) > 0$ (explicite), tel que, pour toute variété riemannienne $(M,g) \in \mathbf{M}_{A,n}$:*

Si $\mathrm{Ric}_M \geqq n-1$ et $\lambda_1(M,g) \leqq \lambda_1(\mathbf{S}^n,\mathrm{can})+\varepsilon$, alors M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.

Signalons qu'une dépendance en la courbure sectionnelle est nécessaire comme le prouvent encore une fois les exemples d'Anderson sur $\mathbf{C}P^n$ et $\mathbf{C}P^n \# \mathbf{C}P^n$.

Nous nous intéressons par la suite, à un problème de pincement plus général :

Soit q une fonction positive (non identiquement nulle) et supposons qu'il existe une solution f (non identiquement nulle) de l'équation : $\Delta f = qf$.

On peut, en adaptant par exemple la preuve de la minoration du λ_1 par Lichnerowicz, montrer que : si $\mathrm{Ric}_M \geqq n-1$, alors $\|q\|_\infty \geqq n$.

De plus l'égalité $\|q\|_\infty = n$ caractérise $(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$.

Nous montrons, de plus, le résultat de pincement, plus général, suivant :

THÉORÈME (*cf.* Théorème 3.3). — *Pour tout A, il existe un $\varepsilon(n, A) > 0$, tel que pour toute variété riemannienne $(M, g) \in \mathbf{M}_{A,n}$ admettant une solution non triviale pour l'équation $\Delta f = q \cdot f$: si $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$ et $\|q\|_\infty \leqq n + \varepsilon(A, n)$, alors M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.*

Un corollaire immédiat de ce théorème (*cf.* Corollaire 3.4) est un résultat de pincement de l'énergie des applications harmoniques sphériques.

iii) Les conjectures sur le pincement du diamètre et sur celui de la première valeur propre du laplacien sont équivalentes.

• La conjecture du diamètre pincé implique celle du λ_1 pincé : ce fait avait déjà été observé par C.B. Croke (*cf.* [8]) ainsi que par Bérard, Besson et Gallot (*cf.* [2]). Et c'est ainsi que Croke prouve son théorème (réponse à la question II) en utilisant le théorème de Grove-Shiohama.

• La conjecture sur le pincement du λ_1 implique celle du diamètre pincé :

C'est ce que nous montrons au paragraphe 4, en utilisant essentiellement un résultat de comparaison des λ_1 de boules géodésiques dû à Cheng (*cf.* [7]).

Le théorème de pincement sur le diamètre (théorème 4.1) découlera alors de notre théorème sur le pincement du λ_1 (théorème 2.2 et remarque 2.3). □

Je tiens à remercier S. Gallot pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour les discussions encourageantes que j'ai eues avec lui.

1. Préliminaires.

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe, de dimension $n \geqq 2$. En plus des notations introduites au début de l'introduction, nous désignerons par dv_g son élément de volume riemannien, par D sa connexion de Lévi-Civita, par R son tenseur de courbure, par σ_0 (resp. σ_1) le minimum (resp. le maximum) de sa courbure sectionnelle σ_M en tout point et sur tout 2-plan et par k_0 (resp. k_1) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de $\operatorname{Ric}_M/(n-1)$. Nous noterons $df^\sharp$ le gradient d'une fonction f.

Le laplacien de Lichnerowicz (*cf.* [4]) agissant sur les 2-tenseurs est défini par :

$$\Delta_L h = D^*Dh + \mathcal{R}(h)$$

où D^* est l'adjoint de D (extension de la connexion de Levi Civita D aux 2-tenseurs) pour le produit scalaire L_2 et où en un point $p \in M$:

$$\mathcal{R}(h)(e_i,e_j) = \sum_k \big(\operatorname{Ric}_M(e_i,e_k)h(e_k,e_j) + h(e_i,e_k)\operatorname{Ric}_M(e_k,e_j)\big) \\ -2\sum_{k,\ell} R(e_i,e_k,e_j,e_\ell)h(e_k,e_\ell)\ ;$$

$(e_i)_{i=1,\dots,n}$ étant une base orthonormée de T_pM.

De la définition du laplacien de Lichnerowicz Δ_L, nous déduisons la formule de Weitzenböck suivante :

$$\langle \Delta_L h, h\rangle = \frac{1}{2}\Delta|h|^2 + |Dh|^2 + \langle \mathcal{R}(h),h\rangle. \tag{1}$$

1.1. LEMME. — *Pour tout 2-tenseur symétrique h sur M, on a :*

$$\langle \mathcal{R}(h),h\rangle \geqq 2\sigma_0(n|h|^2 - (\operatorname{tr} h)^2)$$

où $\operatorname{tr} h$ = trace de $h := \langle h,g\rangle$.

Preuve. — Si $e_1,\dots,e_n$ est une base orthonormée de T_pM diagonalisant h alors au point p, on a :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}(h),h\rangle &= \sum_{k,\ell}\sigma(e_k,e_\ell)\big(h(e_k,e_k)-h(e_\ell,e_\ell)\big)^2\\ &\geqq \sigma_0\Big(\sum_{k,\ell}\big(h(e_k,e_k)\big)^2 + \big(h(e_\ell,e_\ell)\big)^2 - 2h(e_k,e_k)h(e_\ell,e_\ell)\Big)\\ &\geqq 2\sigma_0(n|h|^2-(\operatorname{tr} h)^2).\end{aligned}$$

□

Nous aurons besoin, par la suite, de mesurer "le défaut de commutation" entre le laplacien Δ et la dérivée covariante D, ce qui fait l'objet du lemme suivant, déjà énoncé sous une forme légèrement différente par S. Gallot dans [11] :

1.2. LEMME. — *Soit $f \in C^\infty(M)$. On a :*

$$\Delta_L(Ddf) - Dd\Delta f = \square \operatorname{Ric}_M(df^\sharp; \dots)$$

où en un point $p \in M$ et dans une base orthonormale $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ de T_pM :

$$\square \operatorname{Ric}_M(e_k; e_i, e_j) = D_{e_k} \operatorname{Ric}_M(e_i, e_j) - D_{e_j} \operatorname{Ric}_M(e_k, e_i) - D_{e_i} \operatorname{Ric}_M(e_j, e_k).$$

Preuve. — Nous donnons ici une preuve qui n'est qu'évoquée dans [11]. Nous allons faire le calcul en un point $p \in M$, nous supposerons de plus que la base orthonormée $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ est normale (*i.e.* $D_{e_i} e_{j|p} = 0$).

On a d'abord :

$$\begin{aligned}\big(\Delta_L(Ddf) - Dd\Delta f\big)(i,j) &= \sum_k \big(D^4 f(i,j,k,k) - D^4 f(k,k,i,j)\\
&+ \operatorname{Ric}_M(i,k) Ddf(k,j) + Ddf(i,k) \operatorname{Ric}_M(k,j)\big) - 2 \sum_{k,\ell} R(i,k,j,\ell) Ddf(k,\ell).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}D^4 f(i,j,k,k) - D^4 f(k,k,i,j) &= D_i(D_j D_k D_k f - D_k D_j D_k f)\\
&+ D_k(D_i D_k D_j f - D_k D_i D_j f) + (D_i D_k - D_k D_i)(D_k D_j f).\end{aligned}$$

Les identités de Ricci nous donnent :

$$D_i D_k df(j) - D_k D_i df(j) = \sum_a R(i,k,j,a) df(a)$$

$$\sum_k D_j D_k df(k) - D_k D_j df(k) = \sum_{k,a} R(j,k,k,a) df(a)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_k (D_i D_k - D_k D_i) Ddf(k,j) &= \sum_{k,a} R(i,k,j,a) Ddf(k,a)\\
&+ \sum_{k,a} R(i,k,k,a) Ddf(a,j)\end{aligned}$$

et finalement :

$$\sum_k (D_iD_jD_kD_kf - D_kD_kD_iD_jf) = -\sum_a D_i \operatorname{Ric}_M(j,a)df(a)$$
$$-\sum_a \operatorname{Ric}_M(j,a)Ddf(i,a) - \sum_a \operatorname{Ric}_M(i,a)Ddf(a,j)$$
$$+\sum_{k,a} D_kR(i,k,j,a)df(a) + 2\sum_{k,a} R(i,k,j,a)Ddf(k,a).$$

La deuxième identité de Bianchi permet de conclure :

$$\sum_k \big(D^4f(i,j,k,k) - D^4f(k,k,i,j)\big) = -\sum_a D_i \operatorname{Ric}_M(j,a)df(a)$$
$$-\sum_a \operatorname{Ric}_M(j,a)Ddf(i,a) + \sum_a D_a \operatorname{Ric}_M(i,j)df(a)$$
$$-\sum_a D_j \operatorname{Ric}_M(i,a)df(a) + 2\sum_{k,a} R(i,k,j,a)Ddf(k,a)$$
$$-\sum_a \operatorname{Ric}_M(i,a)Ddf(a,j).$$

D'où le résultat :

$$\big(\Delta_L(Ddf) - Dd\Delta f\big)(i,j) = \sum_a \big(D_a \operatorname{Ric}_M(i,j)df(a)$$
$$- D_i \operatorname{Ric}_M(j,a)df(a) - D_j \operatorname{Ric}_M(i,a)df(a)\big) \square$$

L'opérateur $\square$ (opérant sur les 2-tenseurs) a été introduit par M. Berger et D. Ebin (*cf.* [3] pour d'autres propriétés de cet opérateur).

Il nous semble intéressant de connaître les variétés pour lesquelles $\square \operatorname{Ric} \equiv 0$. Il est clair que $\square \operatorname{Ric} \equiv 0$ pour les variétés d'Einstein (et plus généralement les variétés à courbure de Ricci parallèle), sont-elles les seules ? Nous avons la :

1.3. PROPOSITION. — *$\square \operatorname{Ric}_M \equiv 0$ si et seulement si (M,g) est localement le produit riemannien de variétés d'Einstein.*

Preuve. — $\square \operatorname{Ric}_M \equiv 0$ implique que $D \operatorname{Ric}_M$ est antisymétrique en les deux derniers indices; la symétrie de Ric_M impliquant qu'il est également symétrique en ces deux indices, il doit être nul. $D \operatorname{Ric}_M = 0$ implique la proposition (résultat classique (*cf.* [4]) qui découle du fait que la courbure de Ricci sera invariante par le groupe d'holonomie de M et du théorème de décomposition de De Rham). $\square$

2. Le théorème principal.

Dans toute la suite, nous supposerons $k_0 > 0$.

Soit f une fonction propre du laplacien, associée à la valeur propre λ (*i.e.* $\Delta f = \lambda f$) et considérons le 2-tenseur symétrique à trace nulle $T := Ddf + \frac{\lambda}{n} fg$. La formule de Bochner donne aisément :

$$\int_M |T|^2 dv_g \leqq \Big(\frac{n-1}{n}\Big)(\lambda - nk_0) \int_M |df|^2 dv_g.$$

Ainsi, si λ est très proche de nk_0, $\|T\|_2$ sera très petit. Nous utiliserons par la suite la formule de Weitzenböck pour les 2-tenseurs et une inégalité de Sobolev afin de montrer que $\|T\|_\infty$ est très petit. Ceci nous permettra, en utilisant un lemme dû à S. Gallot [11] (*cf.* aussi Pinsky [21] et Gallot [10] pour des versions plus faibles) de déduire que la variété M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.

2.1. LEMME (*cf.* [11]). — *Soit f une fonction propre du laplacien, associée à la valeur propre λ. Si*

$$\|T\|_\infty < \frac{\sqrt{k_0}}{1+\pi} \|df\|_\infty$$

alors la variété M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.

Idée de preuve. — Ce que prouve S. Gallot est une version plus fine de ce lemme. En fait, il montre qu'on a la même conclusion sous l'hypothèse

$$\|T\|_\infty < \frac{\sqrt{\lambda/n}}{1 + d(M)\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \|df\|_\infty.$$

La version du lemme, dont on a besoin, découle du fait que $\lambda \geqq nk_0$ et que $d(M) \leqq \pi/\sqrt{k_0}$ (th. de Myers).

Quitte à multiplier la métrique g par une constante, nous pouvons nous ramener au cas $\lambda = n$. L'hypothèse implique que les variations de $|df|^2 + f^2$ sont bornées en fonction de $\|df\|_\infty$, puisque $X(|df|^2 + f^2) = 2 \cdot T(X, df^\sharp)$. Si p est un point critique de f, on montre en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$$|f(p)| = (|df|^2(p) + |f(p)|^2)^{1/2} \geqq \frac{1}{1+d(M)} \|df\|_\infty$$

et donc, pour tout $X \in T_pM$ de norme 1, on a :

$$-f(p) - |f(p)| < Ddf(X,X) < |f(p)| - f(p).$$

Tous les points critiques de f sont donc des maxima ou des minima. On en déduit, en utilisant la connexité de M, que f n'a que 2 points critiques (un maximum et un minimum). Le lemme de Reeb permet alors de conclure. $\square$

2.2. Théorème principal (à comparer au th. 3.3 de Gallot [11] et à celui de Croke [8]). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension $n \geqq 2$ telle que la plus petite valeur propre k_0 de $\mathrm{Ric}_M / n-1$ soit strictement positive. Il existe une constante $\varepsilon > 0$, ne dépendant que de n, σ_0 et k_1, telle que si $\lambda_1 < nk_0 + \varepsilon$ alors M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.*

2.3. Remarque. — La version de ce théorème que nous avons donnée à l'introduction découle du fait que, si $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)k_0$ et $\sigma_M \leqq A$, alors : $\sigma_0 \geqq (n-1)k_0 - (n-2)A$ et $k_1 \leqq A$ et du fait qu'on peut remplacer dans la démonstration du théorème 2.2 σ_0 et k_1 par $(n-1)k_0 - (n-2)A$ et A.

Preuve du théorème. — Soit f une fonction telle que $\Delta f = \lambda f$ et considérons le tenseur $T = Ddf + \dfrac{\lambda}{n} fg$. La formule de Weitzenböck (1) nous donne :

$$\frac{1}{2}\Delta |T|^2 = \langle \Delta_L T, T\rangle - |DT|^2 - \langle \mathcal{R}(T), T\rangle$$

et, en utilisant le lemme 1.2 et $\langle g, T\rangle = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \Delta_L T, T\rangle = \langle \Delta_L Ddf, T\rangle &= \langle Dd\Delta f, T\rangle + \langle \square\, \mathrm{Ric}_M, df \otimes T\rangle \\ &= \lambda |T|^2 + \langle \square\, \mathrm{Ric}_M, df \otimes T\rangle.\end{aligned}$$

A partir de la minoration de $\langle \mathcal{R}(T), T\rangle$ obtenue dans le lemme 1.1, on déduit que :

$$\frac{1}{2}\Delta |T|^2 + |DT|^2 \leqq (\lambda - 2n\sigma_0)|T|^2 + \langle \square\, \mathrm{Ric}_M, df \otimes T\rangle \tag{2}$$

en multipliant les deux membres de cette inégalité par $|T|^{2k-2}$ (où k est un réel > 1) et en intégrant, on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_M \Delta |T|^2 |T|^{2k-2} dv_g + \int_M |DT|^2 |T|^{2k-2} dv_g \\ &\leqq (\lambda - 2n\sigma_0)\int_M |T|^{2k} dv_g + \int_M \langle \square\, \mathrm{Ric}_M, df \otimes T\rangle |T|^{2k-2} dv_g.\end{aligned} \tag{3}$$

La suite de la preuve va consister à déduire de cette inégalité une majoration de $\|T\|_\infty$ en fonction de $\|T\|_2$ en adaptant un processus d'itération à la Nirenberg-Moser. Pour cela, nous allons commencer par estimer le terme

$$\int_M \langle \square\, \mathrm{Ric}_M, df \otimes T\rangle > |T|^{2k-2} dv_g.$$

Estimation de $\int_M \langle \square \operatorname{Ric}_M, df \otimes T\rangle > |T|^{2k-2} dv_g$. — Remarquons d'abord que $\square \operatorname{Ric}_M = \square \overline{\operatorname{Ric}}_M$ pour $\overline{\operatorname{Ric}}_M = \operatorname{Ric}_M - (n-1)\dfrac{k_1+k_0}{2} g$ et que donc $\int_M \langle \square \operatorname{Ric}_M, df \otimes T\rangle |T|^{2k-2} dv_g = \int_M \langle \square \overline{\operatorname{Ric}}_M, df \otimes T\rangle |T|^{2k-2} dv_g$. Et, vu que T est symétrique,

$$\int_M \langle \square \overline{\operatorname{Ric}}_M, df \otimes T\rangle |T|^{2k-2} dv_g = \int_M \langle D\overline{\operatorname{Ric}}_M, df \otimes T\rangle |T|^{2k-2} dv_g$$
$$-2\int_M \langle D\overline{\operatorname{Ric}}_M, T \otimes df\rangle |T|^{2k-2} dv_g.$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\int_M \langle D\overline{\operatorname{Ric}}_M, df \otimes T\rangle |T|^{2k-2} dv_g = \int_M \Delta f \langle \overline{\operatorname{Ric}}_M, T\rangle |T|^{2k-2} dv_g$$
$$-\int_M \langle df \otimes \overline{\operatorname{Ric}}_M, DT\rangle |T|^{2k-2} dv_g - (2k-2)\int_M \langle df \otimes \overline{\operatorname{Ric}}_M, d|T| \otimes T\rangle |T|^{2k-3} dv_g,$$

de la même manière :

$$\begin{aligned}
&- 2\int_M \langle D\overline{\operatorname{Ric}}_M, T \otimes df\rangle |T|^{2k-2} dv_g \\
&= 2\int_M \Sigma \overline{\operatorname{Ric}}_M(i,m) Ddf(i,j) T(j,m) |T|^{2k-2} dv_g \\
&- 2\int_M \langle \overline{\operatorname{Ric}}_M, df \otimes D^* T\rangle |T|^{2k-2} \\
&+ 2(2k-2)\int_M \langle \overline{\operatorname{Ric}}_M \otimes d|T|, df \otimes T\rangle |T|^{2k-3} dv_g \ ;
\end{aligned}$$

remarquons alors, que :

$$\begin{aligned}
&\int_M \Delta f \langle \overline{\operatorname{Ric}}_M, T\rangle |T|^{2k-2} dv_g \\
&+ 2\int_M \sum \overline{\operatorname{Ric}}_M(i,m) Ddf(i,j) T(j,m) |T|^{2k-2} dv_g \\
&= \Big(\frac{n-2}{n}\Big)\lambda \int_M f \langle \overline{\operatorname{Ric}}_M, T\rangle |T|^{2k-2} dv_g \\
&+ 2\int_M \sum \overline{\operatorname{Ric}}_M(i,m) T(i,j) T(j,m) |T|^{2k-2} dv_g,
\end{aligned}$$

et donc, par Cauchy-Schwarz :

$$\int_M \Delta f \langle \overline{\operatorname{Ric}}_M, T\rangle |T|^{2k-2} dv_g + 2\int_M \overline{\operatorname{Ric}}(i,m) Ddf(i,j) T(j,m) |T|^{2k-2} dv_g$$
$$\leqq \Big(\frac{n-2}{n}\Big)\lambda \int_M |f||\overline{\operatorname{Ric}}_M||T|^{2k-1} dv_g + 2\int_M |\overline{\operatorname{Ric}}||T|^{2k} dv_g \ ;$$

de même on a :

$$-\int_M \langle df \otimes \overline{\operatorname{Ric}}_M, DT\rangle |T|^{2k-2} dv_g \leqq \int_M |df||\overline{\operatorname{Ric}}_M||DT||T|^{2k-2} dv_g,$$

et en utilisant en plus l'inégalité de Kato $|d|T|| \leqq |DT|$:

$$-2(k-1)\int_M \langle df \otimes \overline{\mathrm{Ric}}_M, d|T| \otimes T\rangle |T|^{2k-3}$$
$$\leqq 2(k-1)\int_M |\overline{\mathrm{Ric}}_M||df||DT||T|^{2k-2}dv_g \ ;$$

mais, de la formule de Bochner, on déduit :

$$D^*T = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)\lambda df - \mathrm{Ric}_M(df^\sharp, .)$$
$$= (n-1)\Big[\frac{\lambda}{n} - \Big(\frac{k_1+k_0}{2}\Big)\Big]df - \overline{\mathrm{Ric}}_M(df^\sharp, .),$$

ce qui nous donne :

$$-2\int_M \langle \overline{\mathrm{Ric}}_M, df \otimes D^*T\rangle |T|^{2k-2}dv_g$$
$$= (n-1)\Big[k_1+k_0-\frac{2\lambda}{n}\Big]\int_M \overline{\mathrm{Ric}}_M(df^\sharp, df^\sharp)|T|^{2k-2}dv_g$$
$$+2\int_M \langle \overline{\mathrm{Ric}}_M \otimes df, df \otimes \overline{\mathrm{Ric}}_M\rangle |T|^{2k-2}dv_g,$$

et donc, en remarquant que $\Big|k_1+k_0-\dfrac{2\lambda}{n}\Big| \leqq \sup\Big(k_1-k_0, \dfrac{2\varepsilon}{n}\Big)$

$$-2\int_M \langle \overline{\mathrm{Ric}}_M, df \otimes D^*T\rangle |T|^{2k-2}dv_g$$
$$\leqq (n-1)(k_1-k_0)\Big[k_1-k_0+\frac{2\varepsilon}{n}\Big]\int_M |df|^2|T|^{2k-2}dv_g$$
$$+2\int_M |\overline{\mathrm{Ric}}_M|^2|df|^2|T|^{2k-2}dv_g,$$

et finalement :

$$4(k-1)\int_M \langle \overline{\mathrm{Ric}}_M \otimes d|T|, df \otimes T\rangle |T|^{2k-3}$$
$$\leqq 4(k-1)\int_M |\overline{\mathrm{Ric}}_M||DT||df||T|^{2k-2}dv_g,$$

et vu que $|\overline{\mathrm{Ric}}_M|^2 \leqq \dfrac{n}{4}(k_1-k_0)^2$, on déduit l'estimation :

$$\int_M \langle \Box\, \mathrm{Ric}_M, df \otimes T\rangle |T|^{2k-2}dv_g$$
$$\leqq c_1(n)\lambda(k_1-k_0)\|f\|_\infty \int_M |T|^{2k-1}dv_g + c_2(n)(k_1-k_0)\int_M |T|^{2k}dv_g$$
$$+ c_3(n)((k_1-k_0)^2+\varepsilon(k_1-k_0))\|df\|_\infty^2 \int_M |T|^{2k-2}dv_g$$
$$+ c_4(n)(6k-5)(k_1-k_0)\int_M |DT||df||T|^{2k-2}dv_g$$

où $c_i(n)$ $(i=1,2,3,4)$ est une constante ne dépendant que de n.

Or, pour toute constante $c>0$, on a :

$$|df||DT| \leqq \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{c}|DT|^2 + c|df|^2\Big].$$

En choisissant $c=c_4(n)(6k-5)(k_1-k_0)$, on obtient l'estimation cherchée :

$$\begin{aligned}\int_M \langle \square\,\mathrm{Ric}_M, df\otimes T\rangle |T|^{2k-2}dv_g &\leqq c_1(n)\lambda(k_1-k_0)\|f\|_\infty \int_M |T|^{2k-1}dv_g\\ (4)\quad + c_2(n)(k_1-k_0)&\int_M |T|^{2k}dv_g + c_3(n)\big[(k_1-k_0)^2+\varepsilon(k_1-k_0)\\ &+(6k-5)^2(k_1-k_0)^2\big]\|df\|_\infty^2\int_M |T|^{2k-2}dv_g + \frac{1}{2}\int_M |DT|^2|T|^{2k-2}dv_g.\end{aligned}$$

Suite de la preuve. — En utilisant le théorème des accroissements finis et en remarquant que $\int_M f dv_g = 0$, on déduit que : $\|f\|_\infty \leqq d(M)\|df\|_\infty$. Ce qui permet d'obtenir, à partir de (3), de (4) et de l'inégalité de Kato :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_M \Delta|T|^2|T|^{2k-2}dv_g + \frac{1}{2}\int_M |d|T||^2|T|^{2k-2}\\ &\leqq (\lambda - 2n\sigma_0 + c_2(n)(k_1-k_0))\int_M |T|^{2k}dv_g\\ &+ c_3(n)((k_1-k_0)^2(1+(6k-5)^2)+\varepsilon(k_1-k_0))\|df\|_\infty^2\int_M |T|^{2k-2}dv_g\\ &+ c_1(n)\lambda(k_1-k_0)c_1'(k_0)\|df\|_\infty\int_M |T|^{2k-1}dv_g\end{aligned}$$

et en remarquant que :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_M \Delta|T|^2|T|^{2k-2}dv_g + \frac{1}{2}\int_M |d|T||^2|T|^{2k-2}dv_g\\ &= \Big(\frac{4k-3}{2k^2}\Big)\int_M |d|T|^k|^2 dv_g.\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{4k-3}{2k^2}\Big)\int_M |d|T|^k|^2dv_g\\ &\leqq c_1(n)\lambda(k_1-k_0)c(k_0)\|df\|_\infty\|T\|_{2k-1}^{2k-1}\\ (5)\quad &+(\lambda-2n\sigma_0+c_2(n)(k_1-k_0))\|T\|_{2k}^{2k} + c_3'(n)((k_1-k_0)^2(1+(6k-5)^2)\\ &+\varepsilon(k_1-k_0))\|df\|_\infty^2\|T\|_{2k-2}^{2k-2}\end{aligned}$$

maintenant, ou $\|T\|_\infty < \dfrac{\sqrt{k_0}}{1+\pi}\|df\|_\infty$ et alors, par le lemme 2.1, M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$, ou $\|df\|_\infty \leqq \dfrac{1+\pi}{\sqrt{k_0}}\|T\|_\infty$. Nous nous placerons désormais dans ce cas. Posons $h = |T|$, l'inégalité (5) devient alors :

$$(6)\qquad \left(\frac{4k-3}{k^2}\right)\int_M |dh^k|^2 dv_g$$
$$\leqq (c_1(n,k_0,k_1,\sigma_0)\varepsilon + c_2(n,k_0,k_1)k^2)\|h\|_\infty^2\|h\|_{2k-2}^{2k-2}\ ;$$

par ailleurs, l'inégalité de Sobolev (*cf.* théorème 3 de [14]) nous donne pour toute fonction $f \in H_1^2(M)$:

$$(7)\qquad \|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqq V(M)^{-2/n}\left(\frac{4}{n(n-2)k_0}\|df\|_2^2 + \|f\|_2^2\right).$$

En dimension 2, une inégalité analogue est valable en remplaçant n par 4 (*cf.* lemme 1.1.4 de [15]). En appliquant (7) à h^k et en utilisant (6), on obtient :

$$(8)\quad \|h\|_{\frac{2kn}{n-2}} \leqq V(M)^{-1/nk}\left(\frac{2k^2}{4k-3}(c_1+c_2k^2)+1\right)^{1/2k}\|h\|_\infty^{1/k}\|h\|_{2k-2}^{1-1/k}\ ;$$

posons alors $k = \beta^i + 1$ où $\beta = \dfrac{n}{n-2}$ et notons $|||h|||_p = V(M)^{-1/p}\|h\|_p$, l'inégalité (8) devient :

$$|||h|||_{2\beta^{i+1}+2\beta} \leqq (1 + c_1'\beta^i + c_2'\beta^{3i})^{1/2(\beta^i+1)}\|h\|_\infty^{1/\beta^i+1}|||h|||_{2\beta^i}^{1/1+(1/\beta)^i}$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$|||h|||_{2\beta^{i+1}} \leqq c_3^{(i/\beta^i+1)}\|h\|_\infty^{1/\beta^i+1}|||h|||_{2\beta^i}^{1/1+(1/\beta)^i},$$

ce qui permet d'obtenir par itérations de $i = 0$ jusqu'à l'infini :

$$(9)\qquad \|h\|_\infty \leqq K\|h\|_\infty^{1-\alpha}|||h|||_2^\alpha\ ,\quad \text{où}\ \ K = c_3^{\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{\beta^i+1}\right)}$$

et

$$\alpha = \prod_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+(1/\beta)^i}\right) \in]e^{-n/2}, 1[.$$

On déduit de (9) en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\|h\|_\infty^2 \leqq K^{2/\alpha}|||h|||_2^2 = K^{2/\alpha}V(M)^{-1}\|h\|_2^2$$

c'est-à-dire :

$$(10)\qquad \|T\|_\infty^2 \leqq K^{2/\alpha}V(M)^{-1}\|T\|_2^2,$$

mais par la formule de Bochner :

$$(11)\qquad \|T\|_2^2 \leqq (n-1)\left(\frac{\lambda}{n} - k_0\right)\|df\|_2^2$$

les inégalités (10) et (11) nous donnent alors :

$$\|T\|_\infty \leqq K^{1/\alpha}\sqrt{(n-1)}\left(\frac{\lambda}{n} - k_0\right)^{\frac{1}{2}}\|df\|_\infty.$$

En choisissant $\varepsilon(n,\sigma_0,k_1) > 0$ telle que $\varepsilon \leqq k_0(n-1)^{-1}K^{-2/\alpha}(1+\pi)^{-2}$, on obtient $\|T\|_\infty < \dfrac{\sqrt{k_0}}{1+\pi}\|df\|_\infty$. On conclut en appliquant le lemme 2.1.

□

3. Une généralisation du théorème de pincement du λ_1.

Soit $q \in \mathbf{C}^\infty(M)$ telle qu'il existe au moins une solution (non identiquement nulle) de l'équation :

$$(*) \qquad \Delta f = qf.$$

En multipliant par f l'équation $(*)$ et en intégrant on voit que : $\sup_M q \geqq 0$ et que si $\sup_M q = 0$ alors f est constante.

D'autre part, en supposant $q \geqq 0$ et en adaptant la preuve de la minoration de Lichnerowicz pour le λ_1, on peut facilement montrer que $\sup_M q \geqq nk_0$ (et que l'égalité n'a lieu que si $q = nk_0$ et que (M,g) est isométrique à $\left(\mathbf{S}^n, \frac{1}{k_0}\,\mathrm{can}\right)$). Le problème de pincement du λ_1 que nous avons étudié au paragrahe 2 se généralise donc naturellement et de manière équivalente pour q. La méthode que nous avons développée pour le λ_1 peut être adaptée à ce cas, mais présente beaucoup plus de complications et de difficultés techniques. Néanmoins, une remarque simple, va nous permettre de voir que ce problème de pincement (a priori) plus général n'est qu'un corollaire de celui du λ_1 :

3.1. LEMME. — *Soit $q \in \mathbf{C}^\infty(M)$ telle qu'il existe une solution (non identiquement nulle) de l'équation :*

$$\Delta f = qf.$$

Si $\int_M q dv_g > 0$, alors $\sup_M q \geqq \lambda_1(M,g)$. L'égalité, dans cette dernière inégalité, n'a lieu que si $q = \lambda_1$.

Preuve. — Ce qu'on va utiliser essentiellement est l'hypothèse $\int_M q dv_g > 0$. $\Delta f = qf$ signifie que 0 est dans le spectre de $\Delta - q$. Soit alors p tel que $\lambda_p(\Delta - q) = 0$. On sait d'après la caractérisation variationnelle des valeurs propres de l'opérateur $\Delta - q$ que :

$$\lambda_1(\Delta - q) \leqq -\frac{1}{V(M)} \int_M q dv_g < 0$$

et donc $p \geqq 2$. Ce qui implique que : $\lambda_2(\Delta - q) \leqq 0$ et comme $\lambda_2(\Delta - q) \geqq \lambda_2(\Delta) - \sup_M q$ on obtient :

$$\sup_M q \geqq \lambda_2(\Delta) = \lambda_1(M,g).$$

□

D'où les corollaires immédiats :

3.2. COROLLAIRE. — *Soit $q \geqq 0$ $(q \not\equiv 0)$ tel qu'il existe une solution non identiquement nulle de l'équation : $\Delta f = qf$.*

Nous avons : $\sup_M q \geqq nk_0$ de plus l'égalité n'a lieu que si $q = nk_0$ et (M, g) est isométrique à $\left(\mathbf{S}^n, \frac{1}{k_0}\,\mathrm{can}\right)$.

Preuve. — Se déduit directement du lemme 3.1, de la minoration de Lichnerowicz pour le λ_1 et de l'étude du cas d'égalité faite par M. Obata. □

3.3. THÉORÈME (pincement généralisé). — *Soit (M, g) une variété riemannienne complète telle que la plus petite valeur propre k_0 de $\mathrm{Ric}_M/(n-1)$ soit strictement positive. Et soit $q \geqq 0$ $(q \not\equiv 0)$ tel qu'il existe une solution $(\not\equiv 0)$ de l'équation : $\Delta f = qf$. Soit A un majorant de la courbure sectionnelle de (M, g).*

Il existe une constante $\varepsilon(n, \sigma_0, k_1) > 0$ telle que si

$$nk_0 \leqq \sup_M q \leqq nk_0 + \varepsilon$$

alors M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.

Preuve. — On utilise le ε obtenu dans le théorème de pincement du λ_1 (th. 2.2) et le lemme 3.1. □

Ce dernier théorème a comme application immédiate le résultat suivant de pincement de la densité d'énergie d'applications harmoniques sphériques :

Soit une application

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{m+1}) : (M, g) \to (\mathbf{S}^m, \mathrm{can}).$$

Définissons sa densité d'énergie par $e(\Phi) = \sum_{i=1}^{m+1} |d\Phi_i|^2$. Il est connu (*cf.* [24]) que Φ est harmonique si et seulement si :

$$\Delta\Phi_i = e(\Phi)\Phi_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m+1$$

d'où le corollaire :

3.4. COROLLAIRE. — *Soit (M, g) une variété riemannienne complète telle que $k_0 > 0$. Et soit $\Phi : (M, g) \to (\mathbf{S}^m, \mathrm{can})$ une application harmonique :*

i) *si* $e(\Phi) < nk_0$, *alors* Φ *est constante.*

ii) *si* $e(\Phi) \leqq nk_0$ *et si* Φ *est non constante, alors* (M, g) *est isométrique à la sphère euclidienne de rayon* $1/\sqrt{k_0}$ *et* Φ *est un plongement homothétique et totalement géodésique.*

iii) *il existe une constante* $\varepsilon(n, \sigma_0, k_1)$ *telle que si* $e(\Phi) < nk_0(1+\varepsilon)$ *et si* Φ *est non constante, alors* M *est homéomorphe à* $\mathbf{S}^n$.

Preuve du Corollaire 3.4. — (i) et la première partie de (ii) découlent du corollaire 3.2. La deuxième partie de (ii) (Φ est homothétique et totalement géodésique) est un corollaire de la formule de Weitzenböck pour les applications harmoniques (pour une preuve, voir [15] théorème 1.1.1). Enfin (iii) découle du théorème 3.3. □

4. Preuve du résultat de pincement du diamètre.

L'objet de ce paragraphe est de montrer l'équivalence entre notre théorème de pincement du λ_1 (th. 2.2) et le :

4.1. THÉORÈME. — *Pour tout* A *et tout* $n \geqq 2$, *désignons par* $\mathbf{M}_{A,n}$ *l'ensemble des variétés riemanniennes complètes de dimension* n *et à courbure sectionnelle majorée par* A. *Il existe un* $\varepsilon(A, n) > 0$ *tel que pour toute variété riemannienne* (M, g) *appartenant à* $\mathbf{M}_{A,n}$:

si $\mathrm{Ric}_M \geqq \mathrm{Ric}_{\mathbf{S}^n}$ *et* $d(M) > d(\mathbf{S}^n) - \varepsilon$, *alors* M *est homéomorphe à* $\mathbf{S}^n$.

Preuve de Th. 4.1 $\Rightarrow$ *Th. 2.2.* — Ceci avait déjà été remarqué par C.B. Croke [8] (dont une amélioration a été obtenue par Bérard, Besson et Gallot dans [2] à partir d'une inégalité isopérimétrique généralisant celle de P. Lévy et Gromov). En effet, ils montrent que :

$$\lambda_1(M, g) \geqq (1 + \eta_n(\pi - d(M)))\lambda_1(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$$

où η_n est une fonction (explicite dans la version de [2]) continue, croissante et telle que $\eta_n(0) = 0$ et $\eta_n(x) > 0$ pour $x > 0$.

Et donc, si $\lambda_1(M, g) \leqq n(1+\varepsilon)$ alors $\pi - d(M) \leqq \eta_n^{-1}(\varepsilon)$. Ce qui permet de conclure. □

Preuve de Th. 2.2 $\Rightarrow$ *Th. 4.1.* — Rappelons pour cela le résultat de comparaison suivant, dû à S.Y. Cheng [7].

4.2. LEMME. — *Soit* (M,g) *une variété riemannienne complète de dimension* n *vérifiant* $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$. *Toute boule géodésique* $B(x,R)$ *de* (M,g), *de rayon* $R<\pi$, *vérifie (pour le problème de Dirichlet) :*

$$\lambda_1(B(x,R)) \leqq \lambda_1(B^*(R))$$

où $B^*(R)$ *est la boule géodésique de rayon* R *sur* $(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$.

Nous en déduisons le lemme qui nous permet de conclure :

4.3. LEMME. — *Pour tout variété riemannienne complète* (M,g) *vérifiant* $\mathrm{Ric}_M \geqq (n-1)$, *on a :*

$$\lambda_1(M,g) \leqq \lambda_1(\mathbf{S}^n, \mathrm{can}) + \alpha_n(\pi - d(M))$$

où α_n *est une fonction continue positive croissante sur* $]0,\pi[$, *qui tend vers 0 en 0 et vers* $+\infty$ *en* π.

Preuve du lemme 4.3 et fin de la preuve de Th. 2.2 $\Rightarrow$ *Th. 4.1.* — Soient x_1 et x_2 deux points de M tels que $d(x_1,x_2) = d(M)$. Les boules géodésiques de rayon $\dfrac{d(M)}{2}$ centrées en x_1 et x_2 étant disjointes, on a, par le principe du mini-max :

$$\lambda_1(M,g) \leqq \max_{i=1,2}\Big(\lambda_1\Big(B\Big(x_i, \frac{d(M)}{2}\Big)\Big)\Big)$$

où les valeurs propres des boules sont au sens de Dirichlet, donc par le lemme 4.2 :

$$\lambda_1(M,g) \leqq \lambda_1\Big(B^*\Big(\frac{d(M)}{2}\Big)\Big)$$

où $B^*\Big(\dfrac{d(M)}{2}\Big)$ est la boule géodésique de rayon $\dfrac{d(M)}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ de $(\mathbf{S}^n, \mathrm{can})$.

En désignant par ρ la fonction distance au centre de la boule et en prenant comme fonction test dans le quotient de Rayleigh la fonction $\Phi = \cos\rho - \cos\dfrac{d(M)}{2}$, on montre comme dans la preuve du lemme de [1] p. 413, que :

$$\Delta\Phi \leqq n\cos\rho\Big(\cos\rho - \cos\frac{d(M)}{2}\Big)$$

et que :

$$\lambda_1\Big(B^*\Big(\frac{d(M)}{2}\Big)\Big) \leqq n\Big(1 + \cos\frac{d(M)}{2}\,\frac{\int_{B^*(\frac{d(M)}{2})}\big(\cos\rho - \cos\frac{d(M)}{2}\big)dv\,\mathrm{can}}{\int_{B^*(\frac{d(M)}{2})}\big(\cos\rho - \cos\frac{d(M)}{2}\big)^2 dv_{\mathrm{can}}}\Big)$$

d'où :

$$\lambda_1(M,g) \leqq \lambda_1(\mathbf{S}^n,\mathrm{can}) + \beta_n(d(M))$$

où

$$\beta_n(t) = n\cos\frac{t}{2}\frac{\int_0^{t/2}\left(\cos r - \cos\frac{t}{2}\right)\sin^{n-1} r dr}{\int_0^{t/2}\left(\cos r - \cos\frac{t}{2}\right)^2\sin^{n-1} r dr}$$

est une fonction décroissante sur $]0,\pi[$, qui tend vers 0 en π et vers $+\infty$ en 0. D'où le résultat du lemme en prenant $\alpha_n(t) = \beta_n(\pi - t)$. □

Maintenant pour déduire le théorème 4.1 du théorème 2.2, il suffit de choisir $\delta > 0$ tel que $\alpha_n(\delta) \leqq \varepsilon$ où ε est celui du théorème de pincement du λ_1 (th. 2.2 et remarque 2.3) car alors M est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$ dès que $d(M) > \pi - \delta$.

Remarques. — D'autres contre-exemples du type de ceux d'Anderson ont été obtenus par Y. Otsu sur des produits de sphères (*cf.* [20]).

– Il nous semble que d'autres contre-exemples de ce type peuvent être construits sur des sommes connexes de $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^m$ à partir des travaux de Sha et Yang (*cf.* [22] et [23]).

– Il nous semble aussi possible d'obtenir des résultats du type de ceux que nous obtenons avec des hypothèses intégrales sur la courbure (ceci en utilisant le travail de S. Gallot [12]).

Lors de la rédaction de cet article, nous avons appris que des idées proches de celles que nous avons développées au début de la preuve du théorème de pincement du λ_1 ont été utilisées récemment par M. Le Couturier et G.F. Robert (Théorèmes de pincement sous des hypothèses intégrales de courbure – preprint Ecole Polytechnique n° 1027 (1992)) pour donner une preuve analytique, sous des hypothèses intégrales sur la courbure, d'un théorème de pincement de Yamaguchi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.T. ANDERSON, Metrics of positive Ricci curvature with large diameter, Manuscripta Math., 68 (1990), 405–415.

[2] P. BÉRARD, G. BESSON, S. GALLOT, Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov, Invent. Math., 80 (1985), 295–308.

[3] M. BERGER, D. EBIN, Some decompositions of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold, J. Diff. Geom., 3 (1969), 379–392.

[4] A. Besse, Einstein manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 10, Springer-Verlag (1987).

[5] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian geometry, Academic Press, Orlando (Fl), 1984.

[6] J. Cheeger, D. Ebin, Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[7] S.Y. Cheng, Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications, Math. Z., 143 (1975), 289–297.

[8] C.B. Croke, An eigenvalue pinching theorem, Invent. Math., 68 (1982), 253–256.

[9] J.H. Eschenburg, Diameter, volume and topology for positive Ricci Curvature, J. Diff. Geom., 33 (1991), 743–747.

[10] S. Gallot, Un théorème de pincement et une estimation sur la première valeur propre du laplacien, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 289, (1979), 441–444.

[11] S. Gallot, Variétés dont le spectre ressemble à celui de la sphère, Astérisque, 80 (1980), 33–52.

[12] S. Gallot, Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature, Astérisque, 157–158, Colloque P. Lévy sur les processus stochastiques, S.M.F. Editeur, (1988), 191–216.

[13] K. Grove, K. Shiohama, A generalized sphere theorem, Ann. Math., 106 (1977), 201–211.

[14] S. Ilias, Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes, Ann. Inst. Fourier, 33-2 (1983), 151–165.

[15] S. Ilias, Quelques résultats d'isolement pur les applications harmoniques, Prépublication n° 46/92, Laboratoire de Math. et Applications, Université de Tours.

[16] P. Li, A. Treibergs, Pinching theorem for the first eigenvalue on positively curved four manifolds, Invent. Math., 66 (1982), 35–38.

[17] P. Li, J.Q. Zhong, Pinching theorem for the first eigenvalue on positively curved manifolds, Invent. Math., 65 (1981), 221–225.

[18] A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformation. Dunod, Paris, 1958.

[19] M. Obata, Certain conditions for a riemannian manifold to be isometric with a sphere, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 333–340.

[20] Y. Otsu, On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter, Math. Z., 206 (1991), 255–264.

[21] M. Pinsky, A topological version of Obata's sphere theorem, J. Diff. Geom., 14 (1979), 369–376.

[22] J.P. Sha, D.G. Yang, Examples of manifolds of positive Ricci curvature, J. Diff. Geom., 29 (1989) 95–103.

[23] J.P. Sha, D.G. Yang, Positive Ricci curvature on the connected sums of $\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^m$, preprint (1990).

[24] R.T. Smith, Harmonic mappings of spheres, Amer. J. Math., 97 (1975), 364–385.

[25] V. TOPONOGOV, Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number, Amer. Math. Soc. Transl., 37 (1964), 291–336.

[26] J.Y. WU, A diameter pinching sphere theorem for positive Ricci curvature, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 107, n° 3 (1989), 797–802.

Manuscrit reçu le 23 novembre 1992,
révisé le 2 avril 1993.

Saïd ILIAS,
Laboratoire de Mathématiques et Applications
Faculté des Sciences et Techniques
Parc de Grandmont
37200 Tours (France).