ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FELIPE CANO
JEAN-FRANÇOIS MATTEI

Hypersurfaces intégrales des feuilletages holomorphes

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 1-2 (1992), p. 49-72
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_49_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42, 1-2 (1992), 49-72

HYPERSURFACES INTÉGRALES DES FEUILLETAGES HOLOMORPHES

par F. CANO[(*)] et J.-F. MATTEI

0. Introduction.

Une forme différentielle holomorphe au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$

$$\omega = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i(x)dx_i$$

vérifiant la condition d'intégrabilité

$$\omega \wedge d\omega \equiv 0$$

définit, par le Théorème de Frobenius, un feuilletage (régulier) en dehors du *lieu singulier*

$$\operatorname{Sing} \omega = \{P; \omega(P) = 0\}.$$

Supposons ω singulière à l'origine. Nous donnons ici des conditions géométriques assurant l'existence d'un germe *d'hypersurface analytique intégrale* du feuilletage, c'est à dire d'un germe $H = (f = 0)$ qui, en dehors des lieux singuliers de ω et de H, est une union de feuilles; analytiquement cela s'exprime par :

$$\omega \wedge df = 0 \text{ en chaque point de } H.$$

(*) Partiellement financé par la DGICYT.
Mots-clés : Equations différentielles – Feuilletages – Systèmes dynamiques.
Classification A.M.S. : 14B05 – 14E15 – 34A20 – 34C40 – 58F18 – 58F23.

De façon plus précise, soit X une variété analytique (lisse) de dimension n. Un *feuilletage holomorphe (éventuellement singulier) de codimension un* est la donnée d'un sous-module cohérent $\mathcal{F}$ du faisceau Ω_X des 1-formes différentielles holomorphes, tel que

1. le faisceau $\mathcal{F}$ soit localement libre de rang un;
2. localement le faisceau $\mathcal{F}$ soit engendré par une 1-forme qui satisfait à la condition d'intégrabilité $\omega \wedge d\omega \equiv 0$;
3. le quotient $\dfrac{\Omega}{\mathcal{F}}$ n'ait pas de torsion.

La troisième condition, dite de *saturation*, signifie en fait que dans l'écriture

$$\omega = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i dx_i$$

d'un générateur local ω, les germes de fonctions $a_i, i = 1, \ldots, n$ n'ont pas de facteur commun; ou encore, que le *lieu singulier* Sing$\mathcal{F}$ *du feuilletage* $\mathcal{F}$, défini localement comme le lieu singulier des générateurs ω, est de codimension supérieure ou égale à deux.

Remarquons que lorsque $\mathcal{F}$ ne vérifie que les deux premières conditions, alors, en divisant chaque générateur local ω par le pgcd$(a_i; i = 1, \ldots, n)$, on construit un (unique) faisceau, Sat$\mathcal{F}$ appelé le *saturé de* $\mathcal{F}$, qui satisfait maintenant les trois conditions précédentes et coïncide avec $\mathcal{F}$ en dehors de Sing$\mathcal{F}$. Autrement dit, on peut éliminer les singularités "parasites" de $\mathcal{F}$.

Soit $f : X' \to X$ une application holomorphe. *L'image réciproque* $f^*\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ est le sous-module de $\Omega_{X'}$ localement défini par les $f^*\omega$, où ω est un générateur local de $\mathcal{F}$. Lorsque $f^*\mathcal{F}$ n'est pas identiquement nulle, on définit le *transformé strict* $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ comme le saturé de $f^*\mathcal{F}$. Si f est une immersion, nous le noterons par $\mathcal{F}|_{X'}$ et l'appellerons *restriction de* $\mathcal{F}$ *à* X'. Un sous-ensemble Z de X sera dit *intégral de* $\mathcal{F}$ si, en dehors de Sing$\mathcal{F}$, il est contenu dans une union finie de feuilles. Lorsque Z est analytique cela signifie que l'image réciproque $f^*\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ par le plongement $f : Z_{\text{reg}} \to X$ de la partie lisse de Z dans X, est identiquement nulle.

Le problème de déterminer et de décrire les ensembles analytiques intégraux a été considéré pour la première fois par Briot et Bouquet en 1856 [3], pour des germes de feuilletages de $\mathbb{C}^2$: un algorithme de type Puiseux pour les formes différentielles, leurs permet de déterminer toutes les courbes analytiques intégrales. Par la suite cet algorithme a été repris et précisé par Dulac (1904) [17] [18]. En donnant une réduction des singularités par éclatements de points de l'espace ambiant, Seidenberg montre dans (1968) [30], que les courbes intégrales d'un même germe de feuilletage de $\mathbb{C}^2$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de types de singularité au sens de Zariski [32], et donc seulement un nombre fini de types topologiques.

Cependant, le problème de l'existence de courbes intégrales n'est pas résolu par ces auteurs. La réponse est donnée par Camacho et Sad en 1982 [5] :

Tout germe de feuilletage de $(\mathbb{C}^2, 0)$ admet une courbe analytique intégrale.

La démonstration consiste à contrôler dans le processus de réduction par éclatements, les sommes des "indices" des singularités le long des diviseurs exceptionnels. Récemment J. Cano [14] a donné une autre démonstration de ce résultat, basée sur l'algorithme de Briot et Bouquet.

Ce résultat d'existence ne peut pas s'étendre en toute généralité aux dimensions supérieures. Dans [23] Jouanolou donne l'exemple suivant de germe en 0 de feuilletage de $\mathbb{C}^3$ qui n'admet aucune hypersurface intégrale :

$$\omega = (y^m x - z^{m+1})dy + (z^m y - x^{m+1})dz + (x^m z - y^{m+1})dx.$$

La "pathologie" de cet exemple réside dans le fait qu'après éclatement de l'origine, le diviseur exceptionnel n'est pas hypersurface intégrale du feuilletage transformé strict. Ce phénomène existe déjà en dimension deux et le feuilletage possède en revanche une infinité de courbes intégrales : les images directes des germes des feuilles transverses au diviseur exceptionnel. Reprenant une terminologie ancienne, nous appellons *dicritique* tout germe de feuilletage qui satisfait à cette propriété pour une "bonne" suite d'éclatements.

Le principal résultat de cet article est le suivant (Théorème 5) :

Tout germe de feuilletage de $(\mathbb{C}^n, 0)$ qui n'est pas dicritique admet un germe d'hypersurface analytique intégrale.

Pour $n = 3$, ce résultat a été obtenu par Cano et Cerveau [12] [13]. La démonstration repose sur l'existence d'une réduction des singularités des feuilletages non-dicritiques [8] [11] – réduction que l'on ne sait pas (encore) faire en dimension supérieure à trois – et sur la "propagation" le long du lieu singulier global du feuilletage réduit, d'une courbe intégrale, donnée dans un deux-plan transverse par le théorème de Camacho-Sad.

Lorsque $n > 3$, nous montrons ici qu'une hypersurface intégrale obtenue dans un 3-plan générique Δ se prolonge de manière unique à un voisinage, dans $\mathbf{C}^n$, d'une petite polycouronne $\mathcal{C}_{R,r}$ de Δ de rayons R et r. Pour cela on prouve que, sous l'hypothèse de non-dicriticité, le feuilletage est équiréductible en chaque point de $\mathcal{C}_{R,r}$, ce qui implique l'extension de l'hypersurface intégrale par trivialité topologique. Maintenant, comme $n \geq 3$ on a $H^1(\mathcal{C}_{R,r}; \mathcal{O}^*_{\mathbf{C}^3}) = 1$, et l'hypersurface obtenue admet une équation globale dans $\mathcal{C}_{R,r}$; par le théorème de Hartogs, celle-ci se prolonge à un polydisque en 0.

La condition de dicriticité est analysée et précisée ici. Nous en donnons plusieurs caractérisations équivalentes à partir

1. de suites d'éclatements ,
2. de l'existence d'infinités de courbes intégrales tracées sur des 2-surfaces.

Ces conditions de dicriticité complètent les conditions (plus techniques) données dans [9] [10].

Le problème de l'existence d'ensembles analytiques intégraux se pose pour des ensembles analytiques de codimension 1, mais aussi pour les feuilletages de codimension quelconque définis sur des ensembles éventuellement singuliers. Dans ces deux derniers cas, Gómez-Mont, Luengo [19] et Camacho [4] ont fourni respectivement des contre-exemples à l'existence en toute généralité d'ensembles analytiques intégraux. Actuellement il semble difficile d'aller plus loin sur ce problème en l'absence d'un théorème général de réduction des singularités (même si, pour les champs de vecteurs, on dispose de résultats partiels [6] [7]).

1. Equiréduction non dicritique.

1.1. Dicriticité générique.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe singulier de codimension un sur une variété analytique X de dimension n. Considérons une composante irréductible de codimension deux S du lieu singulier $\mathrm{Sing}\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$. Si $S = S_{\mathrm{sing}} \cup S_{\mathrm{reg}}$ est la décomposition de S en points réguliers et points singuliers, notons $U = X - S_{\mathrm{sing}}$ et soit $\pi : X' \longrightarrow U$ l'éclatement de U de centre S_{reg}. Notons $\mathcal{F}'$ le transformé strict de $\mathcal{F}$ par π.

On dira que $\mathcal{F}$ est *génériquement* 1-*dicritique* en S si $\pi^{-1}(S_{\text{reg}})$ n'est pas une hypersurface intégrale de $\mathcal{F}'$. Si $N \geq 2$, on dira que $\mathcal{F}$ est *génériquement* N-*dicritique* s'il existe une composante irréductible S' de $\text{Sing}\mathcal{F}'$ telle que

- $\pi(S') = S_{\text{reg}}$.
- $\mathcal{F}'$ est génériquement $(N-1)$-dicritique en S'.

(La première condition implique que la codimension de S' est deux).

DÉFINITION 1. — *Le feuilletage $\mathcal{F}$ est génériquement dicritique en S s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\mathcal{F}$ soit génériquement N-dicritique en S.*

Remarque 1. — Si V est un ouvert de X et S^* est une composante irréductible de $V \cap S$, alors $\mathcal{F}$ est génériquement dicritique en S si et seulement si $\mathcal{F}|_V$ est génériquement dicritique en S^*. (C'est une conséquence de la propriété universelle de l'éclatement [20].)

1.2. Suite d'equiréduction.

Dans la situation précédente, notons

$$X_0 = X;\ D_0 = \emptyset;\ \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$$
$$S_0 = \{P \in S;\ \text{Sing}\mathcal{F} \text{ est lisse en } P\}$$
$$T_0 = S - S_0;\ U_0 = X_0 - (\text{Sing}\mathcal{F} - S_0)\,.$$

Soit $\pi_1 : X_1 \to U_0$ l'éclatement de U_0 de centre S_0. On définit par induction la *suite $\mathcal{E}$ d'équiréduction*

$$\mathcal{E} = \{X_i, D_i, \mathcal{F}_i, S_i, T_i, U_i, \pi_{i+1}\}_{i=0,1,\ldots}$$

par les propriétés suivantes :

1. $\pi_i : X_i \to U_{i-1}$ est l'éclatement de centre S_{i-1}.
2. $D_i = \pi_i^{-1}\left((D_{i-1} \cap U_{i-1}) \cup S_{i-1}\right)$.
3. $\mathcal{F}_i$ est le transformé strict de $\mathcal{F}_{i-1}|_{U_{i-1}}$ par π_i.
4. S_i est l'ensemble des points $P \in \text{Sing}\mathcal{F}_i$ tels que :
   (a) $\text{Sing}\mathcal{F}_i$ est lisse et à croisements normaux avec D_i en P (dans le sens de [11]).
   (b) Le morphisme $\text{Sing}\mathcal{F}_i \to S_{i-1}$ est un isomorphisme local en P.

5. $T_i = \mathrm{Sing}\mathcal{F}_i - S_i$.
6. $U_i = X_i - T_i$.

(Si $S_i = \emptyset$, on convient que π_{i+1} est l'identité.)

Soit $b_i : X_i \to X$ le morphisme induit par la composition des éclatements π_j et des inclusions $U_j \subset X_j$. L'ensemble T des *points de non équiréduction le long de S* est défini par

$$T = \bigcup_{i=0}^{\infty} b_i(T_i) \subset S.$$

Dans ce paragraphe montrons le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas génériquement dicritique en S, alors :*

1. *L'ensemble T des points de non équiréduction le long de S est un fermé analytique propre de S.*
2. *Si $P \in S - T$ et (Γ, P) est un germe de courbe intégrale de $\mathcal{F}$ non contenu dans (S, P), alors il existe un unique germe (H, P) d'hypersurface intégrale de $\mathcal{F}$ tel que $(H, P) \supset (\Gamma, P)$.*

Nous obtiendrons la démonstration de ce Théorème à partir de la "désingularisation générique" le long de S.

Remarque 2. — Par des techniques de type équisingularité, Kabila [24] [25] prouve une version de ce théorème où la condition "génériquement dicritique" est remplacée par une condition géométrique (n'avoir qu'un nombre fini de feuilles qui adhèrent au lieu singulier le long de courbes analytiques).

1.3. Singularités simples de type dimensionnel deux.

Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage singulier de codimension un sur une variété analytique Z et soit $E \subset Z$ un diviseur à croisements normaux tel que chaque composante irréductible de E soit une hypersurface intégrale de $\mathcal{G}$. En tout point $P \in Z$ il existe un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ centré en P, tel que le diviseur E soit donné localement par

$$E = \left(\prod_{i \in A} x_i = 0\right)$$

pour un certain ensemble $A \subset \{1,\dots,n\}$. Si Ω est un générateur local de $\mathcal{G}$ en P, nous pouvons écrire

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i = \left(\prod_{i\in A} x_i\right)\left(\sum_{i\in A} a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i\notin A} a_i dx_i\right)$$

où $f_i, a_i \in \mathcal{O}_{X,P}$. On définit les invariants semi-continus suivants (cf. [11] [12]) :

1. *L'ordre :* $\nu(\mathcal{G}; P) = \min(\nu_P(f_i); i = 1,\dots,n)$.
2. *L'ordre adapté :* $\nu(\mathcal{G}, E; P) = \min(\nu_P(a_i); i = 1,\dots,n)$.
3. *La multiplicité de* E : $e(E,P) = \#A$.

où ν_P désigne la valuation de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,P}$. L'ensemble $K(\mathcal{G})$ donné localement par

$$K(\mathcal{G}) = \mathrm{Sing}\mathcal{G} \cap \{Q;\ d\Omega(Q) = 0\}$$

est un fermé analytique de $\mathrm{Sing}\mathcal{G}$ (en fait, aux points de $\mathrm{Sing}\mathcal{G} - K(\mathcal{G})$, d'après un résultat de Kupka [26], le feuilletage est un cylindre analytique sur un feuilletage de $(\mathbb{C}^2, 0)$).

DÉFINITION 2. — *Dans la situation précédente, nous dirons que P est une singularité pré-simple de type dimensionnel deux pour $(Z, E, \mathcal{G})$ lorsque les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $1 \leq e(E,P) \leq 2$.
2. $\nu(\mathcal{G}; P) = 1$.
3. $e(E,P) + \nu(\mathcal{G}, E; P) \leq 2$.
4. *Si* $\nu(\mathcal{G}, E; P) = 1$, *alors* $P \notin K(\mathcal{G})$.

Remarques 3. — 1. L'ensemble des points de $\mathrm{Sing}\mathcal{G}$ qui ne sont pas pré-simples de type dimensionnel deux est un fermé analytique de $\mathrm{Sing}\mathcal{G}$.

2. Pour le cas $n = 3$, les singularités pré-simples de type dimensionnel deux sont un cas particulier des singularités pré-simples étudiées dans [12].

3. Si $n = 2$, les singularités pré-simples de type dimensionnel deux sont exactement les singularités pré-simples décrites dans [12] : Le champ de vecteurs définissant le feuilletage en P a une partie linéaire non nilpotente (i.e., possède au moins une valeur propre non-nulle).

Supposons que $Z = (\mathbb{C}^2, 0)$ et que l'origine soit pré-simple pour $(Z, E, \mathcal{G})$. Considérons un morphisme lisse

$$r : (Z', P') \to (\mathbb{C}^2, 0).$$

Le point P' est alors une singularité pré-simple de type dimensionnel deux pour

$$\left(Z', r^{-1}(E), r^*\mathcal{G}\right).$$

Notons en particulier que $\mathrm{Sing}(r^*\mathcal{G}) = r^{-1}(0)$ et que cet ensemble est lisse et à croisements normaux avec $r^{-1}(E)$. La réciproque est vraie, comme l'indique la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit P une singularité pré-simple de type dimensionnel deux pour $(Z, E, \mathcal{G})$; alors le germe $(\mathrm{Sing}\mathcal{G}, P)$ est lisse, de codimension deux et contenu dans chaque composante irréductible de E qui passe par P. Soit de plus $i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (Z, P)$ une immersion transverse à $\mathrm{Sing}\mathcal{G}$ et Ω un générateur de $\mathcal{G}_P$, alors :*

1. $\mathrm{Sing}(i^*\Omega) = \{0\}$.
2. *L'origine est pré-simple pour* $\left((\mathbb{C}^2, 0), i^{-1}(E), i^*\mathcal{G}\right)$.
3. *Il existe une rétraction lisse $r : (Z, P) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ telle que $\mathcal{G} = r^*(i^*\mathcal{G})$ et $E = r^{-1}(i^{-1}(E))$.*

Démonstration. — Il suffit de trouver $n-2$ champs de vecteurs $\mathcal{X}_i$, $i = 3, \ldots, n$ non singuliers, indépendants en P et tangents à $\mathcal{G}$. Leurs intégrations successives trivialisent l'espace de la façon désirée ([27], lemme 1.15). Les champs $\mathcal{X}_i$ sont donnés soit par le phénomène de Kupka, soit explicitement, lorsque les deux valeurs propres sont non nulles, en exprimant que le lieu singulier est réduit de dimension exactement deux; pour plus de détails, cf. [15], ou[24]. □

Remarque 4. — On en déduit d'une part, que si P est une singularité pré-simple de type dimensionnel deux pour $(Z, E, \mathcal{G}))$ et si $i, j : (\mathbb{C}^2, 0) \to (Z, P)$ sont deux immersions transverses à $\mathrm{Sing}\mathcal{G}$, alors les données

$$\left((\mathbb{C}^2, 0), i^{-1}(E), i^*\mathcal{G}\right) \text{ et } \left((\mathbb{C}^2, 0), j^{-1}(E), j^*\mathcal{G}\right)$$

sont isomorphes; ainsi les rapports des valeurs propres

$$\Lambda(\mathcal{G}; P) = \left\{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\} \subset \mathbb{C} \cup \infty$$

d'un champ de vecteurs définissant $i^*\mathcal{G}$ ne dépendent pas de i. D'autre part, l'ensemble $\Lambda(\mathcal{G}; P)$ est localement constant le long de l'ensemble Γ des points $P \in \mathrm{Sing}\mathcal{G}$ pré-simples de type dimensionnel deux pour $(Z, E, \mathcal{G})$.

DÉFINITION 3. — *Nous dirons que $P \in \mathrm{Sing}\mathcal{G}$ est une singularité simple de type dimensionnel deux pour $(Z, E, \mathcal{G})$ si P est pré-simple de* *type dimensionnel deux et si de plus on a*

$$\Lambda(\mathcal{G}; P) \not\subset \mathbf{Q}_+.$$

($\mathbf{Q}_+$ = *rationnels strictement positifs). Nous noterons* $\mathrm{Sing}^*(\mathcal{G}, E)$ *l'ensemble des points* $P \in \mathrm{Sing}\mathcal{G}$ *qui ne sont pas simples de type dimensionnel deux pour* $(Z, E, \mathcal{G})$.

Remarque 5. — L'ensemble $\mathrm{Sing}^*(\mathcal{G}, E)$ est un fermé analytique. En effet, cela est vrai pour les singularités pré-simples de type dimensionnel deux et $\Lambda(\mathcal{G}; P)$ est localement constant en ces points.

PROPOSITION 2. — *Soient* (Z, E, P), $P \in \mathrm{Sing}\mathcal{G}$ *et* Ω *un générateur local de* $\mathcal{G}$ *avec* $e(E, P) \leq 2$. *Soit* $i : (\mathbf{C}^2, 0) \to (Z, P)$ *une immersion transverse à* E *telle que* $\mathrm{Sing}(i^*\Omega) = \{0\}$. *Supposons que l'origine est une singularité simple pour*

$$\left((\mathbf{C}^2, 0), i^{-1}(E), i^*\mathcal{G}\right),$$

alors P *est une singularité simple de type dimensionnel deux pour* $(Z, E, \mathcal{G})$.

Démonstration. — Visiblement $\mathrm{Sing}(\Omega)$ est lisse de dimension deux. Ainsi, lorsque les deux valeurs propres sont non nulles, les champs trivialisant se construisent directement. Sinon $d\Omega(0)$ est non nul et le feuilletage est trivial le long du lieu singulier. (cf, [27], lemme 1.1.5, [15], ou [24]).)□

PROPOSITION 3. — *Supposons que* $\mathrm{Sing}^*(\mathcal{G}, E) = \emptyset$ *et soit* $\pi : Z' \to Z$ *l'éclatement de centre* $\mathrm{Sing}\mathcal{G}$. *Soit* $E' = \pi^{-1}(E \cup \mathrm{Sing}\mathcal{G})$ *et soit* $\mathcal{G}'$ *le transformé strict de* $\mathcal{G}$ *par* π. *Alors, on a*

1. $\mathrm{Sing}^*(\mathcal{G}', E') = \emptyset$.
2. *Le morphisme* $\mathrm{Sing}\mathcal{G}' \to \mathrm{Sing}\mathcal{G}$ *est un isomorphisme local.*

Démonstration. — Les singularités simples de type dimensionnel deux forment localement des cylindres analytiques sur des singularités simples en dimension deux (Propositions 1 et 2). Il suffit donc de remarquer que les singularités simples en dimension deux ne produisent que des singularités simples par éclatement (cf. [30]). □

1.4. Désingularisation générique.

Considérons maintenant la situation de 1.1. et 1.2..

THÉORÈME 2. — *Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas génériquement dicritique en S. Il existe alors une étape $M \geq 0$ de la suite $\mathcal{E}$ d'équiréduction telle que*

$$\text{Sing}^* (\mathcal{F}_i, D_i) = \emptyset, \text{ pour tout } i \geq M.$$

Démonstration. — Voir Appendice. □

COROLLAIRE 1. — *Si $j \geq M$, alors $T_j = \emptyset$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la Proposition 3. □

COROLLAIRE 2. — *L'ensemble T des points de non S-équiréduction est un fermé analytique de S tel que $T \neq S$.*

Démonstration. — Par le Corollaire 1 nous avons

$$T = \bigcup_{i=0}^{M} b_i (T_i) .$$

Il suffit de montrer que le morphisme b_i peut être remplacé par un morphisme propre

$$\widetilde{b}_i : \widetilde{X}_i \to X$$

de telle façon que

$$T = \bigcup_{i=0}^{M} \widetilde{b}_i \left(\widetilde{T}_i\right),$$

où les $\widetilde{T}_i$ sont des fermés analytiques de $\widetilde{X}_i$. Pour cela on remplace l'inclusion

$$U_j \subset X_j$$

par le morphisme propre $X'_j \to X_j$ donné par la désingularisation à la Hironaka [20] de Sing$\mathcal{F}_i$. Une définition convenable des $\widetilde{T}_i$ permet alors de conclure que T est un fermé analytique de S. Le fait que $T \neq S$ est une conséquence des propriétés suivantes :

1. Le morphisme Sing$\mathcal{F}_i \to S_{i-1}$ est un isomorphisme local au-dessus d'un ouvert dense de S_{i-1} (par des considérations de dimension).
2. Le fermé Sing$\mathcal{F}_i$ est à croisements normaux avec D_i au-dessus d'un ouvert dense de S_{i-1}.

Ceci achève la démonstration. □

1.5. Fin de la démonstration du Théorème 1.

Soient P un point de $S-T$ et (Γ, P) un germe de courbe irréductible intégrale de $\mathcal{F}$ tel que $(\Gamma, P) \not\subset (S, P)$. Comme T est fermé, la suite d'équiréduction $\mathcal{E}$ se spécialise en une suite d'éclatements de centres fermés (jusqu'au niveau M) :

$$(X, P) = X_0' \overset{\pi_1'}{\leftarrow} X_1' \ldots X_{M-1}' \overset{\pi_M'}{\leftarrow} X_M'$$

telle que

$$\operatorname{Sing}^* (\mathcal{F}_M', D_M') = \emptyset.$$

De plus le morphisme

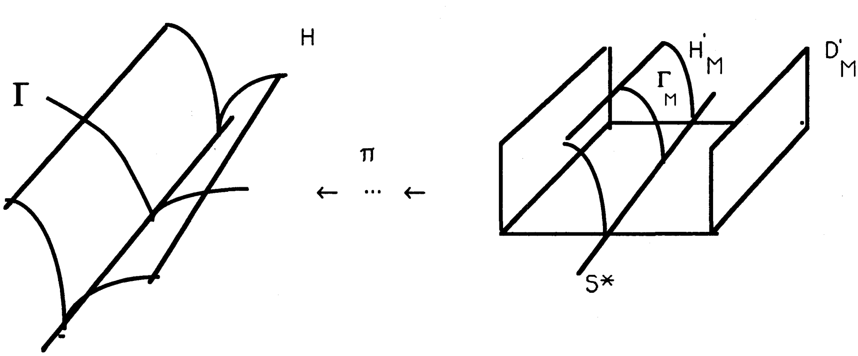
$$\operatorname{Sing}\mathcal{F}_M' \to (\operatorname{Sing}\mathcal{F}, P) = (S, P)$$

est un isomorphisme local.

Le transformé strict (Γ_M, Q) de (Γ, P) coupe exactement une composante connexe S^* de $\operatorname{Sing}\mathcal{F}_M'$ en un point Q. Comme Q est une singularité simple de type dimensionnel deux, et que $(\Gamma_M, Q) \not\subset D_M'$, on a $e\,(D_M', S^*) = 1$. Quitte à effectuer des éclatements supplémentaires , nous supposons que (Γ_M, Q) est lisse transverse à D_M'. Soit (Δ, Q) une surface lisse transverse en Q à S^* et à $\mathcal{F}_M'$, qui contienne (Γ_M, Q) et soit r une rétraction donnée par la Proposition 1. Notons $(H_M') = r^{-1}(\Gamma_M)$. Alors, l'hypersurface $(H, P) \subset (X, P)$ cherchée est donnée par

$$(H, P) = (\pi_1' \circ \ldots \circ \pi_M')\,(H_M')\,.$$

La figure suivante illustre cette situation



Remarques 6. — 1. $(H, P) \supset (S, P)$.

2. L'hypersurface (H, P) est équisingulière le long de S.

2. Dicriticité.

2.1. Dicriticité en un point.

La dicriticité d'un feuilletage singulier de codimension un a été étudiée dans [9] [10]. Nous en donnons ici d'autres caractérisations, moins techniques et qui élargissent celles de [9] [10].

Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage holomorphe de codimension un dans $(\mathbf{C}^n, 0)$. Considérons les propriétés suivantes :

I) Il existe une suite finie d'éclatements

$$X_0 = (\mathbf{C}^n, 0) \xleftarrow{\pi_1} X_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_N} X_N$$

dont les centres sont des variétés intégrales lisses des transformés stricts $\mathcal{F}_i$ de $\mathcal{F}$ (éventuellement $\subset \operatorname{Sing}\mathcal{F}_i$), telle que le diviseur exceptionnel du dernier morphisme π_N ne soit pas une hypersurface intégrale $\mathcal{F}_N$.

II) Même propriété que I avec des centres de dimension inférieure ou égale à un.

III) Même propriété que I avec des centres permis au sens de [11].

IV) Même propriété que II avec des centres permis au sens de [11].

V) Il existe un germe de surface irréductible $(Z, 0) \subset (\mathbf{C}^n, 0)$ qui n'est pas une surface intégrale de $\mathcal{F}$ et une suite $\{(\Gamma_i, P_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$ de germes distincts de courbes intégrales de $\mathcal{F}$, contenus dans Z, tels que

a) $P_i \in \operatorname{Sing}\mathcal{F}$ et $\operatorname{Lim} P_i = 0$.

b) $(\Gamma_{P_i}, P_i) \neq (\operatorname{Sing}\mathcal{F}, P_i)$.

Remarque 7. — Lorsque la condition V est satisfaite, quitte à extraire une sous-suite, l'une des deux assertions suivantes est, de plus, réalisée :

V1 . Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $P_i = 0$.

V2 . Il existe un germe de courbe $(Y, 0) \subset (Z, 0) \cap \operatorname{Sing}\mathcal{F}$ telle que $P_i \in (Y - \{0\})$, $i \in \mathbf{N}$.

Remarque 8. — On pourrait penser que la propriété V-2 implique la propriété V-1, éventuellement avec une autre surface. L'exemple suivant, suggéré par D. Cerveau, montre qu'il n'en est rien : $\mathcal{F}$ est localement donné par

$$\omega = xyz\left(\lambda\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}\right)$$

avec $\lambda \notin \mathbf{Q}$; visiblement $\mathcal{F}$ satisfait à V-2 pour $Y = (y = z = 0)$, mais pas à V-1, car tout germe de courbe intégrale à l'origine est contenu dans $(xyz = 0)$.

Notre but est de prouver l'équivalence des propriétés I, II, III, IV et V. Nous utiliserons pour cela un résultat de "désingularisation d'une surface conditionnée" par un feuilletage singulier. On trouvera dans [10] un énoncé de ce type, mais moins général que celui-ci. En appendice, nous donnons une idée de sa preuve; pour une démonstration détaillée nous renvoyons le lecteur à [29].

THÉORÈME 3. — *Soient $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage holomorphe de codimension un dans* $(\mathbf{C}^n, 0)$ *et* $(Z, 0) \subset (\mathbf{C}^n, 0)$ *un germe de surface irréductible non intégrale de $\mathcal{F}$. Alors, il existe une suite finie d'éclatements*

$$X_0 = (\mathbf{C}^n, 0) \overset{\pi_1}{\leftarrow} X_1 \overset{\pi_2}{\leftarrow} \dots \overset{\pi_M}{\leftarrow} X_M$$

telle qu'à chaque étape, le centre de π_i soit une variété lisse intégrale du transformé strict $\mathcal{F}_i$ de $\mathcal{F}$ (éventuellement $\subset$ $\mathrm{Sing}\mathcal{F}_i$*), soit contenu dans le lieu singulier de la transformée stricte Z_i de Z et soit simultanément permis pour $\mathcal{F}_i$ et pour Z_i, et telle que, de plus à la dernière étape on ait*

$$\mathrm{Sing}\mathcal{F}_M \cap \mathrm{Sing}Z_M = \emptyset.$$

THÉORÈME 4. — *Les propriétés* I, II, III, IV *et* V *sont équivalentes.*

Démonstration. — On a trivialement

$$\mathrm{IV} \Rightarrow \mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I}$$
$$\mathrm{IV} \Rightarrow \mathrm{III} \Rightarrow \mathrm{I}$$

Il suffit de montrer que I $\Rightarrow$ V et que V $\Rightarrow$ IV.

I $\Rightarrow$ V. (On utilise ici un argument de [9]). On sait que X_N est un fermé analytique de

$$\mathbf{P}^m \times (\mathbf{C}^n, 0)$$

pour certain indice m. Soit $E \subset X_N$ le diviseur exceptionnel du dernier éclatement π_N. On sait que E est génériquement transverse à $\mathcal{F}$. Nous pouvons choisir une sous-variété lisse H de $\mathbf{P}^m \times (\mathbf{C}^n, 0)$ de telle façon que pour une composante irréductible $\widetilde{Z}$ de $H \cap X_N$ on ait :

1. La dimension de $\widetilde{Z}$ est deux.

2. Une composante irréductible Y_N de $\widetilde{Z} \cap E$ est de dimension un.

3. Les transformés stricts $\mathcal{F}_N$ et $\widetilde{Z}$ sont génériquement non singuliers le long de Y_N.

4. La courbe Y_N (et donc $\widetilde{Z}$ le long de Y_N) est génériquement transverse à $\mathcal{F}_N$.

Maintenant, soit Z l'image de $\widetilde{Z}$ par le morphisme propre $X_N \to X_0$. Si l'image de Y_N est réduite à un point, on a la propriété V-1. Si l'image de Y_N est une courbe Y, alors pour un point générique de Y_N le morphisme $Y_N \to Y$ est un isomorphisme local et l'on a donc la propriété V-2.

V $\Rightarrow$ IV. On va raisonner par l'absurde, en supposant que la propriété IV est fausse.

Supposons d'abord la propriété V-2 vérifiée. Au bout d'un nombre fini d'éclatements de points on peut supposer que la courbe Y est un centre permis (voir "suites stationnaires" dans [11]). Eclatons maintenant l'espace ambiant avec centre Y. Comme le diviseur exceptionnel est une hypersurface intégrale (on a supposé IV fausse), il contient une courbe Y_1 qui satisfait à V-2. Itérons ce procédé. Par le théorème de résolution de Hironaka, on aboutit à désingulariser Z en un point générique de Y. Plus précisément, on arrive à la situation suivante :

1. Le transformé strict Z' de Z est génériquement lisse le long de la courbe Y' obtenue comme on vient de dire.

2. La surface Z' est transverse au diviseur exceptionnel E, qui est une hypersurface intégrale du feuilletage transformé $\mathcal{F}'$.

3. La restriction de $\mathcal{F}'$ à Z' est lisse et transverse à Y' aux points génériques de Y'.

Dans un système de coordonnées en un point générique de Y' nous avons les données suivantes :

1. Localement $Y' = Z' \cap E$.

2. $E = (x_1 = 0)$, $Z' = (x_3 = \ldots = x_n = 0)$.

3. Le feuilletage $\mathcal{F}'$ est localement engendré par
$$\omega = x_1\left(a_1\frac{dx_1}{x_1} + \sum_{i=2}^{n} a_i dx_i\right)$$
avec $a_i \in \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$, pour $i = 1,\ldots,n$, et $\mathrm{pgcd}(a_i; i = 1,\ldots,n) = 1$.

4. Le fait que la restriction de $\mathcal{F}'$ à Z' soit lisse et transverse à Y' nous permet de choisir les coordonnées de façon que
$$a_1(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = 0.$$
$$a_2(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = x_1^t, \text{ pour un } t \geq 0.$$

En éclatant à nouveau Y' on voit que l'invariant t diminue strictement. Contradiction.

Supposons maintenant la propriété V-1 satisfaite. Considérons la "désingularisation conditionnée" de Z par $\mathcal{F}$:
$$X_0 = (\mathbb{C}^n, 0) \xleftarrow{\pi_1} X_1 \xleftarrow{\pi_2} \ldots \xleftarrow{\pi_M} X_M.$$
Si la propriété V-2 est satisfaite pour un indice i, $0 \leq i \leq M$, on applique l'argument précédent. Sinon, la propriété V-1 est satisfaite en un point $P \in Z_M$. Bref, nous pouvons supposer sans perte de généralité que Z est non singulière à l'origine. A cause de V-1, la restriction $\mathcal{F}|_Z$ de $\mathcal{F}$ à Z est singulière à l'origine. De plus, $\mathcal{F}|_Z$ est un feuilletage dicritique, car il a une infinité de courbes intégrales à l'origine (cf. [9] [10] [15] [28]). En éclatant de manière répétée les points où V-1 est satisfaite, la réduction de singularités en dimension deux nous mène alors à la situation V-2 au bout d'un nombre fini d'étapes. □

DÉFINITION 4. — *On dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est "dicritique" à l'origine de* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *si les propriétés équivalentes* I, II, III, IV *et* V *sont satisfaites.*

2.2. Dicriticité générique implique dicriticité.

Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage de codimension un sur $(\mathbb{C}^n, 0)$ et soit S une composante de codimension deux du lieu singulier $\mathrm{Sing}\mathcal{F}$.

PROPOSITION 4. — *Si $\mathcal{F}$ est génériquement dicritique en S, alors $\mathcal{F}$ est dicritique à l'origine de* $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la caractérisation I de la dicriticité, en éclatant S après l'avoir rendue non singulière par le procédé de Hironaka. □

2.3. Dicriticité dans une section implique dicriticité.

Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage de codimension un sur $(\mathbb{C}^n, 0)$. Soit $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ une sous-variété non singulière, qui n'est pas une variété intégrale de $\mathcal{F}$. En particulier, nous pouvons considérer la restriction $\mathcal{F}|_V$ de $\mathcal{F}$ à V.

PROPOSITION 5. — *Si $\mathcal{F}|_V$ est dicritique à l'origine, alors $\mathcal{F}$ est dicritique à l'origine de $(\mathbb{C}^n, 0)$.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la caractérisation V de la dicriticité.

3. Existence et prolongements d'hypersurfaces intégrales.

3.1. Recollement d' hypersurfaces intégrales.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un sur le polydisque ouvert $K^n(0; \bar{R})$ de rayon $\bar{R}$ de $\mathbb{C}^n$. Nous supposons que $n \geq 3$. Etant donné deux nombres réels R, r, $\bar{R} > R > r > 0$, on note

$$\mathcal{C}_{R,r} = K^3(0; R) - \overline{K^3(0; r)} \subset \mathbb{C}^3.$$

C'est la polycouronne de rayons R, r. Nous l'identifions à la même polycouronne plongée dans $\mathbb{C}^n$, c'est à dire

$$\mathcal{C}_{R,r} = \mathcal{C}_{R,r} \times \{\underline{0}\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Soit $H_0 \subset \mathcal{C}_{R,r}$ une hypersurface analytique fermée. Nous faisons l'hypothèse de recollement suivante :

Hypothèse de recollement. — Pour tout point $P \in H_0$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Il existe un unique germe $(H, P) \subset (\mathbb{C}^n, P)$ d'hypersurface intégrale de $\mathcal{F}$ tel que $(H, P) \supset (H_0, P)$ et minimale pour cette propriété.

2. $(H, P) \cap \left(\mathbb{C}^3 \times \{\underline{0}\}, P\right) = (H_0, P)$.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

LEMME 1 (de recollement). — *Sous cette hypothèse, il existe R', $R > R' > 0$, $\epsilon > 0$ et une hypersurface fermée H dans*

$$K(R'; \varepsilon) = K^3(0; R') \times K^{n-3}(0; \epsilon) \subset \mathbb{C}^n$$

intégrale de $\mathcal{F}$, qui contient $H_0 \cap K(R'; r')$.

On va appeler "propriété N" la propriété suivante, $N = 1, 2, \ldots$:

Propriété N. Il existe R', r', $V_1, \ldots, V_N$, $U_1, \ldots, U_N$ et $H_1, \ldots, H_N$ tels que $R > R' > r' > r$ et, pour $i = 1, \ldots, N$,

1. V_i et U_i sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$.
2. $\overline{V_i}$ est compact.
3. $V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$.
4. $H_i \subset U_i$ est une hypersurface fermée de U_i .
5. $H_i \cap \mathcal{C}_{R',r'} = H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'} \cap U_i$.
6. $H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'} \subset V_1 \cup \ldots \cup V_N$ et pour tout point $P \in H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'} \cap U_i$, le germe d'hypersurface défini par H_i en P coïncide avec celui donné par l'hypothèse de recollement.

LEMME 2. — *Il existe $N \geq 1$ tel que la "propriété N" soit satisfaite.*

Démonstration. — Par hypothèse, pour chaque point $P \in H_0$, il existe un ouvert $U_P \ni P$ et une hypersurface intégrale fermée $H_P \subset U_P$ tels que

$$H_P \cap \left(\mathbb{C}^3 \times \{\underline{0}\}\right) \cap U_P = H_0 \cap U_P.$$

En particulier, pour chaque point de $H_0 \cap U_P$, le germe de H_P en ce point coïncide avec celui de l'hypothèse. Prenons un ouvert V_P tel que $P \in V_P \subset \overline{V_P} \subset U_P$ avec $\overline{V_P}$ compact. Il est clair que

$$H_0 \subset \bigcup_{P \in H_0} V_P.$$

Fixons R', r' avec $R > R' > r' > r$. Alors

$$H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'} \subset H_0 \cap \overline{\mathcal{C}_{R',r'}} \subset \bigcup_{P \in H_0} V_P.$$

Par compacité, un nombre fini de V_P recouvrent $H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'}$. Les données correspondantes satisfont bien à la "propriété N". □

LEMME 3. — *Pour $N \geq 2$, si la "propriété N" est satisfaite, alors la "propriété $N-1$" est aussi satisfaite.*

Démonstration. — Soit P un point de $H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'}$. Notons

$$H^* = (H_1 \cap V_1) \cup (H_2 \cap V_2).$$

Alors il existe un ouvert $U'_P \ni P$ tel que $H^* \cap U'_P$ soit une hypersurface analytique fermée de U'_P. Plus précisément :

1. Si $P \in V_1 - \overline{V_2}$, alors on peut prendre $U'_P = V_1 - \overline{V_2}$ et $H^* \cap U'_P = H_1 \cap U'_P$.
2. Si $P \in V_1 \cap \overline{V_2}$, alors l'hypothèse de recollement implique que H_1 et H_2 ont même germe en P, donc on a une hypersurface dans un voisinage U'_P de P.

Soit V'_P avec $\overline{V'_P}$ compact tel que

$$P \in V'_P \subset \overline{V'_P} \subset U'_P.$$

Quitte à considérer $R' > R'' > r'' > r'$, par compacité, il y a un nombre fini de points $P_1, \ldots, P_k$ tels que

$$H_0 \cap \mathcal{C}_{R'',r''} \subset \left(V'_{P_1} \cup \ldots \cup V'_{P_k}\right) \cup V_3 \cup \ldots \cup V_N.$$

Notons alors

$$\begin{aligned} V'_2 &= V'_{P_1} \cup \ldots \cup V'_{P_k}. \\ U'_2 &= U'_{P_1} \cup \ldots \cup U'_{P_k}. \end{aligned}$$

On a

$$H^* \cap U'_2 = \left(H^* \cap U'_{P_1}\right) \cup \ldots \cup \left(H^* \cap U'_{P_k}\right)$$

et donc $H'_2 = H^* \cap U'_2$ est une hypersurface fermée de U'_2. Les données R'', r'', $V'_2, V_3 \ldots, V_N$ et $H'_2, H_3, \ldots, H_N$ montrent que la "propriété $N-1$" est vraie. □

COROLLAIRE 3. — *Il existe $R > R' > r' > r$, des ouverts $V \subset \overline{V} \subset U$, avec $\overline{V}$ compact, et une hypersurface fermée $H \subset U$ tels que :*

1. *$H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'} \subset V$.*
2. *$H \cap \mathcal{C}_{R',r'} = H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'}$ et le germe de H en chaque point de $H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'}$ est une hypersurface intégrale de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. — C'est la “propriété 1” . □

COROLLAIRE 4. — *Il existe $R > R' > r' > r$, des ouverts $V \subset \overline{V} \subset U$, avec $\overline{V}$ compact, et une hypersurface fermée $H \subset U$ tels que :*

1. $H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'} \subset V$.
2. *H est une hypersurface intégrale de $\mathcal{F}$.*
3. $H \cap \mathcal{C}_{R',r'} = H_0 \cap \mathcal{C}_{R',r'}$.

Démonstration. — Enlever les composantes irréductibles de l'hypersurface du corollaire précédent qui ne sont pas des hypersurfaces intégrales. □

COROLLAIRE 5. — *Il existe $R > R' > r' > r$, un ouvert $U^* \supset \mathcal{C}_{R',r'}$ et une hypersurface fermée $H^* \subset U^*$ qui est une hypersurface intégrale de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. — Soient $R > R' > r' > r$, $V \subset \overline{V} \subset U$ et $H \subset U$ donnés dans le corollaire précédent. Si $P \in \mathcal{C}_{R',r'} - H_0$, alors il existe un ouvert $W_P \ni P$ tel que $H \cap W_P = \emptyset$. En considérant $H^* = H$ et

$$U^* = U \cup \bigcup_{P \in \mathcal{C}_{R',r'} - H_0} W_P$$

on a le résultat. □

Maintenant, pour prouver le lemme 1, donnons-nous, grâce au Corollaire 5, une hypersurface fermée H intégrale de $\mathcal{F}$ dans

$$\mathcal{C}_{R',r'}(\varepsilon) = \mathcal{C}_{R',r'} \times \mathrm{K}^{n-3}(\varepsilon, 0).$$

Comme $H^1(\mathcal{C}_{R,r}; \mathcal{O}^*_{\mathbf{C}^n}) = 1$, l'hypersurface H admet une équation globale $f = 0$, $f \in \mathcal{O}(\mathcal{C}_{R',r'}(\varepsilon))$. Par le théorème de Hartogs, f s'étend au polydisque $K(R'; \varepsilon)$. Pour des résultats d'extension plus précis, nous renvoyons le lecteur à [31].

3.2. Existence d'hypersurfaces intégrales.

L'hypothèse de recollement sera satisfaite dans le cas d'un feuilletage non dicritique ce qui nous permet de construire une hypersurface intégrale.

THÉORÈME 5. — *Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage holomorphe de codimension un dans $(\mathbb{C}^n, 0)$. Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas dicritique à l'origine. Alors il existe un germe $(H, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ d'hypersurface intégrale de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. — Choisissons un germe sous variété (lisse) de dimension 3 $(W, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$, transverse à $\mathcal{F}$ au sens de Mattei-Moussu [28]. Par des considérations de dimension, on peut supposer que W coupe les points de non-équiréduction tout au plus à l'origine (rappellons que le feuilletage n'est pas génériquement dicritique grâce à la Proposition 4, et donc on peut appliquer le Théorème 1). La restriction $\mathcal{F}|_W$ n'est pas dicritique d'après la Proposition 5 et par le théorème d'existence de [12] $\mathcal{F}|_W$ possède une hypersurface intégrale $(H', 0) \subset (W, 0)$. Considérons

$$\mathcal{C}_{R,r} \subset W$$

et notons

$$H_0 = H' \cap \mathcal{C}_{R,r}$$

grâce au Théorème 1, l'hypothèse de recollement est satisfaite. On applique les résultats de la section précédente et on trouve une extension de l'hypersurface intégrale H_0

$$H \subset K^3(0; R') \times K^{n-3}(0; \epsilon).$$

Nécessairement, H est aussi une extension de H' et donc $0 \in H$. Ceci détermine le germe $(H, 0)$ d'hypersurface intégrale cherché. □

4. Appendice.

A.1. Démonstration du Théorème 2.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe singulier de codimension un sur une variété analytique X. On suppose que $S := \mathrm{Sing}\mathcal{F}$ est lisse, connexe et de codimension deux. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de centre S et soit $\tilde{\mathcal{F}}$ le transformé strict de $\mathcal{F}$; il s'obtient en divisant $\pi^*\mathcal{F}$ par une puissance $\mathcal{J}_E^m$ de l'idéal du diviseur exceptionnel E. L'entier m est noté $\mathrm{mult}_\pi\mathcal{F}$.

Soit $\sigma : (\mathbb{C}^2, 0) \to (X, P)$ une section plane transverse à S en P. Elle est dite *transverse à* $\mathcal{F}$ si $\mathrm{Sing}(\sigma^*\mathcal{F}) = \{0\}$. D'après [28] cette condition est générique en σ.

Notons $\mathcal{G} = \sigma^*\mathcal{F}$. On dira qu'il y a *équidivision* si

$$\mathrm{mult}_\pi \mathcal{F} = \mathrm{mult}_\rho \mathcal{G}$$

où ρ est l'éclatement de l'origine dans $(\mathbb{C}^2, 0)$. Soit $\widetilde{\sigma}$ le transformé strict de l'immersion σ par π. S'il y a équidivision, le transformé strict $\widetilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ par ρ est $\widetilde{\sigma}^*\widetilde{\mathcal{F}}$. En particulier, $\widetilde{\sigma}$ est alors transverse à $\widetilde{\mathcal{F}}$.

LEMME 4 (d'équidivision). — *On suppose que $\mathcal{F}$ n'est pas génériquement 1-dicritique en S. Il existe alors un ouvert analytique dense U de S tel que pour toute section plane σ transverse à $\mathcal{F}$ en un point $P \in U$:*

1. *Il y ait équidivision.*
2. *Le feuilletage $\sigma^*\mathcal{F}$ ne soit pas génériquement 1-dicritique à l'origine.*
3. *L'immersion $\widetilde{\sigma}$ soit transverse à $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. — La partie 3 découle des remarques qui précédent. L'idéal de S définit une graduation sur les formes différentielles. La non 1-dicriticité générique entraîne que le degré de la forme initiale d'un générateur ω de $\mathcal{F}$ est exactement $\mathrm{mult}_\pi(\mathcal{F})$. La réciproque est vraie en dimension 2. Les parties 1 et 2 découlent alors de l'observation qu'en un point générique, le degré de la forme initiale de ω est préservé par image réciproque sur toute section transverse. □

Une application réitérée du lemme précédent permet de montrer qu'en un point générique P de S on peut "suivre" la suite d'équiréduction sur une section 2-plane Δ transverse au feuilletage : la suite d'éclatements induite sur Δ est exactement la réduction des singularités (canonique en dimension deux [30]) de la restriction de $\mathcal{F}$ à Δ. Ainsi, au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient des singularités simples sur l'éclaté strict $\tilde{\Delta}$ de Δ. En chaque point $P' \in \tilde{\Delta}$ l'éclaté strict $\tilde{\mathcal{F}}$ est donc un cylindre sur sa restriction à $\tilde{\Delta}$. On en conclut qu'au voisinage de P, les singularités sont encore simples de type dimensionnel deux.

En tout point P de S où $\mathcal{F}$ est équiréductible, la conclusion du Théorème 2 est vérifiée pour la restriction de $\mathcal{F}$ à un voisinage U_P de P. Considérons la fonction $P \mapsto M(P)$, où $M(P)$ désigne le nombre minimum d'étapes nécessaires à l'équiréduction. Elle est visiblement localement constante, d'où la conclusion.

A.2. Démonstration du Théorème 3.

Pour $n = 3$, le résultat a été démontré dans [9], page 85. Nous indiquons seulement ici comment cette preuve se généralise en dimension quelconque et renvoyons le lecteur à J. Sauloy [29] pour une démonstration détaillée.

Les invariants utilisés en dimension trois sont :

1. La multiplicité de la surface $\nu_P(Z)$.
2. L'ordre adapté du feuilletage $\nu(\mathcal{F}, E; P)$.
3. La multiplicité adaptée du feuilletage $\nu(\mathcal{F}, E; P)$.
4. La dimension de l'espace tangent de Hironaka $T_P Z$.
5. Les invariants issus du polygone $\Delta_{Z,\mathcal{F}}$ obtenu à partir de la réunion du polygone caractéristique de Hironaka [16] Δ_Z et du polygone caractéristique du feuilletage $\Delta_{\mathcal{F}}$.

Pour le cas $n \geq 3$ on remplace la multiplicité $\nu_P(Z)$ de la surface par la fonction de Hilbert-Samuel, et on étend les définitions des autres invariants comme suit :

1. L'ordre adapté du feuilletage $\nu(\mathcal{F}, E; P)$ conserve la même définition [8] [11].
2. Idem pour la multiplicité adaptée du feuilletage.
3. La dimension de l'espace tangent de Hironaka $T_P Z$ est maintenant définie comme dans [20].
4. Le polygone caractéristique de Hironaka Δ_Z est défini dans [22].

Le polygone caractéristique du feuilletage $\Delta_{\mathcal{F}}$ est défini comme l'enveloppe positivement convexe de l'union des polygones

$$\Delta_f^m = \mathrm{Conv}^+ \left\{ \left(\frac{i}{m - |K|}, \frac{j}{m - |K|}, \right) ; f_{ijK} \neq 0, m - |K| > 0 \right\}$$

où $f = \sum f_{ijK} x^i y^j \underline{z}^K$ parcourt l'ensemble des coefficients adaptés [8] [11] et m est la mutiplicité adaptée. Enfin, le polygone $\Delta_{Z,\mathcal{F}}$ est construit par le même procédé qu'auparavant.

BIBLIOGRAPHY

[1] J.M. AROCA, H. HIRONAKA, J.L. VICENTE, The theory of the maximal contact, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, Madrid, 29 (1975).

[2] J.M. AROCA, H. HIRONAKA, J.L. VICENTE, Desingularization theorems, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, Madrid, 30 (1975).

[3] C.A. BRIOT, J.C. BOUQUET, Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles, J. Ec. Polytechnique, 36 (1856), 133-198.

[4] C. CAMACHO, Quadratic forms and the separatrix theorem for singular surfaces, preprint IMPA, Rio de Janeiro, Brésil.

[5] C. CAMACHO, P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. of Math., 115 (1982), 579-595.

[6] F. CANO, Desingularization strategies for three-dimensional vector fields, Lect. Notes in Math. 1259, Springer-Verlag, 1987.

[7] F. CANO, Local and global results on the desingularization of three-dimensional vector fields, Asterisque, 150-151 (1987),15-58.

[8] F. CANO, Réduction des singularités des feuilletages holomorphes, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 307, série I, (1988), 795-798.

[9] F. CANO, Dicriticalness of a singular foliation. Proceedings, México 1986, Holomorphic Dynamics (X. Gómez-Mont, J. Seade, A. Verjovski (Eds)), Lect. Notes in Math., 1345 (1988), 73-95.

[10] F. CANO, Foliaciones singulares dicríticas, Mem. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, serie Ciencias Exactas, t. XXIV (1989).

[11] F. CANO, Reduction of the singularities of non-dicritical singular foliations. Dimension three, Am. J. of Math., to appear.

[12] F. CANO, D. CERVEAU, Le problème de la séparatrice : une conséquence de la réduction des singularités des feuilletages, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 307, série I, (1988), 387-390.

[13] F. CANO, D. CERVEAU, Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices, Acta Mathematica, to appear, (1991).

[14] J. CANO, The Newton-Puiseux Method for finding solutions of a Pfaffian form, Preprint, Univ. Valladolid.

[15] D. CERVEAU, J.F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque, 97 (1982).

[16] V. COSSART, J. GIRAUD, U. ORBANZ, Resolution of Surface Singularities. Three lectures with an Appendix by H. Hironaka edited by U. Orbanz, Lect. Notes in Math., 1101, Springer-Verlag, 1984.

[17] H. DULAC, Recherche sur les fonctions définies par des équations différentielles, J. Ec. Polytechnique, 2,9 (1904), 1-125.

[18] H. DULAC, Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point singulier, Ann. Univ. Grenoble, t. XVII, (1905), 1-51.

[19] X. GÓMEZ-MONT, I. LUENGO, Germs of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^3$ without a separatrix, Invent. Math., en prensa.

[20] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characterictic zero, Ann. of Math., 79 (1964), 109-306.

[21] H. HIRONAKA, Introduction to the Theory of Infinitely Near Singular Points, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, Madrid, 28 (1975).

[22] H. HIRONAKA, Characteristic polyhedra of the singularities, J. Math. Kyoto Univ., 7,3 (1968).

[23] JOUANOLOU, Equations de Pfaff algébriques, Lect. Notes in Math., 708, Springer-Verlag (1979).

[24] A. KABILA, Formes intégrables à singularités lisses : Conditions de Whitney, équisingularité, μ-constant, Thèse, Univ. Dijon, (1983).

[25] A. KABILA, Formes intégrables à lieu singulier lisse, C. R. Acad. Sci. Paris, 298, I (1984), 11.

[26] I. KUPKA, Singularities of integrable Pfaffian forms, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 52 (1964), 1431-1432.

[27] J.F. MATTEI, Modules de feuilletages holomorphes singuliers : I équisingularité, Invent. Math., 103 (1991), 297-325.

[28] J.F. MATTEI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4, t. 13 (1980), 469-523.

[29] J. SAULOY, Réduction des singularités d'une surface conditionnées par un feuilletage, Prépubl. URA Topol. Géom. Univ. Toulouse 3 , en préparation.

[30] A. SEIDENBERG, Reduction of the singularities of the differential equation $Ady = Bdx$, Am. J. of Math., (1968), 248-269.

[31] SIU, Techniques of extension of analytic objects. Lect. Notes in Pure and Applied Math., vol. 8, M. Dekker Inc., New York, 1974.

[32] O. ZARISKI, Studies in equisingularity I, Am. J. of Math., 87 (1965), 507-536.

F. CANO,
Depto Algebra y Geometria
Fac. Ciencias
47005 Valladolid (Espagne)
&
J.-F. MATTEI,
Université Paul Sabatier,
Laboratoire de Topologie et Géométrie
URA CNRS 1408
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex (France).