ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES GRAS

Sur la structure des groupes de classes relatives. Avec un appendice d'exemples numériques par T. Berthier

Annales de l'institut Fourier, tome 43, n° 1 (1993), p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 1 (1993), 1-20

SUR LA STRUCTURE DES GROUPES DE CLASSES RELATIVES

par G. GRAS

AVEC UN APPENDICE D'EXEMPLES NUMÉRIQUES

par T. BERTHIER

0. Introduction.

Avant de détailler le contenu de ce travail (cf. (0.3), (0.3.1) à (0.3.6) et (A)) et de rappeler en (0.1), (0.2) les éléments classiques permettant de décrire l'arithmétique abélienne, donnons un aperçu du résultat principal obtenu :

Soit p un nombre premier fixé impair, et soit F un corps abélien imaginaire de degré étranger à p.

Soit ψ un caractère $\mathbb{C}_p$-irréductible de F et soit χ le caractère $\mathbb{Q}_p$-irréductible correspondant ; la χ-composante $C\ell_\chi$ du p-groupe des classes de F est un module sur l'anneau local R_χ des valeurs de ψ sur $\mathbb{Z}_p$ (cf. (0.1) ci-après), et la possibilité de déterminer numériquement $C\ell_\chi$ est donnée par le résultat principal suivant (χ distinct du caractère de Teichmüller) :

THÉORÈME (0.0). — *Soit $S_t = \{\ell_1, \dots, \ell_t\}$ un ensemble de $t \geq 1$ nombres premiers vérifiant $\ell_i \equiv 1 \bmod p$ et $\psi(\ell_i) = 1, i = 1, \dots, t$, et soit φ l'un des $(p-1)^{t-1}$ caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles d'ordre p et de conducteur $\ell_1 \cdots \ell_t$:*

Mots-Clés : Corps abéliens – Classes d'idéaux – Nombres de Bernoulli – Corps de classes.
Classification A.M.S. : 1D – 11R.

(i) *Si la valuation, dans $R_{\varphi\chi}$, du nombre de Bernoulli $B_1(\theta^{-1}\psi^{-1})$ (où $\theta|\varphi$)est égale à t, celle-ci est alors indépendante du choix de φ et $C\ell_\chi$ est engendré par les images des idéaux premiers de F au-dessus des ℓ_i.*

(ii) *Soit r_χ le R_χ-rang de $C\ell_\chi$; l'ensemble des parties S_t pour lesquelles la condition (i) est satisfaite, avec $t = r_\chi$, a une densité de Čebotarev non nulle.*

(0.1) *Caractères.* — Soit Ψ le groupe des caractères d'ordre fini de $G^{ab} = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$ dans $\mathbb{C}_p$, et soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères $\mathbb{Q}_p$-irréductibles correspondants de G^{ab} ; si $\psi \in \Psi$, on désigne par χ l'élément de $\mathfrak{X}$ au-dessus de ψ, c'est-à-dire la somme des $\mathbb{Q}_p$-conjugués de ψ ; on dit également que ψ divise χ (notation : $\psi \mid \chi$).

On désigne par k_ψ le sous-corps de $\mathbb{Q}^{ab}$ fixe par $\mathrm{Ker}\psi$.

L'anneau R_ψ des valeurs de ψ sur $\mathbb{Z}_p$ est un anneau local dont l'idéal maximal est noté $\mathfrak{M}_\psi$; on désigne par q_ψ le cardinal du corps fini $R_\psi/\mathfrak{M}_\psi$.

On désigne par ω le caractère de Teichmuller.

Les invariants qui ne dépendent pas du choix de $\psi \mid \chi$ sont notés avec l'indice χ ; d'où les notations k_χ, R_χ, $\mathfrak{M}_\chi$, q_χ et les notions d'ordre et de conducteur de χ.

On désigne par $\mathfrak{X}_0$ (resp. $\mathfrak{X}_p$) l'ensemble des éléments de $\mathfrak{X}$ d'ordre étranger à p (resp. d'ordre puissance de p) ; on vérifie que $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_p$.

La notion de parité conduit aux notations évidentes $\mathfrak{X}^\pm, \mathfrak{X}_0^\pm, \mathfrak{X}_p^\pm$; de même, si k est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$, il lui correspond les ensembles de caractères $\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_k^\pm$.

(0.2) *p-classes d'idéaux.* — D'après [G1,§§ I,II], il existe une famille $(C\ell_\chi)_{\chi\in\mathfrak{X}}$ de p-groupes de classes d'idéaux qui est universelle pour décrire les p-groupes des classes des corps abéliens. En particulier, si $k/\mathbb{Q}$ est cyclique, et si M_k désigne le p-groupe des classes de k, on a :

$$|M_k| = \prod |C\ell_\chi| \text{ (produit sur les } \chi \in \mathfrak{X}_k).$$

Rappelons brièvement la définition des $C\ell_\chi$, en se limitant au cas des éléments de $\mathfrak{X}^-$ et pour $p \neq 2$. Soit $\chi \in \mathfrak{X}^-$, $\chi = \chi_0\chi_p$, $\chi_0 \in \mathfrak{X}_0^-$, $\chi_p \in \mathfrak{X}_p^+$; si $\chi_p = 1$, on pose :

$$C\ell_\chi = (M_{k_\chi})^{e_\chi},$$

où $e_\chi \in \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}\,(k_\chi/\mathbb{Q})]$ est l'idempotent associé à χ ; si $\chi_p \neq 1$, soit k' le sous-corps de k_χ tel que $[k_\chi : k'] = p$, alors la norme dans k_χ/k' induit la suite exacte (qui définit $C\ell_\chi$) :

$$1 \to C\ell_\chi \to (M_{k_\chi})^{e_{\chi_0}} \to (M_{k'})^{e_{\chi_0}} \to 1, \tag{0.2.1}$$

où, de même, e_{χ_0} est l'idempotent de $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}\,(k_\chi/k_{\chi_p})]$ associé canoniquement à χ_0.

Ceci définit donc $C\ell_\chi$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^-$, pour $p \neq 2$.

Soit maintenant $k/\mathbb{Q}$ une extension cyclique imaginaire de degré dp^n, $n \geq 0$, d et p étrangers ; posons :

$$\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q}) = \Delta \oplus G, \text{ avec } |\Delta| = d, \ |G| = p^n.$$

Soit alors F le sous-corps de k de degré d sur $\mathbb{Q}$ et soient M_k et M_F les p-groupes des classes relatives de k et F. D'après ce qui précède, le $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module M_k admet la décomposition semi-simple

$$M_k = \oplus M_k^{\chi_0} \text{ (somme sur les } \chi_0 \in \mathfrak{X}_F^-),$$

où l'on a posé :

$$M_k^{\chi_0} = (M_k)^{e_{\chi_0}};$$

et (0.2.1) conduit, par induction, à la formule :

$$|M_k^{\chi_0}| = \prod_{i=0}^{n} |C\ell_{\chi_i}|, \text{ pour tout } \chi_0 \in \mathfrak{X}_F^-, \tag{0.2.1'}$$

où $\chi_i \in \mathfrak{X}_k^-$ correspond à $\psi_0\psi_p^{p^{n-i}}$ ($\psi_0 \mid \chi_0$, $\psi_p \mid \chi_p$) ; on notera que pour $i = 0$, $C\ell_{\chi_0} = M_F^{\chi_0}$.

Les groupes $C\ell_\chi$ sont canoniquement des R_χ-modules pour lesquels on peut énoncer le résultat principal de B. Mazur, A. Wiles, V.A Kolyvagin, étendu au cas non semi-simple par D. Solomon (cf. [MW], [K], [So]) :

Théorème (0.2.2). — *Soit $p \neq 2$ et soit $\chi \in \mathfrak{X}^-$. Alors on a $|C\ell_\chi| = |R_\chi/c_\chi b_\chi|$, où $b_\chi = B_1(\psi^{-1})R_\chi$ (avec $\psi \mid \chi$) et où $c_\chi = 1$ sauf si le conducteur de χ est puissance de p et si la composante de χ sur $\mathfrak{X}_0$ est ω, auquel cas $c_\chi = \mathfrak{M}_\chi$ et $C\ell_\chi = 1$.*

Dans [Sc1], R. Schoof évoque le principe de la détermination explicite de la R_χ-structure de $C\ell_\chi$ dans le cas semi-simple impair (i.e. $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$) ; il définit, dans l'algèbre $\Lambda_\chi = R_\chi[[T]]$, un certain idéal Stick (χ), engendré au moyen d'éléments de Stickelberger "au-dessus de F", et conjecture l'égalité de Stick (χ) avec l'idéal de Fitting $\mathrm{Fit}_{\Lambda_\chi}(C\ell_\chi)$ pour la Λ_χ-structure de $C\ell_\chi$ définie par $h^T = 1$ pour tout $h \in C\ell_\chi$. Schoof montre déjà (cf. [Sc1, th. (4.3)]) que s'il existe $\varphi \in \mathfrak{X}_p$ de conducteur premier ℓ tel que $b_{\varphi\chi} = \mathfrak{M}_{\varphi\chi}$ (cf. (0.2.2)), alors $C\ell_\chi$ est R_χ-monogène. Ensuite dans [LSc], H.W. Lenstra et R. Schoof démontrent, dans le cas où χ est quadratique impair, que de tels nombres premiers ℓ ont une densité de Čebotarev non nulle. D'après Schoof lui-même (cf [Sc2]), la conjecture précédente est conséquence des travaux de Kolyvagin, bien qu'un certain travail soit nécessaire; en toute hypothèse, notre méthode complète , sur un plan pratique et numérique, les résultats évoqués ci-dessus et étend le résultat de [LSc] à tous les éléments de $\mathfrak{X}_0^-$.

(0.3) *Résultat principal.* — Pour $p \neq 2$, fixons $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$, $\chi \neq \omega$, et soit $F = k_\chi$ pour lequel $M_F^\chi = C\ell_\chi$.

DÉFINITIONS (0.3.1). — (i) Soit $\mathbb{S}_t$, $t \geq 1$, l'ensemble des parties $S = \{\ell_1, \dots, \ell_t\}$, où les nombres premiers ℓ_i vérifient les conditions suivantes :

(α) $\ell_i \equiv 1 \bmod p$,

(β) $\psi(\ell_i) = 1$ (où $\psi \mid \chi$).

(ii) Pour $S \in \mathbb{S}_t$, soit $\Phi_S \subseteq \mathfrak{X}_p^+$ l'ensemble des caractères d'ordre p et de conducteur $\ell_1 \cdots \ell_t$.

(iii) Nous disons que $\varphi \in \Phi_S$ est χ-admissible si l'on a

$$b_{\varphi\chi} = \mathfrak{M}^t_{\varphi\chi}, \text{ avec } t = |S| \text{ (cf. (0.2.2))}.$$

Par extension, nous disons que $S \in \mathbb{S}_t$ est χ-admissible s'il existe un élément χ-admissible $\varphi \in \Phi_S$ (voir cependant (3.6)).

(iv) On désigne par r_χ le R_χ-rang de $C\ell_\chi$, à savoir la R_χ/pR_χ -dimension de $C\ell_\chi/C\ell_\chi^p$.

Remarque (0.3.2). — L'ensemble Φ_S se décrit facilement par le corps de classes sur $\mathbb{Q}$; en particulier, $|\Phi_S| = (p-1)^{t-1}$.

Avec les définitions précédentes, le résultat principal (0.0) s'énonce comme suit :

THÉORÈME (0.3.3). — *Soit $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$, $\chi \neq \omega$.*

(i) *Soit* $S \in \mathbb{S}_t$ *(cf. (0.3.1),(i)); pour* $j = 1, \dots, t$, *soit* L_j *un idéal premier de* F *au-dessus de* ℓ_j, *et soit* $h(L_j) \in C\ell_\chi$ *la* χ*-composante de la* p*-classe de* L_j. *Alors si* S *est* χ*-admissible (cf. (0.3.1), (iii)),* $C\ell_\chi$ *est le* R_χ*-module engendré par les* $h(L_j)$, $1 \leq j \leq t$, *et on a* $r_\chi \leq t$ *(cf. (0.3.1), (iv)).*

(ii) *L'ensemble des parties* χ*-admissibles* S *de* $\mathbb{S}_{r_\chi}$ *a une densité de Čebotarev non nulle.*

COROLLAIRE (0.3.4). — *Le* R_χ*-rang* r_χ *est l'entier minimum* t *pour lequel il existe une partie* χ*-admissible à* t *éléments.*

COROLLAIRE (0.3.5). — *Le groupe* $C\ell_\chi$ *est* R_χ*-monogène si et seulement si il existe* φ *d'ordre* p, *de conducteur premier* ℓ, *tel que* $b_{\varphi\chi} = \mathfrak{M}_{\varphi\chi}$ *(cf. (0.2.2); voir également (5.2)).*

Remarques (0.3.6). — (i) Ceci répond positivement à la question posée par R. Schoof dans [Sc1], dans le cas R_χ-monogène, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$ (i.e on a $\mathrm{Stick}\,(\chi) = \mathrm{Fit}_{\Lambda_\chi}(C\ell_\chi)$).

(ii) L'expérience numérique (cf. (A), [B]) montre que l'on trouve facilement des parties χ-admissibles et que l'on met en évidence, de façon systématique, ceux des $C\ell_\chi$ qui sont R_χ-monogènes. Lorsque $C\ell_\chi$ n'est pas trouvé monogène (ou plus généralement de rang $\leq t_0$) après un certain nombre d'essais pour $t = 1, 2, \dots, t_0$, il peut y avoir doute sur sa structure, mais comme l'on a en principe un système $\{L_1, \dots, L_t\}$ d'idéaux dont les p-classes engendrent $C\ell_\chi$, une étude numérique complémentaire permet de conclure en pratique (voir à ce sujet [B]).

1. Classes invariantes.

Soient $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$, $\chi \neq \omega$, et $F = k_\chi$. Fixons une partie $S = \{\ell_1, \dots, \ell_t\} \in \mathbb{S}_t$, $t \geq 1$, puis un caractère $\varphi \in \Phi_S$ (cf. (0.3.1)), et soit $K = k_{\varphi\chi} = k_\varphi F$. L'extension K/F est donc S-ramifiée de degré p.

Notations (1.1). — (i) Pour chaque $j = 1, \dots, t$, soit L_j (resp. $\overline{L}_j$) un idéal premier de F (resp. K) au-desssus de ℓ_j (resp. L_j) et soient $h(L_j)$ (resp. $h(\overline{L}_j)$) les χ-composantes des p-classes de L_j (resp $\overline{L}_j$) dans F (resp. K).

(ii) Pour simplifier, on pose $C\ell = C\ell_\chi$, $M = M_K^\chi$ (cf. (0.2)), $R = R_\chi$, $(R : pR) = q$, $r = r_\chi$.

(iii) On désigne par M_1 le sous-module de M formé des classes invariantes par $\mathrm{Gal}\,(K/F)$ (les "χ-classes ambiges") et par $(C\ell) \subseteq M_1$ l'image de $C\ell$ dans l'extension des classes dans K/F.

Rappelons certains résultats classiques (cf. [G3]) :

LEMME (1.2). — (i) *On a* $(C\ell) \simeq C\ell$;

(ii) *on a* $M_1 = (C\ell) < \cdots, h(\overline{L}_j), \cdots >_R$ *et* $M_1/(C\ell) \simeq (R/pR)^t$.

On a alors le résultat suivant qui fait le lien entre la notion de χ-admissibilité et la théorie des genres :

LEMME (1.3). — Le caractère $\varphi \in \Phi_S$ est χ-admissible (cf. (0.3.1), (iii)) si et seulement si $M = M_1$.

La formule (0.2.1') conduit ici, avec $\chi_0 = \chi$, à :

(1.3.1) $$|M| = |Cl_\chi|\,|Cl_{\varphi\chi}| = |Cl|\,|C\ell_{\varphi\chi}|.$$

D'après la formule analytique (0.2.2), appliquée à χ et $\varphi\chi$, et compte tenu de (1.2), (ii), on a $M = M_1$ si et seulement si $|C\ell_{\varphi\chi}| = q^t$, donc si et seulement si $b_{\varphi\chi} = \mathfrak{M}^t_{\varphi\chi}$ (i.e. si on a la χ-admissibilité de φ).

Remarque (1.4). — La notion de χ-admissibilité est donc équivalente à l'absence de χ-classes "exceptionnelles" dans K/F.

2. Classes exceptionnelles.

Dans le but de montrer l'existence de parties χ-admissibles S, nous supposons que la R-structure de $C\ell$ est connue explicitement et nous cherchons à caractériser ces parties, à partir de (1.3). De façon plus précise, on fixe une fois pour toutes des idéaux $A_1, \ldots, A_r$ de F dont les classes $h_1, \ldots, h_r$ vérifient $C\ell = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} < h_i >_R$.

On se restreint également à caractériser les parties S étrangères aux A_i, ce qui ne change pas le problème.

Soit donc $S \in \mathbb{S}_t$, $t \geq 1$, S étrangère aux A_i ; soit $\varphi \in \Phi_S$ et soient F, K les corps k_χ, $k_{\varphi\chi}$; soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}\,(K/F)$ et soit N la norme dans K/F.

On conserve les notations introduites en (1.1) auxquelles on ajoute les suivantes :

Notations (2.1). — (i) Soient $\mathcal{J}_F$, $\mathcal{J}_K$, $\mathcal{P}_F$, $\mathcal{P}_K$ les χ-composantes des tensorisés par $\mathbb{Z}_p$ des groupes des idéaux fractionnaires de F et K puis des sous-groupes d'idéaux principaux respectifs, et soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ les χ-composantes des tensorisés $\mathbb{Z}_p \otimes F^\times$ et $\mathbb{Z}_p \otimes K^\times$. On peut toujours supposer les idéaux A_i, considérés plus haut, pris dans $\mathcal{J}_F$.

(ii) Soit $e \in \mathbb{Z}_p[\Delta]$ l'idempotent associé au caractère χ ; on pose :

$$\mathcal{J}_1 = < \cdots, (A_i), \cdots ; \cdots, \overline{L}_j^e, \cdots >_R,\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq t; \tag{2.1.1}$$

on vérifie que l'on a alors :

$$\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_K^{\sigma-1} = 1. \tag{2.1.2}$$

On pose $\mathcal{P}_1 = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{P}_K$.

(iii) On pose $\mathcal{P}_0 = N\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{P}_F$ et

$$\Lambda = \{x \in \mathcal{F}, (x) \in \mathcal{P}_0\}. \tag{2.1.3}$$

Remarques (2.2). — (i) On a $\mathcal{J}_1\mathcal{P}_K/\mathcal{P}_K = M_1$ (cf. (1.2)), et $N\mathcal{J}_1/\mathcal{P}_o = \mathcal{P}_F N\mathcal{J}_1/\mathcal{P}_F = NM_1$. On a enfin $N\mathcal{J}_1/N\mathcal{P}_1 \simeq M_1$ (cf. (2.1.2)).

(ii) On ne fait pour l'instant aucune hypothèse sur la valeur de t (par rapport à r notamment).

On peut alors énoncer la χ-version d'un résultat général de [G2, IV, B] qui tient compte essentiellement du fait qu'ici la χ-composante du groupe des unités est triviale sous l'hypothèse $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$, $\chi \neq \omega$:

LEMME (2.3). — *Soit $M_2 = \{h \in M, h^{\sigma-1} \in M_1\}$; alors on a (cf. (1.1), (ii), (iii) et (2.1)) :*

$$|M_2/M_1| = \frac{|C\ell|}{|NM_1|} \times \frac{q^t}{(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K})}.$$

On vérifie que l'on a la suite exacte :

$$1 \to N\mathcal{P}_1/\mathcal{P}_0^p \xrightarrow{\beta} \Lambda \cap N\mathcal{K}/\Lambda^p \xrightarrow{\gamma} M_2/M_1 \to 1,$$

où γ est ainsi définie : si $x \in \Lambda \cap N\mathcal{K}$, on a $x = N\alpha$, $\alpha \in \mathcal{K}$, et $(x) = NA$, $A \in \mathcal{J}_1$, auquel cas $N(\alpha) = NA$, et il existe $B \in \mathcal{J}_K$ tel que $A = (\alpha)B^{\sigma-1}$;

à x on associe l'image de la classe h' de B dans M_2/M_1. On a $h' \in M_1$ si et seulement si $B^{\sigma-1} \in \mathcal{P}_K$, soit $A \in \mathcal{P}_K$, donc $A \in \mathcal{P}_1$; on a donc $(x) = NA \in N\mathcal{P}_1$; d'où le noyau égal à $\{x \in \Lambda \cap N\mathcal{K},\ (x) \in N\mathcal{P}_1\}/\Lambda^p$ qui est isomorphe à $N\mathcal{P}_1/\mathcal{P}_0^p$.

On a donc, d'après ce qui précède et (2.2) :

$$\begin{aligned}(M_2 : M_1) &= \frac{(\Lambda \cap N\mathcal{K} : \Lambda^p)}{(N\mathcal{P}_1 : \mathcal{P}_0^p)} \\ &= \frac{(\Lambda : \Lambda^p)}{(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K})} \times \frac{(N\mathcal{J}_1 : N\mathcal{P}_1)}{(N\mathcal{J}_1 : \mathcal{P}_0^p)} \\ &= \frac{(\Lambda : \Lambda^p)|M_1|}{(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K})|NM_1|(\mathcal{P}_0 : \mathcal{P}_0^p)} \\ &= \frac{|M_1|}{|NM_1|(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K})}\end{aligned}$$

puisque $\Lambda/\Lambda^p \simeq \mathcal{P}_0/\mathcal{P}_0^p$. D'où le lemme en utilisant (1.2), (ii), pour l'expression de $|M_1|$.

COROLLAIRE (2.4). — *On a $M = M_1$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $C\ell = < \cdots, h(L_j), \cdots >_R$, $1 \leq j \leq t$;

(ii) $(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K}) = q^t$.

En effet, on a $M = M_1$ si et seulement si $M_2 = M_1$; ensuite, chacun des deux facteurs écrits dans (2.3) est entier; d'où $M = M_1$ si et seulement si :

(i') $NM_1 = C\ell$,

(ii') $(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K}) = q^t$.

Or, d'après (1.2), (ii), on a $NM_1 = C\ell^p < \cdots, h(L_j), \cdots >_R$ qui est égal à $C\ell$ si et seulement si $< \cdots, h(L_j), \cdots >_R = C\ell$; d'où la condition (i) (qui suppose en outre $t \geq r$), ce qui démontre le point (i) du théorème (0.3.3).

Nous allons maintenant étudier la condition (ii) de (2.4) en supposant pour l'instant la condition (i) satisfaite.

3. Restes normiques.

On suppose toujours donné $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$, $\chi \neq \omega$, on pose toujours $F = k_\chi$, $C\ell = C\ell_\chi$, $R = R_\chi$, $r = r_\chi$, et on fixe, comme au §2, des représentants $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{J}_F$ de $C\ell$.

Soit $S \in \mathbb{S}_r$, étrangère aux A_i, telle que les classes $h(L_j)$, $1 \leq j \leq r$, engendrent $C\ell$ (la condition (i) de (2.4) est donc satisfaite), et on choisit $\varphi \in \Phi_S$, ce qui donne les corps $E = k_\varphi$, $K = K_{\varphi\chi}$.

Déterminons $\Lambda N\mathcal{K}$; de par la définition de $\mathcal{J}_1$ (cf. (2.1.1)), on a

$$N\mathcal{J}_1 =< \cdots, A_i^p, \cdots; \cdots, L_j^e, \cdots >_R, \; 1 \leq i, j \leq r.$$

Comme les $h(L_j) = L_j^e \mathcal{P}_F$ engendrent $C\ell$, il existe une matrice carrée m, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$, inversible, telle que $m((L_j^e)_j) = (A_j(u_j))_j$, $u_j \in \mathcal{F}$; par conséquent :

$$\begin{aligned} N\mathcal{J}_1 &=< \cdots, A_i^p, \cdots; \cdots, L_j^e, \cdots; \cdots, A_j(u_j), \cdots >_R \\ &\equiv< \cdots, A_j(u_j), \cdots; \cdots, L_j^e, \cdots >_R \mod N\mathcal{P}_K, \end{aligned}$$

puisque $A_i^p = (A_i(u_i))^p (u_i)^{-p}$ et que $u_i^p \in N\mathcal{K}$; d'où $N\mathcal{J}_1 \equiv< \cdots, A_j(u_j), \cdots >_R \mod N\mathcal{P}_K$, puisque $(L_j^e)_j = m^{-1}\left((A_j(u_j))_j\right)$.

Soit p^{n_j}, $n_j \geq 1$, l'ordre de la classe de A_j, et posons $A_j^{p^{n_j}} = (a_j)$, $a_j \in \mathcal{F}$; alors $N\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{P}_F \equiv< \cdots, (a_j u_j^{p^{n_j}}), \cdots >_R \mod N\mathcal{P}_K$, d'où :

(3.1) $$\Lambda N\mathcal{K} = \Lambda_0 N\mathcal{K}, \text{ où } \Lambda_0 =< \cdots, a_j, \cdots >_R, \; 1 \leq j \leq r.$$

Remarque (3.1.1). — On vérifie facilement que $\Lambda_0 \mathcal{F}^p$ est indépendant du choix de la décomposition $C\ell = \bigoplus_{i=1}^{r} < h(A_i) >_R$.

Notations (3.2). — (i) Soit Λ_S le sous-module de $\mathcal{F}$ formé des éléments étrangers à S et normes locales dans K/F en dehors de S.

(ii) Soient $G = \mathrm{Gal}\,(K/F)$, $\Delta = \mathrm{Gal}\,(K/E)$, et soit $G^{[F:\mathbb{Q}]}$ considéré comme $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module pour l'opération $s'((g_s)_{s\in\Delta}) = (g_{s'^{-1}s})_{s\in\Delta}$ pour tout $s' \in \Delta$; on désigne par Ω sa χ-composante; c'est donc un R-module monogène isomorphe à R/pR.

Introduisons le symbole de reste normique de Hasse dans K/F, relativement aux idéaux premiers Q de F :

$$\left(\frac{\,\cdot\,, K/F}{Q}\right) : \mathcal{F} \to G.$$

Le fait que $K/\mathbb{Q}$ soit abélienne et les propriétés de ce symbole montrent que pour tout $x \in \mathcal{F}$ et tout $s,\, s' \in \Delta$, on a $\left(\dfrac{s'x,\, K/F}{sQ}\right) = \left(\dfrac{x,\, K/F}{s'^{-1}sQ}\right)$; l'application produit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &\longrightarrow G^{[F:\mathbb{Q}]} \\
x &\longrightarrow \left(\left(\frac{x, K/F}{sQ}\right)\right)_{s\in\Delta}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

est donc un homomorphisme de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-modules, et par restriction on obtient une application de Λ_S dans Ω.

Appliquons ceci à chacun des idéaux L_j, $1 \leq j \leq r$; comme l'image de Λ_S par $\left(\dfrac{.\,,\, K/F}{L_j}\right)$ est le groupe d'inertie (égal à G) de ℓ_j dans K/F, on obtient les surjections suivantes :

$$\begin{aligned}
\nu_j :&\Lambda_S \longrightarrow \Omega \\
x &\longrightarrow \left(\left(\frac{x,\, K/F}{sL_j}\right)\right)_{s\in\Delta}
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

puis l'application produit :

$$\begin{aligned}
\nu_S :&\Lambda_S \longrightarrow \Omega^r \\
x &\longrightarrow (\nu_j(x))_j.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

L'extension K/F étant cyclique, le corps de classes implique que ν_S conduit à un isomorphisme de R-modules de $\Lambda_S N\mathcal{K}/N\mathcal{K}$ sur Ω^r.

Remarque (3.3.3). — On a $|\Omega| = q$, d'où $(\Lambda_S N\mathcal{K} : N\mathcal{K}) = q^r$.

LEMME (3.4). — *Les conditions suivantes sont équivalentes (où $\Lambda N\mathcal{K} = \Lambda_0 N\mathcal{K}$ (cf. (3.1)) :*

(i) $(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K}) = q^r$,

(ii) $\nu_S(\Lambda_0) = \Omega^r$.

On a, par construction, $\Lambda_0 \subsetneq \Lambda_S$, soit $\Lambda_0 N\mathcal{K} \subsetneq \Lambda_S N\mathcal{K}$; par conséquent (i), qui s'écrit aussi $(\Lambda_0 N\mathcal{K} : N\mathcal{K}) = q^r$, est équivalente à $\Lambda_0 N\mathcal{K} = \Lambda_S N\mathcal{K}$ (cf. (3.3.3)) et finalement à (ii).

On est donc amené à étudier la condition (sur S) :

$$\nu_S(\Lambda_0) = \Omega^r; \tag{3.4.1}$$

Comme Λ_0/Λ_0^p est d'ordre q^r, la condition ci-dessus est encore équivalente à :

$$\text{(3.4.1}'\text{)} \qquad \operatorname{Ker}(\overline{\nu}_S : \Lambda_0/\Lambda_0^p \to \Omega^r) = 1.$$

Soit $F' = F(\mu_p)$ et soit $K' = KF'$; par la théorie de Kummer, il existe $\pi' \in F'^{\times}$ tel que $K' = F'(\sqrt[p]{\pi'})$; l'extension K'/F' est S-ramifiée, donc modérément ramifiée en tout idéal premier L' de F' au-dessus de S, auquel cas on a pour ces places, en termes de valuations :

$$\text{(3.4.2)} \qquad v_{L'}(\pi') \not\equiv 0 \bmod p.$$

Soit $b \in \Lambda_0$, soit $\ell \in S$ et soit L (resp. L') un idéal premier de F (resp. F') au-dessus de ℓ (resp. L) ; puisque $b \in \mathcal{F}$ et que K'/F est abélienne, $\left(\dfrac{b, K'/F'}{L'}\right)$ ne dépend pas du choix de L' au-dessus de L et correspond à $\left(\dfrac{b, K/F}{L}\right)$ dans l'isomorphisme $\operatorname{Gal}(K'/F') \simeq \operatorname{Gal}(K/F)$. Or $\left(\dfrac{b, K'/F'}{L'}\right)(\sqrt[p]{\pi'}) = (b, \pi')_{L'} \sqrt[p]{\pi'}$, par définition du symbole de Hilbert, puisque $K' = F'(\sqrt[p]{\pi'})$, et la condition $\left(\dfrac{b, K/F}{L}\right) = 1$ équivaut donc à $(b, \pi')_{L'} = 1$, ce qui, par anti-symétrie du symbole de Hilbert, se caractérise dans $F'(\sqrt[p]{b})/F'$ au moyen du symbole de reste normique $\left(\dfrac{\pi', F'(\sqrt[p]{b})/F'}{L'}\right)^{-1}$, lequel est donné en termes des automorphismes de Frobenius par $\left(\dfrac{F'(\sqrt[p]{b})/F'}{L'}\right)^{v_{L'}(\pi')}$, puisque le conducteur de $F'(\sqrt[p]{b})/F'$ est étranger à S par choix de S étranger à Λ_0.

On a donc, d'après (3.4.2), $(b, \pi')_{L'} = 1$ si et seulement si $\left(\dfrac{F'(\sqrt[p]{b})/F'}{L'}\right) = 1$.

Considérons alors l'extension de Kummer suivante, galoisienne sur $\mathbb{Q}$:

$$\text{(3.4.3)} \qquad N' = F'(\sqrt[p]{\Lambda_0})$$

qui d'après (3.1.1) ne dépend que de χ. Par la dualité de Kummer, $\Delta' = \operatorname{Gal}(F'/\mathbb{Q})$ opère sur $\operatorname{Gal}(N'/F')$ via le caractère reflet de χ, à savoir $\chi^* = \omega\chi^{-1}$; il en résulte alors que si $s' \in \Delta'$, on a $\left(\dfrac{N'/K'}{s'L'}\right) \in$

$< \left(\dfrac{N'/F'}{L'}\right) >_{R^*}$ (en termes de R^*-structure, où $R^* = R_{\chi^*}$); on peut donc noter $\left(\dfrac{N'/F'}{\ell}\right)$ l'un quelconque des automorphismes de Frobenius $\left(\dfrac{N'/F'}{L'}\right)$, le R^*-module engendré ne dépendant pas de ce choix; enfin, comme ℓ est totalement décomposé dans $F'/\mathbb{Q}$, $\left(\dfrac{N'/F'}{\ell}\right) = \left(\dfrac{N'/\mathbb{Q}}{\ell}\right)$.

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\overline{\nu}_S) \neq 1$ (cf. (3.4.1')) équivaut à l'existence de $b \in \Lambda_0 - \Lambda_0^p$ tel que $\left(\dfrac{F'(\sqrt[p]{b})/\mathbb{Q}}{\ell}\right) = 1$ pour tout $\ell \in S$ (cf. (3.3.1,2)), soit au fait que le R^*-module engendré par les $\left(\dfrac{N'/\mathbb{Q}}{\ell}\right)$, $\ell \in S$, fixe un sous-corps de N' distinct de F' ; d'où le résultat final suivant donnant une caractérisation intrinsèque de la condition (ii) de (2.4) (la condition (i) étant supposée vérifiée) :

Lemme (3.5). — *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\nu_S(\Lambda_0) = \Omega^r$ (i.e $(\Lambda : \Lambda \cap N\mathcal{K}) = q^r$) est que le R^*-module engendré par les automorphismes de Frobenius $\left(\dfrac{N'/\mathbb{Q}}{\ell_i}\right)$, $1 \leq i \leq r$, soit égal à* $\mathrm{Gal}\,(N'/F')$.

Remarque (3.6). — Ce qui précède montre en particulier que la condition de χ-admissibilité (i.e. la condition $M = M_1$) ne dépend pas du choix de $\varphi \in \Phi_S$ mais uniquement de S.

4. Existence d'une densité des parties χ-admissibles.

Soient $\chi \in \mathfrak{X}_0^-$, $\chi \neq \omega$, et $F = k_\chi$. On considère alors les deux extensions p-élémentaires suivantes de $F' = F(\mu_p)$:

(i) $H' = F'H$, où H est l'extension abélienne non ramifiée de F qui correspond, par le corps de classes, au quotient $C\ell/C\ell^p$ (on a $\mathrm{Gal}\,(H'/F') \simeq (R/pR)^r$) ;

(ii) $N' = F'(\sqrt[p]{\Lambda_0})$ (cf. (3.1)).

Lemme (4.1). — *Les extensions H' et N' sont linéairement disjointes sur F'.*

D'après le corps de classes, $\Delta' = \mathrm{Gal}\,(F'/\mathbb{Q})$ opère sur $\mathrm{Gal}\,(H'/F')$ via le caractère χ et d'après la dualité de Kummer il opère sur $\mathrm{Gal}\,(N'/F')$ via le caractère $\chi^* = \omega\chi^{-1}$; ceci est incompatible au plan des parités, auquel cas $H' \cap N' = F'$.

COROLLAIRE (4.2). — *Une condition nécessaire et suffisante pour que $S = \{\ell_1, \ldots, \ell_r\} \in \mathbb{S}_r$, S étrangère à Λ_0, soit χ-admissible (cf. (0.3.1) et (3.6)) est que les automorphismes de Frobenius $\left(\frac{H'N'/\mathbb{Q}}{\ell_i}\right)$, $1 \le i \le r$, vérifient les deux conditions suivantes :*

(i) $< \cdots, \left(\frac{H'/\mathbb{Q}}{\ell_i}\right), \cdots >_R = \mathrm{Gal}\,(H'/F')$;

(ii) $< \cdots, \left(\frac{N'/\mathbb{Q}}{\ell_i}\right), \cdots >_{R^*} = \mathrm{Gal}\,(N'/F')$.

Remarque (4.3). — Cette condition peut se réaliser de la façon suivante, qui prouve l'existence d'une densité de Čebotarev. On fixe deux décompositions de $\Lambda_0\mathcal{F}^p$ et $C\ell/C\ell^p$:

$$\Lambda_0\mathcal{F}^p = \bigoplus_{i=1}^{r} < a_i >_R \mathcal{F}^p,$$
$$C\ell/C\ell^p = \bigoplus_{i=1}^{r} < h_i >_R / < h_i >_R^p;$$

on considère alors les extensions suivantes de F', pour $i = 1, \ldots r$:

H'_i telle que $\mathrm{Gal}\,(H'_i/F') \simeq < h_i >_R / < h_i >_R^p$,

$N'_i = F'(\sqrt[p]{< a_i >_R})$;

on pose alors $H'_{(i)} = \prod_{j \ne i} H'_j$, $N'_{(i)} = \prod \prod_{j \ne i} N'_j$.

Ceci étant, pour chaque i, on fixe un élément τ_i de $\mathrm{Gal}\,(H'N'/H'_{(i)}N'_{(i)})$ dont les projections sur $\mathrm{Gal}\,(H'_i/F')$ et $\mathrm{Gal}\,(N'_i/F')$ soient non triviales, et on applique le théorème de Čebotarev en faisant en sorte que $\left(\frac{H'N'/\mathbb{Q}}{\ell_i}\right) = \tau_i$; ceci est possible en vertu de (4.1).

Ceci achève la démonstration du théorème principal (0.3.3).

5. Remarque sur un résultat de R. Schoof.

Considérons un ensemble $\Sigma = \{\ell_1, \ldots, \ell_s\}$, $s \ge 1$, de nombres premiers distincts vérifiant les conditons suivantes :

(α) $\ell_i \equiv 1 \bmod p$,

(β') $\psi(\ell_i) \neq 1$ (où $\psi \mid \chi$) ;

soit φ un caractère d'ordre p, de conducteur $\ell_1 \cdots \ell_t$ et soit K le corps $k_{\varphi\chi}$.

Les formules de χ-classes ambiges de [G3] conduisent ici, dans K/F, aux résultats suivants (qui reviennent à faire $t = 0$ dans (1.2) et (2.3)) :

LEMME (5.1). — (i) *On a* $M_1 = (C\ell)$ *(cf. (1.1), (ii), (iii))* ;

(ii) *on a* $|M_2/M_1| = \dfrac{|C\ell|}{|NM_1|} = q^r$ *(cf. (2.3)).*

COROLLAIRE (5.2). —*(cf.* [Sc 1, th. 4.3]*). Si* $b_{\varphi\chi} = \mathfrak{M}_{\varphi\chi}$*, alors* $C\ell_\chi$ *est* R_χ*-monogène.*

En effet, par (0.2.1'), il vient $|M| = |C\ell|q$, d'où $|M/M_1| = q$, ce qui conduit à $|M_2/M_1| = q^r \leq q$, soit à $r \leq 1$.

Pour tester la R-monogénéité, tout $\ell \equiv 1 \bmod p$ convient (mais non pour trouver un générateur de $C\ell$).

(A) Appendice d'exemples numériques.

(A.0) *Introduction, calcul des* $b_{\varphi\chi}$ (cf. (0.2.2)). Dans une première partie (A.1), nous traitons un exemple de corps quadratique imaginaire F (avec $p = 3$) pour lequel la R_χ-structure de $C\ell_\chi$ est connue, non cyclique de type (p, p). Grâce au théorème (0.3.3), nous pouvons donner plusieurs systèmes de générateurs de $C\ell_\chi$.

La seconde partie (A.2) est consacrée à des illustrations numériques du théorème (0.3.3) pour des corps F quartiques cycliques imaginaires, avec $p = 3$ et $p = 5$. La plupart des parties S utilisées permettent de conclure que la χ-composante $C\ell_\chi$ étudiée est R_χ-cyclique et donnent un générateur de ce R_χ-module.

Après un très grand nombre d'essais, nous avons obtenu un exemple non R_χ-cyclique : il s'agit du corps quartique cyclique imaginaire

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{-541(37+6\sqrt{37})}\right)$$

pour lequel $h^* = 26 \times 25$; pour $p = 5$, et pour les 2 caractères 5-adiques χ_1 et χ_2 d'ordre 4, on obtient que

$$C\ell_{\chi_1} \simeq (R_\chi/(2-i)R_\chi)^2 \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$$

et que $C\ell_{\chi_2} = 1$.

L'étude détaillée de cet exemple et la preuve de la non cyclicité sont données dans [B].

Calcul des $b_{\varphi\chi}$. Etant donné $S = \{\ell_1, \ldots, \ell_t\}$, $\ell_i \equiv 1 \bmod p$, $\psi(\ell_i) = 1$ (avec $\psi \mid \chi$) pour tout i, on considère $\varphi \in \Phi_S$ et on pose $K = k_{\varphi\chi}$ (cf. (0.3)). Soit alors

$$St(K) = \sum_{a=1}^{m} \left(\frac{K/\mathbb{Q}}{a}\right)^{-1} \left(\frac{a}{m} - \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})],$$

issu de la distribution de Stickelberger correspondante, la sommation étant restreinte aux entiers a étrangers au conducteur m de K, et $\left(\frac{K/\mathbb{Q}}{a}\right)$ désignant le symbole d'Artin de a. On a $b_{\varphi\chi} = B_1(\theta^{-1}\psi^{-1})R_{\varphi\chi}$(où $\theta|\varphi, \psi|\chi$) et on sait que $B_1(\theta^{-1}\psi^{-1}) =< \theta\psi,\, St(K) >\in R_{\varphi\chi}$. On est amené à calculer la $\mathfrak{M}_{\varphi\chi}$-valuation de ce nombre de Bernoulli : par exemple, si celle-ci vaut 1 lorsque $t = 1$, la R_χ-cyclicité de $C\ell_\chi$ est démontrée et la méthode donne un générateur explicite de ce R_χ-module.

L'élément de Stickelberger $St(K)$ peut être calculé sous la forme d'un polynôme en T, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p[\Delta]$, dans la décomposition $\mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q}) = \Delta \times G$, $\Delta = \mathrm{Gal}\,(K/k_\varphi)$, $G = \mathrm{Gal}(K/F) =< \sigma >$, où l'on a posé $T = \sigma - 1$; la χ-composante $St_\chi(K)$ de $St(K)$ donne alors un élément de $R_\chi[T]$, et un degré de Weierstrass égal à 1 pour cette "série" en T entraîne donc la R_χ-cyclicité.

(A.1) *Cas quadratique.* Nous considérons ici le corps $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-4027})$ dont le groupe des classes est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Les calculs sont menés avec $t = 2$, $S = \{\ell_1,\, \ell_2\}$, $p = 3$, et induisent deux corps K_1 et K_2, cycliques de degré 6 sur $\mathbb{Q}$, pour lesquels les éléments de Stickelberger sont donnés ci-dessous ; bien que ce ne soit pas nécessaire, en vertu de (3.6), nous donnons les 2 éléments de Stickelberger obtenus. Ici χ est le caractère quadratique de conducteur 4027 :

(i) $S = \{13,\ 19\}$ est χ-admissible :

$$St_\chi(K_1) = 654T + 308T^2,$$
$$St_\chi(K_2) = 162T + 124T^2\ ;$$

(ii) $S = \{13,\ 43\}$ est χ-admissible :

$$St_\chi(K_1) = 342T + 256T^2,$$
$$St_\chi(K_2) = 396T + 440T^2\ ;$$

(iii) $S = \{19,\ 43\}$ est χ-admissible :

$$St_\chi(K_1) = -534T - 302T^2,$$
$$St_\chi(K_2) = -690T - 550T^2.$$

Remarque. — Pour les corps quadratiques imaginaires F dont le 3-groupe des classes est cyclique, et pour les petites valeurs de ℓ, on obtient la preuve de la cyclicité dans environ 3 cas sur 5 (i.e $S = \{\ell\}$ ($\chi(\ell) \doteq 1$ ou non) conduit à $b_{\varphi\chi} = \mathfrak{M}_{\varphi\chi}$ (φ de conducteur ℓ) dans 3 cas sur 5), et lorsqu'on se limite aux ℓ décomposés dans F, la χ-admissibilité a lieu dans 1 cas sur 2. Ces fréquences ont été obtenues après 600 calculs de $b_{\varphi\chi}$.

(A.2) *Cas quartique cyclique.* L'étude générale des corps quartiques cycliques figure dans [H*] et [G (MN)]. Si F est un tel corps, alors il s'écrit $F = \mathbb{Q}(\sqrt{A(D + B\sqrt{D})})$ où A, B, C, D sont des entiers vérifiant les conditions suivantes : A est impair sans facteur carré, $D = B^2 + C^2$ est sans facteur carré, B, $C > 0$, A et D sont étrangers ; réciproquement, tout corps de cette forme définit une extension quartique cyclique de $\mathbb{Q}$.

Le corps F est réel si $A > 0$, imaginaire si $A < 0$; $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ est l'unique sous-corps quadratique de F. Enfin le conducteur f de F est donné par $f = 2^r|A|D$, avec :

$r = 3$ si $D \equiv 1$, 2 ou 5 mod 8, $B \equiv 1$ mod 2,

$r = 2$ si $D \equiv 1$ mod 4, $B \equiv 0$ mod 2, $A + B \equiv 3$ mod 4,

$r = 0$ si $D \equiv 1$ mod 4, $B \equiv 0$ mod 2, $A + B \equiv 1$ mod 4.

Le nombre de classes relatives de F est noté h^* ; les calculs s'effectuent avec $t = 1$; ci-dessous, $\mathcal{C}$ est un ensemble des premiers nombres premiers ℓ ($\ell \equiv 1$ mod p et $\psi(\ell) = 1$)), $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $\ell \in \mathcal{C}$ tels que $S = \{\ell\}$ soit χ-admissible (i.e. tels que $b_{\varphi\chi} = \mathfrak{M}_{\varphi\chi}$ pour le caractère φ de conducteur ℓ et d'ordre p considéré).

La χ-composante $St_\chi(K)$ de l'élément de Stickelberger de K est donnée, pour chaque $S = \{\ell\}$, sous la forme $aT + bT^2$, $a, b \in R_\chi$, $T = \sigma - 1$.

(A.2.1) *Cas* $p = 3$. Dans ce cas, χ est l'unique caractère d'ordre 4 de F et $R_\chi = \mathbb{Z}_3[i]$ ($i^2 = -1$ dans $\mathbb{C}_3$).

(i) $f = 1073$ ($D = 37$, $A = -29$, $B = 6$, $C = 1$), $h^* = 2 \times 9^2$.
$\mathcal{C} = \{7, 73, 181, 307, 337\}$; on a alors $\mathcal{A} = \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\ell = 7 \ &: St_\chi(K) = (26 - 2i)T + (8 - 8i)T^2 \ ;\\
\ell = 73 \ &: St_\chi(K) = (-102 - 68i)T + (-10 - 30i)T^2 \ ;\\
\ell = 181 &: St_\chi(K) = (96 - 112i)T + (66 - 58i)T^2 \ ;\\
\ell = 307 &: St_\chi(K) = (-50 + 138i)T + (12 + 22i)T^2 \ ;\\
\ell = 337 &: St_\chi(K) = (-194 - 144i)T + (-122 - 56i)T^2.
\end{aligned}$$

(ii) $f = 1417$ ($D = 13$, $A = -109$, $B = 2$, $C = 3$), $h^* = 2 \times 9^2$.
$\mathcal{C} = \{61, 103, 127, 157, 181\}$; on a aussi $\mathcal{A} = \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\ell = 61 \ &: St_\chi(K) = (150 - 104i)T + (86 - 38i)T^2 \ ;\\
\ell = 103 &: St_\chi(K) = (-78 + 194i)T + (-108 + 108i)T^2 \ ;\\
\ell = 127 &: St_\chi(K) = (44 - 18i)T - (8 + 10i)T^2 \ ;\\
\ell = 157 &: St_\chi(K) = (12 + 10i)T + (-28 + 24i)T^2 \ ;\\
\ell = 181 &: St_\chi(K) = (144 - 82i)T + (76 - 18i)T^2.
\end{aligned}$$

(iii) $f = 7827$ ($D = 2609$, $A = -3$, $B = 20$, $C = 47$), $h^* = 2 \times 9^3$.
$\mathcal{C} = \{13, 19, 31\}$; ici $\mathcal{A} = \{13, 31\}$:

$$\begin{aligned}
\ell = 13 \ &: St_\chi(K) = (-10 + 8i)T + (2 + 24i)T^2 \ ;\\
\ell = 19 \ &: St_\chi(K) = (0 + 48i)T + (-6 + 56i)T^2 \ ;\\
\ell = 31 \ &: St_\chi(K) = (-92 + 314i)T + (-58 + 122i)T^2.
\end{aligned}$$

Pour ces 3 exemples, il y a R_χ-cyclicité et plusieurs façons d'obtenir un R_χ-générateur de $C\ell_\chi$.

(A.2.2) *Cas* $p = 5$. Ici $i \in \mathbb{Z}_5$ et deux caractères 5-adiques χ_1, χ_2 interviennent. Nous utilisons le théorème (0.2.2) pour déterminer, à l'aide des nombres de Bernoulli $B_1(\chi_1^{-1})$, $B_1(\chi_2^{-1})$, les ordres $|C\ell_{\chi_1}|$ et $|C\ell_{\chi_2}|$. Nous supposons i caractérisé par la congruence $i \equiv 2 \bmod 5$ et posons $\chi_1(s) = i$ (resp. $\chi_2(s) = -i$) relativement au choix d'un générateur s de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. Pour χ_1 et χ_2 on a $R_\chi = \mathbb{Z}_5$.

(i) $f = 985$ ($D = 197$, $A = -5$, $B = 14$, $C = 1$), $h^* = 2 \times 5^2$.

On a $B_1(\chi_1^{-1}) = -10i$, d'où $|C\ell_{\chi_1}| = |C\ell_{\chi_2}| = 5$;

$\mathcal{C} = \{61, 101, 191, 251, 311\}$; on a respectivement :

$\mathcal{A}_1 = \{61, 101, 191, 311\}$, $\mathcal{A}_2 = \{61, 251, 311\}$:

$$\ell = 61\ :\ St_{\chi_1}(K) = (-210 - 42i)T + (-368 - 36i)T^2 + (-258 - 10i)T^3 + (-62 - 10i)T^4\ ;$$

$$\ell = 101 :\ St_{\chi_1}(K) = (152 - 84i)T + (182 - 108i)T^2 + (76 - 88i)T^3 + (6 - 22i)T^4\ ,$$

où l'on voit que

$$152 - 84i \equiv 0 \bmod \mathfrak{M}_{\chi_1}, \quad 152 - 84i \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{M}_{\chi_2}\ ;$$

$$\ell = 191 :\ St_{\chi_1}(K) = (-216 + 112i)T + (-244 + 64i)T^2 + (-132 - 20i)T^3 + (-24 - 16i)T^4\ ;$$

$$\ell = 251 :\ St_{\chi_1}(K) = (-64 + 92i)T + (-94 + 234i)T^2 + (-34 + 134i)T^3 + (2 + 14i)T^4\ ;$$

$$\ell = 311 :\ St_{\chi_1}(K) = (154 - 234i)T + (380 - 450i)T^2 + (254 - 362i)T^3 + (38 - 90i)T^4.$$

(i) $f = 1565$ ($D = 5$, $A = -313$, $B = 2$, $C = 1$), $h^* = 2 \times 5^2$.

On a $B_1(\chi_1^{-1}) = 6 + 8i$, soit $|C\ell_{\chi_1}| = 1$, $|C\ell_{\chi_2}| = 5^2$;

$\mathcal{C} = \{11, 71, 151, 181, 241\}$; on a alors $\mathcal{A}_2 = \{11, 71, 151\}$:

$$\ell = 11\ :\ St_{\chi_2}(K) = (-50 - 34i)T + (-114 - 86i)T^2 + (-92 - 68i)T^3 + (-24 - 22i)T^4\ ;$$

$$\ell = 71\ :\ St_{\chi_2}(K) = (-80 - 86i)T + (-194 - 260i)T^2 + (-156 - 236i)T^3 + (-42 - 70i)T^4\ ;$$

$$\ell = 151 :\ St_{\chi_2}(K) = (-6 + 60i)T + (54 - 44i)T^2 + (62 - 14i)T^3 + (24 + 8i)T^4\ ;$$

$$\ell = 181 :\ St_{\chi_2}(K) = (156 + 208i)T + (168 + 220i)T^2 + (56 + 96i)T^3 + (-6 + 6i)T^4\ ;$$

$$\ell = 241 :\ St_{\chi_2}(K) = (-6 + 472i)T + (50 + 836i)T^2 + (60 + 574i)T^3 + (24 + 134i)T^4.$$

(iii) $f = 11465$ ($D = 2293$, $A = -5$, $B = 42$, $C = 23$), $h^* = 18 \times 5^3$.

On a $B_1(\chi_1^{-1}) = -66 + 12i$, d'où $|C\ell_{\chi_1}| = 1$, $|C\ell_{\chi_2}| = 5^3$.

On considère $\ell = 11$ qui est χ_2-admissible :

$$St_{\chi_2}(K) = (146+114i)T + (298+282i)T^2 + (198+218i)T^3 + (52+58i)T^4.$$

Ces calculs montrent encore la R_χ-cyclicité des $C\ell_\chi$ et précisent (pour $\chi = \chi_1$ et $\chi = \chi_2$) un générateur, illustrant ainsi de façon non triviale le théorème principal sur les corps abéliens lorsque $C\ell_{\chi_1}$ et $C\ell_{\chi_2}$ sont non triviaux (cas (i)) ou lorsque l'une des χ-composantes est d'ordre q^n, $n > 1$ (cas (ii) et (iii)).

BIBLIOGRAPHIE

[B] T. BERTHIER, Étude numérique des p-groupes de classes des corps abéliens (en préparation).

[G1] G. GRAS, Étude d'invariants relatifs aux groupes des classes des corps abéliens, Astérisque, 41-42 (1977), 35-53.

[G2] G. GRAS, Sur les ℓ-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ, Ann. Inst. Fourier, 23-3 (1973), 1-48.

[G3] G. GRAS, Nombre de φ-classes invariantes. Application aux classes des corps abéliens, Bull. Soc. Math. de France, 106 (1978), 337-364.

[G(MN)] M.-N. GRAS, Étude des corps quartiques cycliques, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Année 1977/1978, fasc. 2 (réédition 1985).

[K] V.A. KOLYVAGIN, Euler systems, The Grothendieck Festchrift, vol. II, Progress in Math. 87, pp. 435-483, Birkhäuser, Boston (1990).

[LSc] H.W. LENSTRA and R.J. SCHOOF, Class groups of imaginary number fields (to appear).

[MW] B. MAZUR and A. WILES, Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, Invent. Math., 76 (1984), 179-330.

[Or] B. ORIAT, Groupes des classes d'idéaux des corps quadratiques (...), Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Années 1986/87-1987/88, fasc. 2.

[Sc1] R.J. SCHOOF, The structure of the minus class groups of abelian number fields, Séminaire de théorie des Nombres, Paris, Année 1988/1989, Birkhäuser, Progr. in Math., vol 91 (1991).

[Sc2] R.J. SCHOOF, On Kolyvagin's work on cyclotomic fields (in preparation).

[So] D. SOLOMON, On the class groups of imaginary abelian fields, Ann. Inst. Fourier, 40-3 (1990), 467-492.

[H*] K. HARDY, R.H. HUDSON, D. RICHMAN, K.S. WILLIAMS and N.M. HOLTZ, Calculation of the class numbers of imaginary cyclic quartic fields, Carleton-Ottawa Math. Lect. Notes Series, Num. 7 (1986) .

K. HARDY, R.H. HUDSON, D. RICHMAN, K.S. WILLIAMS, Table of the relative class numbers $h^*(K)$ of imaginary cyclic quartic fields K with $h^*(K) \equiv 2 \bmod 4$ and conductor $f < 416,000$, Carleton-Ottawa Math. Lect. Notes Series, Num. 8 (1987).

Manuscrit reçu le 6 juin 1991,
révisé le 16 avril 1992.

G. GRAS & T. BERTHIER,
Faculté des Sciences
Laboratoire de Mathématiques
U.A. 741 au C.N.R.S.
F-25030 Besançon Cedex (France).