ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Algèbres analytiques topologiquement noéthériennes. Théorie de Khovanskii

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 4 (1991), p. 823-840

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_823_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
41, 4 (1991), 823-840.

ALGÈBRES ANALYTIQUES TOPOLOGIQUEMENT NOETHÉRIENNES. THÉORIE DE KHOVANSKII

par Jean-Claude TOUGERON

Ce travail complète certains résultats de [7], en reprenant les idées de Moussu-Roche [6]. On se propose d'étendre à certaines classes d'ensembles analytiques réels définis à l'aide de fonctions analytiques globales, les propriétés topologiques élémentaires des variétés algébriques ou des ensembles analytiques compacts. Dans un article ultérieur, on étudiera les propriétés métriques (inégalité de Łojasiewicz).

On considère *a priori* certaines algèbres de fonctions analytiques ayant de bonnes propriétés topologiques (algèbres « topologiquement noethériennes »), et l'on démontre essentiellement trois sortes de résultats : l'équivalence entre plusieurs définitions de ces algèbres ; l'existence de certaines propriétés de ces algèbres, en particulier l'existence d'une borne uniforme pour le nombre de composantes connexes des fibres d'un morphisme ; enfin, un théorème d'extension : ces algèbres sont encore topologiquement noethériennes par adjonction de solutions de certaines équations différentielles du 1^{er} ordre (théorie de Khovanskii). Par extensions successives, on construit ainsi de larges classes d'algèbres topologiquement noethériennes.

Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre de fonctions analytiques réelles dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; un fermé $F \subset \Omega$ est *analytique* (pour $\mathcal{O}(\Omega)$) si F est l'ensemble des zéros d'une fonction de $\mathcal{O}(\Omega)$; un sous-ensemble $X \subset \Omega$ est *semi-analytique* (pour $\mathcal{O}(\Omega)$) si X est une réunion finie de *semi-analytiques élémentaires* X_i, chaque X_i étant de la forme

Mots-clés : Théorie de Khovanskii - Lemme de Rolle - Finitude topologique.
Classification A.M.S. : 26B - 26D - 58D.

$\{x \in \Omega\,; f(x)=0; g_1(x)>0\,;\,\dots\,; g_h(x)>0\}$ avec $f, g_1, \dots, g_h \in \mathcal{O}(\Omega)$. L'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ est *faiblement noethérienne* si $\mathcal{O}(\Omega) \supset \mathbb{R}[x]$, $\mathcal{O}(\Omega)$ est stable par dérivation, et toute suite décroissante de fermés analytiques est stationnaire. Nous dirons que $\mathcal{O}(\Omega)$ est *topologiquement noethérienne* si :

a) *$\mathcal{O}(\Omega)$ est faiblement noethérienne.*

b) *Il existe $\theta_\Omega \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $\forall x \in \Omega$, $\theta_\Omega(x) > 0$, et $\theta_\Omega(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ (∞ est le point à l'infini du compactifié d'Alexandroff de l'espace localement compact Ω).*

c) *Tout semi-analytique admet un nombre fini de composantes connexes.*

Si $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{O}(\Omega)^n$, nous dirons que f est transverse à 0 (et on écrit $f \pitchfork 0$) si en chaque point x de $f^{-1}(0)$, $D_x f$ est un isomorphisme ; alors $f^{-1}(0)$ est un sous-ensemble discret de Ω. Le premier résultat de cet article (§ 1 et 2) est le suivant :

THÉORÈME I. — *Dans la définition précédente, on peut remplacer la condition* c) *par la suivante :*

c′) *si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}(\Omega)$, il existe un entier N tel que $\forall f_1, \dots, f_n \in E$ avec $f \pitchfork 0$, on ait $\# f^{-1}(0) \leqslant N$.*

On démontre aussi, avec des arguments analogues, l'existence d'une borne uniforme pour le nombre de composantes connexes (ou plus généralement, la somme des nombres de Betti) des fibres d'un morphisme (cf. Théorème 1.5 ou Théorème II).

Dans le paragraphe 3, nous rappelons comment, grâce à la théorie de Khovanskii, on peut construire de nouvelles algèbres topologiquement noethériennes, en ajoutant à $\mathcal{O}(\Omega)$ les solutions d'équations différentielles du 1^er^ ordre ; enfin, nous terminons par quelques exemples et une remarque sur les courbes analytiques.

1. Définitions équivalentes.

1.1. Un sous-ensemble S de Ω est une *feuille analytique* s'il existe $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ tels que

$$S = \left\{ x \in \Omega\,; f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0 \quad \text{et} \quad \delta(x) = \frac{D(f_1, \dots, f_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}(x) \neq 0 \right\};$$

S est une *feuille semi-analytique* si c'est l'intersection d'une feuille analytique avec un ouvert $\{x \in \Omega\,; g_1(x)>0, \dots, g_h(x)>0\}$, $g_i \in \mathcal{O}(\Omega)$ (S est donc une variété analytique de codimension k).

PROPOSITION 1.2 (cf. [7], prop. 1.3). — *On suppose que* $\mathcal{O}(\Omega)$ *vérifie* a).

Alors tout fermé analytique F est la réunion disjointe d'un nombre fini de variétés analytiques S_i, *chaque* S_i *étant la réunion de certaines composantes connexes d'une feuille analytique* $\tilde{S}_i$.

En conséquence, tout semi-analytique est une réunion finie d'ensembles S_i, *chaque* S_i *étant réunion de certaines composantes connexes d'une feuille semi-analytique* $\tilde{S}_i$.

Remarque 1.3. — On suppose que $\mathcal{O}(\Omega)$ vérifie b).

Soit $[\mathcal{O}(\Omega)]$ l'ensemble des fractions f/g avec $f,\ g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $g \neq 0$, et soit $S = \{x \in \Omega\ ;\ f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\ ;\ \delta(x) \neq 0\ ;\ g_1(x) > 0, \ldots, g_h(x) > 0\}$ une feuille semi-analytique. Il existe $\theta_S \in [\mathcal{O}(\Omega)]$, définie et > 0 en chaque point de S, telle que $\theta_S(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, $x \in S$ (S est loc. compact, cf. b)). Il suffit de prendre $\theta_S = \theta_\Omega \cdot \dfrac{\delta^2}{1+\delta^2} \cdot \prod_{i=1}^{h} \dfrac{g_i}{1+g_i}$.

PROPOSITION 1.4. — $\mathbb{R}^p$ *étant paramétré par* $y = (y_1, \ldots, y_p)$, $\mathcal{O}(\Omega)[y]$ *est une algèbre de fonctions analytiques sur* $\Omega \times \mathbb{R}^p$. *Alors, si* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est faiblement noethérienne (resp. topologiquement noethérienne),* $\mathcal{O}(\Omega)[y]$ *est faiblement noethérienne (resp. topologiquement noethérienne).*

Preuve. — On peut supposer $p = 1$.

(1) Supposons d'abord que $\mathcal{O}(\Omega)$ est faiblement noethérienne et soit $\Omega \times \mathbb{R} = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_i \supset \cdots$ une suite décroissante de fermés analytiques pour $\mathcal{O}(\Omega)[y]$; nous devons montrer que la suite F_i est stationnaire. Si X est un fermé analytique irréductible de Ω, il suffit de trouver un fermé analytique $X' \subsetneq X$ tel que la suite :

(*) $\cdots \supset F_i \cap ((X \setminus X') \times \mathbb{R}) \supset F_{i+1} \cap ((X \setminus X') \times \mathbb{R}) \supset \cdots$ soit stationnaire (principe noethérien). Soit $\mathcal{I}(X)$ l'idéal premier de $\mathcal{O}(\Omega)$ formé des fonctions nulles sur X et posons $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I}(X)$; soit $\mathcal{I}(F_i)$ l'idéal de $\mathcal{O}(X)[y]$ formé des fonctions nulles sur $F_i \cap (X \times \mathbb{R})$; si $\bigcup_i \mathcal{I}(F_i) \neq 0$, il existe un polynôme $P = \delta . y^p + \cdots + \delta_0 \in \bigcup_i \mathcal{I}(F_i)$ de plus bas degré $p > 0 (\delta \in \mathcal{O}(X) \setminus \{0\})$. Alors, par division euclidienne par P, l'idéal $\bigcup_i \mathcal{I}(F_i) \cdot \mathcal{O}(X)_\delta[y]$, est engendré par P ; si $X' = \{x \in X ; \delta(x) = 0\}$, la suite (*) est stationnaire.

(2) Supposons que $\mathcal{O}(\Omega)$ est topologiquement noethérienne ; la condition b) est trivialement satisfaite par $\mathcal{O}(\Omega)[y]$, vérifions c).

Considérons un semi-analytique élémentaire (pour $\mathcal{O}(\Omega)[y]$) :

$$X = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} ; f(x,y)=0 ; g_1(x,y)>0, \ldots, g_h(x,y)>0\}$$

avec $f(x,y) = \sum_{j=0}^{q} f_j(x)y^j$; $g_i(x,y) = \sum_{j=0}^{q} g_{ij}(x)y^j$. Notons $\mathbb{R}^{(q+1)(h+1)}$ l'espace euclidien paramétré par les variables f_j et g_{ij}, et soit X' le semi-algébrique de $\mathbb{R}^{(q+1)(h+1)} \times \mathbb{R}$ défini par :

$$X' = \left\{(f_j; g_{ij}; y); \sum_{j=0}^{q} f_j y^j = 0 ; \sum_{j=0}^{q} g_{ij} y^j = 0, i=1, \ldots, h\right\}.$$

Il existe une stratification de $\mathbb{R}^{(q+1)(h+1)}$ en strates semi-algébriques X'_α, telles que chaque ensemble $X' \cap (X'_\alpha \times \mathbb{R})$ soit une réunion finie de « tranches » $X'_{\alpha\beta}$ (i.e il existe des fonctions de Nash $\theta_1, \ldots, \theta_{s-1}$ au voisinage de X'_α telles que $\forall \xi \in X'_\alpha$, $-\infty = \theta_0(\xi) < \theta_1(\xi) < \cdots < \theta_s(\xi) = +\infty$ et telles que $X' \cap (X'_\alpha \times \mathbb{R})$ soit une réunion peut-être vide d'ensembles $X'_{\alpha\beta}$ de la forme $\{(\xi, y) \in X'_\alpha \times \mathbb{R}; \theta_i(\xi) < y < \theta_{i+1}(\xi)\}$ ou de la forme

$$\{(\xi, y) \in X'_\alpha \times \mathbb{R};\ y = \theta_i(\xi)\}).$$

Soit ϕ l'application :

$$\Omega \ni x \to (f_j(x); g_{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{(q+1)(h+1)}.$$

Alors X est la réunion disjointe des tranches $(\phi \times \mathrm{id})^{-1}(X'_{\alpha\beta})$ et $(\phi \times \mathrm{id})^{-1}(X'_{\alpha\beta})$ est une tranche au-dessus de $(\phi^{-1}(X'_\alpha)$ qui par hypothèse admet un nombre fini de composantes connexes ; X admet donc un nombre fini de composantes connexes, c.q.f.d.

Nous terminons ce paragraphe par la démonstration de *« topologiquement noethérienne »* $\Rightarrow$ *c')* ; nous verrons dans le prochain paragraphe que b) + c') $\Rightarrow$ c), ce qui achèvera la preuve du théorème I. Soit $g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{O}(\Omega)$ une base de E (cf. c')) ; si $f_1, \ldots, f_n$ sont des éléments génériques de E, écrivons $f_i = \sum_{j=1}^{N} y_{ij} g_j$. L'ensemble $f_1 = \cdots = f_n = 0$ s'interprète comme un fermé analytique F de $\Omega \times \mathbb{R}^{nN}$ (pour $\mathcal{O}(\Omega)[y_{ij}]$, qui d'après 1.4, est topologiquement noethérienne) ; si $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^{nN}$ est la projection canonique, il suffit de montrer que le nombre de composantes connexes de $\pi^{-1}(y) \cap F$ est uniformément borné quand y décrit $\mathbb{R}^{nN}$. Après un changement de notations, l'implication sera une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 1.5. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre analytique topologiquement noethérienne ; soit $\pi : \Omega \ni (x,y) \to y \in \mathbb{R}^p$ la projection canonique, et soit X un semi-analytique de Ω. Alors le nombre de composantes connexes de $\pi^{-1}(y) \cap X$ est uniformément borné quand y décrit $\mathbb{R}^p$.*

Preuve. — On reprend les arguments de Moussu-Roche [6] et on raisonne par récurrence sur p ; si $p = 0$, le résultat est vrai car $\mathcal{O}(\Omega)$ est topologiquement noethérienne ; supposons $p > 0$. Posons :

$$X_y = X \cap \pi^{-1}(y) \; ; \; \omega(X) = \sup_y (\dim X_y) .$$

On va raisonner par récurrence sur $\omega(X)$; d'après la proposition 1.2 et l'hypothèse de noethérianité, il suffit de démontrer le résultat suivant :

(*) *Soit $X \neq \phi$ une réunion de composantes connexes d'une feuille semi-analytique S ; alors il existe un fermé analytique F tel que $X' = X \setminus F$ soit non vide et tel que le théorème soit vrai pour X' et π.*

Supposons que $S = \{(x,y) \in \Omega \, ; \; f_1(x,y) = \cdots = f_k(x,y) = 0 \, ; \delta(x,y) \neq 0 \, ; g_1(x,y) > 0 , \ldots , g_h(x,y) > 0\}$ (δ est un jacobien de $(f_1, \ldots, f_k)$). Soit $p - \beta$ le rang maximum de $\pi | X$; alors il existe un jacobien

$$\delta'(x,y) = \frac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\alpha} ; y_{j_1}, \ldots, y_{j_\beta})}$$

avec $\alpha + \beta = k$, tel que $\delta' | X \neq 0$. Choisissons $F = \{(x,y) \in \Omega \, ; \delta'(x,y) = 0\}$; alors $\pi | X' : X' \to \mathbb{R}^p$ a un rang constant $p - \beta$ et chaque fibre $\pi^{-1}(y) \cap X'$ est une variété de dimension $n - \alpha$. Si $n - \alpha > 0$, chaque composante connexe de $\pi^{-1}(y) \cap X'$ est non compacte, car la projection $\pi^{-1}(y) \cap X' \to \{x \in \mathbb{R}^n \, ; x_{i_1} = \cdots = x_{i_\alpha} = 0\}$ est ouverte. Avec les notations de 1.3, posons $\theta_{X'} = \theta_S \cdot \dfrac{\delta'^2}{1 + \delta'^2}$; on a $\theta_{X'} > 0$ en chaque point de X' et $\theta_{X'}(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \in X'$ tend vers l'infini (au sens de b)). Pour démontrer (*), deux cas sont à considérer :

(1) La dimension $n - \alpha$ de la fibre $\pi^{-1}(y) \cap X'$ est > 0. L'ensemble $X'' = \{(x,y) \in X' ; \operatorname{grad}(\theta_{X'} | \pi^{-1}(y) \cap X')(x,y) = 0\}$ est alors un semi-

analytique $X'' \subset X'$. En effet, X'' est exactement le sous-ensemble de X' où s'annulent tous les déterminants d'ordre $\alpha + 1$ de la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x}, \frac{\partial \theta_{X'}}{\partial x}\right).$$

Chaque composante connexe T de $\pi^{-1}(y) \cap X'$ rencontre X'' et $\dim(X'' \cap T) < \dim T$; en effet, $\theta_{X'} | T$ est > 0 en chaque point et $\to 0$ au bord, lequel est non vide. Il en résulte que $\theta_{X'} | T$ est non constante ; en outre, son gradient s'annule aux points où $\theta_{X'} | T$ atteint son maximum. L'hypothèse de récurrence (sur $\omega(X)$) entraîne le théorème pour (X'',π) et *a fortiori* pour (X',π).

(2) La dimension $n - \alpha$ de la fibre $\pi^{-1}(y) \cap X'$ est nulle, i.e. les fibres sont finies. Considérons deux cas :

(2.1) Si le rang $p - \beta$ est $< p$, soit π' la projection de $\mathbb{R}^p$ sur l'hyperplan $\{y \in \mathbb{R}^p ; y_{i_1} = \cdots = y_{j_\beta} = 0\}$; alors $\pi' \circ \pi | X' : X' \to \mathbb{R}^{p-\beta}$ admet des fibres finies ; d'après l'hypothèse de récurrence sur p, le théorème est vrai pour $(X',\pi' \circ \pi)$, et donc il est vrai *a fortiori* pour (X',π).

(2.2) Si le rang est p, choisissons un hyperplan $\mathbb{R}^{p-1}$ de $\mathbb{R}^p$ et soit encore $\pi' : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-1}$ la projection ; $\pi' \circ \pi | X' : X' \to \mathbb{R}^{p-1}$ est alors une submersion, et chaque fibre de cette application est une réunion disjointe de courbes analytiques connexes ; une telle courbe ℓ ne contient pas deux points a, $b \in \pi^{-1}(y) \cap X'$, car sinon par le « lemme de Rolle-Khovanskii » (cf. lemme 3.2), il existerait un point de $\ell \subset X'$ où le vecteur tangent à ℓ serait parallèle à $\mathbb{R}^n = \pi^{-1}(y)$; mais ceci est impossible, car en chaque point $(x,y) \in X'$, le plan tangent à X' coupe transversalement $\pi^{-1}(y)$. Le théorème est vrai pour $(X',\pi' \circ \pi)$ (récurrence sur p), et donc il est vrai pour (X',π). Ceci achève la démonstration du théorème ; l'idée de 1 (réduction sur $\omega(X')$) se trouve dans Gabrielov, cf. [2], [4] ; l'idée de 2 (réduction sur p) est celle de Moussu-Roche [6].

Remarque 1.6. — Supposons que $\mathcal{O}(\Omega)$ est une algèbre analytique qui contient $\mathbb{R}[x]$ et qui est stable par dérivation. Alors $\mathcal{O}(\Omega)$ est topologiquement noethérienne ssi elle vérifie b), c) et la condition suivante qui remplace a) :

a') *Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, l'ensemble des points réguliers* Reg $V(f)$ *de l'ensemble des zéros $V(f)$ de f admet un nombre fini de composantes connexes.*

En effet, si $\mathcal{O}(\Omega)$ est faiblement noethérienne, Reg $V(f)$ est semi-analytique (cf. [1]) et donc c) et a) impliquent a'). Réciproquement, si l'ensemble Reg $V(f)$ des points réguliers de $V(f)$ admet un nombre fini de composantes connexes ($\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$), alors $\mathcal{O}(\Omega)$ est faiblement noethérienne. En effet, associons à $V(f)$ la suite $S_f = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$ où k_i est le nombre de composantes connexes de codimension i de Reg $V(f)$ et munissons l'ensemble de ces suites de l'ordre lexicographique ; alors $V(f) \underset{\neq}{\supset} V(g)$ implique $S_f > S_g$ (rappelons que Reg $V(f)$ est dense dans $V(f)$). Cela entraîne que toute suite décroissante de fermés analytiques est stationnaire.

On peut affaiblir la condition a') et la remplacer par la suivante qui sera utilisée au § 2 :

a") $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, *il existe un nombre fini de variétés analytiques connexes* S_i *vérifiant la condition suivante : à toute composante connexe* X *de* Reg $V(f)$ *on peut associer un* S_i *tel que* $\dim S_i = \dim X$ et tel que $X \cap S_i$ *soit un ouvert non vide à la fois de* X *et* S_i.

2. Réciproques : Théorèmes II, II'.

2.1. Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre analytique (contenant $\mathbb{R}[x]$ et stable par dérivation) et soient E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}(\Omega)$, N un entier > 0. On note $\phi(E,N)$ l'ensemble de tous les semi-analytiques X de la forme

$$\{x \in \Omega \,; f(x)=0 \,; g_1(x) \,?\, 0, \ldots, g_N(x) \,?\, 0\}$$

avec $f, g_1, \ldots, g_N \in E$; ? est $\geqslant$ ou $>$; nous dirons que $\phi(E,N)$ est une « famille bornée de semi-analytiques ».

Téorème II. — *Supposons que* $\mathcal{O}(\Omega)$ *vérifie les conditions* b) *et* c') ; *alors, avec les notations précédentes, il existe une constante* $M > 0$ *telle que,* $\forall X \in \phi(E,N)$, *la somme* $b(X)$ *des nombres de Betti de* X *soit majorée par* M *(l'homologie considérée est singulière à coefficients dans un corps commutatif quelconque) ; en particulier,* $\mathcal{O}(\Omega)$ *vérifie* c).

Preuve. — La démonstration s'inspire de Milnor [5].

Si $\varepsilon > 0$, soit X'_ε le semi-analytique contenu dans X obtenu en remplaçant chaque inégalité $g_i(x) > 0$ par $g_i(x) \geqslant \varepsilon$; posons $X_\varepsilon = X'_\varepsilon \cap \{x \in \Omega \,; \theta_\Omega(x) \geqslant \varepsilon\}$. Les X_ε forment dans X une famille exhaustive de compacts ; quand X décrit $\phi = \phi(E,N)$ et $\varepsilon > 0$, les X_ε forment encore une famille bornée de semi-analytiques. Il suffit de démontrer le théorème pour cette dernière famille et l'on peut supposer que tous les $X \in \phi$ sont compacts, de la forme :

$$\{x \in \Omega \,;\, g_1(x) \geqslant 0, \ldots, g_N(x) \geqslant 0\}.$$

Soient ε, δ tels que $\varepsilon \geqslant \varepsilon^N \geqslant \delta > 0$ et notons $X_{\varepsilon,\delta}$ le sous-ensemble de Ω défini par $g_1 + \varepsilon \geqslant 0, \ldots, g_N + \varepsilon \geqslant 0, (g_1+\varepsilon) \ldots (g_N+\varepsilon) - \delta \geqslant 0$; visiblement, $X_{\varepsilon,\delta} \supset X$, et si δ est une valeur non critique de $(g_1+\varepsilon) \ldots (g_N+\varepsilon)$, $X_{\varepsilon,\delta}$ est une sous-variété à bord de Ω et $\partial X_{\varepsilon,\delta}$ est défini par $(g_1+\varepsilon) \ldots (g_N+\varepsilon) = \delta$. Soit $\varepsilon_i \downarrow 0$ une suite monotone décroissante et choisissons δ_i, valeur non critique de $(g_1+\varepsilon_i) \ldots (g_N+\varepsilon_i)$, telle que $0 < \delta_i < (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})^N$. Visiblement, $X_{\varepsilon_1,\delta_1} \supset X_{\varepsilon_2,\delta_2} \supset \cdots \supset X_{\varepsilon_i,\delta_i} \supset \cdots$ et l'intersection des $X_{\varepsilon_i,\delta_i}$ égale X.

X étant compact, il existe un indice i et $\tilde{X}_{\varepsilon_i,\delta_i}$, réunion d'un nombre fini de composantes connexes compactes de $X_{\varepsilon_i,\delta_i}$, tels que $X \subset \tilde{X}_{\varepsilon_i,\delta_i}$. Notons $\tilde{X}_{\varepsilon_j,\delta_j} (j \geqslant i)$ la variété compacte à bord réunion des composantes connexes de $X_{\varepsilon_j\delta_j}$ contenues dans $\tilde{X}_{\varepsilon_i,\delta_i}$: alors $\cdots \supset \tilde{X}_{\varepsilon_j,\delta_j} \supset \tilde{X}_{\varepsilon_{j+1},\delta_{j+1}} \supset \cdots$ et $X = \bigcap\limits_{j \geqslant i} \tilde{X}_{\varepsilon_j,\delta_j}$. Si V est une sous-variété compacte à bord de dimension n de $\mathbb{R}^n$, on sait que $b(\partial V) = 2b(V)$ (cf. [5]). Quand tous les paramètres varient, les $(g_1+\varepsilon) \ldots (g_N+\varepsilon) - \delta$ décrivent un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}(\Omega)$; ainsi, le théorème résultera du lemme suivant :

Lemme 2.2. — *Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}(\Omega)$ et pour chaque $f \in E$, soit X_f une réunion finie (éventuellement vide) de composantes connexes compactes de l'hypersurface $f = 0$ telle que en tout point x de X_f, on ait $df(x) \neq 0$. Alors, sous les hypothèses du théorème II, $b(X_f)$ est uniformément borné.*

Preuve. — Pour chaque $f \in E$, on peut trouver des réels $\nu_1, \ldots, \nu_n$ tels que la forme linéaire $\nu_1 x_1 + \cdots + \nu_n x_n$ soit une fonction de Morse sur X_f et l'on sait que le nombre de points critiques de cette fonction de Morse majore $b(X_f)$; or un point $x \in \Omega$ est critique si seulement si $f(x) = 0$ et $(\nu_1, \cdots, \nu_n)$ est proportionnel à $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, i.e. si $\nu_1 \neq 0$, si et seulement si $f(x) = 0$,

$$\nu_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} - \nu_2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \nu_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} - \nu_n \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0$$

en outre, x est non dégénéré ssi

$$\left(f, \nu_1\frac{\partial f}{\partial x_2}-\nu_2\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \nu_1\frac{\partial f}{\partial x_n}-\nu_n\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \pitchfork 0 \text{ en } x.$$

Toutes ces fonctions appartiennent elles aussi à un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}(\Omega)$; la condition c') implique donc le résultat.

2.3. On peut remplacer la condition c') en supposant que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, au lieu d'être transverse à zéro, est un morphisme fini en chaque point $x \in f^{-1}(0)$. On note alors $\# f^{-1}(0)$, le nombre de points de $f^{-1}(0)$, chaque point étant compté avec sa multiplicité ; donc :

$$\# f^{-1}(0) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_x/(f_{1,x}-f_1(x), \ldots, f_{n,x}-f_n(x)))$$

$\mathcal{H}_x$ désignant l'algèbre des germes de fonctions analytiques réelles en x.

THÉORÈME II'. — *Une algèbre analytique $\mathcal{O}(\Omega)$, stable par dérivation et contenant $\mathbb{R}[x]$, est topologiquement noethérienne si et seulement si elle vérifie, outre la condition* b), *la condition*

c'') *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}(\Omega)$, il existe un entier M tel que $\forall f_1, \ldots, f_n \in E$, avec $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ morphisme fini en chaque point $x \in f^{-1}(0)$, on ait $\# f^{-1}(0) \leqslant M$.*

Preuve. — Si $\mathcal{O}(\Omega)$ est faiblement noethérienne, il existe d'après [9] une constante M telle que $\forall f \in E^n$ et $\forall x \in \Omega$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}_x/(f_{1,x}-f_1(x), \ldots, f_{n,x}-f_n(x))) \leqslant M$ ou $= \infty$. Il résulte de là et de 1.5 que topologiquement noethérien $\Rightarrow$ c''). Réciproquement, si c'') et b) sont satisfaites, c') est satisfaite et d'après le théorème II, c) est satisfaite. D'après la remarque 1.6, il suffit de vérifier a'') ; remarquons tout d'abord que la condition c'') implique la suivante :

c''') *Si $S = \{x \in \Omega\,; f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\,; \delta(x) \neq 0\}$ est une feuille analytique et si $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, la multiplicité de $g|S$ en chaque point $x \in S$ où elle est $< \infty$, est uniformément bornée par un M.*

En effet, cette multiplicité est la dimension sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{H}_x/(f_{1,x}, \ldots, f_{k,x}, g_x, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n)$, où $\xi_{k+2}, \ldots, \xi_n$ sont des fonctions affines convenables ; mais $f_1, \ldots, f_k$, g, et les fonctions affines sont évidemment contenues dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}(\Omega)$, d'où le résultat.

Soit X une composante connexe de Reg $V(f)$ et supposons un instant que X est de codimension un ; d'après la condition c'''), il existe un entier n_0, tel que la multiplicité de f en un point x de Ω soit ou infinie, ou bornée par n_0. Ainsi, il existe une dérivée $f_1 = D^{\omega}f$ de f, $|\omega| \leqslant n_o$, et un indice i_1, tels que $f_1 \equiv 0$ sur X et $\Delta = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \not\equiv 0$ sur X. Ainsi $X \backslash V(\Delta)$ est un ouvert non vide de la variété $\{x \in \Omega\,; f_1(x)=0, \Delta(x) \neq 0\}$. Ce que l'on vient de faire en codimension un peut être fait pour une composante quelconque X par itération, en utilisant le lemme 1.2 de [7] et la condition c‴). Ainsi, on obtient un nombre fini de systèmes $f_\alpha = (f_{\alpha,1}, \ldots f_{\alpha,k_\alpha})$, Δ_α (les $f_{\alpha,i} \in \mathcal{O}(\Omega)$ se déduisent de f par extensions jacobiennes et Δ_α est un jacobien d'ordre k_α de f_α) tel que à toute composante connexe X de Reg $V(f)$ on puisse associer un $\alpha = \alpha(X)$ pour lequel $X \backslash V(\Delta_\alpha)$ soit un ouvert non vide de la feuille analytique $S_\alpha = \{x \in \Omega\,; f_\alpha(x)=0\,; \Delta_\alpha(x) \neq 0\}$. La condition c) étant satisfaite, chacune de ces feuilles admet un nombre fini de composantes connexes. La condition a″) est donc satisfaite, c.q.f.d.

Extension 2.4. — Soit Γ une sous-variété analytique, localement fermée et de dimension n de $\mathbb{R}^N$; on suppose qu'il existe une projection linéaire $\pi' : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ telle que $\pi = \pi'|\Gamma$ de Γ dans $\mathbb{R}^n$ soit un difféomorphisme local. Si $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ est analytique, on définit $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ par la formule évidente $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \pi^{-1})(\pi(a))$, π^{-1} inverse local, $\pi^{-1}\pi(a) = a$. Soit $\mathcal{O}(\Gamma)$ une algèbre de fonctions analytiques réelles sur Γ ; le couple $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ est *faiblement noethérien* si $\mathcal{O}(\Gamma)$ contient la restriction à Γ des polynômes sur $\mathbb{R}^N$; $\mathcal{O}(\Gamma)$ est stable pour les dérivations $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$; enfin, toute suite décroissante $\cdots \supset V(f_i) \supset V(f_{i+1}) \supset \cdots$ ($f_i \in \mathcal{O}(\Gamma)$) de fermés analytiques est stationnaire. Le couple $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ est *topologiquement noethérien* s'il est faiblement noethérien et s'il vérifie les conditions b) (il existe $\theta_\Gamma \in \mathcal{O}(\Gamma)$ telle que $\forall x \in \Gamma, \theta_\Gamma(x) > 0$, et $\theta_\Gamma(x) \to 0$ quand $x \to \infty$) et c) (tout semi-analytique défini par un nombre fini de fonctions de $\mathcal{O}(\Gamma)$ admet un nombre fini de composantes connexes). *Tous les résultats précédents s'étendent de manière évidente à* $\mathcal{O}(\Gamma)$.

Exemples 2.5.

(2.5.1) Soit $S \subset \Gamma$ une feuille semi-analytique, i.e. $S = \{x \in \Gamma\,; f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\,; g_1(x) > 0, \ldots, g_h(x) > 0\,; \delta(x) \neq 0\}$, avec $\delta = \dfrac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$; $f_i, g_j \in \mathcal{O}(\Gamma)$. Soit X une composante connexe de S et notons $\mathcal{O}(X)$ l'algèbre des restrictions à X de tous les quotients f/g avec $f, g \in \mathcal{O}(\Gamma)$ et $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$. Soit π' la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-k} = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_{i_1} = \cdots = x_{i_k} = 0\}$ et posons $\pi_X = \pi' \circ \pi | X$. Alors, si $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ est topologiquement noethérien, $(\mathcal{O}(X), \pi_X)$ l'est aussi (vérification immédiate).

(2.5.2) Soient $\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}\, dx_j$, k formes différentielles sur $\Gamma (\theta_{ij} \in \mathcal{O}(\Gamma), \forall i,j)$ et soit X une sous-variété analytique fermée de codimension k de Γ telle que, $\forall x \in X$, l'espace tangent $T_x X$ soit le noyau $\omega_{1,x} = \cdots = \omega_{k,x} = 0$ de $(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ en x (donc $\omega_1, \ldots, \omega_k$ sont indépendantes en chaque point $x \in X$). Posons $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_I \delta_I\, dx_I$ avec $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$; si $X_I = X \cap \{x \in \Gamma ; \delta_I(x) \neq 0\}$, on a $X = \bigcup_I X_I$. Soit π'_I la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-k} = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_{i_1} = \cdots x_{i_k} = 0\}$ et posons $\pi_{X_I} = \pi'_I \circ \pi | X_I$; enfin, soit $\mathcal{O}(X_I)$ l'algèbre des restrictions à X_I de tous les quotients f/g avec $f, g \in \mathcal{O}(\Gamma)$ et $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X_I$.

Si $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ est faiblement noethérien, $(\mathcal{O}(X_I), \pi_{X_I})$ l'est aussi. En effet, si $f \in \mathcal{O}(\Gamma)$ et si $i \notin (i_1, \ldots, i_k)$, la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_i}(f | X_I)$ s'exprime à l'aide des $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, et des $\frac{\delta_J}{\delta_I}$. Il en résulte que $(\mathcal{O}(\Gamma) | X_I)_{\delta_I}$, et donc $\mathcal{O}(X_I)$, sont stables par dérivation ; en outre, toute suite décroissante de fermés analytiques est stationnaire.

Si $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ est topologiquement noethérien, une CNS pour que tous les $(\mathcal{O}(X_I), \pi_{X_I})$ soient topologiquement noethériens est que l'intersection avec X de tout semi-analytique (pour $\mathcal{O}(\Gamma)$), admette un nombre fini de composantes connexes. Nous allons voir dans le prochain paragraphe, que sous certaines hypothèses, cette dernière condition est satisfaite.

3. Variétés de Pfaff.

Les résultats de [6] sur les « hypersurfaces séparantes » se transposent facilement au cadre plus général envisagé ici. Soit $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ un couple topologiquement noethérien (cf. 2.3) ; on suppose Γ connexe.

DÉFINITION 3.1. — *Soit* $\omega = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \, dx_i$ *une forme différentielle à coefficients* $\theta_i \in \mathcal{O}(\Gamma)$. *Une hypersurface analytique fermée* S *de* Γ *est* séparante pour ω *si :*

a) $\Gamma \backslash S$ *admet deux composantes connexes, chacune admettant* S *comme frontière ; en outre* S *est connexe.*

b) *En chaque point* x *de* S, *l'espace tangent* $T_x S$ *est le noyau de* ω_x.

LEMME 3.2 (Rolle-Khovanskii). — *Soit* $C \subset \Gamma$ *une variété de classe* C^1 *connexe et de dimension* 1 *; si* C *rencontre l'hypersurface* S *(séparante pour* ω*) en deux points distincts* x_1, x_2, *il existe un point* $x \in C$ *tel que* $T_x C \subset \ker \omega_x$.

Preuve. — Choisissons une orientation sur C et soit V_x le vecteur tangent unitaire (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$), orienté positivement, en $x \in C$. Soit $\widehat{x_1 x_2} \subset C$ un arc joignant $x_1 \in S$ à $x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$; on peut supposer que l'arc ouvert d'extrémités x_1, x_2 est contenu dans une composante de $\Gamma \backslash S$; on peut supposer que $\langle \omega_{x_1}, V_{x_1} \rangle \neq 0$ et $\langle \omega_{x_2}, V_{x_2} \rangle \neq 0$, car sinon le résultat est trivial. L'hypothèse entraîne alors que $\langle \omega_{x_1}, V_{x_1} \rangle$ et $\langle \omega_{x_2}, V_{x_2} \rangle$ sont de signes contraires, et par continuité, $\langle \omega_x, V_x \rangle$ s'annule en un point $x \in C$.

3.3. THÉORÈME III. — *Soit* $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ *un couple topologiquement noethérien et soient* $\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \, dx_j$, $i = 1, \ldots, p$, *des formes différentielles à coefficients* $\theta_{ij} \in \mathcal{O}(\Gamma)$. *Si* $S_1, \ldots, S_p$ *sont des hypersurfaces séparantes pour* $\omega_1, \ldots, \omega_p$ *respectivement, et si* X *est un semi-analytique (pour* $\mathcal{O}(\Gamma)$*), alors* $S_1 \cap \cdots \cap S_p \cap X$ *admet un nombre fini de composantes connexes.*

Preuve. — Elle est analogue à celle du théorème 1.5 (dans le contexte de ce théorème, les ω_i seraient les dy_i et les variétés séparantes, les hyperplans $y_1 = cte, \ldots, y_p = cte$). On raisonne par récurrence sur l'ensemble des couples (p, q) ordonné lexicographiquement avec p = nombre de S_i ; $q = \dim (S_1 \cap \cdots \cap S_p \cap X)$; si $p = 0$, le résultat est vrai car $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ est topologiquement noethérienne.

D'après la proposition 1.2, on peut supposer que X est une réunion de composantes connexes d'une feuille semi-analytique $S = \{x \in \Gamma \,; f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0 \,; \delta(x) \neq 0; g_1(x) > 0 \,, \ldots, g_h(x) > 0\}$ (δ

est un jacobien de $f_1, \ldots, f_k)$. Par noethérianité, il suffit de trouver un fermé analytique F tel que $X' = X \backslash F$ soit non vide, le théorème étant vrai pour X'.

Soit Ω_x le sous-espace vectoriel de $T_x^*(\Gamma)$ engendré par les $\omega_{i,x}$, $i = 1, \ldots, p$ et $d_x f_1, \ldots, d_x f_k$; posons $p' + k = \sup_{x \in X} \dim \Omega_x$ (donc $p' \leqslant p$); quitte à réindexer les ω_i, on peut supposer que

$$(*) \qquad df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p'} = \sum_I \theta_I \, dx_I$$

avec un multi-indice J tel que $\theta_J | X \neq 0$. Choisissons $X' = X \backslash F$ avec $F = \{x \in \Gamma ; \theta_J(x) = 0\}$. D'après (*), les variétés X', $S_1, \ldots, S_{p'}$ sont en position générale en chaque point $x \in X'$ et $S_1 \cap \cdots \cap S_{p'} \cap X'$ est une variété de codimension $p' + k$ dans Γ, donc de dimension $q' = n - (p'+k)$. Le choix de p' entraîne que toute composante connexe de $S_1 \cap \cdots \cap S_p \cap X'$ est une composante connexe de $S_1 \cap \cdots \cap S_{p'} \cap X'$; en particulier, si $S_1 \cap \cdots \cap S_p \cap X' \neq \phi$ on a $q' = \dim (S_1 \cap \cdots \cap S_p \cap X') \leqslant q$. Il suffit de montrer que $S_1 \cap \cdots \cap S_{p'} \cap X'$ admet un nombre fini de composantes connexes. On peut supposer $p' = p$ (sinon on applique l'hypothèse de récurrence à X'); deux cas sont à considérer :

(1) *On a* $q > 0$. On peut supposer $q' = q$, car sinon on applique l'hypothèse de récurrence à X'. Soit $\theta_{X'} \in \mathcal{O}(\Gamma)$ telle que $\theta_{X'} > 0$ en chaque point de X' et $|\theta_{X'}(x) \to 0$ quand $x \in X'$ tend vers l'infini (au sens de b)). Posons :

$$X'' = \{x \in X'; d\theta_{X'} \wedge df_1 \wedge \cdots df_k \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p'}(x) = 0\}.$$

Alors $X'' \cap (S_1 \cap \cdots \cap S_p)$ est exactement l'ensemble des points critiques de $\theta_{X'} | X' \cap (S_1 \cap \cdots \cap S_p)$ et rencontre donc toute composante connexe T de $X' \cap (S_1 \cap \cdots \cap S_p)$. Il suffit de montrer que $X'' \cap (S_1 \cap \cdots \cap S_p)$ admet un nombre fini de composantes connexes; mais $\theta_{X'} | T$ est non constante; en effet, si $q > 0$, T est non compacte (si $\pi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q = \{x; x_j = 0, \forall j \in J\}$ est la projection canonique, l'application $\pi' \circ \pi | T$ étale T dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^q$). Il en résulte que $\dim X'' \cap (S_1 \cap \cdots \cap S_p) < q$, d'où le résultat par récurrence.

(2) *On a* $q = 0$, $p > 0$: $X' \cap (S_1 \cap \cdots \cap S_p)$ est alors un ensemble de points isolés x_α ; $X' \cap (S_2 \cap \cdots \cap S_p)$ admet d'après l'hypothèse de récurrence un nombre fini de composantes connexes C qui sont des

courbes analytiques. Tout point x_α appartient à une courbe C et chaque courbe C contient au plus un point x_α ; en effet, si $x_\alpha, x_\beta \in C$, $x_\alpha \neq x_\beta$, on aurait $x_\alpha, x_\beta \in S_1$ et d'après 3.2 il existerait $x \in C$ tel que

$$T_xC \subset \ker \omega_{1,x}, \text{ d'où } T_xC \subset \bigcap_{i=1}^{p} \ker \omega_{i,x} ;$$

ainsi $T_xX' \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \omega_{i,x}\right) \neq 0$ ce qui contredit l'inégalité

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(x) \neq 0.$$

COROLLAIRE 3.4. — *Soit Γ une sous-variété analytique localement fermée de $\mathbb{R}^N$ et soit $\pi : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ une projection linéaire qui étale Γ dans $\mathbb{R}^n$; soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $(\mathcal{O}(\Gamma \times I), \pi \times \mathrm{id})$ un couple topologiquement noethérien ; enfin, soit $\varphi : \Gamma \to I$ une fonction analytique telle que $\forall i = 1, \ldots, n$:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i(x, \varphi(x))$$

avec $f_i \in \mathcal{O}(\Gamma \times I)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors, si $\mathcal{O}(\Gamma)$ est l'ensemble des fonctions $f(x, \varphi(x))$ avec $f \in \mathcal{O}(\Gamma \times I)$, le couple $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ est topologiquement noethérien.

Preuve. — On a $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x, \varphi(x)) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot f_i\right)(x, \varphi(x))$ et donc $\mathcal{O}(\Gamma)$ est une algèbre stable par dérivation, contenant les polynômes. Si $\theta_{\Gamma \times I}$ est associée par b) à $\mathcal{O}(\Gamma \times I)$, $\theta_\Gamma = \theta_{\Gamma \times I}(x, \varphi(x))$ vérifie b) pour $\mathcal{O}(\Gamma)$. Démontrer la condition c) (pour $\mathcal{O}(\Gamma)$) revient à montrer que l'intersection avec le graphe de θ de tout semi-analytique (pour $\mathcal{O}(\Gamma \times I)$) admet un nombre fini de composantes connexes. Or le graphe de θ est une variété séparante pour la forme de Pfaff :

$$\omega = dy - \sum_{i=1}^{n} f_i(x, y)\, dx_i$$

et c) est une conséquence du théorème III. Enfin, toute suite décroissante $\cdots \supset V(f_i(x, \theta(x)) \supset V(f_{i+1}(x, \theta(x)) \supset \cdots$ est stationnaire car la suite $\cdots \supset V(f_i(x, y)) \supset V(f_{i+1}(x, y)) \supset \cdots$ l'est.

4. Exemples.

4.1. Par composition, restriction, application du corollaire 3.4, on construit facilement de nouvelles algèbres topologiquement noethériennes. Nous éviterons ici une fastidieuse théorie générale : voici simplement un exemple.

Remarquons tout d'abord que les conditions a′) et c) ne font intervenir qu'un nombre fini de fonctions appartenant à $\mathcal{O}(\Omega)$. Si $\mathcal{O}_\alpha(\Omega)$ est une famille totalement ordonnée par inclusion d'algèbres topologiquement noethériennes, leur réunion est donc aussi topologiquement noethérienne. De même, une intersection d'algèbres topologiquement noethériennes est topologiquement noethérienne.

Soit $\mathcal{U} = (\Omega_i)i \in I$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ (n variable) satisfaisant la condition suivante :

– $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^n \in \mathcal{U}$.

Associons à chaque $\Omega_i \in \mathcal{U}$ une algèbre topologiquement noethérienne $\mathcal{O}(\Omega_i)$ et supposons que la condition suivante est satisfaite :

(4.1.1) $\quad \forall N \quad$ et $\quad \forall i_1, \ldots, i_N \in I : \mathcal{O}(\Omega_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(\Omega_{i_N})$

est une algèbre de fonctions sur $\Omega_{i_1} \times \cdots \times \Omega_{i_N}$ qui est topologiquement noethérienne. Nous dirons que l'ensemble des $\mathcal{O}(\Omega_i)$, $i \in I$, est une *famille de Liouville* $(\mathcal{O},\mathcal{U})$. Si $(\mathcal{O},\mathcal{U})$, $(\mathcal{O}',\mathcal{U}')$ sont deux familles de Liouville, nous écrirons $(\mathcal{O},\mathcal{U}) \leqslant (\mathcal{O}',\mathcal{U}')$ si $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ et si pour tout $\Omega \in \mathcal{U}$, $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{O}'(\Omega)$; l'ensemble de ces familles est donc ordonné.

PROPOSITION 4.2. — *Soit $(\mathcal{O},\mathcal{U})$ une famille de Liouville ; il existe une plus petite famille de Liouville $(\tilde{\mathcal{O}},\tilde{\mathcal{U}})$ vérifiant les conditions suivantes :*

(4.2.1) $$(\mathcal{O},\mathcal{U}) \leqslant (\tilde{\mathcal{O}},\tilde{\mathcal{U}}).$$

(4.2.2) *Si $\Omega \in \tilde{\mathcal{U}}$ et si U est un semi-analytique ouvert de Ω défini par des inégalités $f_1 > 0, \ldots, f_h > 0$, avec $f_1, \ldots, f_h \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$, alors $U \in \tilde{\mathcal{U}}$; de même, si Ω, $\Omega' \in \tilde{\mathcal{U}}$, on a $\Omega \times \Omega' \in \tilde{\mathcal{U}}$.*

(4.2.3) *$(\tilde{\mathcal{O}},\tilde{\mathcal{U}})$ est stable par composition, i.e. $\forall \Omega, \Omega' \in \tilde{\mathcal{U}}$, $f : \Omega \to \Omega'$ à composantes dans $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ et $g \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega')$, on a $g \circ f \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$.*

(4.2.4) *Si θ analytique réelle dans $\Omega \in \tilde{\mathcal{U}}$ vérifie un système $\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i} = f_i(x,\theta(x))$ avec $f_i \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega \times I)$, $i = 1, \ldots, n$, alors $\theta \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$.*

Preuve. — Il suffit de montrer que l'ensemble des familles de Liouville $(\tilde{\mathcal{O}},\tilde{\mathcal{U}})$ vérifiant (4.2.i), $i = 1, \ldots, 4$, est non vide, car l'intersection de ces familles de Liouville vérifiera encore ces conditions et ce sera la plus petite famille de Liouville les vérifiant. L'ensemble des familles de Liouville $\geqslant (\mathcal{O},\mathcal{U})$ est un ensemble inductif pour la relation d'ordre et admet donc un élément maximal $(\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$. $(\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$ vérifie les conditions précédentes ; en effet :

(1) Supposons qu'il existe un ouvert semi-analytique U de $\Omega \in \bar{\mathcal{U}}$ défini par des inégalités $f_i > 0$, avec $f_i \in \bar{\mathcal{O}}(\Omega)$, tel que $U \notin \bar{\mathcal{U}}$. La famille obtenue en adjoignant à $(\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$ l'algèbre $\bar{\mathcal{O}}|U$ est une famille de Liouville $(\bar{\bar{\mathcal{O}}},\bar{\bar{\mathcal{U}}})$ telle que $(\bar{\bar{\mathcal{O}}},\bar{\bar{\mathcal{U}}}) > (\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$, ce qui est absurde. De même, si $\Omega \times \Omega' \notin \bar{\mathcal{U}}$, on adjoint à $(\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$ l'algèbre $\bar{\mathcal{O}}(\Omega) \otimes \bar{\mathcal{O}}(\Omega')$, d'où contradiction.

(2) Supposons qu'il existe $g \in \bar{\mathcal{O}}(\Omega')$ et $f : \Omega \to \Omega'$ à composantes dans $\bar{\mathcal{O}}(\Omega)$, tels que $g \circ f \notin \bar{\mathcal{O}}(\Omega)$. Notons $\bar{\bar{\mathcal{O}}}(\Omega)$ l'algèbre formée par tous les $h(x,f(x))$ avec $h \in \mathcal{O}(\Omega) \otimes \mathcal{O}(\Omega')$; si $\Omega_i \in \bar{\mathcal{U}}$, $\Omega_i \neq \Omega$, posons $\bar{\bar{\mathcal{O}}}(\Omega_i) = \bar{\mathcal{O}}(\Omega_i)$. On vérifie que $(\bar{\bar{\mathcal{O}}},\bar{\mathcal{U}})$ est une famille de Liouville telle que $(\bar{\bar{\mathcal{O}}},\bar{\mathcal{U}}) > (\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$ ce qui contredit la maximalité de $(\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$.

(3) Supposons qu'il existe θ analytique réelle dans Ω telle que $\dfrac{\partial\theta}{\partial x_i} = f_i(x,\theta(x))$ avec $f_i \in \bar{\mathcal{O}}(\Omega \times I)$ et $\theta \notin \bar{\mathcal{O}}(\Omega)$. Soit $\bar{\bar{\mathcal{O}}}(\Omega)$ l'algèbre formée de tous les $h(x,\theta(x))$ avec $h \in \bar{\mathcal{O}}(\Omega \times I)$ et posons $\bar{\bar{\mathcal{O}}}(\Omega_i) = \mathcal{O}(\Omega_i)$ si $\Omega_i \neq \Omega$. D'après 3.4, la famille $(\bar{\bar{\mathcal{O}}},\bar{\mathcal{U}})$ est une famille de Liouville ; d'après (2), $\bar{\mathcal{O}}(\Omega) \subset \bar{\bar{\mathcal{O}}}(\Omega)$ et donc $(\bar{\bar{\mathcal{O}}},\bar{\mathcal{U}}) > (\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$ ce qui contredit là encore la maximalité de $(\bar{\mathcal{O}},\bar{\mathcal{U}})$.

Nous terminons par quelques exemples et une remarque sur les courbes analytiques.

4.3. Considérons la famille de Liouville $(\mathcal{O},\mathcal{U})$ associée à $\mathcal{U} = \{\mathbb{R}^n ; n \in \mathbb{N}\}$ avec $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$; soit $(\tilde{\mathcal{O}},\tilde{\mathcal{U}})$ la *complétée* de $(\mathcal{O},\mathcal{U})$ (cf. 4.2). Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, l'algèbre $\tilde{\mathcal{O}}(I)$ est stable par dérivation, intégration, composition ; toute solution θ holomorphe dans I de l'équation $\theta' = f(x,\theta(x))$ avec $f \in \tilde{\mathcal{O}}(I \times J)$ appartient encore à $\tilde{\mathcal{O}}(I)$; par exemple $x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$, $\operatorname{Log} x \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^+)$; e^x, $\operatorname{arc\,tg} x \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{R})$; si $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ est > 0 en chaque point de Ω, f^α et $\operatorname{Log} f \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$; si $f \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$, e^f, $\operatorname{arc\,tg} f \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$, etc...

4.4 Considérons la famille $\mathcal{U}$ formée par tous les $\mathbb{R}^n$ et tous les ouverts bornés Ω de $\mathbb{R}^n$ (n variable) définis comme suit : il existe $g_1, \ldots, g_h$ holomorphes dans un voisinage V de $\bar{\Omega}$ tel que

$\Omega = \{x \in V; g_1(x) > 0, \ldots, g_h(x) > 0\}$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, posons $\mathcal{O}(\Omega) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$; si $\Omega \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{O}(\Omega)$ la restriction à Ω de l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{\Omega}$. On définit ainsi une famille de Liouville $(\mathcal{O}, \mathcal{U})$ [si $\Omega \in \mathcal{U}$ est un ouvert borné, un semi-analytique pour $\mathcal{O}(\Omega)$ est un semi-analytique relativement compact de $\mathbb{R}^n$, et admet donc un nombre fini de composantes connexes ; comme fonction θ_Ω, on choisit $g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_h$; enfin, une suite décroissante de fermés analytiques est stationnaire car l'ensemble des points réguliers d'un semi-analytique est semi-analytique et l'on applique 1.6 ; l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ est donc topologiquement noethérienne, et il en sera de même de tout produit tensoriel $\mathcal{O}(\Omega_{i_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(\Omega_{i_N})$ $(\Omega_{i_j} \in \mathcal{U})$ d'après 1.4].

Par exemple, si $f(y_1, \ldots, y_N)$ est analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$, la fonction $f(y_1(t), \ldots, y_N(t))$ appartient à $\tilde{\mathcal{O}}(]o, \varepsilon[)$ pour un $\varepsilon > 0$ ($\tilde{\mathcal{O}}$ est la complétée de $\mathcal{O}$), chaque $y_i(t)$ étant de la forme $t^\alpha(\mathrm{Log\,Log} \ldots \mathrm{Log}\, 1/t)^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

4.5. Soit $\bar{\Omega}$ une sous-variété analytique compacte à bord de $\mathbb{R}^n$, de dimension n, et soit Ω l'intérieur de $\bar{\Omega}$. Soit $\underline{\mathbb{G}}$ le faisceau sur $\bar{\Omega}$ des germes de fonctions à valeurs réelles, analytiques dans Ω et Gevrey au bord (cf. [8]) ; l'algèbre $\mathbb{G}(\Omega) = \underline{\mathbb{G}}(\bar{\Omega}) | \Omega$ est topologiquement noethérienne (les vérifications sont de nature locale et sont analogues à celles de 4.2 ; cf. [8]).

Question : Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, \Omega_p \subset \mathbb{R}^{n_p}$ des ouverts analogues au Ω précédent ; est-ce que l'algèbre $\mathbb{G}(\Omega_1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{G}(\Omega_p)$ est topologiquement noethérienne ? Cela est vrai pour $\mathbb{G}(I_1) \otimes \mathbb{G}(I_2)$, I_1, I_2 intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$ (cf. [8]).

4.6 Terminons par une remarque sur les *courbes analytiques*. Soit $(\mathcal{O}(\Gamma), \pi)$ une algèbre topologiquement noethérienne et soit $F \subset \Gamma$ un fermé analytique de dimension 1 ; d'après 1.2, F est une réunion disjointe d'un nombre fini de points et d'un nombre fini de composantes connexes $\mathcal{C}$ de feuilles analytiques de dimension un.

Supposons que $\mathcal{C}$ est une composante connexe de la feuille $S = \{x \in \Gamma; f_1(x) = \cdots = f_{n-1}(x) = 0;\ \delta(x) \neq 0\}$ avec $\delta = \dfrac{D(f_1, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}$. La projection $\mathcal{C} \ni x \to x_n \in \mathbb{R}$ est un difféomorphisme de $\mathcal{C}$ sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, permettant d'orienter $\mathcal{C}$. Soient $g_0, g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{O}(\Gamma)$ telles que $\forall x \in \mathcal{C}$, il existe un indice i avec $g_i(x) \neq 0$, et soit $g : \mathcal{C} \ni x \to (g_0(x), \ldots, g_N(x)) \in \mathbb{P}_N(\mathbb{R})$. Alors, *lorsque*

$x \in \mathscr{C}$ *tend vers* $+\infty$ (*ou* $-\infty$), $g(x)$ *tend vers une limite.* (Sinon, soient $\ell' \neq \ell'' \in \mathbb{P}_N(\mathbb{R})$ deux valeurs d'adhérence de g quand $x \to \infty$, et séparons ℓ' et ℓ'' par deux ouverts semi-analytiques U' et U''. Alors $\mathscr{C}' = \{x \in \mathscr{C}; g(x) \in U'\}$ serait un semi-analytique admettant une infinité de composantes connexes, ce qui contredit la condition c)).

On en déduit que l'arc $\mathscr{C}$ admet au point $+\infty$ (ou $-\infty$) une tangente ; de même, si T est une feuille qui contient $\mathscr{C}$, le plan tangent à T en $x \in \mathscr{C}$ tend vers une limite quand $x \in \mathscr{C} \to \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] El Khadiri, Thèse, Préprint, Rennes, 1987.

[2] Gabrielov, Projections of semi-analytic sets, Funct. Anal. and Appl., Vol. 2, n° 4 (1970).

[3] AG. Khovanskii, Real analytic varieties with the finiteness property and complex abelian integrals, Funct. Anal. and Appl., 18 (1984), 199-207.

[4] Denkovska, Łojasiewicz et Stasica, Sur certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques, 2 notes au Bulletin de l'Académie des Sciences Polonaise (1978).

[5] J. Milnor, On the Betti numbers of real algebric varieties, Proc. AMS, 15 (1964), 275-280.

[6] R. Moussu, C. Roche, Théorie de Khovanskii et problème de Dulac, Inventiones Math., 105 (1991), 431-441.

[7] J.-Cl. Tougeron, Sur certaines algèbres de fonctions analytiques, Séminaire de géométrie algébrique réelle, Paris VII, 1986.

[8] J.-Cl. Tougeron, Sur les ensembles analytiques réels définis par des équations Gevrey au bord, préprint, Rennes, 1990.

[9] J.-Cl. Tougeron, Familles nothériennes de modules sur $k[[x]]$ et applications, préprint, Rennes, 1985.

Manuscrit reçu le 19 avril 1991,
révisé le 12 septembre 1991.

Jean-Claude Tougeron,
Université de Rennes I
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.