

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NGUYEN HU'U DU'C

FRÉDÉRIC PHAM

Germes de configurations legendriennes stables et fonctions d'Airy-Weber généralisées

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 4 (1991), p. 905-936

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_905_0

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GERMES DE CONFIGURATIONS LEGENDRIENNES STABLES ET FONCTIONS D'AIRY-WEBER GÉNÉRALISÉES (*)

par NGUYÊN HU'U DU'Ç et F. PHAM

A la mémoire de Jean Martinet.

0. INTRODUCTION

0.0. Le modèle le plus simple *d'onde stationnaire de haute fréquence* est donné par la fonction d'onde

$$(0) \quad \psi(q) = a(q)e^{i\kappa S(q)}$$

où κ est le *nombre d'onde*, supposé *grand*, et a et S sont des fonctions pas trop rapidement variables des coordonnées d'espace $q = (q_1, \dots, q_n)$. Dans l'idéalisation non standard où κ est une constante *infiniment grande*, on peut prendre pour S une fonction différentiable standard, et pour a une fonction « S -continue », c.à.d. variant infiniment peu pour une variation infiniment petite de son argument.

(*) Ce travail a été fait lors de deux séjours du premier auteur à Nice, avec le soutien financier du CNRS.

Mots-clés : Onde de haute fréquence - Caustiques - Variété lagrangienne - (ou legendrienne) caractéristique - Principe de Huygens-Fresnel - Stabilité - Fonctions d'Airy - Fonctions cylindro-paraboliques de Weber - Modules micro-différentiels.

Classification A.M.S. : 53 - 35 - 33.

Regardée au voisinage d'un point q_0 avec une loupe de grossissement κ , une telle onde ressemble à une onde plane de vecteur d'onde $p_0 = \text{grad } S(q_0)$:

$$\begin{aligned} \psi(q) &\simeq a(q)e^{i\kappa[S(q_0) + p_0 \cdot (q - q_0)]} \\ &\simeq a_0 e^{ip_0 q} \quad \text{où} \quad q = \kappa(q - q_0), \quad a_0 = a(q_0)e^{i\kappa S(q_0)}. \end{aligned}$$

L'essentiel de l'information sur le comportement rapidement oscillant de ψ au voisinage de q_0 est donc donné par le *jet d'ordre 1 de S en q_0* (expression entre crochets dans l'exponentielle ci-dessus). Quand q_0 varie, on obtient ainsi une section du fibré

$$W = J^1(Q, \mathbb{R}) \rightarrow Q$$

des jets d'ordre 1 de fonctions sur Q (l'espace des q). L'image de cette section est une *sous-variété legendrienne* V de la variété de contact W : nous l'appellerons *variété (legendrienne) caractéristique de l'onde ψ* .

Si l'on travaille « à une phase près », comme c'est le cas en mécanique quantique, on peut oublier la valeur $S(q_0)$ de la phase pour n'en retenir que le gradient p_0 , ce qui conduit à remplacer la variété legendrienne V par sa projection sur $M = T^*Q$ (fibré cotangent à Q) ; on obtient ainsi une sous-variété *lagrangienne* $\Lambda \subset M$.

Dans tout ce qui précède S était à valeurs réelles. Dans le cas analytique, il peut être intéressant également de considérer des fonctions oscillantes à *phase complexe* : par exemple la phase $S = p_0 \cdot (q - q_0) + i(q - q_0)^2/2$ décrit un « paquet d'ondes » de vecteur d'onde p_0 , « infiniment concentré » autour de la position q_0 . La construction précédente donne alors une variété caractéristique (legendrienne ou lagrangienne) *complexe*. On notera que la *trace réelle* de la variété lagrangienne coïncide avec ce qu'Harthong ([Ha] chap. IV) appelle le *spectre dynamique* de l'onde, qui décrit sa localisation dans l'espace de phase M : p. ex. le paquet d'ondes ci-dessus a pour variété lagrangienne caractéristique

$$\Lambda = \{(p, q) \in M^{\mathbb{C}} \mid (p - p_0) = i(q - q_0)\},$$

dont la trace réelle se réduit au seul point (q_0, p_0) .

0.1. Le modèle simple 0.0 est bien adapté à la description locale des ondes de haute fréquence *en dehors des caustiques*, c.à.d. dans le cas où la variété caractéristique se projette *isomorphiquement* sur l'espace

de configuration Q . Plus généralement on sait aujourd'hui, à la suite des travaux de Maslov [Ma], Arnold [A1], Duistermaat [Du], etc., associer à presque tout germe de variété lagrangienne ou legendrienne lisse une classe de fonctions oscillantes généralisant (0). Sous des hypothèses génériques « à la Thom », ces fonctions fournissent des modèles universels pour les fonctions oscillantes au voisinage de la *caustique* (lieu de ramification dans Q de la variété lagrangienne).

Le but du présent article est d'étendre cette construction à des situations où la variété caractéristique est un germe *singulier*, du type introduit dans [DDP] sous le nom de « *configuration r-cubique régulière* ». Bien que singulières, ces situations peuvent elles aussi être *stables*, en ce sens que leur *variété legendrienne caractéristique n'admet aucune déformation* (legendrienne) *non triviale*. Cette propriété de stabilité de la variété caractéristique, qui se traduit au niveau des fonctions oscillantes correspondantes par la stabilité du module microdifférentiel qu'elles constituent, suggère que les fonctions spéciales associées doivent fréquemment avoir un rôle à jouer dans des problèmes concrets d'ondes de haute fréquence.

0.2. Une classe d'exemples est fournie par la diffraction d'une onde lumineuse à travers une ouverture percée dans un écran : d'après le principe de Huygens-Fresnel, précisé par Kirchhoff (cf. [BW] Chap. VIII), l'onde diffractée est donnée par une « intégrale de Kirchhoff-Fresnel » de la forme

$$\Psi(q) = \int_U a(q, z) e^{ik\varphi(q, z)} dz$$

où le domaine U d'intégration est l'ouverture percée dans l'écran, et la « phase » φ représente la distance optique du point q au point z . Une analyse microlocale de l'onde ψ permet de séparer les contributions locales des divers « points critiques » $z \in U$ (points où la phase est stationnaire par rapport à z). Un point critique intérieur à U donnera une contribution microlocalement équivalente à une onde plane monochromatique ; dans nos notations, cela correspond au cas $r = 0$ (une seule composante legendrienne lisse), cas désormais bien connu et modélisé par les « fonctions d'Airy généralisées », définies par des intégrales oscillantes ayant pour phase une déformation universelle de fonction à point critique isolé.

Un point critique du bord de U , et où ce bord est lisse, donnera une contribution microlocalement équivalente à une « intégrale de Fresnel » ([BW] § 8.7.2), variante oscillante de « l'intégrale d'erreur » des probabilistes : c'est le cas $r = 1$ ($2^r = 2$ composantes legendriennes lisses), modélisé par des fonctions que nous appelons « fonctions de Weber généralisées » d'exposant de monodromie $s = 0$, définies par des intégrales oscillantes ayant pour phase une déformation universelle de fonction sur une variété à bord (cf. [A2]).

Un point critique du bord où le bord présente un « coin » correspond au cas $r = 2$ ($2^r = 4$ composantes legendriennes lisses), modélisé par des fonctions de Weber généralisées d'exposants de monodromie $s_1 = s_2 = 0$: de façon générale nos « fonctions d'Airy-Weber généralisées » seront définies par une fonction de phase sur un germe de variété « r -réticulée » (version complexe d'une « variété à coins », dont le coin a r composantes), et par r « exposants de monodromie » $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{C}$ (tous nuls dans le cas qui nous occupe ici).

0.3. Un autre exemple intéressant est fourni par les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension au voisinage d'un « point de transition double », c.à.d. un zéro double de la fonction $E - V(q)$, où E désigne l'énergie et V la fonction « potentiel » ; le grand paramètre κ est dans ce cas l'inverse de la constante de Planck. Au voisinage d'un point de transition double la courbe lagrangienne $p^2 = E - V(q)$ présente un point double ordinaire, ce qui correspond à nouveau au cas $r = 1$; les solutions de l'équation de Schrödinger sont modélisées par des « fonctions de Weber » usuelles, dont l'exposant de monodromie n'est pas une constante standard mais est donné par un développement divergent (mais généralement réurgent) en puissances de κ^{-1} (cf. [Ph 5] [Ph 6] [Ah]).

Nous présentons au § 4 une généralisation multidimensionnelle de cet exemple, avec r exposants de monodromie s_1, \dots, s_r . Mathématiquement très naturelle, cette généralisation décrit une onde qui serait solution d'un système de n équations aux dérivées partielles en involution, dont la stabilité nous fait soupçonner qu'on doit pouvoir en trouver des exemples intéressants dans la nature : on pourrait par exemple étudier les solutions de l'équation de Schrödinger à 2 ou 3 dimensions, au voisinage d'un zéro de $E - V(q)$ qui est un extremum quadratique de la fonction V , celle-ci ne dépendant que de la distance à l'extremum (l'invariance par rotation permet d'exiger que les solutions soient

fonctions propres d'opérateurs de « moment angulaire », ce qui fournit les équations manquantes). Nous serions reconnaissants au lecteur de nous suggérer d'autres exemples.

0.4. On peut commenter ainsi la différence entre les exemples 0.2 et 0.3. Dans un problème « naturel » de diffraction d'une onde de haute fréquence (onde de lumière ou de matière), on doit résoudre une unique équation aux dérivées partielles avec grand paramètre (l'équation des ondes, ou l'équation de Schrödinger), ce qui n'impose à la variété caractéristique de l'onde qu'une seule contrainte *a priori*, celle d'être invariante par le « flot hamiltonien » de cette équation. D'où peuvent alors venir les contraintes supplémentaires qui conduiront à une configuration caractéristique du type étudié dans cet article ? Dans le cas 0.2 ce sont les *conditions initiales* du problème (la forme de l'ouverture dans l'écran) qui imposent la configuration caractéristique au voisinage de l'ouverture. Cette configuration caractéristique se propage sous l'action du flot hamiltonien, action qui est *triviale* (à une transformation de contact près) *si le champ hamiltonien est non singulier*, ce qui est le cas par exemple pour l'équation des ondes à indice de réfraction constant.

Dans le cas 0.3 une configuration caractéristique initiale très simple *acquiert de nouvelles singularités* sous l'action d'un flot hamiltonien dont le champ est *singulier*. Au lieu d'être inscrit d'avance dans les conditions initiales l'exposant de monodromie est déterminé par la dynamique, ce qui explique sa forme plus compliquée. Mais la complexité de la dynamique en dimension $n > 1$ fait soupçonner que *même la géométrie de la configuration caractéristique* puisse alors devenir plus compliquée que celle étudiée dans cet article.

0.5. La plupart des notions développées dans cet article figuraient déjà dans [DDP]. Mais le présent article reprend et améliore [DDP]

1° *en ce qui concerne la géométrie :*

par une discussion détaillée des relations entre les points de vue *lagrangien* et *legendrien*, ainsi que par une séparation nette entre les notions invariantes par toutes transformations canoniques ou de contact (§ 1) et celles qui font intervenir de surcroît la projection sur l'espace de configuration (§ 2) ; cette clarification conceptuelle nous fournira au § 3 un *théorème de stabilité* simple et général, au lieu de l'énoncé de [DDP] § 7.3, plus compliqué et de surcroît erroné (cf. [Du'c]) ;

2° en ce qui concerne l'analyse :

Alors que [DDP] prenait comme sujet l'étude des *modules microdifférentiels holonomes* associés à la situation géométrique considérée, le présent article (§ 3) s'intéresse en priorité aux *fonctions* associées. Ce changement de point de vue n'est pas innocent, car dans le cas (évoqué en 0.3) où les exposants de monodromie « ne sont pas des constantes standard » (c.à.d. dépendent du nombre d'onde κ) nos fonctions d'Airy-Weber généralisées *ne sont pas solutions d'un système holonome d'équations microdifférentielles dans les variables q, ξ* (q = variables d'espace, ξ = variable de phase, conjuguée de la variable de fréquence). En fait, la distinction entre les cas 0.2 et 0.3 nous conduira à distinguer deux types de systèmes microdifférentiels habitant respectivement dans la variété symplectique M et dans la variété de contact W , et dont les supports respectifs seront la configuration lagrangienne et la configuration legendrienne étudiée. Ce n'est donc pas seulement un souci de clarté conceptuelle qui inspire notre distinction entre les points de vue lagrangien et legendrien.

1. DÉFORMATIONS DE GERMES LAGRANGIENS ET LEGENDRIENS

Dans ce paragraphe nous oublions la projection sur l'espace de configuration pour ne retenir que la structure symplectique ou de contact.

1.0. Rappels de géométrie de contact (cf. Arnold [A3]).

Soit W un germe de variété analytique complexe de dimension $2n + 1$ muni d'une *forme de contact* α , c.à.d. d'une 1-forme « assez générale ». Cette donnée détermine dans W une « *structure de contact* » (consistant en la donnée du champ d'hyperplans $\text{Ker } \alpha$), et aussi un *feuilletage en « droites affines » (complexes) transverses au champ de contact* : les feuilles sont les trajectoires intégrales du champ de directions $\text{Ker } (d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha)$ (produit extérieur n fois), et ces feuilles sont munies d'une 1-forme partout différente de zéro (la restriction de α), qui permet de définir le groupe des « *translations des fibres* » (germes de difféomorphismes tangents aux feuilles et respectant α).

On notera $\varpi : W \rightarrow M \approx (\mathbb{C}^{2n}, 0)$ la projection sur la variété des feuilles. Étant invariante par translations des feuilles, la forme $d\alpha$ est l'image réciproque par ϖ d'une unique 2-forme sur M , dont l'opposée sera notée $\omega : d\alpha = -\varpi^*\omega$. La variété M est ainsi munie d'une *structure symplectique*, définie par la 2-forme ω . En coordonnées locales « de Darboux »,

$$\alpha = d\xi - \sum_i p_i dq_i \quad (\xi \text{ est une coordonnée affine sur les feuilles})$$

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i \quad (p, q \text{ sont des coordonnées symplectiques sur } M).$$

On remarquera que la donnée de $\varpi : W \rightarrow M$ et des structures symplectiques et de contact sur M et W détermine α sans ambiguïté : en effet la condition $d\alpha = -\varpi^*\omega$ détermine α à la différentielle d'une fonction près, et $\text{Ker}(\alpha + df) = \text{Ker} \alpha \Leftrightarrow df = \lambda\alpha \Rightarrow d\lambda \wedge \alpha + \lambda d\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ puisque $\alpha \wedge d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha \neq 0$.

Nous appellerons *automorphisme de contact* tout automorphisme de W conservant la forme α : c'est la définition des « bad people » selon Arnold ([A3] p. 9) ; elle revient à dire que l'automorphisme respecte la *structure de contact*, le *feuilletage* ϖ , et la *forme symplectique* ω : par passage au quotient par ϖ on obtient ainsi un *automorphisme symplectique* (transformation canonique) de M . Réciproquement tout changement de coordonnées symplectiques $(p, q) \mapsto (\hat{p}, \hat{q})$ de M se relève de façon unique dans W en un changement de coordonnées de Darboux $(p, q, \xi) \mapsto (\hat{p}, \hat{q}, \hat{\xi})$ défini par $\hat{\xi} = \xi - S(p, q)$, où S est la primitive nulle en 0 de la forme fermée $\sum p_i dq_i - \sum \hat{p}_i d\hat{q}_i$. Remarquons que ce changement de coordonnées agit sur la coordonnée ξ par translation.

Un germe de sous-ensemble analytique $V \subset W$ est dit *legendrien* s'il est de dimension pure n et si $\alpha|_V = 0$. Ce germe V ne peut alors pas contenir $\varpi^{-1}(0)$, de sorte que la projection $\varpi|_V$ est un morphisme *fini*, dont l'image définit un germe de sous-ensemble analytique *lagrangien*. $\Lambda = \varpi(V) \subset M$ (sous-ensemble de dimension pure n tel que $\omega|_\Lambda = 0$). Inversement, tout germe lagrangien $\Lambda \subset M$ est la projection d'un unique germe legendrien $V \subset W$: la fibre de $\varpi|_V$ au-dessus d'un point $a \in \Lambda$ consiste en un seul point \tilde{a} donné en coordonnées de Darboux par

$$\xi(\tilde{a}) = \int_0^a \sum p_i dq_i \quad (\text{intégrale sur un chemin de } \Lambda : \text{on remarquera que}$$

l'intégrand est une forme différentielle *fermée* sur Λ , et que Λ est simplement connexe, car homéomorphe à un cône comme tout germe d'ensemble analytique).

1.1. Déformations.

Nous allons maintenant considérer des « déformations » des objets précédents, avec pour « base » un germe de variété T .

Une déformation d'un germe k_0 d'automorphisme de contact est un germe d'automorphisme k_T de $W \times T$, de la forme $k_T(w,t) = (k_t(w),t)$, où les k_t sont des automorphismes de contact au sens précédent (c.à.d. respectant ϖ). Par passage au quotient par ϖ on en déduit une déformation de germe d'automorphisme symplectique, c.à.d. un germe d'automorphisme h_T de $M \times T$, de la forme $h_T(m,t) = (h_t(m),t)$, où les h_t sont des automorphismes symplectiques.

Mais contrairement à ce qui se passait avant déformation, il n'est plus vrai qu'une déformation d'automorphisme symplectique se relève en une *unique* déformation d'automorphisme de contact : une ambiguïté subsiste, qui est une famille (paramétrée par $t \in T$) de *translations des feuilles* de ϖ ; en effet si h_T est définie en coordonnées symplectiques par $\hat{p}(p,q,t)$, $\hat{q}(p,q,t)$, la forme $\Sigma p_i dq_i - \Sigma \hat{p}_i d\hat{q}_i$ n'est que « relativement fermée » (fermée à t constant), de sorte que sa primitive $S(p,q,t)$ n'est définie qu'à l'addition d'une fonction de t près (nulle pour $t = 0$).

Une « déformation legendrienne » (d'un germe legendrien $V \subset W$) est un germe d'ensemble analytique $V_T \subset W \times T$ plat au-dessus de T , à fibres V_t legendriennes, la fibre spéciale V_0 étant *réduite* et coïncidant avec V .

Toute déformation legendrienne V_T (d'un germe V) se projette par ϖ en une « déformation lagrangienne » Λ_T (du germe Λ associé à V), c.à.d. en un germe d'ensemble analytique $\Lambda_T \subset M \times T$ dont la projection sur T a des fibres Λ_t lagrangiennes, la fibre spéciale Λ_0 étant réduite et coïncidant avec Λ .

Mais une déformation lagrangienne Λ_T n'est pas toujours projection d'une déformation legendrienne ; pour qu'il en soit ainsi il faut qu'elle vérifie la « condition de monodromie » : pour t voisin de 0 les périodes sur Λ_t de la forme $\Sigma p_i dq_i$ sont nulles.

En effet l'existence d'une période non nulle impliquerait que la primitive de la forme considérée serait infiniment ramifiée, et ne saurait donc être racine d'une équation algébrique à coefficients dans $\mathbb{C}\{q,t\}$ (comme l'exigerait le théorème de préparation de Weierstrass).

Remarquons par ailleurs que s'il existe, le relèvement V_T de Λ_T n'est défini qu'à une famille de translations des feuilles de \mathfrak{w} près (c'est l'ambiguïté mentionnée au début de 1.1).

Équivalence de déformations.

Soit à comparer différentes déformations, de même base T , d'un même objet Λ [resp. V].

Deux déformations lagrangiennes [resp. legendriennes] seront dites *symplectiquement équivalentes* [resp. *équivalentes de contact*] si elles se déduisent l'une de l'autre par une déformation symplectique [resp. de contact] de l'automorphisme id_M [resp. id_W]. Le germe lagrangien Λ [resp. V] sera dit *symplectiquement stable* [resp. *stable de contact*] si toutes ses déformations sont « *symplectiquement triviales* » [resp. « *triviales de contact* »] c.à.d. symplectiquement équivalentes [resp. équivalentes de contact] à la déformation constante.

1.2. Configurations r -cubiques régulières.

Un germe lagrangien Λ est appelé « *configuration r -cubique régulière* » si dans des coordonnées symplectiques convenables il est donné par les équations

$$(0) \quad p_1 q_1 = \cdots = p_r q_r = 0, \quad p_{r+1} = \cdots = p_n = 0.$$

Le germe legendrien V correspondant (*également appelé « configuration r -cubique régulière »*) est donné dans les coordonnées de Darboux correspondantes par les mêmes équations auxquelles on adjoint $\xi = 0$.

Cette terminologie est suggérée par la propriété caractéristique de Λ [resp. V]: c'est une union de 2^r composantes lagrangiennes [resp. legendriennes] lisses, s'intersectant régulièrement selon le schéma d'incidence des faces du cube à r dimensions (cf. [DDP] pour les détails).

Le but de ce paragraphe est de démontrer le

THÉORÈME. — *Dans une variété symplectique M , toute déformation d'une configuration r -cubique régulière est symplectiquement équivalente à une déformation de la forme*

$$(1) \quad p_1 q_1 = \varphi_1(t), \dots, p_r q_r = \varphi_r(t), \quad p_{r+1} = \cdots = p_n = 0,$$

où $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sont des germes, nuls en 0, de fonctions analytiques des paramètres t de déformation.

Une conséquence immédiate en est le

COROLLAIRE. — Dans une variété de contact W , les configurations r -cubiques régulières sont « stables de contact ».

Preuve du corollaire. — Une déformation lagrangienne de la forme (1) ne vérifie la « condition de monodromie » du § 1.1 que si toutes les fonctions φ_k sont identiquement nulles : en effet à chaque $\varphi_k(t) \neq 0$ correspondra dans Λ_t une période non nulle $\omega_t(t) = \int_{e_k(t)} \sum p_i dq_i$, où $e_k(t)$ est le « cycle évanescant », image du cercle unité $|\xi| = 1$ par l'application

$$\xi \mapsto (p_i = q_i = 0 \text{ sauf pour } i = k; p_k = \xi \varphi_k(t)^{1/2}, q_k = \bar{\xi} \varphi_k(t)^{1/2}). \quad \square$$

Preuve du théorème. — Soit $f: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ un système d'équations du germe lagrangien Λ . La notion d'équivalence symplectique de déformations de Λ se traduit en termes d'équations par la notion suivante : deux déformations $F, F': M \times T \rightarrow \mathbb{C}^n$ de f sont dite \mathcal{V} -équivalentes symplectiquement s'il existe une déformation symplectique h_M de l'automorphisme id_M et un germe $\Pi: M \times T \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^n)$ tels que $\Pi((p, q), 0) =$ matrice identité, $F((p, q), t) = \Pi((p, q), t) F'(h_t(p, q), t)$. Une déformation F est dite \mathcal{V} -triviale symplectiquement si elle est \mathcal{V} -équivalente à la déformation constante (c.-à.-d. $F'((p, q), t) = f(p, q)$).

Dans le cas d'une déformation infinitésimale $F(p, q, \varepsilon) = f(p, q) + \varepsilon g(p, q)$ (où $\varepsilon^2 = 0$), la \mathcal{V} -trivialité symplectique se traduit par une équation de la forme :

$$(\mathcal{S}) \quad g = \sum k_i f_i + \{f, H\}$$

où $k_i \in \mathcal{O}_M^n$, $H \in \mathcal{O}_M$ et $\{, \}$ est le crochet de Poisson dans les fibres ; nous noterons \mathcal{S} l'ensemble des g de la forme (\mathcal{S}) :

$$\mathcal{S} = \sum \mathcal{O}_M^n f_i + \{f, \mathcal{O}_M\}.$$

Par ailleurs la condition pour une déformation de Λ d'être lagrangienne se traduit en termes d'équations par $\{F_i, F_j\}|_{\Lambda_t} = 0$ c.-à.-d. d'après le Nullstellensatz $\{F_i, F_j\} \in (F)$ où (F) est l'idéal engendré par F_1, \dots, F_n dans $\mathcal{O}_{M \times T}$. Pour une déformation infinitésimale cela devient

$$(\mathcal{L}) \quad \{g_i, f_j\} + \{f_i, g_j\} \in \mathcal{O}_M f_1 + \dots + \mathcal{O}_M f_n.$$

Nous noterons \mathcal{L} l'ensemble des g de la forme (\mathcal{L}) .

En calquant la démonstration du théorème de versalité bien connu (cf. [M]) on voit que notre théorème sera démontré si nous en démontrons la version infinitésimale suivante :

THÉOREME (version infinitésimale). — *Toute déformation infinitésimale lagrangienne de (0) est \mathcal{V} -équivalente symplectiquement à une déformation $F_1 = p_1q_1 + \varepsilon u_1, \dots, F_r = p_rq_r + \varepsilon u_r; F_{r+1} = p_{r+1}, \dots, F_n = p_n$.*

Preuve du théorème. — Soit $f = (f_1, \dots, f_n); f_1 = p_1q_1, \dots, f_r = p_rq_r; f_{r+1} = p_{r+1}, \dots, f_n = p_n$;

LEMME 1. — *Les éléments suivants appartiennent à $\mathcal{S} \cap \mathcal{L}$:*

- (1) $p_jq_je_i, \quad j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, r$
- (2) $e_j, \quad j = r + 1, \dots, n$
- (3) $p_j^{\alpha_j}e_i, \quad i = 1, \dots, n; j = r + 1, \dots, n$
- (4) $q_i^{\beta_i}e_i, \quad i = 1, \dots, r$

Preuve du lemme 1. — Évidemment, les éléments précédents appartiennent à \mathcal{L} . Nous devons vérifier que ces éléments appartiennent aussi à \mathcal{S} .

On obtient les g du lemme 1 en prenant successivement dans (\mathcal{S}) :

(1) $k_j = 0$ pour $j \neq i, k_i = e_i, H = 0$ si $j \leq r$ et $k_j = (0, \dots, 0, q_j, 0, \dots, 0)$ q_j est dans i -ième place, $k_s = 0$ pour $s \neq j, H = 0$ si $j \geq r + 1$.

(2) $k_l = 0$ pour $l \neq j, k_j = e_j, H = 0$.

(3) $k_l = 0$ pour $l \neq i, k_j = p_j^{\alpha_j-1}e_i, H = 0$.

(4) $k_l = 0$ pour tout $l, H = q_i\beta_i/\beta_i$. □

COROLLAIRE. — *Toute déformation infinitésimalement lagrangienne de f est V -équivalente symplectiquement à une déformation $f + \varepsilon g$ avec g de la forme :*

$$(\mathfrak{S}) \quad g_i(p, q) = h_i(\bar{p}, q_{r+1}, \dots, q_n) + kq_{(i)}, \text{ et } g_j(p, q) = 0, \\ i = 1, \dots, r; \quad j = r + 1, \dots, n$$

où

$$\bar{p} = (p_1, \dots, p_r); \quad \text{et} \quad q_{(i)} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n).$$

Preuve. — C'est un problème de réduction dans \mathcal{O}_M^n modulo le sous-module engendré par (1), (2), (3) et (4) : tout $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_M^n$ peut subir la réduction $g_j = 0$ ($j=r+1, \dots, n$) grâce à (2), et $g_i(p, q) \equiv h_i(\bar{p}, q_{r+1}, \dots, q_n) + k_i q_{(i)}$ grâce à (1), (3) et (4). \square

Le lemme suivant finit la preuve du théorème dans sa version infinitésimale :

LEMME 2. — *Une déformation de la forme (\mathfrak{S}) est lagrangienne ssi $g = \text{constante}$.*

Preuve. — Seule l'implication \Rightarrow nécessite une démonstration.

On considère l'égalité (\mathcal{S}) , dont le membre de droite est engendré par les monômes

$$p_l q_l (l=1, \dots, r) \quad \text{et} \quad p_s (s=r+1, \dots, n).$$

Pour $i \leq r, j > r$, le membre de gauche s'écrit :

$$\{g_i, f_j\} + \{f_i, g_j\} = \{g_i, f_j\} = \{g_i, p_j\} = \partial_j g_i = \partial_j h_i + \partial_j k_i,$$

où

$$\partial_j = \partial / \partial q_j.$$

Comme son développement ne contient pas de monômes du type ci-dessus, il est nécessairement nul, de sorte que h_i ne dépend pas des \bar{p} et k_i ne dépend pas des q_1, \dots, q_r ; donc g_i ne dépend que des q_{r+1}, \dots, q_n .

Pour $j \leq r, i \geq r+1$, le membre de gauche s'écrit :

$$\{g_j, f_i\} + \{f_j, g_i\} = \{g_j, f_i\} = \{g_j, p_i\} = \partial_i g_j.$$

Là encore le membre de gauche ne contient pas de monômes du type voulu; il est donc nul, et $\partial_i g_j(q_{r+1}, \dots, q_n) = 0$: g_j est donc bien constante pour $j = 1, \dots, r$. \square

2. STABILITÉ DANS LE CONTEXTE D'UNE « FIBRATION DE LEGENDRE »

Nous nous plaçons désormais dans un contexte plus riche, consistant en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{\pi_W} & Q \times \mathbb{C} = Y \\
 \varpi \downarrow & & \downarrow \text{pr}_Q \\
 M & \xrightarrow{\pi_M} & Q
 \end{array}$$

où

$Q \approx (\mathbb{C}^n, 0)$ est un germe de variété à n dimensions ; $W = (J^1(Q, \mathbb{C}), 0)$ est le fibré des jets d'ordre 1 de fonctions sur Q à valeurs dans \mathbb{C} , considéré comme germe au voisinage de $\underline{0} = J_0^1(0)$ (jet en 0 de la fonction nulle) ;

$\varpi : W \rightarrow M$ est le passage au quotient par les « translations au but » dans $J^1(Q, \mathbb{C})$ (addition d'une constante à un jet de fonction) ; M s'identifie à T^*Q (fibré cotangent à Q), et π_W, π_M sont les projections canoniques : ce sont respectivement des fibrations « de Legendre » et « de Lagrange » (fibrations dont les fibres sont des variétés legendriennes resp. lagrangiennes).

Dans ce nouveau contexte, on imposera aux automorphismes de contact k_W de W d'être compatibles avec les quatre flèches du diagramme ci-dessus, définissant donc par projection un automorphisme analytique h_Q de Q , qui se relève par π_M en un automorphisme symplectique h_M de M , et par pr_Q en un automorphisme analytique k_Y de $Y = Q \times \mathbb{C}$, agissant sur les fibres \mathbb{C} par translation.

En définissant de façon analogue les déformations de tels homomorphismes on obtient, dans ce nouveau contexte, une notion plus stricte d'équivalence de déformations de germes legendriens ou lagrangiens, donc une notion plus stricte de stabilité.

L'objectif de ce paragraphe est de caractériser la stabilité d'un germe legendrien de configuration r -cubique régulière. Reprenant les résultats de [DDP], on montrera qu'un tel germe [stable] est caractérisé par la donnée d'une déformation [verselle] de fonction sur un germe de variété r -réticulée (version complexe d'une « variété à coins »).

2.1. Déformations de fonctions r -réticulées.

Nous appelons *germe de variété r -réticulée* la donnée \underline{Z} d'un germe de variété lisse Z (de dimension $m \geq r$) et d'un diviseur à croisements normaux à r composantes numérotées Z_1, \dots, Z_r . Pour tout $\sigma \subset I_r = \{1, \dots, r\}$ on pose $Z_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} Z_i$, avec $Z_\emptyset = Z$.

Un *germe de fonction r -réticulée* est la donnée d'un couple (φ, \underline{Z}) où \underline{Z} est un germe de variété r -réticulée, et φ un germe de fonction sur Z (à valeurs dans \mathbb{C}). Deux tels germes seront dits *\mathcal{R} -équivalents* s'ils se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme réticulé de \underline{Z} (automorphisme de Z envoyant chaque Z_i dans lui-même). Nous les disons *$^+\mathcal{R}$ -équivalents* si cet automorphisme doit être composé avec une translation du but \mathbb{C} .

On définira de même la *\mathcal{R}* [resp. *$^+\mathcal{R}$*]-équivalence de deux déformations, de même base Q , d'une même fonction r -réticulée.

Une déformation de fonction réticulée est dite *\mathcal{R} -verselle* [resp. *$^+\mathcal{R}$ -verselle*] si toute autre déformation s'en déduit, à *\mathcal{R}* [resp. *$^+\mathcal{R}$*]-équivalence près, par un changement de base convenable.

Exemples de déformations $^+\mathcal{R}$ -verselles (la variété source est \mathbb{C}^m réticulée par ses r premières coordonnées z_1, \dots, z_r).

Ex 0 (bien connu!) $m = 1, r = 0$; fonction : $z^3/3$; déformation : $z^3/3 + qz$.

Ex 1 : $m = 1, r = 1$; fonction 1-réticulée : z^2 ; déformation : $\varphi(q, z) = (z + q)^2$.

Ex 2 : $m = 2, r = 2$; fonction 2-réticulée : $z_1^2 + z_2^2$; déformation : $\varphi(q, z) = (z_1 + q_1)^2 + (z_2 + q_2)^2 + 2q_{12}(z_1 + q_1)(z_2 + q_2)$ (cf. [DDP]).

Ensemble critique, lieu discriminant.

L'ensemble critique d'une déformation φ de fonction réticulée est l'ensemble $\Sigma \subset Q \times Z$ des points (q, z) où $d_z(\varphi|_{Q \times Z_\sigma}) = 0$ pour au moins un σ (on a noté d_z la différentielle partielle par rapport à $z \in Z_\sigma$).

Le lieu discriminant $D \subset Q \times \mathbb{C}$ est l'image de Σ par l'application $(q, z) \rightarrow (q, \xi = \varphi(z, q))$. Sous des hypothèses génériques sur φ , (par exemple celles du § 2.2 ci-après), D est de dimension pure n . De plus si φ est une déformation à point critique isolé, $\pi_Q|_D$ est un morphisme fini.

2.2. Fonctions de phase r -réticulées et configurations r -cubiques régulières.

Nous appelons fonction de phase r -réticulée, de base Q , une déformation de fonction r -réticulée $\varphi : Q \times Z \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant la condition de « non dégénérescence » suivante : l'application $\partial_z \varphi : Q \times Z \rightarrow T^*Z$ (qui à (q, z) associe la différentielle partielle de φ par rapport à z) est transverse à chacune des sous-variétés $S_\sigma^1 \subset T^*Z$ constituées des 1-formes dont la restriction à Z_σ est nulle. L'ensemble critique Σ de φ est alors une union de sous-variétés de dimension n , $\Sigma_\sigma = (\partial_z \varphi)^{-1}(S_\sigma^1)$.

L'application caractéristique de φ est l'application

$$\chi : \Sigma \rightarrow J^1(Q, \mathbb{C}) = W$$

qui à un point critique (q, z) associe le 1-jet de φ à z constant. Les $\chi_\sigma = \chi|_{\Sigma_\sigma}$ forment une collection d'immersions legendriennes, et leurs images dans W forment une configuration r -cubique régulière $V(\varphi)$ appelée *configuration caractéristique* de φ .

Dans le cas où φ est une déformation de fonction à point critique isolé, la configuration caractéristique est liée au lieu discriminant $D = D(\varphi)$ par la construction suivante : se projetant sur Q par un morphisme fini, D peut être considéré comme l'adhérence du graphe d'une fonction analytique multiforme S ramifiée autour d'une hypersurface de Q ; V est alors l'adhérence dans $W = J^1(Q, \mathbb{C})$ de l'ensemble des jets d'ordre 1 de S .

PROPOSITION. — 1) Deux fonctions de phase φ_1, φ_2 de même base Q ont la même configuration caractéristique si et seulement si elles sont \mathcal{R} -équivalentes, ou bien (dans le cas d'espaces Z_1, Z_2 de dimensions différentes) si elles se déduisent l'une de l'autre, à \mathcal{R} -équivalence près, par « l'ajout d'une fonction de Morse parasite » :

$$\varphi_2(z_1, \dots, z_{m_1}, z_{m_1+1}, \dots, z_{m_2}) \underset{\mathcal{R}}{\approx} \varphi_1(z_1, \dots, z_{m_1}) + z_{m_1+1}^2 + \dots + z_{m_2}^2$$

(variables réticulées $z_1, \dots, z_r, r \leq m_1$).

2) Pour toute configuration r -cubique régulière V « en bonne position », c.à.d. telle que $\pi_W|_V$ soit un morphisme fini, il existe une fonction de phase φ telle que $V = V(\varphi)$.

3) $V = V(\varphi)$ est stable si et seulement si φ est $^+\mathcal{R}$ -verselle.

Preuve. — 1) Cf. [DDP] § 2.

2) Soit $S(q, \hat{q})$ la fonction génératrice d'une transformation canonique telle que dans les coordonnées (\hat{p}, \hat{q}) la configuration lagrangienne $\Lambda = \varpi(V)$ soit de la forme (0) (§ 1.2). On vérifie facilement que S est une fonction de phase de base Q sur \underline{Z} = espace des \hat{q} (réticulé par $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_r$), et que $V = V(S)$.

Remarque. — La simplicité de cette démonstration contraste avec la difficulté de la démonstration dans [DDP] du résultat analogue : c'est que [DDP] partait d'une définition *a priori* plus faible des configurations r -cubiques régulières.

3) *Supposons que $V = V(\varphi)$ soit stable.*

Toute déformation φ_T de φ a pour configuration caractéristique une déformation V_T de V , dont la trivialité (au sens 2.0) se traduit par l'existence d'une déformation h_Q de id_Q , et d'une famille au-dessus de h_Q de translation des fibres \mathbb{C} de pr_Q , transformant φ_T en une déformation à configuration caractéristique constante, donc \mathcal{R} -triviale d'après 1) : φ_T est donc bien ${}^+\mathcal{R}$ -trivialisée par le changement de base h_Q .

Réciproquement, supposons φ ${}^+\mathcal{R}$ -verselle.

D'après le corollaire du théorème 1.2, toute déformation V_T de V est équivalente de contact à la déformation constante. C'est donc une famille de configurations r -cubiques régulières, et une version « en famille » de 2) permet de lui associer une déformation φ_T de φ dont c'est la configuration caractéristique. La ${}^+\mathcal{R}$ -trivialité de φ_T permet de conclure à la trivialité (au sens 2.0) de V_T . \square

3. FONCTIONS D'AIRY-WEBER GÉNÉRALISÉES

3.0.

Soit $\varphi(q, z)$ une fonction de phase r -réticulée sur $Q \times \underline{\mathbb{C}}_r^m$ (où $\underline{\mathbb{C}}_r^m = \mathbb{C}^m$ réticulé par z_1, \dots, z_r) ; nous la supposons pour le moment *polynomiale*, n'ayant pour tout $q \in Q$ aucun autre point critique dans tout $\underline{\mathbb{C}}_r^m$ que ceux qui tendent vers 0 quand $q \rightarrow 0$; nous supposons également qu'elle n'a aucune « singularité à l'infini » (cf. [Ph3] [Ph4]),

de sorte que φ a globalement en z même type topologique que sa restriction à une petite boule de centre 0.

Nous appellerons *fonction d'Airy-Weber généralisée* une fonction sur $Q \times \tilde{\mathbb{C}}^*$ (où $\tilde{\mathbb{C}}^*$ est le revêtement universel de \mathbb{C}^*) de la forme

$$\mathcal{A}_{s,\gamma}^\varphi(q,x) = \int_\gamma e^{-x\varphi(q,z)} z_1^{s_1} \dots z_r^{s_r} dz_1 \dots dz_m$$

où $s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$, $x = -ik$ (cf. introduction) ;

γ est un m -cycle d'intégration non compact de $\tilde{\mathbb{C}}^{*r} \times \mathbb{C}^{m-r}$, dépendant continûment de $\text{Arg } x$ et de q , et vérifiant la « condition de descente » *ad hoc* pour assurer la décroissance exponentielle de l'intégrand à l'infini ; pour $s_i \in \mathbb{N}$ on permettra à γ d'être un cycle relatif à bord dans $z_i = 0$. Évidemment l'intégrale ne dépend que de la classe d'homologie de ce cycle, pour l'homologie à support dans la famille (dépendant de $(q, \text{Arg } x)$) des fermés vérifiant la condition de descente en question (cf. [Ph4]).

Exemples. — Pour la phase φ de l'exemple 0 du § 2.1, les fonctions $\mathcal{A}_\gamma^\varphi$ ainsi obtenues s'expriment simplement en termes des fonctions A_i, B_i d'Airy. Pour la phase φ de l'exemple 1 de 2.1 les $\mathcal{A}_{s,\gamma}^\varphi$ s'expriment en termes de *fonctions cylindro-paraboliques* D_s de Weber, tout au moins si $s \notin \mathbb{N}$; si $s = 0$ on peut prendre pour γ le demi-axe réel positif, de sorte que

$$\mathcal{A}_{0,\gamma}^\varphi(q,x) = \int_0^\infty e^{-x(z-q)^2} dz = (2x)^{-1/2} \text{Er}(- (2x)^{1/2}q),$$

où Er est la « fonction d'erreur ».

3.0^{loc}. Version (micro)locale des objets précédents.

Si la fonction de phase φ n'est définie qu'au voisinage de $(0,0)$ on ne peut plus considérer les intégrales ci-dessus comme définissant des fonctions mais seulement des *classes modulo les fonctions exponentiellement petites en x* : pour cela on intègre sur des cycles relatifs γ vérifiant une « condition de descente locale » (cf. [Ph4], [Ph5]). Les classes de fonctions ainsi obtenues sont des « symboles confluents » au sens de [Ph6] [Ah], à support dans le lieu discriminant D de φ ; sans en rappeler la définition, rappelons-en seulement une propriété, qui motive le nom de « symbole confluent » : pour q générique ($\neq 0$) ils sont caractérisés par la donnée

de leur « développement transasymptotique » $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x, q) e^{-x S_{\alpha}(q)}$, où les $S_{\alpha}(q)$ sont les valeurs critiques de $\varphi(q, \cdot)$ (branches du lieu discriminant), et les a_{α} sont des séries formelles en x^{-1} à coefficients analytiques (multiformes) en q pour $q \neq 0$; on a ainsi affaire, pour q générique, à une combinaison linéaire d'ondes du type 0.0 de l'introduction, dont les phases S_{α} « confluent vers 0 » quand $q \rightarrow 0$.

Conformément à la philosophie de M. Sato, nous allons chercher à caractériser ces objets par le système d'équations (micro)-différentielles qu'ils vérifient.

3.1. Un peu d'analyse algébrique.

En adaptant la construction de Sato des opérateurs microdifférentiels, nous introduisons dans cette section deux \mathbb{C} -algèbres d'opérateurs microdifférentiels $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, opérateurs dont les « symboles d'ordre 0 » sont des germes de fonctions holomorphes sur M resp. W , et que pour cette raison nous appellerons *opérateurs M -différentiels* resp. *W -différentiels*.

Notre point de départ sera l'algèbre \mathcal{D} des opérateurs différentiels $P(q, \partial_q; x)$ à coefficients dans $\mathbb{C}\{q\}[x, x^{-1}]$ (coefficients holomorphes en q et rationnels en x). Cette algèbre est munie d'une \mathbb{Z} -filtration par l'ordre des opérateurs, l'ordre 1 étant attribué aux ∂_q et à la multiplication par x .

La multiplication par x réalise un isomorphisme entre deux termes successifs $\mathcal{D}^{(m-1)}$, $\mathcal{D}^{(m)}$ de la filtration, et les quotients de ces termes sont des algèbres commutatives, isomorphes à l'algèbre des fonctions sur M :

$$\mathcal{D}^{(m)} / \mathcal{D}^{(m-1)} \approx \mathcal{D}^{(0)} / \mathcal{D}^{(-1)} = \mathcal{O}_M = \mathbb{C}\{p, q\},$$

où $p_i = \sigma(-x^{-1}\partial_{q_i})$, σ désignant le « symbole principal », qui à un opérateur d'ordre m (ici $m=0$) associe sa classe modulo les opérateurs d'ordre $\leq m-1$.

L'algèbre $\mathcal{O}((x^{-1}))$ des x -symboles.

Soit \mathcal{O} un anneau de germes de fonctions holomorphes (p. ex. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_M$, ou \mathcal{O}_W , ou \mathcal{O}_Q). Nous appellerons x -symbole d'ordre m sur \mathcal{O} une série formelle

$$a = \sum_{k=-\infty}^m a_k x^k,$$

où les $a_k \in \mathcal{O}$ ont un polyrayon de convergence commun ρ , et vérifient la condition « Gevrey 1 » :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|a_{-\ell}\|_{\rho} \xi^{\ell-1} / (\ell-1)! \in \mathbb{C}\{\xi\}.$$

Les x -symboles sur \mathcal{O} forment une \mathcal{O} -algèbre filtrée, que nous noterons $\mathcal{O}((x^{-1}))_1$. Nous noterons $\mathcal{O}[[x^{-1}]]_1$ la sous-algèbre des x -symboles d'ordre ≤ 0 . Celle-ci est stable par exponentiation $a \mapsto e^a$.

L'algèbre \mathcal{E} des opérateurs M -différentiels.

Étant donné un x -symbole a sur \mathcal{O}_M , écrivons-en le développement de Taylor sous la forme

$$a = \sum_k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{k,\alpha}(q) p^\alpha x^k$$

et remplaçons chaque p_i par $x^{-1} \partial / \partial q_i$, donc p^α par $x^{-|\alpha|} \partial_q^\alpha$ (écrit à droite de $a_\alpha(q)$). L'expression obtenue est ce que nous appellerons un *opérateur M -différentiel*, et a est le *symbole total* de cet opérateur. Notons que contrairement aux symboles homogènes que sont les symboles principaux des opérateurs, les symboles totaux dépendent du choix des coordonnées locales q_1, \dots, q_n .

Le *produit* de deux opérateurs M -différentiels, qui étend le produit usuel des opérateurs différentiels, est donné sur les symboles totaux par la formule

$$(ab)(p, q; x) = \sum_{r=-\infty}^{m+m'} \sum_{k+\ell-|\alpha|=r} 1/\alpha! \partial_p^\alpha a_k(q, p) \partial_q^\alpha b_\ell(q, p) x^r.$$

L'algèbre \mathcal{E} des opérateurs W -différentiels.

La définition en est analogue, en prenant cette fois comme symboles totaux les x -symboles sur \mathcal{O}_W :

$$a(p, q, \xi; x) = \sum_{k=-\infty}^m a_k(p, q, \xi) x^k,$$

$$a_k \in \mathcal{O}_W = \mathbb{C}\{p, q, \xi\}, \quad \xi = \sigma(-\partial_x)$$

où l'opérateur ∂_x est d'ordre 0 (alors que x est, comme tout à l'heure, d'ordre 1).

Remarque. — Une transformation de Laplace formelle par rapport à x

$$x = \partial_\xi, \quad \partial_x = -\xi$$

transforme \mathcal{E} en l'algèbre des *opérateurs micro-différentiels de Sato dans la codirection* $d\xi$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$

$$\sum_{k, \alpha} a_\alpha(q, \xi) \partial_q^\alpha \partial_\xi^{k-|\alpha|}$$

avec la filtration usuelle où les ∂_q et ∂_ξ sont d'ordre 1.

Images directes.

Alors que les fonctions forment un module à *gauche* sur l'anneau des opérateurs différentiels, on sait que les formes différentielles de degré maximum forment un module à *droite* sur ce même anneau, l'action à droite d'un champ de vecteurs étant définie par la dérivée de Lie de la forme : en coordonnées locales

$$(g(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \sum_i a_i(x) \partial_i = \sum_i -a_i g'_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Étant donné une phase φ , désignons par \mathcal{H}_φ l'ensemble des expressions de la forme

$$(\mathcal{H}_\varphi) \quad e^{-x\varphi(q,z)} a(q, z; x) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m,$$

où a est un x -symbole sur l'espace $Q \times \mathbb{C}^m$.

De telles expressions se comportent en z comme des formes différentielles de degré maximum, et en q comme des fonctions. On voit ainsi que \mathcal{H}_φ est muni d'une structure de *bimodule* :

module à *gauche* sur l'anneau $\underline{\mathcal{E}}$ ou \mathcal{E} des opérateurs microdifférentiels en q ;

module à *droite* sur l'anneau $\underline{\mathcal{E}}_z$ ou \mathcal{E}_z des opérateurs microdifférentiels en z .

Étant donné un $\underline{\mathcal{E}}_z$ [resp. \mathcal{E}_z]-module à gauche $\underline{\mathcal{M}}$ [resp. \mathcal{M}], son image directe par φ sera définie comme le $\underline{\mathcal{E}}$ [resp. \mathcal{E}]-module à gauche

$$\mathcal{H}_\varphi \otimes_{\underline{\mathcal{E}}_z} \underline{\mathcal{M}} \quad \text{resp.} \quad \mathcal{H}_\varphi \otimes_{\mathcal{E}_z} \mathcal{M}.$$

Transformations canoniques (ou de contact) quantifiées.

Prenons $z = \hat{q} = (\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n)$ et $\varphi = S(q, \hat{q})$, fonction génératrice d'une transformation canonique.

$$\text{Posons } K_S = e^{-xS(q, \hat{q})} d\hat{q}_1 \wedge \dots \wedge d\hat{q}_n.$$

La donnée de K_S définit un isomorphisme d'algèbres entre $\underline{\mathcal{E}}$ et $\hat{\underline{\mathcal{E}}}$ ($=\underline{\mathcal{E}}_{\hat{q}}$) [resp. \mathcal{E} et $\hat{\mathcal{E}}$]

$$P \leftrightarrow \hat{P},$$

caractérisé par

$$K_S \hat{P} = P K_S$$

(au sens de la structure de bi-module de \mathcal{K}_S). Par cet isomorphisme, la correspondance entre symboles principaux $\sigma(\hat{P})$ est celle définie par la transformation canonique (ou de contact) de fonction génératrice S .

3.2. Équations microdifférentielles vérifiées par les symboles confluents 3.0^{loc}.

Étant donné un multi-indice $s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$, considérons le système microdifférentiel

$$(z_1 \partial_1 - s_1)u = 0, \dots, (z_r \partial_r - s_r)u = 0, \quad \partial_{r+1}u = 0, \dots, \partial_m u = 0,$$

(où $\partial_i = \partial/\partial z_i$) [auxquelles on adjoint $\partial_x u = 0$ si l'on travaille sur \mathcal{E} au lieu de $\underline{\mathcal{E}}$].

Ce système admet pour solution la fonction $u = z_1^{s_1} \dots z_r^{s_r}$ de 3.0, solution qui est *générique* (au sens de [Ph1] § 3) si $s_1 \notin \mathbb{N}, \dots, s_r \notin \mathbb{N}$ (si $s_i \in \mathbb{N}$ on obtient une solution générique en remplaçant $z_i^{s_i}$ par la microfonction $\{z_i^{s_i} \text{Log } z_i/2\pi i\}$, où $\{ \}$ veut dire « classe modulo $\mathbb{C}\{z_i\}$ » ; la fonction $z_i^{s_i}$ est alors la *variation* de la microfonction considérée).

Fixons-nous une fonction de phase φ , et désignons par

$$\underline{\mathcal{G}} \text{ (ou } \underline{\mathcal{G}}_s^\varphi) = \mathcal{K} \otimes_{\underline{\mathcal{E}}_z} \underline{\mathcal{E}}_z u$$

resp.

$$\mathcal{G} \text{ (ou } \mathcal{G}_s^\varphi) = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{E}_z} \mathcal{E}_z u$$

l'image directe par φ du $\underline{\mathcal{E}}_z$ [resp. \mathcal{E}_z]-module $\underline{\mathcal{E}}_z u$ [resp. $\mathcal{E}_z u$] présenté ci-dessus.

C'est un $\underline{\mathcal{E}}$ [resp. \mathcal{E}]-module, dans lequel nous ferons jouer un rôle privilégié à l'élément

$$u^\varphi := e^{-x\varphi} dz \otimes u$$

(où dz est une abréviation pour $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$).

PROPOSITION. — La fonction $\mathcal{A}_{s,\gamma}^\varphi$ de 3.0 (ou le symbole confluent $\mathcal{A}_{s,\gamma}^\varphi$ de 3.0^{loc}) est solution du système microdifférentiel constitué par tous les opérateurs $P \in \underline{\mathcal{E}}$ [resp. \mathcal{E}] qui annulent u^φ . Autrement dit on a un épimorphisme de modules à gauche

$$\underline{\mathcal{E}}u^\varphi \rightarrow \underline{\mathcal{E}}\mathcal{A}_{s,\gamma}^\varphi$$

resp.

$$\mathcal{E}u^\varphi \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{A}_{s,\gamma}^\varphi.$$

Preuve. — La définition de l'image directe n'est que la traduction algébrique des opérations d'intégration par parties, ou dérivation sous le signe d'intégration, des intégrales de la forme (3.0) :

la structure de module à droite de \mathcal{X}_φ se traduit dans \mathcal{G} par la relation

$$e^{-x\varphi} dz \otimes P(z, \partial_z)u = (P^*(z, \partial_z)e^{-x\varphi} dz) \otimes u$$

qui est la traduction algébrique de l'intégration par parties (P^* désigne l'opérateur adjoint de P , caractérisé par $(PQ)^* = Q^*P^*$, $a(z)^* = a(z)$, $\partial_z^* = -\partial_z$);

quant à la structure de module à gauche de \mathcal{X}_φ , elle se traduit dans \mathcal{G} par la relation

$$P(q, \partial_q)(e^{-x\varphi} dz \otimes u) = (P(q, \partial_q)e^{-x\varphi} dz) \otimes u$$

qui traduit algébriquement la dérivation sous le signe d'intégration.

Remarque : calcul de l'image directe par transformation canonique quantifiée.

La proposition précédente n'a pas encore fait usage de l'hypothèse 2.2 de « non dégénérescence » de φ . Sous cette hypothèse, on peut construire une transformation canonique dont la fonction génératrice S se déduit de φ par ajout ou soustraction d'une fonction de Morse parasite (cf. Prop. 2.2, partie 1)), modification dont l'effet sur u^φ est essentiellement trivial (on peut écrire $u^S = x^{(n-m)/2}u^\varphi$).

Reprenant les notations de la fin de 3.1, on peut alors écrire, pour tout couple d'opérateurs \hat{P} , P se correspondant par la transformation canonique quantifiée

$$K_S \otimes \hat{P}u = K_S \hat{P} \otimes u = PK_S \otimes u = Pu^S,$$

ce qui nous fournit l'additif suivant à la proposition :

Additif. — Le module $\underline{\mathcal{E}}u^\varphi$ [resp. $\mathcal{E}u^\varphi$] coïncide avec $\underline{\mathcal{G}}^\varphi$ [resp. \mathcal{G}^φ], image directe par φ du $\underline{\mathcal{E}}_z$ [resp. \mathcal{E}_z]-module $\underline{\mathcal{E}}_z u$ [resp. $\mathcal{E}_z u$].

De plus le système d'équations microdifférentielles vérifié par u^φ (ou u^S) se déduit de celui vérifié par u en appliquant à ce dernier la transformation canonique (ou de contact) de fonction génératrice S .

COROLLAIRE. — \mathcal{A}_γ vérifie sur $\underline{\mathcal{E}}$ un système de n équations microdifférentielles en involution

$$P_1 \mathcal{A}_\gamma = 0, \dots, P_n \mathcal{A}_\gamma = 0, \quad [P_i, P_j] = 0$$

dont les symboles principaux $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_n)$ forment un système d'équations de la variété lagrangienne $\Lambda = \Lambda(\varphi)$ dans M . Sur $\underline{\mathcal{E}}$ elle vérifie en plus une $(n+1)$ -ième équation $P_0 \mathcal{A}_\gamma = 0$ dont le symbole $\sigma(P_0)$ adjoint aux précédents forme un système d'équations de $V = V(\varphi)$ dans W .

Question : \mathcal{A}_γ vérifie-t-elle d'autres équations indépendantes des précédentes?

La question revient à demander si l'épimorphisme de modules à gauche de la proposition précédente est un isomorphisme. La réponse à cette question dépend du choix de la classe d'homologie de γ (dans l'homologie à supports vérifiant la condition de descente locale évoquée en 3.0^{loc}), et ne devrait pas être trop difficile à expliciter, dans la mesure où l'on connaît explicitement tous les sous-modules de $\underline{\mathcal{E}}u$ [resp. $\mathcal{E}u$] (cf. [DDP]). Par exemple si $s_1 \notin \mathbb{N}, \dots, s_r \notin \mathbb{N}$ on sait que $\underline{\mathcal{E}}u$ [resp. $\mathcal{E}u$] est un module simple, et il en est donc de même de $\underline{\mathcal{E}}u^\varphi$ [resp. $\mathcal{E}u^\varphi$] qui s'en déduit par transformation canonique quantifiée ; dans ce cas l'épimorphisme de la proposition ne peut donc être qu'un isomorphisme, à moins qu'il ne soit nul, ce qui est le cas si (et seulement si ?) le cycle γ est homologue à 0.

Stabilité du module \mathcal{G} .

Ayant pour variété caractéristique une variété legendrienne, \mathcal{G} est ce que Sato appelle un module microdifférentiel *holonome*. On trouvera dans [Ph2] un début d'étude de la notion de *stabilité* des modules holonomes (un module holonome est dit « stable » s'il n'admet que des déploiement triviaux ; pour la notion de « déploiement », cf. [Ph2]).

Comme corollaire immédiat de toutes les considérations qui précèdent, énonçons le

THÉORÈME. — *Le module \mathcal{G} est stable ssi φ est ${}^+\mathcal{R}$ -verselle.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de la proposition de § 2.2 (partie 3), compte tenu du fait que la variété caractéristique d'un déploiement est un déploiement de la variété caractéristique.

Signalons que dans ([DDP] § 7.3) nous avons donné un énoncé *erroné* de ce théorème (la nature de l'erreur est expliquée dans [Du'c]).

Génération finie de \mathcal{G} (ou $\underline{\mathcal{G}}$).

Si φ est une déformation à point critique isolé l'algèbre \mathcal{O}_V (ou \mathcal{O}_Λ) est un module de type fini sur l'algèbre $\mathcal{O}_Q = \mathbb{C}\{q_1, \dots, q_n\}$. Grâce au théorème de préparation pour les opérateurs microdifférentiels (cf. p. ex. [Ph1] partie 2, chap. 3) il en résulte que \mathcal{G} (ou $\underline{\mathcal{G}}$) est un module de type fini sur l'algèbre $\mathcal{O}_Q((x^{-1}))_1$ des x -symboles sur Q .

On peut préciser cet énoncé dans le cas où φ est ${}^+\mathcal{R}$ -miniverselle (verselle, avec le nombre minimal de paramètres q_1, \dots, q_n de déformation) : dans ce cas \mathcal{O}_V (ou \mathcal{O}_Λ) est libre sur \mathcal{O}_Q avec $1, p_1, \dots, p_n$ comme générateurs. Il en résulte que $\mathcal{E}\mathcal{A}_\gamma$ (ou $\underline{\mathcal{E}}\mathcal{A}_\gamma$) est engendré, comme module sur $\mathcal{O}_Q((x^{-1}))_1$, par $\mathcal{A}_\gamma, \partial\mathcal{A}_\gamma/\partial q_1, \dots, \partial\mathcal{A}_\gamma/\partial q_n$, librement dans la mesure où il est isomorphe à \mathcal{G} (ou $\underline{\mathcal{G}}$).

**4. SOLUTIONS D'UN SYSTÈME M -DIFFÉRENTIEL
DONT LA VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE
EST UNE CONFIGURATION r -CUBIQUE RÉGULIÈRE**

Soit à résoudre un système M -différentiel

$$(1) \quad P_1\Psi = 0, \dots, P_n\Psi = 0, \quad P_1, \dots, P_n \in \underline{\mathcal{E}}$$

dont la variété caractéristique Λ est une configuration r -cubique régulière.

Plus précisément, en désignant par \mathcal{J} l'idéal à gauche de $\underline{\mathcal{E}}$ engendré par P_1, \dots, P_n , nous supposons que les symboles principaux $\sigma(P)$ ($P \in \mathcal{J}$) forment dans \mathcal{O} l'idéal réduit d'une configuration r -cubique régulière Λ (idéal de toutes les fonctions s'annulant sur l'ensemble Λ).

4.1. Étude de la « situation modèle ».

La « situation modèle » (à laquelle on pourra se ramener par une transformation canonique) est celle où Λ est donnée par les équations

$$(\Lambda) \quad p_1q_1 = \dots = p_rq_r = 0, \quad p_{r+1} = \dots = p_n = 0.$$

Le résultat-clef de cette section est le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans la situation modèle, le système (1) est équivalent, par un changement de fonction inconnue de la forme $\Psi = C\Phi$ (C élément inversible de $\underline{\mathcal{E}}$) au système*

$$(1)_0 \quad (q_1\partial_1 - s_1)\Phi = 0, \dots, (q_r\partial_r - s_r)\Phi = 0, \quad \partial_{r+1}\Phi = 0, \dots, \partial_n\Phi = 0$$

où $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]_1$: définis sans ambiguïté, les s_1, \dots, s_r seront appelés exposants de monodromie du système (1).

Remarque. — Tout à fait semblable à celui considéré en 3.2 (à ceci près que les s_i peuvent maintenant dépendre de x), le système (1)₀ admet une solution de la forme

$$q^s = q^{s_1(x)} \dots q^{s_r(x)}.$$

Cette solution est générique si $s_i^0 \notin \mathbb{N}$ ($i=1, \dots, r$), où s_i^0 désigne le terme constant du développement de s_i en puissances de x^{-1} .

Sous cette hypothèse le module $\underline{\mathcal{E}}\Phi = \underline{\mathcal{E}}q^s$ est simple, sauf si certains des s_i sont des constantes entières négatives, auxquels cas ses sous-modules propres sont de la forme $\underline{\mathcal{E}}q^{s'}$, s' = un multi-indice déduit de s en « gommant » les composantes $s_i \in \mathbb{Z}$. Remarquons que tous ces sous-modules ont une variété caractéristique strictement plus petite que Λ (ce sont des configurations r' -cubiques régulières avec $r' < r$).

Symboles et opérateurs M-différentiels méromorphes.

Nous désignerons désormais par $\Sigma = \Sigma_Q$ ou Σ_M l'algèbre des x -symboles sur $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Q$ ou \mathcal{O}_M , et par $(\Sigma^{(m)} = \Sigma_Q^{(m)}$ ou $\Sigma_M^{(m)})$ sa filtration par l'ordre des symboles.

Pour $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Q$ ou \mathcal{O}_M , désignons par $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[q_1^{-1}, \dots, q_r^{-1}]$ l'algèbre des germes de fonctions méromorphes à singularités polaires sur $q_1 \dots q_r = 0$. Cette algèbre est filtrée par l'ordre des pôles : $\mathcal{O}'(k) = \mathcal{O}[q_1^{-1}, \dots, q_r^{-1}]_k$, le $\mathcal{O}'[]_k$ désignant l'espace des polynômes de degré $\leq k$.

Pour $a \in \mathcal{O}'$, et pour tout polyrayon $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)$, désignons par $\|a\|'_\rho$ le supremum de $|a|$ sur le « polydisque troué » de rayon ρ (polydisque auquel on aura enlevé le produit des disques $|q_i| < \rho_i/2$, $i = 1, 2, \dots, r$). On appellera *symbole méromorphe d'ordre $\leq m$* une série

$$a = \sum_{k=-\infty}^m a_k x^k, \quad \text{avec} \quad a_k \in \mathcal{O}'(m-k),$$

telle qu'il existe un polyrayon ρ pour lequel

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|a_{-\ell}\|'_\rho \xi^{\ell-1} / (\ell-1)! \in \mathbb{C}\{\xi\}.$$

Nous noterons $\Sigma' = \Sigma'_Q$ ou Σ'_M l'algèbre (car c'en est une) des symboles méromorphes sur Q ou M , et $(\Sigma'(m) = \Sigma'_Q(m)$ ou $\Sigma'_M(m))$ sa filtration par l'ordre des symboles.

En calquant la définition de $\underline{\mathcal{E}}$, avec Σ_M remplacé par Σ'_M , on obtient l'espace noté $\underline{\mathcal{E}}'$ des *opérateurs M-différentiels méromorphes*. Cet espace n'est pas une algèbre mais seulement un bimodule (Σ'_Q -module à gauche et $\underline{\mathcal{E}}$ -module à droite), isomorphe au produit tensoriel

$$\underline{\mathcal{E}}' = \Sigma'_Q \otimes_{\mathcal{O}_Q} \underline{\mathcal{E}}$$

(la vérification est laissée au lecteur).

La première étape de la preuve du théorème sera la

PROPOSITION. — Dans la situation modèle, $\underline{\mathcal{E}}'\Psi = \Sigma'_Q\Phi$, avec Φ solution générique de $(1)_0$.

La clef en sera le

LEMME DE DIVISION. — (Prouvé en Appendice).

Dans la situation-modèle, tout $A \in \underline{\mathcal{E}}'$ peut s'écrire

$$A = \Sigma Q_i P_i + R$$

où $B \in \underline{\mathcal{E}}'$, $R \in \Sigma'_Q$; le « reste » R est unique, et d'ordre $< \text{ord } A$.

Preuve de la Proposition. — Appliquons le Lemme de division successivement à $A = \partial_1, \dots, A = \partial_n$, en notant R_1, \dots, R_n les restes successifs de ces divisions (x -symboles méromorphes d'ordre < 0). On trouve ainsi que le système (1) équivaut au système

$$(1)' \quad (\partial_1 - R_1)\Psi = 0, \dots, (\partial_n - R_n)\Psi = 0.$$

Remarquons que ce système doit vérifier la « condition d'intégrabilité »

$$\partial R_j / \partial q_i = \partial R_i / \partial q_j.$$

En effet l'hypothèse que le système (1)' a Λ pour variété caractéristique signifie que tous les éléments de l'idéal à gauche engendré par les $\partial_i - R_i$ doivent avoir un symbole principal nul sur Λ . Ce devra être le cas en particulier du commutateur

$$[\partial_i - R_i, \partial_j - R_j] = \partial R_i / \partial q_j - \partial R_j / \partial q_i \in \Sigma'_Q(0),$$

symbole indépendant de p et dont le terme principal ne peut donc s'annuler sur Λ que s'il est identiquement nul.

Pour simplifier encore le système (1)', séparons dans chaque R_i sa partie « simplement polaire en q_i », dont on notera s_i le résidu :

$$R_i = s_i / q_i + B_i$$

(avec évidemment $s_i = 0$ pour $i = r + 1, \dots, n$); par définition s_i est indépendant de q_i , mais d'après la condition d'intégrabilité $\partial s_i / \partial q_j = 0$ (car $\partial R_j / \partial q_i$ ne peut pas avoir de terme simplement polaire en q_i). Ainsi $s_i \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]_1$.

De plus, toujours d'après la condition d'intégrabilité, $\partial B_i / \partial q_i = \partial B_i / \partial q_j$, de sorte qu'il existe $B \in \mathcal{O}_Q[[x^{-1}]]^4$ telle que $B_i = \partial B / \partial q_i$. D'après la relation de commutation $(\partial_i - B_i)e^B = e^B \partial_i$, le changement de fonction inconnue $\Psi = e^B \Phi$ transforme le système (1)' en $(\partial_i - s_i/q_i)\Phi = 0$, $i = 1, \dots, n$, équivalent sur $\underline{\mathcal{E}}'$ à (1)₀.

Preuve du Théorème. — Supposons d'abord $s_i^0 \notin \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, r$).

Sous cette hypothèse, on démontre facilement le

LEMME. — *Pour Φ solution générale de (1)₀, $\Sigma'_Q \Phi \subset \mathcal{E}\Phi$ (l'idée est d'éliminer les termes polaires dans Σ'_Q en remplaçant $q^{-\alpha}$ par $[s(s-1) \dots (s-\alpha+1)]^{-1} \partial^\alpha$).*

Joint à la proposition, ce lemme montre que $\underline{\mathcal{E}}'\Psi \subset \mathcal{E}\Phi$ donc $\underline{\mathcal{E}}\Psi \subset \mathcal{E}\Phi$. L'égalité s'en déduit par la remarque sur les sous-modules de $\mathcal{E}\Phi$.

Si $s_i^0 \in \mathbb{N}$ on se ramène au cas précédent par une transformation canonique (quantifiée) qui échange p_i et q_i (laissant donc invariante la variété caractéristique Λ), et change alors s_i^0 en $-s_i^0 - 1$: une telle transformation canonique est celle de fonction génératrice $q_i \hat{q}_i$; qu'elle ait les propriétés voulues se voit en remarquant qu'elle change q_i en $x^{-1} \partial_i$, et ∂_i en $-x \hat{q}_i$, et en utilisant la caractérisation suivante de s_i^0 : puisque le symbole principal de $q_i \partial_i$ s'annule sur Λ , on peut écrire $q_i \partial_i \Psi = A_i \Psi$, où $A_i \in \underline{\mathcal{E}}^{(0)}$; alors $s_i^0 = a_i(0,0)$, où $a_i(p,q)$ désigne le symbole d'ordre 0 de A_i .

4.2. Retour au cas général.

En notant S la fonction génératrice d'une transformation canonique mettant la variété caractéristique sous la forme « modèle » 4.1 on voit, par le même raisonnement qu'en 3.2, que le symbole confluent

$$\Psi(q, x) = \int_{\gamma} e^{-xS(q, \hat{q})} \hat{\Psi}(\hat{q}, x) d\hat{q}_1 \dots d\hat{q}_n$$

sera solution de (1) si $\hat{\Psi}$ est solution d'un système du type 4.1. Appliquant le théorème et la remarque 4.1, on peut alors écrire $\hat{\Psi} = \hat{C} \hat{q}_1^{s_1} \dots \hat{q}_r^{s_r}$ donc $\Psi = C \mathcal{A}_{s, \gamma}$, où

$$\mathcal{A}_{s, \gamma}(q, x) = \int_{\gamma} e^{-xS(q, \hat{q})} \hat{q}_1^{s_1} \dots \hat{q}_r^{s_r} d\hat{q}_1 \dots d\hat{q}_n.$$

Nous avons donc démontré le

THÉORÈME. — *Le système (1) admet les solutions de la forme $\Psi = C \mathcal{A}_{s,\gamma}$ ($C = \text{élément inversible de } \underline{\mathcal{E}}$), où $\mathcal{A}_{s,\gamma}$ est le symbole confluent « d'Airy-Weber généralisé », d'exposants de monodromie $s_1 = s_1(x), \dots, s_r = s_r(x) \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]_1$. De plus C et les s_i sont définis sans ambiguïté par la donnée de S .*

Remarque. — L'étude du système $(1)_0$ montre qu'en fait les exposants de monodromie sont « presque » indépendants de S : pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$ on n'a le choix qu'entre deux valeurs s_i et $-s_i - 1$, selon la composante de la variété caractéristique que la transformation canonique enverra sur $p_i = 0$ ou $q_i = 0$.

COROLLAIRE. — *Si Λ est stable, la solution Ψ de (1) construite ci-dessus admet une décomposition unique*

$$\Psi = c_0 \mathcal{A}_{s,\gamma} + c_1 \partial_1 \mathcal{A}_{s,\gamma} + \dots + c_n \partial_n \mathcal{A}_{s,\gamma}, \quad \text{où } c_i \in \Sigma_{\mathcal{Q}}.$$

Preuve. — Si Λ est stable la fonction $\hat{q} \mapsto S(q, \hat{q})$ est une déformation miniverselle de $\hat{q} \mapsto S(0, \hat{q})$ (cf. Prop. 2.2). On peut donc appliquer le même raisonnement qu'à la fin de 3.2 (« génération finie de \mathcal{G} »).

4.3. Appendice : Preuve du Lemme de division.

On peut imiter la démarche de [Ph1], 2^{ème} Partie, Chap. 3, en s'appuyant sur le *Lemme de division élémentaire*:

tout $a = a(p, q) \in \mathcal{O}'_M(k)$ peut s'écrire

$$a = g_1 p_1 q_1 + \dots + g_r p_r q_r + g_{r+1} p_{r+1} + \dots + g_n p_n + R$$

où

$$g_1, \dots, g_r \in \mathcal{O}'_M(k+1)$$

$$g_{r+1}, \dots, g_n \in \mathcal{O}'_M(k)$$

$$R = R(q) \in \mathcal{O}'_{\mathcal{Q}}(k) \quad (R = a|_{p=0}).$$

Construction formelle. Soit $A \in \underline{\mathcal{E}}'(0)$. En appliquant le lemme de division élémentaire au symbole d'ordre 0 de A on peut écrire

$$A = A_0 = \sum \mathcal{Q}_i^{(0)} P_i + R_0 + x^{-1} A_1, \quad \text{où } R_0 \in \mathcal{O}'_{\mathcal{Q}}(0), A_1 \in \underline{\mathcal{E}}'(1),$$

et $Q_i^{(0)} \in \underline{\mathcal{E}}'(1)$ ou $\underline{\mathcal{E}}(1)$ selon que $i \leq r$ ou $i > r$ (on peut définir $Q_i^{(0)}$ comme l'opérateur dont le symbole total est homogène d'ordre 0, donné par le i -ème quotient g_i du lemme de division élémentaire).

En recommençant avec A_1 , on écrit

$$A_1 = \Sigma Q_i^{(1)} P_i + R_1 + x^{-1} A_2, \quad \text{où } R_1 \in \mathcal{O}'_{\mathcal{Q}}(1), A_2 \in \underline{\mathcal{E}}'(2), \text{ etc...}$$

$$A_\ell = \Sigma Q_i^{(\ell)} P_i + R_\ell + x^{-1} A_{\ell+1}, \quad \text{où } R_\ell \in \mathcal{O}'_{\mathcal{Q}}(\ell), A_{\ell+1} \in \underline{\mathcal{E}}'(\ell + 1),$$

$$(Q_i^{(\ell)} \in \underline{\mathcal{E}}'(\ell + 1) \text{ ou } \underline{\mathcal{E}}(\ell) \text{ selon que } i \leq r \text{ ou } i > r), \text{ etc...}$$

En ajoutant toutes ces égalités après multiplication de chacune d'elle par la puissance de x convenable ($x^{-\ell}$ pour la ℓ -ième) on trouve formellement l'égalité

$$A = \Sigma Q_i P_i + R, \quad \text{où } R = R_0 + R_1 x^{-1} + \dots$$

$$Q_i = Q_i^{(0)} + Q_i^{(1)} x^{-1} + \dots$$

Seule reste à démontrer la convergence de la série infinie d'égalités.

Convergence. — Pour ne pas trop perdre d'information lors des dérivations successives on cherchera à majorer les normes des symboles non pas pour un polyrayon ρ mais pour une famille de polyrayons $t\rho$ ($1/2 < t < 1$), où $t\rho$ désigne le polyrayon déduit de ρ par l'homothétie de rapport t .

Rappelant que $Q_i^{(\ell)}$ est un opérateur de symbole total homogène d'ordre 0, et peut donc être identifié à un élément de Σ'_M , et notant $A_{\ell,k} \in \Sigma'_M$ le coefficient de x^{-k} dans le développement du symbole total de A_ℓ , on établira par récurrence les majorations

$$(*)_\ell \quad \|Q_i^{(\ell)}\|'_{t\rho} \leq CK^\ell \ell! / (1-t)^\ell$$

$$(**)_{\ell,k} \quad \|A_{\ell,k}\|'_{t\rho} \leq C' K^\ell K'^k (\ell+k)! / (1-t)^{\ell+k}$$

d'où résultera la convergence de toutes les séries considérées (rappelons que $R_\ell = A_{\ell,0}|_{p=0}$).

Esquisse de la récurrence.

• $(**)_{0,k}$ est vraie : par hypothèse de convergence de $A = A_0$ dans $\underline{\mathcal{E}}'$ on peut écrire

$$\|A_{0,k}\|'_{t\rho} \leq C_0 (2K)^k k!.$$

• L'implication $(**)_{\ell,k} \Rightarrow (*)_{\ell}$ se démontre par majoration des quotients dans le « lemme de division élémentaire », compte tenu des majorations suivantes des diviseurs $P_i = P_{i,0} + P_{i,1}x^{-1} + \dots$:

$$\|P_{i,k}\|_{2p} \leq C_0 K_0^k k! \Rightarrow \|\partial_q^\alpha P_{i,k}/\alpha!\|_{\rho} \leq C'_0 K_0^k k! / \rho^{|\alpha|}$$

(par les inégalités de Cauchy).

• Enfin l'implication $((**))_{\ell,k}$ et $(*)_{\ell} \Rightarrow (**))_{\ell+1,k}$ se démontre comme dans [Ph4] (2^{ème} partie Chap. 3) grâce au « lemme de majoration des dérivées » (c'est là qu'intervient de façon cruciale le fait que nos majorations sont établies pour une famille de polyrayons ($t\rho$)). Le fait que dans notre cas les majorations soient considérées sur des polydisques « troués » n'empêche en rien d'appliquer le lemme de majoration des dérivées, car on dérive par rapport aux variables p_1, \dots, p_n alors que les « trous » sont faits dans les variables q_1, \dots, q_r .

BIBLIOGRAPHIE

- [Ah] O. J. AHMEDOU, Thèse de Doctorat, Nice, 1990.
- [A1] V. I. ARNOLD, Integrals of rapidly oscillating functions and singularities of the projections of Lagrangean manifolds, *Funct. Anal. and its Appl.*, 6, 3 (1972).
- [A2] V. I. ARNOLD, Critical points of functions on manifolds with boundary, the simple Lie groups B_k , C_k , and F_k and singularities of evolutes, *UMN*, 33-5 (1978).
- [A3] V. I. ARNOLD, Contact geometry and wave propagations. Monographie n° 34, L'enseignement Mathématique, Genève, 1989.
- [BW] M. BORN and E. WOLF, *Principles of Optics*, Pergamon, 1975.
- [DDP] N. T. DAI, N. H. DU'c and F. PHAM, Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés, *Bull. Soc. Math. France, Mémoire* n° 6 (1981).
- [Du'c] NGUYEN HUU DU'c, Thesis, Jagellonian University, Cracow.
- [Du] J. J. DUISTERMAAT, Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities, *Comm. Pure and Applied Math.*, 27 (1974).
- [Ha] J. HARTHONG, La propagation des ondes, in *Études sur la Mécanique Quantique*, Astérisque, 111 (1984).
- [M] J. MARTINET, Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables, *Lecture Notes in Math.*, 192 (1971).

- [Ma] V. MASLOV, Theory of perturbations and asymptotic methods, (Moscow State University, (1965).
- [Ph1] F. PHAM, Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Progress in Mathematics, Birkhauser, 2 (1979).
- [Ph2] F. PHAM, Déploiements de singularités de systèmes holonomes, C.R. Acad. Sci, 289, série A, (1979).
- [Ph3] F. PHAM, Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method, in Proc. of Symposia in Pure Math., Vol. 40 (1983), part. 2.
- [Ph4] F. PHAM, La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin, in Systèmes différentiels et Singularités, Astérisque, 130 (1985).
- [Ph5] F. PHAM, Resurgence, Quantized canonical transformations, and Multi-instanton Expansions, in Algebraic Analysis, vol. 2, edited by M. Kashiwara, T. Kawai, Academic Press, 1988.
- [Ph6] F. PHAM, Résurgence d'un thème de Huygens-Fresnel, Publ. Math. IHES, n° 68 (1989).
- [SKK] M. SATO, T. KAWAI and M. KASHIWARA, Microfunctions and pseudodifferential equations, Lecture Notes in Mathematics, 287 (1973).

Manuscrit reçu le 21 décembre 1990,
révisé le 16 mai 1991.

NGUYEN HU'U DU'U,
Département de Mathématiques
Université de Dalat
Dalat (Vietnam).

F. PHAM,
Université de Nice
URA168-Mathématiques
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 2.