ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-YVES CHARBONNEL

Sur certains sous-ensembles de l'espace euclidien

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 3 (1991), p. 679-717
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_3_679_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 3 (1991), 679-717

SUR CERTAINS SOUS-ENSEMBLES DE L'ESPACE EUCLIDIEN

by Jean-Yves CHARBONNEL

Introduction.

Depuis longtemps, il s'est avéré nécessaire de connaître les comportements à l'infini de fonctions suffisamment régulières. C'est en particulier le cas des fonctions algébriques sur l'espace euclidien. La théorie des équations différentielles à coefficients constants en est un exemple. L. Hörmander a donné les réponses suffisantes en utilisant le théorème de Tarski-Seidenberg ([Lo], Théorème 2, n°20). Ce théorème nous dit que l'image d'une partie semi-algébrique d'un espace euclidien par une projection linéaire, est semi-algébrique. Ce théorème est connu depuis fort longtemps. Il est en quelque sorte une généralisation du théorème de Sturm sur le nombre de racines réelles d'un système d'équations algébriques.

Dans [Lo], S. Lojasiewicz s'intéresse aux sous-ensembles semi-analytiques de l'espace euclidien. Ces ensembles sont localement définis par un système d'égalités et d'inégalités de fonctions analytiques. En général, l'image d'un ensemble semi-analytique par une projection linéaire n'est pas semi-analytique. Si en outre, on suppose que la restriction de la projection π, au sous-ensemble semi-analytique S, est propre, on dira que $\pi(S)$ est sous-analytique. La classe des sous-ensembles sous-analytiques a été introduite par H. Hironaka [H]. Elle est stable par "projection propre".

Mots-clés : Applications polynomiales – Exponentielles - Ensemble des zéros – Projection – Théorème de A.G. Khovanskii.
Classification A.M.S. : 51M.

S. Lojasiewicz a démontré dans[Lo] qu'un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^2$ est semi-analytique.

Dans [Kh] et [Kh1], A.G. Khovanskii s'intéresse à l'ensemble des solutions d'un système de Pfaff sur une variété de Pfaff. En particulier il démontre que ces ensembles n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. Des questions similaires ont été étudiées par A.N. Varchenko dans [Va]. Ces deux auteurs généralisent les théorèmes de Sturm et de Bezout sur les systèmes d'équations algébriques, à des systèmes d'équations pour une classe de fonctions transcendantes. D'une manière plus générale, des travaux de A.G. Khovanskii se dégage la philosophie suivante : " une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$, définie par des équations simples a une topologie simple."

Dans ce mémoire, on considère sur $\mathbb{R}^m$ l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}_m$ des fonctions qui sont combinaisons linéaires à coefficients polynomiaux d'exponentielles de formes linéaires. Pour tout m, les fonctions de $\tilde{\mathcal{A}}_m$ appartiennent à la classe de fonctions transcendantes étudiée par A.G. Khovanskii et A.N. Varchenko. Pour n entier positif, on dira que le sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ appartient à $\mathcal{P}_n$ s'il existe un entier positif m et un élément F de $\tilde{\mathcal{A}}_{n+m}$ pour lesquels S est l'image par la projection canonique de $\mathbb{R}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}^n$, de l'ensemble des zéros de F. En général, un élément de $\mathcal{P}_n$ n'est pas une partie sous-analytique de $\mathbb{R}^n$. En effet, le graphe de la fonction sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$t \mapsto \exp\left[-\frac{1}{t}\right] ,$$

appartient à $\mathcal{P}_2$, mais n'est pas une partie semi-analytique de $\mathbb{R}^2$. On note alors $\tilde{\mathcal{P}}_n$ le plus petit sous-ensemble de parties de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\mathcal{P}_n$, l'adhérence de ses éléments et les images par la projection canonique de $\mathbb{R}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}^n$, des éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. Le but principal de ce mémoire est de montrer que la collection des ensembles $\tilde{\mathcal{P}}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, forment un système de Tarski [Van], [I]. D'après la construction du système, cela revient à dire que pour tout n, $\tilde{\mathcal{P}}_n$ est stable par intersection finie, par réunion finie et par passage au complémentaire. En outre, $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient les adhérences et les composantes connexes de chacun de ses éléments. Dans [Van], L. Van Den Dries s'est intéressé à des questions analogues. Certains de ses résultats sont en relation étroite avec les travaux de A.G. Khovanskii sur les systèmes de Pfaff. Dans ce mémoire, les résultats de A.G. Khovanskii y jouent un rôle central. En particulier, il résulte de [Kh1] que le système des ensembles $\tilde{\mathcal{P}}_n$ est un 0-système selon la terminologie de [Van]. En outre, il étend le système des ensembles de parties semi-algébriques.

La démonstration utilise une méthode empruntée à A.M. Gabrielov. La stabilité de $\mathcal{P}_n$ par réunion finie et par intersection finie est simple. D'après les résultats de A.G. Khovanskii et A.N. Varchenko, tout élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. On prouve alors le résultat clef : l'adhérence d'un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$, qui est négligeable pour la mesure de Lebesgue, est négligeable pour cette mesure. La preuve de cette assertion utilise une propriété que l'on trouve déjà dans [Ga]. En utilisant la notion de dimension définie par A.M. Gabrielov, on prouve par récurrence sur la dimension de S que $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient le complémentaire de S dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que ses composantes connexes. On donne alors une proposition analogue à celle que l'on utilise pour estimer les croissances des fonctions algébriques. Il se pose alors la question de classer les ordres de croissance à l'infini des fonctions sur $\mathbb{R}_+$, dont le graphe appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$. Il est probable que la structure naturelle d'algèbre sur les fonctions sur $\mathbb{R}_+$ induise sur l'ensemble de ces ordres de croissance une structure de corps de Hardy ([Bo], Ch. V, App., n°1). Il est alors extension (H) ([Bo], Ch. V, App., n°4) de lui-même et du corps de Hardy des fonctions algébriques sur $\mathbb{R}_+$. On peut s'attarder sur l'exemple suivant qui a été communiqué par Y. Benoist : la fonction :

$$(x, y, z) \mapsto (y - \exp(x))^2 + (x - \exp(z))^2 + z^2,$$

appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_3$ et tend vers l'infini quand $(x^2 + y^2 + z^2)$ tend vers l'infini. En outre, pour tout réel positif a, cette fonction est majorée par un multiple de la fonction :

$$(x, z) \mapsto [x^2 + z^2]^a$$

sur l'ensemble défini par les égalités :

$$x = \exp(z) \ , \ y = \exp(x).$$

Il montre qu'en général les fonctions de $\tilde{\mathcal{A}}_2$ ne suffisent pas pour évaluer la croissance d'une fonction de $\tilde{\mathcal{A}}_n$ sur un ensemble de $\tilde{P}_n$. Cet exemple donne une réponse négative à un problème qui est lié aux questions étudiées en [Ch]. L'étude de ces questions est à l'origine de ce mémoire. Ce travail se décompose en 7 parties :

1. Une certaine classe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.
2. Etat des lieux.
3. Dimension d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
4. Sur les éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_n$.
5. Deux propiétés fondamentales des éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_n$.
6. Quelques propriétés des ensembles $\tilde{\mathcal{P}}_n$.
7. Applications à l'analyse.

1. Une certaine classe de sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$.

Si n est un entier positif, on note $\mathcal{A}_n$ la plus petite sous-algèbre de fonctions sur $\mathbf{R}^n$ qui possède les propriétés suivantes :

1) Toute fonction polynomiale à valeurs réelles appartient à $\mathcal{A}_n$.

2) Si f est dans $\mathcal{A}_n$, alors la fonction: $x \mapsto \exp[f(x)]$, appartient à $\mathcal{A}_n$.

On notera $\tilde{\mathcal{A}}_n$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}_n$ dont les éléments sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto P_1(x)\exp[L_1(x)] + \cdots + P_q(x)\exp[L_q(x)],$$

où $P_1, \ldots, P_q$ sont des polynômes réels à n indéterminées et où $L_1, \ldots, L_q$ sont des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$.

On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties S de $\mathbf{R}^n$ pour lesquelles il existe un entier positif m et un élément F de $\mathcal{A}_{n+m}$ tels que S soit l'image de l'ensemble des zéros de F dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, par la projection : $(x, y) \mapsto x$. Dans ces conditions le couple (m, F) sera dit *associé* à S.

Pour n entier positif, on définit par récurrence deux suites croissantes $\{\mathcal{P}'_{n,k}; k = 0, 1, \ldots\}$ et $\{\mathcal{P}_{n,k}; k = 0, 1, \ldots\}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R}^n))$. On pose : $\mathcal{P}'_{n,0} = \mathcal{P}_{n,0} = \mathcal{P}_n$. Pour k entier positif, on suppose connus $\mathcal{P}'_{n,k}$ et $\mathcal{P}_{n,k}$ pour tout n. On note $\mathcal{P}'_{n,k+1}$ la plus petite partie de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ qui contient $\mathcal{P}_{n,k}$ et qui est stable par réunion finie, par intersection finie et par l'application : $S \mapsto \overline{S}$. On désigne alors par $\mathcal{P}_{n,k+1}$ l'ensemble des éléments S de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ pour lesquels il existe un entier positif m et un élément S' de $\mathcal{P}'_{n+m,k+1}$ tels que S soit l'image de S' par la projection : $(x, y) \mapsto x$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$. Le couple (m, S') sera dit *associé* à S. La réunion des sous-ensembles $\mathcal{P}_{n,k}$, $k = 0, 1, \ldots$, sera notée $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

THÉORÈME. — *Le sous-ensemble $\tilde{\mathcal{P}}_n$ de l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^n$ est stable par réunion finie, par intersection finie et par passage au complémentaire. Tout élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et chacune d'elles appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.*

On démontrera le théorème en plusieurs étapes. On utilise pour cela la méthode de Gabrielov [Ga]. Dans ce qui suit on utilisera les notations suivantes :

1) Si X est un ensemble, $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X.

2) Si S est dans $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $\overline{S}$ et ${}^cS$ désignent respectivement l'adhérence et le complémentaire de S dans $\mathbf{R}^n$.

3) Pour tout entier positif n, μ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$.

4) Pour tout entier positif n, on utilise la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^n$ que l'on note $\|.\|$.

5) Pour tout entier positif n et pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, $x_1, \ldots, x_n$ désignent les coordonnées de x dans la base canonique.

6) Pour tout entier positif n, on identifie $\mathbf{R}^n$ au sous-espace $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$.

2. Etat des lieux.

On donne dans cette section les premières propriétés des ensembles $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Il résultera du lemme 2.2 que $\tilde{\mathcal{P}}_n$ est stable par réunion finie et intersection finie. En outre, il contient l'adhérence de chacun de ses éléments. L'assertion (ii) de ce lemme montre comment on calcule les éléments de $\mathcal{P}'_{n,k+1}$ au moyen des éléments de $\mathcal{P}_{n,k}$. Le corollaire 2.6 est la première propriété non triviale satisfaite par les éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Elle est la conséquence d'un résultat difficile de [Va]. Cette propriété jouera un rôle fondamental dans la démonstration du théorème 1. Le lemme 2.5 est un cas particulier du corollaire 2.6. Le lemme 2.4 est la partie technique de la démonstration du corollaire 2.6. Le lemme 2.3 donne une description récurrente de l'algèbre $\mathcal{A}_n$. Le lemme 2.7 montre que les algèbres $\tilde{\mathcal{A}}_n$ suffisent pour décrire les éléments des ensembles $\mathcal{P}_m$.

2.1. Soient $\{P_1, \ldots, P_k\}$, $\{Q_1, \ldots, Q_l\}$, $\{R_1, \ldots, R_m\}$ des familles d'éléments de $\mathcal{A}_n$. On note S l'ensemble des éléments x de $\mathbf{R}^n$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$P_1(x) = \cdots = P_k(x) = 0 \ ,$$
$$Q_1(x) > 0 \ , \ldots, \ Q_l(x) > 0 \ ,$$
$$R_1(x) \geq 0 \ , \ldots, \ R_m(x) \geq 0 \ .$$

LEMME. — *L'élément S de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ appartient à $\mathcal{P}_n$.*

Soit F l'élément de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m$ défini par :

$$F(x, t_1, \ldots, t_l, s_1, \ldots, s_m) = \\ P_1(x)^2 + \cdots + P_k(x)^2 + (Q_1(x)t_1^2 - 1)^2 + \cdots + (Q_l(x)t_l^2 - 1)^2 \\ + (R_1(x) - s_1^2)^2 + \cdots + (R_m(x) - s_m^2)^2 \ .$$

L'ensemble S est l'image de la variété des zéros de F dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, par la projection :

$$(x, t_1, \ldots, t_l, s_1, \ldots, s_m) \mapsto x \ .$$

2.2. On utilise les notations de §1.

LEMME. — *Soit k un entier non négatif.*

i) *Le sous-ensemble $\mathcal{P}_{n,k}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est stable par réunion finie et par intersection finie.*

ii) *Pour tout Σ dans $\mathcal{P}'_{n,k+1}$, il existe des entiers non négatifs l, m, p, des éléments $S, S_1, \ldots, S_l, T_1, \ldots, T_m, T_{1,1}, \ldots, T_{m,p}$ dans $\mathcal{P}_{n,k}$ pour lesquels on a :*

$$\Sigma = S \cap \overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_l} \cap \overline{T_1 \cap \overline{T_{1,1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{1,p}}} \cap \cdots \cap \overline{T_m \cap \overline{T_{m,1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{m,p}}} \ .$$

iii) *Le sous-ensemble $\tilde{\mathcal{P}}_n$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est stable par réunion finie et par intersection finie. En outre, pour tout S dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, $\overline{S}$ y appartient.*

iv) *Soit T dans $\mathcal{P}_{n,k}$. Soient $F_1, \ldots, F_m$ des éléments de $\mathcal{A}_n$. On note F l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par :*

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x)) \ .$$

Alors l'image de T par l'application F appartient à $\mathcal{P}_{m,k}$.

v) *Pour tout S dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, il existe un entier positif m et une partie fermée T de $\mathbb{R}^n$, appartenant à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$, pour lesquels S est l'image de T par la projection canonique de $\mathbb{R}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}^n$.*

i) a) On prouve ici que $\mathcal{P}_n$ est stable par réunion finie et par intersection finie. Soient S_1 et S_2 dans $\mathcal{P}_n$. Soient (m_1, F_1) et (m_2, F_2) des couples associés à S_1 et S_2. On note F et G les éléments de $\mathcal{A}_{n+m_1+m_2}$ définis par :

$$F(x,y,z) = F_1(x,y)^2 + F_2(x,z)^2 \ ,$$

$$G(x,y,z) = F_1(x,y)F_2(x,z) \ .$$

L'intersection $S_1 \cap S_2$ et la réunion $S_1 \cup S_2$ sont respectivement les images des ensembles des zéros de F et de G par la projection :

$$(x,y,z) \mapsto x \ .$$

b) Pour m entier positif, on note $\Phi_{n,m}$ l'application de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ définie par : $\Phi_{n,m}(S) = S \times \mathbb{R}^m$. On démontre par récurrence sur l'entier k que pour tout n, $\Phi_{n,m}(\mathcal{P}'_{n,k})$ et $\Phi_{n,m}(\mathcal{P}_{n,k})$ sont respectivement contenus dans $\mathcal{P}'_{n+m,k}$ et dans $\mathcal{P}_{n+m,k}$. Pour tout entier positif m et pour tout F dans $\mathcal{A}_n$, la fonction : $(x,y) \mapsto F(x)$, appartient à $\mathcal{A}_{n+m}$; donc $\Phi_{n,m}(\mathcal{P}_n)$ est contenu dans $\mathcal{P}_{n+m}$. On suppose que pour tout entier n, $\Phi_{n,m}(\mathcal{P}'_{n,k})$ et $\Phi_{n,m}(\mathcal{P}_{n,k})$ sont respectivement contenus dans $\mathcal{P}'_{n+m,k}$ et dans $\mathcal{P}_{n+m,k}$. L'application $\Phi_{n,m}$ est compatible avec la réunion finie, l'intersection finie et l'application : $S \mapsto \overline{S}$; donc $\Phi_{n,m}^{-1}(\mathcal{P}'_{n+m,k+1})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ stable par réunion finie, intersection finie et par l'application : $S \mapsto \overline{S}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\Phi_{n,m}^{-1}(\mathcal{P}'_{n+m,k+1})$ contient $\mathcal{P}_{n,k}$; donc $\mathcal{P}'_{n+m,k+1}$ contient $\Phi_{n,m}(\mathcal{P}'_{n,k+1})$. Soient n et p deux entiers positifs. Soient S dans $\mathcal{P}'_{n+p,k+1}$ et S' l'image de S par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^n$. L'image de $\Phi_{n+p,m}(S)$ par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, est $\Phi_{n,m}(S')$; donc d'après ce qui précède, $\Phi_{n,m}(\mathcal{P}_{n,k+1})$ est contenu dans $\mathcal{P}_{n+m,k+1}$.

c) Soient n un entier positif, S_1 et S_2 deux éléments de $\mathcal{P}_{n,k+1}$. Soient (m_1, S_1') et (m_2, S_2') des couples associés à S_1 et S_2. L'intersection $S_1 \cap S_2$ est l'image de l'intersection de $\Phi_{n+m_1+m_2}(S_1')$ et de $\Phi_{n+m_1+m_2}(S_2')$ par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ sur $\mathbb{R}^n$. De même, la réunion $S_1 \cup S_2$ est l'image de la réunion de $\Phi_{n+m_1+m_2}(S_1')$ et de $\Phi_{n+m_1+m_2}(S_2')$ par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ sur $\mathbb{R}^n$. D'après (b), $\Phi_{n+m_1+m_2}(S_1') \cap \Phi_{n+m_1+m_2}(S_2')$ et $\Phi_{n+m_1+m_2}(S_1') \cup \Phi_{n+m_1+m_2}(S_2')$ appartiennent à $\mathcal{P}'_{n+m_1+m_2,k}$; donc $\mathcal{P}_{n,k+1}$ contient $S_1 \cap S_2$ et $S_1 \cup S_2$.

ii) Pour l, m, p entiers non négatifs, on note $\mathcal{P}_{n,k;l,m,p}$ l'image de $\mathcal{P}_{n,k} \times (\mathcal{P}_{n,k})^l \times (\mathcal{P}_{n,k})^m \times (\mathcal{P}_{n,k})^{mp}$ par l'application :

$$(S, S_1, \ldots, S_l, T_1, \ldots, T_m, T_{1,1}, \ldots, T_{m,p}) \mapsto$$
$$S \cap \overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_l} \cap \overline{T_1 \cap \overline{T_{1,1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{1,p}} \cap \cdots \cap T_m \cap \overline{T_{m,1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{m,p}}}\,.$$

Pour tout (l,m,p), $\mathcal{P}_{n,k;l,m,p}$ est contenu dans $\mathcal{P}'_{n,k+1}$. La réunion des $\mathcal{P}_{n,k;l,m,p}$ est stable par intersection finie et par l'application $S \mapsto \overline{S}$; or d'après (i), $\mathcal{P}'_{n,k+1}$ est stable par réunion finie et l'application $S \mapsto \overline{S}$ est compatible avec la réunion finie; donc la réunion des $\mathcal{P}_{n,k;l,m,p}$ est stable par réunion finie. Par suite, cette réunion coïncide avec $\mathcal{P}'_{n,k+1}$.

iii) La partie $\tilde{\mathcal{P}}_n$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est stable par réunion finie et intersection finie car elle est réunion croissante des parties $\mathcal{P}_{n,0}, \mathcal{P}_{n,1}, \ldots$. Si S est dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, il existe un entier k pour lequel $\mathcal{P}_{n,k}$ contient S. L'adhérence $\overline{S}$ de S est alors dans $\mathcal{P}_{n,k+1}$; donc $\overline{S}$ est dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

iv) Soit $\Gamma(F)$ le graphe de F. Il appartient à $\mathcal{P}_{n+m}$. D'après la partie (b) de la démonstration de (i), $T \times \mathbb{R}^m$ appartient à $\mathcal{P}_{n+m,k}$ et $\mathcal{P}_{n+m,k}$ est stable par intersection finie; or $F(T)$ est l'image de l'intersection de $\Gamma(F)$ et de $T \times \mathbf{R}^n$ par la projection canonique de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^m$; donc $F(T)$ appartient à $\mathcal{P}_{m,k}$.

v) Il existe un entier positif k pour lequel S appartient à $\mathcal{P}_{n,k}$. On raisonne alors par récurrence sur k. L'assertion est claire pour $k = 0$. On la suppose vraie pour $k-1$. Par définition, il existe un entier positif m et une partie T de $\mathcal{P}'_{n+m,k}$ pour lesquels S est l'image de T par la projection canonique de $\mathbf{R}^{n+m}$ sur $\mathbf{R}^n$. D'après l'assertion (ii), T est l'intersection d'un élément T_1 de $\mathcal{P}'_{n+m,k-1}$ et d'une partie fermée de $\mathbf{R}^{n+m}$, appartenant à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$; or d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier positif p et une partie fermée T_2 de $\mathbf{R}^{n+m+p}$, appartenant à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m+p}$, pour lesquels T_1 est l'image de T_2 par la projection canonique de $\mathbf{R}^{n+m+p}$ sur $\mathbf{R}^{n+m}$; donc S est l'image d'une partie fermée de $\mathbf{R}^{n+m+p}$, appartenant à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m+p}$, par la projection canonique de $\mathbf{R}^{n+m+p}$ sur $\mathbf{R}^n$.

2.3. Soit n un entier positif. Pour $j = 0, 1, \dots$, on définit des sous-ensembles $\mathcal{A}_n^j$ et $\mathcal{B}_n^j$ de l'algèbre des fonctions à valeurs réelles sur $\mathbf{R}^n$. Pour cela on procède par récurrence. Les sous-ensembles $\mathcal{A}_n^0$ et $\mathcal{B}_n^0$ coïncident avec l'ensemble des fonctions polynomiales à valeurs réelles sur $\mathbf{R}^n$. On suppose connus $\mathcal{A}_n^j$ et $\mathcal{B}_n^j$ quel que soit l'entier n. Pour N entier positif, on note $\mathcal{A}_{n,N}^j$ l'image de $\mathcal{A}_{n+N}^j \times (\mathcal{A}_n^0)^N$ par l'application :

$$(F, f_1, \dots, f_N) \mapsto (x \mapsto F(x, \exp[f_1(x)], \dots, \exp[f_N(x)])) \ .$$

La famille $\{\mathcal{A}_{n,N}^j ; N = 0, 1, \dots\}$ est une suite croissante d'algèbres de fonctions sur $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathcal{A}_n^{j+1}$ sa réunion. On désigne par $\mathcal{B}_n^{j+1}$ l'algèbre engendrée par l'image de $\mathcal{B}_n^j \times \mathcal{B}_n^0$ par l'application: $(f, g) \mapsto (x \mapsto \exp[g(x) f(x)])$.

LEMME. — *Pour tout entier positif n, on a les assertions suivantes :*

i) *Pour tout entier positif j, le $\mathcal{A}_n^0$-module $\mathcal{A}_n^{j+1}$ est égal au sous-$\mathcal{A}_n^0$-module engendré par $\mathcal{B}_n^0, \dots, \mathcal{B}_n^j$.*

ii) *L'algèbre $\mathcal{A}_n$ coïncide avec la réunion des sous-algèbres $\mathcal{A}_n^j, j = 0, 1, \dots$.*

i) Pour simplifier les notations, on note $\mathcal{C}_n^j$ le sous-$\mathcal{A}_n^0$-module engendré par $\mathcal{B}_n^0, \dots, \mathcal{B}_n^j$. Il s'agit de prouver l'égalité :

$$\mathcal{A}_n^{j+1} = \mathcal{C}_n^j \ ,$$

quels que soient les entiers positifs n et j. Elle est claire pour $j = 1$. On la suppose vraie pour l'entier j quel que soit l'entier positif n. D'après l'égalité :

$$\mathcal{A}_n^{j+1} = \mathcal{C}_n^j \ ,$$

l'image de $\mathcal{B}_n^j \times \mathcal{B}_n^0$ par l'application : $(f,g) \mapsto (x \mapsto \exp[g(x)f(x)])$ est contenue dans $\mathcal{A}_n^{j+2}$; donc $\mathcal{A}_n^{j+2}$ contient $\mathcal{C}_n^{j+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout entier positif N et pour tout f dans $\mathcal{A}_{n+N}^{j+1}$, $\exp f$ appartient à $\mathcal{C}_{n+N}^{j+1}$; donc $\mathcal{A}_n^{j+2}$ est contenu dans $\mathcal{C}_n^{j+1}$.

ii) Soit $\mathcal{A}'_n$ la réunion des sous-algèbres $\mathcal{A}_n^0, \mathcal{A}_n^1, \ldots$. D'après l'assertion (i), pour tout f dans $\mathcal{A}'_n$, $\exp f$ appartient à $\mathcal{A}'_n$; or $\mathcal{A}'_n$ contient $\mathcal{A}_n^0$; donc $\mathcal{A}'_n$ contient $\mathcal{A}_n$. Par définition, pour tout entier j, $\mathcal{B}_n^j$ est contenu dans $\mathcal{A}_n$; donc d'après l'assertion (i) et d'après ce qui précède, on a l'égalité :

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}'_n \ ,$$

quel que soit l'entier positif n.

2.4. Si $p_1, \ldots, p_l$ sont des entiers positifs, on note $E(p_1, \ldots, p_l)$ l'espace $\mathbb{R}^{p_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_l}$. Soient n, m, p, q des entiers positifs et k un entier non négatif. Soit ϕ une application linéaire de $E(n,m)$ dans $E(p,q,p',q')$. Soient ψ une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et ψ' une application linéaire de $\mathbb{R}^{p'}$ dans $\mathbb{R}^{q'}$. Soient S dans $\mathcal{P}_{p,k}$, T dans $\mathcal{P}_{q,k}$, S' dans $\mathcal{P}_{p',k}$ et T' dans $\mathcal{P}_{q',k}$. On note Σ l'élément $S \times T \times S' \times T'$ de $\mathcal{P}(E(p,q,p',q'))$. D'après 2.2 , Σ appartient à $\mathcal{P}_{p+q+p'+q',k}$. On désigne par $\tilde{\Sigma}$ l'ensemble des éléments $(x,y,z,t,z',t',u,u',v,\epsilon,\eta,\tau)$ de $E(n,m,p,q,p',q',q,q',q',1,1,1)$ qui satisfont les conditions suivantes :

1) $(z, t+u, z', t'+u'+v)$ appartient à Σ.
2) $\|\psi(z) - (t+u)\|$ est inférieur à ϵ.
3) $\|\psi'(z') - (t'+u'+v)\|$ est inférieur à ϵ.
4) $\|\phi(x,y) - (z, t+u, z', t'+u'+v)\|$ est inférieur à η.
5) $\|u\|$, $\|u'\|$ sont inférieurs à ϵ et $\|v\|$ est inférieur à η.
6) $\tau\|(x,y,z,t+u,z',t'+u'+v)\|$ est non supérieur à 1.

Pour simplifier les notations, on pose: $\nu = n+m+p+q+p'+q'+q+2q'+3$. D'après 2.2, $\tilde{\Sigma}$ appartient à $\mathcal{P}_{\nu,k}$. Pour tout (y,ϵ,η,τ) dans $\mathbb{R}^m \times E(1,1,1)$, on note $\tilde{\Sigma}(y,\epsilon,\eta,\tau)$ l'intersection de $\tilde{\Sigma}$ et de $\mathbb{R}^n \times \{y\} \times E(p,q,p',q') \times \{\epsilon\} \times \{\eta\} \times \{\tau\}$. On désigne alors par $\tilde{\Sigma}_{y,\eta,\tau}$ l'intersection des ensembles $\tilde{\Sigma}(y,\epsilon,\eta,\tau)$ où ϵ est un réel positif.

On dira qu'une partie X de $E(p_1, \ldots, p_l)$ possède la propriété **P** si pour tout entier positif m, inférieur à l et pour toute partie compacte K de $E(p_1, \ldots, p_m)$, il existe un entier positif N tel que pour tout y dans K, l'intersection de X et de $\{y\} \times E(p_{m+1}, \ldots, p_l)$ ait au plus N composantes connexes.

LEMME. — *On suppose que pour toute famille $\{p_1, \ldots, p_l\}$ d'entiers positifs, tout élément de $\mathcal{P}_{p_1 \cdots + p_l, k}$ possède la propriété* **P**.

i) *Soit $X = A \times B$ une partie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pour tous réels positifs r et t, $X(r,t)$ désigne l'ensemble des points (x,z) de $A \times \mathbb{R}^m$ qui satisfont les conditions suivantes :*

a) *il existe y dans B tel que $\|z - y\|$ soit inférieur à r.*

b) *$t\|(x,z)\|$ est non supérieur à 1.*

On note $X(t)$ l'intersection des $X(r,t)$ où r est un réel positif. Alors, la réunion des $X(t)$ où t est un réel positif, coïncide avec $A \times \overline{B}$.

ii) *On suppose qu'il existe un entier positif N tel que pour tous réels positifs r et t assez petits, $X(r,t)$ ait au plus N composantes connexes. Alors $A \times \overline{B}$ a au plus N composantes connexes.*

iii) *Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^m$ et pour tous réels positifs η_0 et τ_0, il existe un entier positif N tel que pour tout (y, η, τ) dans $K \times [0, \eta_0] \times [0, \tau_0]$, $\tilde{\Sigma}_{y,\eta,\tau}$ ait au plus N composantes connexes.*

On désigne par $\tilde{\phi}$ la composée de ϕ et de la projection canonique de $E(p,q,p',q')$ sur $E(q,q')$. Pour tout y dans $\mathbb{R}^m$, on note P_y l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^n \times \{y\}$ pour lesquels $\tilde{\phi}(x,y)$ appartient à $\overline{(\psi(S) \bigcap \overline{T}) \times \psi'(S') \bigcap \overline{T'}}$.

iv) *Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^m$, il existe un entier positif N tel que P_y ait au plus N composantes connexes.*

L'assertion (i) est claire.

ii) Il suffit de prouver que toute partition finie en parties fermées de $A \times \overline{B}$ a au plus N éléments. On suppose qu'il n'en est pas ainsi. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soient M un entier positif, supérieur à N et $\{F_1, \ldots, F_M\}$ une partition finie de $A \times \overline{B}$ en parties fermées. Pour t réel positif assez petit, $X(t)$ rencontre chacun des ensembles $\{F_1, \ldots, F_M\}$ et ceux-ci le recouvrent. On choisit t de façon que la condition ci-dessus soit satisfaite et tel que pour r réel positif assez petit, $X(r,t)$ ait au plus N composantes connexes. Soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_M$ des ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui contiennent respectivement $F_1, \ldots, F_M$ et qui satisfont la condition suivante : si i et j sont deux indices distincts, alors tout point de $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de norme supérieure à $1/t$. On note Ω leur réunion. Puisque $X(r,t)$

est borné pour tout r, pour r réel positif assez petit, Ω contient $X(r,t)$ et chacun des ouverts $\Omega_1,\ldots,\Omega_M$ le rencontre. Ceci est absurde car par hypothèse, pour r assez petit, $X(r,t)$ a au plus N composantes connexes.

iii) Par hypothèse tout élément de $\mathcal{P}_{\nu,k}$ possède la propriété **P**; donc pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^m$ et pour tous réels positifs ϵ_0, η_0, il existe un entier positif N tel que pour tout (y,ϵ,η,τ) dans $K\times[0,\epsilon_0]\times[0,\eta_0]\times[0,\tau_0]$, $\tilde{\Sigma}(y,\epsilon,\eta,\tau)$ ait au plus N composantes connexes. L'assertion résulte alors de l'assertion (ii).

iv) Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^m$. D'après la démonstration de l'assertion (ii) et d'après l'hypothèse du lemme, pour tous réels positifs η_0 et τ_0, il existe un entier positif N pour lequel $\tilde{\Sigma}_{y,\eta,\tau}$ a au plus N composantes connexes pour tout (y,η,τ) dans $K\times[0,\eta_0]\times[0,\tau_0]$. On note $\tilde{P}_{y,\eta,\tau}$ l'image de $\Sigma_{y,\eta,\tau}$ par l'application :

$$(x,y,z,t,z',t',v,\eta,\tau)\mapsto(x,y,\psi(z),\psi'(z'),\eta,\tau)\ .$$

Pour tout (y,η,τ) dans $K\times[0,\eta_0]\times[0,\tau_0]$, $\tilde{P}_{y,\eta,\tau}$ a au plus N composantes connexes. On désigne par $\tilde{P}_{y,\tau}$ l'intersection des $P_{y,\eta,\tau}$ où η est un réel positif. La partie P_y de $\mathbb{R}^n\times\{y\}$ est alors l'image de la réunion des $\tilde{P}_{y,\tau}$ par la projection :

$$(x,y,t,t',\eta,\tau)\mapsto(x,y)\ .$$

Il résulte de ce qui précède et de l'assertion (ii) que pour tout y dans K, P_y a au plus N composantes connexes.

2.5. On utilise les notations de 2.2. Soient n et m deux entiers positifs.

LEMME. — *Tout élément S de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Soient S dans $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. Alors pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}^m$, il existe un entier positif N tel que pour tout y dans K, l'intersection de S et de $\mathbb{R}^n\times\{y\}$ ait au plus N composantes connexes.*

Pour tout S dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, $S\times\mathbb{R}$ est dans $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$; or pour tout nombre réel r, $\mathbb{R}^n\times\{r\}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$; donc $S\times\{r\}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$. Par suite, il suffit de démontrer la deuxième partie de l'assertion du lemme quels que soient les entiers n et m.

a) Soit F dans $\mathcal{A}_{n+m}$. D'après 2.3, il existe un entier j tel que $\mathcal{A}^j_{n+m}$ contienne F. D'après l'assertion (i) du lemme 2.3, il existe un élément G_0 dans $\mathcal{A}^0_{n+m}$ et pour $i=1,\ldots,j$ un élément (F_i,G_i) dans $\mathcal{B}^i_{n+m}\times\mathcal{A}^0_{n+m}$ pour lesquels on a :

$$F(x)=G_0(x)+G_1(x)F_1(x)+\cdots+G_j(x)F_j(x)\ .$$

Pour $i = 1, \ldots, j$, il existe des éléments $q_{i0}, \ldots, q_{il-1}$ de $\mathcal{A}^0_{n+m}$ pour lesquels le graphe de la fonction F_i est l'image par la projection : $(x, t_{i1}, \ldots, t_{ij}) \mapsto x$, de l'ensemble des points de $\mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^j$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$t_{i1} = q_{i0}(x),\ t_{il+1} = q_{il}(x) \exp t_{il},\ l = 1, \ldots, j-1\ ,\ F_i(x) = \exp t_{ij}\ .$$

On note q l'entier $j(j+1)/2$ et Σ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^q$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$t_{i1} = q_{i0}(x)\ ,\ t_{il+1} = q_{il}(x) \exp t_{il}\ ,\ i = 1, \ldots, j\ ,\ l = 1, \ldots, j-1$$

$$F(x) = G_0(x) + G_1(x) \exp t_{11} + \cdots + G_j(x) \exp t_{jj}\ .$$

L'ensemble des zéros de F dans $\mathbf{R}^{n+m}$ est alors l'image de Σ par la projection :

$$(x, t_{11}, t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{j1}, \ldots, t_{jj}) \mapsto x\ ,$$

de $\mathbf{R}^{n+m} \times \mathbf{R}^q$ sur $\mathbf{R}^{n+m}$. Il résulte de [Va], Théorème §3, qu'il existe un entier positif N tel que pour tout y dans K, l'intersection de Σ et de $\mathbf{R}^n \times \{y\} \times \mathbf{R}^q$ ait au plus N composantes connexes; donc pour tout y dans K l'ensemble des zéros de F dans $\mathbf{R}^n \times \{y\}$ a au plus N composantes connexes.

b) L'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ est la réunion des ensembles $\mathcal{P}_{n+m,k}$. On démontrera l'assertion du lemme pour un élément S de $\mathcal{P}_{n+m,k}$ par récurrence sur l'entier k. D'après (a), elle est vraie pour $k = 0$. On suppose qu'elle est vraie pour l'entier k quels que soient les entiers n et m. Soient $\Sigma, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_l, \Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_d, \Sigma'_{1,1}, \ldots, \Sigma'_{d,e}$ des éléments de $\mathcal{P}_{n+m,k}$. On pose :

$$p = n+m\ ,\ q = (n+m)l\ ,\ p' = (n+m)d\ ,\ q' = (n+m)d\ ,\ q' = (n+m)de\ ,$$

$$S = \Sigma\ ,\ T = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_l\ ,\ S' = \Sigma'_1 \times \cdots \times \Sigma'_d\ ,$$

$$T' = \Sigma'_{1,1} \times \cdots \times \Sigma'_{d,e}\ .$$

Soient ψ l'application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ définie par: $\psi(x) = (x, \ldots, x)$ et ψ' l'application linéaire de $\mathbf{R}^{p'}$ dans $\mathbf{R}^{q'}$ définie par :

$$\psi'(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_1, \ldots, x_d, \ldots, x_d)\ .$$

Dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, les variables $x_1, \ldots, x_d$ apparaissent e fois. On désigne par ϕ l'application linéaire de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^{p'} \times \mathbf{R}^{q'}$, définie par :

$$\phi(x) = (x, \ldots, x)\ .$$

On utilise alors les notations de 2.4. Pour tout y dans $\mathbf{R}^m$, P_y coïncide avec l'intersection des ensembles :

$$\mathbf{R}^n \times \{y\} \ , \ \Sigma \cap \overline{\Sigma_1} \cap \cdots \cap \overline{\Sigma_l} \ ,$$
$$\overline{\Sigma_i' \cap \overline{\Sigma_{i,1}'} \cap \cdots \cap \overline{\Sigma_{i,e}'}} \ , \ i = 1, \ldots, d \ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence on peut appliquer les conclusions de l'assertion (iv) du lemme 2.4; donc pour tout compact K de $\mathbf{R}^m$, il existe un entier positif N tel que pour tout y dans K, l'intersection ci-dessus ait au plus N composantes connexes. L'assertion du lemme pour tout élément de $\mathcal{P}'_{n+m,k+1}$ résulte alors de l'assertion (ii) du lemme 2.2. Vu l'arbitraire des entiers n et m, l'assertion est alors vraie pour tout élément de $\mathcal{P}_{n+m,k+1}$.

2.6. On utilise les notations de 2.2.

Corollaire. — *Soient n et m deux entiers positifs. Soit S un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. Il existe un entier positif N tel que pour tout y dans $\mathbf{R}^m$, l'intersection de S et de $\mathbf{R}^n \times \{y\}$ ait au plus N composantes connexes.*

Soit B une boule fermée de $\mathbf{R}^m$, centrée en 0. On note respectivement S_1 et S_2 les intersections de S avec $\mathbf{R}^n \times B$ et $\mathbf{R}^n \times {}^cB$. D'après le lemme 2.1, S_1 et S_2 appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. Il suffit de démontrer le corollaire pour chacun des ensembles S_1 et S_2. L'assertion pour S_1 résulte du lemme 2.5. On désigne par $\widehat{S_2}$ l'image par la projection :

$$(x, y, t) \mapsto (x, y) \ ,$$

de l'ensemble des éléments (x, y, t) de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^*$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$(x, ty) \in S_2 \text{ et } t\|y\|^2 = 1 \ .$$

Puisque S_2 appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$, $\widehat{S_2}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. Soit $\tilde{B}$ l'image de ${}^cB$ par l'application :

$$y \mapsto \frac{y}{\|y\|^2} \ .$$

Puisque $\overline{\tilde{B}}$ est compact, il résulte du lemme 2.5 qu'il existe un entier positif N tel que pour tout y dans $\overline{\tilde{B}}$, l'intersection de $\widehat{S_2}$ et de $\mathbf{R}^n \times \{y\}$ ait au plus N composantes connexes. Pour tout y dans B, l'intersection de S_2 et de $\mathbf{R}^n \times \{y\}$ est vide; or pour tout y dans $\tilde{B}$ l'intersection de S_2 et de $\mathbf{R}^n \times \{y/\|y\|^2\}$ est homéomorphe à l'intersection de $\widehat{S_2}$ et de $\mathbf{R}^n \times \{y\}$; donc pour tout y dans $\mathbf{R}^m$, l'intersection de S_2 et de $\mathbf{R}^n \times \{y\}$ a au plus N composantes connexes.

2.7. On utilise la terminologie du §1.

LEMME. — *Soit n un entier positif. Soit S un élément de $\mathcal{P}_n$. Alors il existe un couple (m, F) associé à S pour lequel F appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_{n+m}$.*

Soit (m, F) un couple associé à S. D'après 2.3, il existe un entier j pour lequel $\mathcal{A}^j_{n+p}$ contient F. La partie (a) de 2.5 prouve alors le lemme.

3. Dimension d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette section on introduit une notion de dimension pour un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Celle-ci était déjà utilisée par A.M. Gabrielov dans [Ga]. Elle sera très utile dans la suite de ce mémoire. En effet elle permettra des raisonnements par récurrence.

Soit n un entier positif. On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit S une partie de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble des entiers k pour lesquels il existe une suite croissante $\{i_1, \ldots, i_k\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que l'image de S par la projection

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) ,$$

ait une adhérence d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^k$. Lorsque cet ensemble est vide, on dira que *S est de dimension* 0. Dans le cas contraire, on appellera *dimension de S le plus grand élément de cet ensemble.*

LEMME. — *Soient S et S' deux parties de $\mathbb{R}^n$.*

i) *Si S est contenu dans S', alors la dimension de S est au plus égale à celle de S'. Si S' est égal à $\overline{S}$, S' et S ont même dimension.*

ii) *Si S est réunion des parties $S_1, \ldots, S_k$, alors la dimension de l'une des parties $S_1, \ldots, S_k$, est égale à la dimension de S.*

iii) *Si S est dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$ et si elle est de dimension* 0, *alors elle est finie.*

La première partie de l'assertion (i) est claire. On suppose que S' est égal à $\overline{S}$ et que k est la dimension de S. Soit p un entier supérieur à k et non supérieur à n. Soit $\{i_1, \ldots, i_p\}$ une suite croisssante dans $\{1, \ldots, n\}$. On note π la projection :

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) .$$

Puisque S est de dimension k, $\overline{\pi(S)}$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^p$; or l'image réciproque de $\overline{\pi(S)}$ par π étant fermée, elle contient S'; donc S' est de dimension inférieure à p. Par suite S' est de dimension k.

L'assertion (ii) résulte de ce qu'une réunion finie de parties fermées d'intérieur vide dans un espace euclidien est d'intérieur vide.

iii) Soit S un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ qui est de dimension 0. Soit i dans $\{1,\dots,n\}$. On note pr_i la projection :

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_i \ .$$

Puisque S est dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, $pr_i(S)$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_1$. Puisque S est de dimension 0, $\overline{pr_i(S)}$ est d'intérieur vide; or d'après le lemme 2.5, $pr_i(S)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes; donc $pr_i(S)$ est fini. Par suite S est fini.

4. Sur les éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

On démontre dans cette section une propriété des éléments de $\mathcal{P}_n$. On verra en §6 que cette propriété s'étend aux éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Pour tout entier positif n, on note $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des réunions dénombrables de parties sous-analytiques compactes de $\mathbb{R}^n$ et on désigne par $\mathcal{X}'_n$ l'ensemble des réunions dénombrables de parties compactes de $\mathbb{R}^n$.

LEMME. — *Le sous-ensemble $\mathcal{X}'_n$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ contient $\tilde{\mathcal{P}}_n$. En outre, $\mathcal{X}_n$ contient $\mathcal{P}_n$. Si S est dans $\mathcal{P}_n$, alors $S \setminus \overset{\circ}{S}$ est μ_n-négligeable.*

Soient S dans $\mathcal{P}_n$ et (m,F) un couple associé à S. Pour l entier positif, on note S_l l'image par la projection : $(x,y) \mapsto x$, de l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$F(x,y) = 0 \ , \ \|(x,y)\| \leq l \ .$$

Pour tout l, S_l est une partie sous-analytique compacte de $\mathbb{R}^n$; or S est réunion des S_l; donc S est dans $\mathcal{X}_n$. D'après [Ga], Corollaire 2, S_l possède une stratification finie en sous-variétes analytiques de $\mathbb{R}^n$. L'intérieur de S_l est alors la réunion des strates de dimension n. Puisque toute sous-variété analytique de dimension inférieure à n est μ_n-négligeable, $S_l \setminus \overset{\circ}{S_l}$ est μ_n-négligeable; or S étant la réunion de la suite $S_1, S_2, \dots$, $S \setminus \overset{\circ}{S}$ est contenu dans la réunion des ensembles $S_l \setminus \overset{\circ}{S_l}$, $l = 1,2,\dots$; donc $S \setminus \overset{\circ}{S}$ est μ_n-négligeable.

On va prouver par récurrence sur k que pour tout n, $\mathcal{P}_{n,k}$ est contenu dans $\mathcal{X}'_n$. L'assertion pour $k = 0$ résulte de ce qui précède. On la suppose vraie pour k. La partie $\mathcal{X}'_n$ est stable par intersection finie, par réunion finie et par l'application $S \mapsto \overline{S}$; donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}'_{n,k+1}$ est contenu dans $\mathcal{X}'_n$. Pour tout m, l'image de $\mathcal{X}'_{n+m}$ par la projection canonique de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$ est contenue dans $\mathcal{X}'_n$; donc pour tout n, $\mathcal{X}'_n$ contient $\mathcal{P}_{n,k+1}$. Puisque $\tilde{\mathcal{P}}_n$ est la réunion des $\mathcal{P}_{n,k}$, $\tilde{\mathcal{P}}_n$ est contenu dans $\mathcal{X}'_n$.

5. Deux propriétés fondamentales des ensembles $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

Pour n entier positif, on introduit deux propriétés $\mathbf{P}_n$ et $\mathbf{Q}_n$. Il s'agit de prouver qu'elles sont vraies quel que soit l'entier n. Ces deux propriétés joueront un rôle clef dans la démonstration du théorème de ce mémoire. On remarquera que la propriété $\mathbf{P}_n$ présente en elle-même un certain intérêt. Dans cette section, l'introduction de la propriété $\mathbf{Q}_n$ sert à démontrer que la propriété $\mathbf{P}_n$ est vraie. D'après 5.7, la propriété $\mathbf{Q}_n$ est conséquence de la propriété $\mathbf{P}'_n$ qui est plus faible que la propriété $\mathbf{P}_n$. On verra en 5.8 que $\mathbf{P}_n$ est conséquence de $\mathbf{P}'_{n+1}$ et de $\mathbf{Q}_n$. Il s'agit donc de démontrer que la propriété $\mathbf{P}'_n$ est vraie quel que soit n. Pour cela on raisonnera par récurrence sur n. Elle sera supposée vraie pour n dans les sous-sections 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6. Les lemmes 5.1 et 5.2 montrent qu'un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ qui est fermé et d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^{n+1}$, est μ_{n+1}-négligeable. Il reste alors à prouver que pour un élément fermé S de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$, S est d'intérieur non vide dans $\mathbf{R}^{n+1}$ s'il n'est pas μ_{n+1}-négligeable. C'est l'objet du lemme 5.6 dans le cas où S est compact. Le lemme 5.3 donne une propriété des éléments compacts de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ qui joue un rôle clef dans les démonstrations du lemme 5.6 et de l'implication de 5.7. Le lemme 5.5 montre que lorsque S est compact, il est réunion de deux éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ dont un est trivialement μ_{n+1}-négligeable. En utilisant la propriété du lemme 5.3 et la propriété $\mathbf{P}'_n$, on montre alors en 5.4 que si l'intérieur de S est vide alors il est nécessairement μ_{n+1}-négligeable.

On utilise les notations de 2.2. Pour n entier positif, on identifie $\mathbf{R}^n$ au sous-espace $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$. On désigne par p_n et q_n les projections de $\mathbf{R}^{n+1}$ sur $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}$, définies par: $(x,t) \mapsto x$ et $(x,t) \mapsto t$. On définit pour n entier positif, les propriétés $\mathbf{P}_n$ et $\mathbf{Q}_n$:

$\mathbf{P}_n$: Soit S dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Alors $\overline{S}$ est μ_n-négligeable si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1) S est μ_n-négligeable.

2) l'intérieur de $\overline{S}$ est vide.

$\mathbf{Q}_n$: Soit S une partie fermée de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. On suppose que l'intérieur de S est vide et que S appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$. Alors l'intersection de $\overline{S}$ et de $\mathbb{R}^n$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^n$.

On démontrera dans cette section que pour tout n, les propiétés $\mathbf{P}_n$ et $\mathbf{Q}_n$ sont vraies pour tout n. On désigne par $\mathbf{P}'_n$ la propriété suivante : *soit S une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ qui appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Alors S est μ_n -négligeable si et seulement si l'intérieur de S est vide.* Cette propriété est plus faible que la propriété $\mathbf{P}_n$. D'après le lemme 2.5, tout élément de $\tilde{\mathcal{P}}_1$ est réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$; donc la propriété $\mathbf{P}_1$ est vraie. On démontrera par récurrence sur n que la propriété $\mathbf{P}'_n$ est vraie quel que soit n. On prouvera l'implication :

$$\mathbf{P}'_n \Rightarrow \mathbf{Q}_n .$$

On montrera alors que pour tout n, la propriété $\mathbf{P}_n$ est vraie. Dans ce qui suit, on fixe un entier positif n et une partie compacte ω de $\mathbb{R}^n$ qui appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. On supposera que la propriété $\mathbf{P}'_n$ est vraie.

5.1. Soit S une partie localement fermée de $\mathbb{R}^n$.

LEMME. — *On suppose que S appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Alors S est μ_n-négligeable si et seulement si son adhérence est μ_n-négligeable.*

On suppose que $\overline{S}$ n'est pas μ_n-négligeable. D'après la propriété $\mathbf{P}'_n$, l'intérieur de $\overline{S}$ est non vide; or S est ouvert dans son adhérence; donc l'intérieur de S est non vide. Par suite, S est négligeable si et seulement si $\overline{S}$ est μ_n -négligeable.

5.2. Soient u et v deux fonctions sur ω telles que pour tout x dans ω, on ait :

$$u(x) \leq v(x) .$$

On note S l'ensemble des élements (x, t) de $\omega \times \mathbb{R}$ pour lesquels on a :

$$u(x) \leq t \leq v(x) .$$

LEMME. — *On suppose que S appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$, qu'il est fermé dans $\omega \times \mathbb{R}$ et que son intérieur est vide. Alors, S est μ_{n+1}-négligeable.*

On raisonne par l'absurde. Pour ϵ réel positif, on note N_ϵ l'ensemble des éléments x de ω pour lesquels $v(x) - u(x)$ est non inférieur à ϵ. Puisque S est dans $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$, N_ϵ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Puisque S est fermé dans

$\omega \times \mathbb{R}$, les fonctions u et v sont respectivement semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement; donc N_ϵ est fermé dans ω. Soit N la réunion des ensembles N_ϵ. Les fonctions u et v coïncident en tout point du complémentaire de N dans ω; donc l'intersection de S et de $[\omega \backslash N] \times \mathbb{R}$ est μ_{n+1}-négligeable. Par suite, il existe un réel positif ϵ pour lequel N_ϵ n'est pas μ_{n+1}-négligeable.

La propriété $\mathbf{P}'_n$ étant vraie, l'intérieur de N_ϵ n'est pas vide. Soit ω_1 une boule ouverte dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de N_ϵ. On désigne par ϵ' la borne inférieure de la restriction à ω_1 de la fonction $v - u$. Puisque ω_1 est contenu dans N_ϵ, ϵ' est un réel positif non inférieur à ϵ. Soient η un réel positif et x un élément de ω_1 qui satisfont les conditions suivantes :

$$3\eta < \epsilon' \ , \ v(x) - u(x) \leq \epsilon' + \eta \ .$$

Puisque v est semi-continue inférieurement, il existe un voisinage ω' de x, contenu dans ω_1 tel que pour tout y dans ω', on ait :

$$v(y) \leq v(x) + \eta \ .$$

Puisque ω' est contenu dans ω_1, pour tout y dans ω', on a :

$$u(y) \leq v(x) + \eta - \epsilon' \ .$$

De même, u étant semi-continue supérieurement, il existe un voisinage ω'' de x, contenu dans ω' tel que pour tout y dans ω'' on ait :

$$v(y) \geq u(x) - \eta + \epsilon' \ .$$

Puisque 3η est inférieur à ϵ', on a :

$$v(x) + \eta - \epsilon' < u(x) - \eta + \epsilon' \ ;$$

donc S contient l'ensemble des éléments (x,t) de $\omega'' \times \mathbb{R}$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$v(x) + \eta - \epsilon' < t < u(x) - \eta + \epsilon' \ .$$

Par suite, l'intérieur de S est non vide.

5.3. Si B est une partie de $\mathbb{R}^n$ et si S est une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$, on désigne par S_B l'intersection de S et de $B \times \mathbb{R}$. On utilise sur ω la restriction à $\omega \times \omega$ de la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour x dans ω et pour ϵ réel positif, on note $B(x,\epsilon)$ la boule fermée centrée en x et de rayon ϵ. Puisque ω appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$, il résulte du lemme 2.1 que pour tout (x,ϵ), $B(x,\epsilon)$ appartientà $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

LEMME. — *Soit S une partie de $\omega \times \mathbb{R}$ qui appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ et telle que $p_n(S)$ soit égal à ω. On suppose que S est compact. Alors il* *existe un entier positif M, des intervalles $I_1, \dots, I_M$ de $\mathbb{R}$, x dans $p_n(S)$ et ϵ un réel positif qui satisfont la condition suivante : pour toute boule fermée B contenue dans $B(x,\epsilon)$, $q_n(S_B)$ a M composantes connexes et pour $i = 1, \dots, M$, l'intervalle I_i contient une et une seule composante connexe de $q_n(S_B)$.*

a) Soit T l'ensemble des points (x, y, t, ϵ) de $\omega \times \omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui satisfont les conditons suivantes :

$$x \in \omega \ , \ y \in \omega \ , \ \|x - y\| \leq \epsilon \ , \ (y,t) \in S \ .$$

D'après ce qui précède, T appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{2n+2}$. L'image $\tilde{T}$ de T par la projection :

$$(x, y, t, \epsilon) \mapsto (x, t, \epsilon) \ ,$$

est dans $\tilde{\mathcal{P}}_{n+2}$; donc d'après le corollaire 2.6, il existe un entier positif M pour lequel l'intersection de $\{x\} \times \mathbb{R} \times \{\epsilon\}$ et de $\tilde{T}$ a au plus M composantes connexes, pour tout x dans ω et pour tout réel positif ϵ. En d'autres termes, pour tout x dans ω et pour tout réel positif ϵ, $q_n[S_{B(x,\epsilon)}]$ a au plus M composantes connexes.

b) Pour m entier positif, on note $\mathcal{M}_m$ l'ensemble des éléments (x, ϵ) de $\omega \times \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $q_n[S_{B(x,\epsilon)}]$ a m composantes connexes. D'après (a), pour m entier positif assez grand, $\mathcal{M}_m$ est vide. On note M le plus grand entier m pour lequel $\mathcal{M}_m$ est non vide. Si (x,ϵ) est dans $\mathcal{M}_M$, on note $I_{1,x,\epsilon}, \dots, I_{M,x,\epsilon}$ les composantes connexes de $q_n[S_{B(x,\epsilon)}]$. Pour $i = 1, \dots, M$, on désigne par $\beta_{i,x,\epsilon}$ l'image par p_n de l'intersection de $S_{B(x,\epsilon)}$ et de $q_n^{-1}(I_{i,x,\epsilon})$. Soit d la fonction sur $\mathcal{M}_M$ qui à (x,ϵ) associe le nombre des $\beta_{i,x,\epsilon}$ qui sont distincts de $B(x,\epsilon)$. On désigne par $\beta_{x,\epsilon}$ la réunion des ensembles $\beta_{i,x,\epsilon}$ qui sont disincts de $B(x,\epsilon)$. Si $d(x,\epsilon)$ est nul, alors pour toute boule fermée B contenue dans $B(x,\epsilon)$, $q_n(S_B)$ est contenue dans la réunion des intervalles $I_{1,x,\epsilon}, \dots, I_{M,x,\epsilon}$ et rencontre chacun d'eux; donc d'après le choix de M, $q_n(S_B)$ a M composantes connexes et pour $i = 1, \dots, M$, l'intervalle $I_{i,x,\epsilon}$ contient une et une seule composante connexe de $q_n(S_B)$.

c) On désigne par δ la borne inférieure de la fonction d. On utilise sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'ordre lexicographique induit par l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$. C'est un bon ordre. On achève la démonstration du lemme en raisonnant par récurrence sur (M, δ). Si M est égal à 1, l'assertion est claire. On suppose l'assertion du lemme vraie lorsque (M, δ) est inférieur à (M_0, δ_0). On va la démontrer lorsque (M, δ) est égal à (M_0, δ_0). D'après (b), on peut supposer δ_0 positif. D'après l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver qu'il n'existe pas de suite $(x_0, \epsilon_0), (x_1, \epsilon_1), \dots$ dans $\mathcal{M}_M$ qui satisfait les conditions suivantes :

1) Pour $m = 0, 1, \ldots$, $d(x_m, \epsilon_m)$ est égal à δ.

2) Pour $m = 0, 1, \ldots$, la boule $B(x_{m+1}, \epsilon_{m+1})$ est contenue dans $B(x_m, \epsilon_m) \backslash \beta_{x_m, \epsilon_m}$.

3) La suite $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots$ tend vers 0.

On suppose qu'une telle suite existe. Puisque la suite des boules $B(x_0, \epsilon_0), B(x_1, \epsilon_1), \ldots$ est décroissante son intersection est non vide. En outre, d'après la condition (3) ci-dessus, cette intersection est réduite à un point. On le note x. D'après le lemme 2.5, l'intersection de $\{x\} \times \mathbf{R}$ et de S n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Soient $I_1, \ldots, I_{M'}$ les composantes connexes de l'image de cette intersection par q_n. Puisque S est compact, ces intervalles sont compacts. Soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_{M'}$ des intervalles ouverts deux à deux disjoints tels que pour $i = 1, \ldots, M'$, Ω_i contienne I_i. On note ω' l'intersection des images par p_n des ensembles $q_n^{-1}(\Omega_1) \cap S, \ldots, q_n^{-1}(\Omega_{M'}) \cap S$. La partie ω' de ω est un voisinage de x. Par suite, pour m assez grand, la boule $B(x_m, \epsilon_m)$ est contenue dans ω'. Puisque S est compact, pour m assez grand $q_n[S_{B(x_m, \epsilon_m)}]$ est contenu dans la réunion des intervalles $\Omega_1, \ldots, \Omega_{M'}$; or (x_m, ϵ_m) appartient à $\mathcal{M}_M$; donc M' est égal à M. On choisit m de façon que les deux conditions ci-dessus soient réalisées. Pour tout y dans $B(x_m, \epsilon_m)$, l'image par q_n de l'intersection de S et de $\{y\} \times \mathbf{R}$, rencontre chacun des ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_M$; or pour $i = 1, \ldots, M$, Ω_i contient une composante connexe et une seule de $q_n[S_{B(x_m, \epsilon_m)}]$; donc pour $i = 1, \ldots, M$, $\beta_{i, x_m, \epsilon_m}$ coïncide avec $B(x_m, \epsilon_m)$. Ceci est absurde car d'après la condition (1) ci-dessus, $d(x_m, \epsilon_m)$ est non nul.

5.4. Soit S un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ pour lequel $p_n(S)$ est égal à ω.

LEMME. — *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) *Pour toute boule ouverte ω_1 contenue dans ω et de rayon assez petit, l'image par q_n de l'intersection de S et de $\omega_1 \times \mathbf{R}$ est connexe.*

2) *S est borné et fermé dans $\omega \times \mathbf{R}$.*

3) *L'intérieur de S est vide.*

Alors S est μ_{n+1}-négligeable.

D'après la propriété $\mathbf{P}'_n$, $\omega \backslash \overset{\circ}{\omega}$ est μ_n-négligeable; donc il suffit de prouver que l'intersection de S et de $p_n^{-1}(\overset{\circ}{\omega})$ est μ_{n+1} -négligeable. Soit x dans $\overset{\circ}{\omega}$. Soient a et b deux réels qui satisfont les conditions suivantes :

$$a < b \ , \ (x, a) \in S \ , \ (x, b) \in S \ .$$

Soit r un réel supérieur à a et inférieur à b. D'après la condition (1) ci-dessus, il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ dans ω qui converge vers x et telle que S contienne (x_n, r) pour tout entier positif n. Puisque S est fermé, (x, r) appartient à S; donc l'intersection de S et de $\{x\} \times \mathbb{R}$ est connexe.

D'après la condition (2) du lemme, S est borné. Pour tout x dans ω, on désigne par $u(x)$ et par $v(x)$ les bornes inférieure et supérieure de $q_n[(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap S]$. D'après ce qui précède, S coïncide avec l'ensemble des éléments (x, t) de $\omega \times \mathbb{R}$ pour lesquels on a :

$$u(x) \leq t \leq v(x) .$$

Il résulte alors du lemme 5.2 que S est μ_{n+1}-négligeable lorsque l'intérieur de S est vide.

5.5. Soit S une partie bornée de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour laquelle $p_n(S)$ est égal à ω.

LEMME. — *On suppose que S appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$. Alors il existe un entier positif N et une unique partie ω_1' de ω qui possèdent les propriétés suivantes :*

1) *ω_1' appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.*

2) *Pour tout élément x de ω_1', l'image par q_n de l'intersection de S et de $\{x\} \times \mathbb{R}$ a un intérieur non vide.*

3) *Pour tout élément x de ω qui n'est pas dans ω_1', l'intersection de S et de $\{x\} \times \mathbb{R}$ a au plus N éléments.*

On suppose S localement fermé. Alors ω_1' est localement fermé. On note ω_1 l'adhérence de ω_1'. Alors S est μ_{n+1}-négligeable si et seulement si ω_1 est μ_n-négligeable.

La partie ω_1' est déterminée de façon unique par les conditions (2) et (3) ci-dessus. D'après 2.5, il existe un entier positif N tel que pour tout x dans ω, l'intersection de S et de $\{x\} \times \mathbb{R}$ ait au plus N composantes connexes. On note Ω l'ensemble des éléments $(x, t_1, ..., t_{N+1}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N+1}$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$x \in \omega \ , \ t_1 < ... < t_{N+1} \ .$$

C'est un ouvert de $\omega \times \mathbb{R}^{N+1}$. Soit $\tilde{S}'$ l'ensemble des éléments $(x_1, ..., x_{N+1}, t_1, ..., t_{N+1})$ de $(\omega)^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$(x_1, t_1) \in S \ , ..., \ (x_{N+1}, t_{N+1}) S \ ,$$

$$x_1 = ... = x_{N+1} \ .$$

On désigne par S' l'image de $\tilde{S}'$ par la projection :

$$(x_1, ..., x_{N+1}, t_1, ..., t_{N+1} \mapsto (x_1, t_1, ..., t_{N+1}) \ .$$

Soit ω_1' l'image de cette intersection par la projection : $(x, t_1, ..., t_{N+1}) \mapsto x$. Puisque ω appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$, ω_1' appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. D'après le choix de N, ω_1' satisfait les conditions (2) et (3) ci-dessus.

On suppose S localement fermé. Alors S' est localement fermé. Par hypothèse, S est borné; donc l'intersection de S' et de Ω est l'intersection d'un ouvert et d'un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N+1}$. Par suite, ω_1' est localement fermé. D'après les conditions (2) et (3) et d'après le théorème de Fubini, ω_1' est μ_n-négligeable si et seulement si S est μ_{n+1}-négligeable; or d'après 5.1, ω_1 est μ_n-négligeable si et seulement si ω_1' est μ_n-négligeable; donc S est μ_{n+1}-négligeable si et seulement si ω_1 est μ_n-négligeable.

5.6. Soit S une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour laquelle $p_n(S)$ est égal à ω.

LEMME. — *On suppose que S appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ et que $\mu_{n+1}(S)$ est positif. Alors l'intérieur de S est non vide.*

On utilise les notations de 5.5. Par hypothèse, $\mu_{n+1}(S)$ est positif; donc d'après le lemme 5.5, $\mu_n(\omega_1)$ est positif. Puisque ω_1 appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$, il résulte de la propriété $\mathbf{P}_n'$ que l'intérieur de ω_1 est non vide. Soit ω'' l'ensemble des points x de ω pour lesquels il existe un réel positif ϵ tel que l'intersection de ω et de la boule fermée de centre x et de rayon ϵ, satisfasse les conditions de l'assertion du lemme 5.3, relativement à la partie S ci-dessus. Ces conditions montrent en particulier que ω'' est ouvert dans ω. L'intersection de ω'' et de $\overset{\circ}{\omega}_1$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ contenue dans cet ouvert. Puisque ω_1' est partout dense dans ω_1, l'intersection de B et de ω_1' est partout dense dans B; or cette intersection est localement fermée et d'après le lemme 2.1, elle appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$; donc d'après 5.1, elle n'est pas μ_n-négligeable.

On choisit la boule B de façon que $\overline{B}$ satisfasse les conditions de l'assertion du lemme 5.3, relativement à la partie S ci-dessus. On note $I_1, \ldots, I_l$ les composantes connexes de l'image de l'intersection de S et de $\overline{B} \times \mathbb{R}$, par l'application q_n. Pour $i = 1, \ldots, l$, on note S_i l'intersection des ensembles :

$$S \ , \ \overline{B} \times \mathbb{R} \ , \ q_n^{-1}(I_i) \ .$$

D'après ce qui précède et d'après la condition (2) du lemme 5.5, pour au moins un i, S_i n'est pas μ_{n+1}-négligeable. En outre, l'ensemble S_i et la boule $\overline{B}$ satisfont les conditions (1) et (2) du lemme 5.4; donc l'intérieur de S_i est non vide. Par suite, l'intérieur de S est non vide.

5.7. On démontre ici l'implication : $\mathbf{P}'_n \Rightarrow \mathbf{Q}_n$. *Soit S une partie fermée d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. On suppose que S appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$. Il s'agit de prouver que l'intersection de $\mathbb{R}^n$ et de l'adhérence de S dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^n$.* Plus précisément, on prouvera l'assertion suivante : *si S est borné, il existe une partie fermée ω_1 de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait les conditions suivantes :*

a) *ω_1 appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.*

b) *L'intérieur de ω_1 est vide.*

c) *Pour toute boule fermée B de $\mathbb{R}^n$ qui ne rencontre pas ω_1, il existe un réel positif t_0 pour lequel t est supérieur à t_0 si (x,t) appartient à l'intersection de $B \times \mathbb{R}$ et de S.*

On suppose S borné. Soit ω l'image de $\overline{S}$ par p_n. Puisque S est borné, ω est compact. L'intersection de $\overline{S}$ et de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ est égale à S; or l'intérieur de S est vide; donc l'intérieur de $\overline{S}$ est vide. Puisque la propriété $\mathbf{P}'_n$ est vraie, il résulte du lemme 5.6 que S est μ_{n+1}-négligeable. Par suite, d'après le lemme 5.5, il existe un entier positif N et un fermé ω_1 contenu dans ω, μ_n-négligeable, tel que pour tout x dans $\omega \backslash \omega_1$, l'intersection de $\overline{S}$ et de $\{x\} \times \mathbb{R}$ ait au plus N points. En outre, on peut choisir ω_1 dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ contenue dans ω, ne rencontrant pas ω_1 et satisfaisant les conditions du lemme 5.3 relativement à $\overline{S}$. On note $I_1, \ldots, I_l$ les composantes connexes de l'image de l'intersection de $\overline{S}$ et de $B \times \mathbb{R}$ par l'application q_n. Pour $i = 1, \ldots, l$, on désigne par $\overline{S}_i$ l'intersection des ensembles :

$$\overline{S}\ ,\ B \times \mathbb{R}\ ,\ q_n^{-1}(I_i)\ .$$

Pour tout x dans B, l'intersection de $\{x\} \times \mathbb{R}$ et de $\overline{S}$ est finie; donc d'après la démonstration du lemme 5.4, les ensembles $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_l$ sont les graphes de fonctions $\tau_1, \ldots, \tau_l$ sur B. Puisque ces ensembles sont compacts, les fonctions $\tau_1, \ldots, \tau_l$ sont continues sur B. Pour tout x dans B, les nombres $\tau_1(x), \ldots, \tau_l(x)$ sont deux à deux distincts car ils appartiennent respectivement aux intervalles $I_1, \ldots, I_l$. Si $\overline{S}$ ne rencontre pas $B \times \{0\}$, alors S contient la réunion des graphes des fonctions $\tau_1, \cdots, \tau_l$; donc d'après la continuité de ces fonctions, il existe un réel positif t_0 tel que pour tout (x,t) dans l'intersection de S et de $B \times \mathbb{R}$, on ait :

$$t \geq t_0\ .$$

On suppose que $\overline{S}$ contient $B \times \{0\}$. Alors une des fonctions $\tau_1, \ldots, \tau_l$ est identiquement nulle sur B et les autres ne s'y annulent pas. Pour celles-ci, il existe un réel positif t_0 qui les minore. En outre, l'intersection de S et de $B \times \{0\}$ est la réunion de leurs graphes. Ceci est absurde car $B \times \{0\}$ est contenu dans l'adhérence de S. L'intérieur de ω_1 étant vide, l'intersection de $\overline{S}$ et de $\mathbb{R}^n$ a un intérieur vide dans $\mathbb{R}^n$.

L'assertion ci-dessus prouve que pour S borné, l'intersection de $\overline{S}$ et de $\mathbb{R}^n$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^n$. Pour S non borné et pour m entier positif, on désigne par S_m l'intersection de S et de la boule centrée en 0 et de rayon m. La réunion des adhérences des ensembles $S_1, S_2, \cdots$ coïncide avec $\overline{S}$; donc d'après l'assertion ci-dessus et d'après le théorème de Baire, l'intersection de $\overline{S}$ et de $\mathbb{R}^n$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^n$.

5.8. On démontre ici les assertions du §5. On commence par prouver la propiété $\mathbf{P}'_{n+1}$. Soit S une partie fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$. Pour tout entier positif m, on note S_m l'ensemble des éléments (x,t) de S pour lesquels t n'est pas supérieur à m. Si l'intérieur de S est vide, alors pour tout m, S_m est d'intérieur vide. D'après 5.6, pour tout m, S_m est μ_{n+1}-négligeable; donc S est μ_{n+1}-négligeable. Par suite, la propriété $\mathbf{P}'_n$ est vraie quel que soit n. D'après 5.7, la propriété $\mathbf{Q}_n$ l'est aussi.

Il nous reste à prouver qu'il en est de même pour la propriété $\mathbf{P}_n$ quel que soit n. Soit S un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ qui est μ_n-négligeable. D'après l'assertion (v) du lemme 2.2, il existe un entier positif m et une partie fermée T de $\mathbb{R}^{n+m}$, appartenant à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$, pour lesquels S est l'image de T par la projection canonique de $\mathbb{R}^{n+m}$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\tilde{M}$ l'ensemble des éléments (x,y,ϵ) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^*_+$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$y \in T \textit{ et } \|y\| \leq \frac{1}{\epsilon} .$$

On désigne par M l'image de $\tilde{M}$ par la projection :

$$(x,y,\epsilon) \mapsto (x,\epsilon) .$$

Puisque T appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$, $\tilde{M}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{2n+m+1}$ et M appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$. En outre, S est l'image de M par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$; or par hypothèse, S est μ_n-négligeable; donc d'après le théorème de Fubini, M est μ_{n+1}-négligeable. Puisque T est fermé, M est fermé dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*_+$; donc d'aprés les propriétés $\mathbf{P}'_{n+1}$ et $\mathbf{Q}_n$, l'intersection de $\overline{M}$ et de $\mathbb{R}^n$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^n$. Il résulte alors de la propriété $\mathbf{P}'_n$ que cette intersection est μ_n-négligeable. Cette intersection étant l'adhérence de S dans $\mathbb{R}^n$, $\overline{S}$ est μ_n-négligeable.

6. Quelques propriétés des ensembles $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

Le but de cette section est la démonstration du théorème du §1. D'après le lemme 2.5, celui-ci sera conséquence des assertions (1) et (4) ci-dessous. On utilise les notations de 1 et de 2. On démontre dans cette section que pour tout entier n, on a les assertions suivantes :

1) *Le complémentaire d'un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.*

2) *Tout élément S de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient un élément S' de $\mathcal{P}_n$ pour lequel $S\backslash S'$ est μ_n-négligeable.*

3) *Si S est dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, alors $\overline{S}\backslash \overset{\circ}{S}$ est μ_n-négligeable.*

4) *Si S est dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, alors les composantes connexes de S appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.*

D'après 2.5, $\tilde{\mathcal{P}}_1$ et $\mathcal{P}_1$ sont égaux et coïncident avec l'ensemble des réunions finies d'intervalles de $\mathbf{R}$; donc les assertions ci-dessus sont satisfaites pour $n = 1$. On utilise la notion de dimension définie au §3. On démontrera alors par récurrence sur l'entier p l'assertion suivante : (&) *pour tout entier n, $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient le complémentaire et les composantes connexes de ses éléments de dimension p. En outre, tout élément S de $\tilde{\mathcal{P}}_n$, de dimension p, contient un élément S' de $\mathcal{P}_n$ pour lequel $S\backslash S'$ est μ_n-négligeable.* Le complémentaire d'une partie finie de $\mathbf{R}^n$ appartenant à $\mathcal{P}_n$, il résulte de 3 que l'assertion est vraie pour $p = 0$. Dans ce qui suit, on la suppose vraie pour $p-1$. La propriété (2) joue un rôle important dans la démonstration de l'assertion (&). L'assertion ($\star$) de 6.1 est un cas particulier de la propriété (3). Le lemme 6.2 est l'étape clef de la démonstration de la propriété. Le lemme 6.5 démontre l'assertion (&) pour $\tilde{\mathcal{P}}_{p+m}$ lorsqu'on la suppose vraie pour $\tilde{\mathcal{P}}_p$. La démonstration de ce lemme nécessite une description des éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ qui est donnée par les lemmes 6.3 et 6.4. On prouve l'assertion (&) pour $\tilde{\mathcal{P}}_p$ en 6.6. La démonstration dans ce cas repose sur la propriété (2) du §6 et l'assertion (ii) du lemme 2.2. On démontre alors les propriétés (1), (2), (3), (4) ci-dessus en 6.7.

6.1. On démontre ici l'assertion suivante : ($\star$) *pour n entier positif inférieur à p et pour tout S dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, $\overset{\circ}{S}$ et $S\backslash \overset{\circ}{S}$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. En outre, $\overline{S}\backslash \overset{\circ}{S}$ est μ_n-négligeable.*

LEMME. — *Soient n un entier positif et S un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$. On suppose que $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient ${}^cS$. Alors $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient $S\backslash\overset{\circ}{S}$.*

On note $\tilde{S}$ l'ensemble des éléments (x,y,ϵ) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$x \in S \;,\; y \in {}^cS \;,\; \|x-y\| \leq \epsilon \;.$$

Puisque ${}^cS$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$, $\tilde{S}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{2n+1}$. L'image de $\tilde{S}$ par la projection :

$$(x,y,\epsilon) \mapsto x \;,$$

est le complémentaire dans S de $\mathring{S}$; donc $S \setminus \mathring{S}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

On achève la démonstration de l'assertion $(\star)$. D'après le lemme et d'après l'hypothèse de récurrence du §6, $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient $S \setminus \mathring{S}$ et $\mathring{S}$. D'après l'hypothèse de récurrence de §6, S contient un élément S' de $\mathcal{P}_n$ pour lequel $S \setminus S'$ est μ_n-négligeable. D'après la propriété $\mathbf{P}_n$, $\overline{S \setminus S'}$ est μ_n-négligeable. D'après l'hypothèse de récurrence du §6, $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient le complémentaire de S'; donc d'après la propriété $\mathbf{P}_n$, $\overline{S'} \setminus \mathring{S'}$ est μ_n-négligeable. La réunion de $\overline{S \setminus S'}$ et de $\overline{S'}$ étant égale à $\overline{S}$, $\overline{S} \setminus \mathring{S'}$ est μ_n-négligeable. Puisque $\mathring{S}$ contient $\mathring{S'}$, $\overline{S} \setminus \mathring{S}$ est μ_n-négligeable.

6.2. Soit S un élément de $\mathcal{P}_p$. Soit (m,F) un couple associé à S, pour lequel F appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_{p+m}$. D'après 2.7, on peut supposer que F appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_{p+m}$. Soit G la fonction sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ définie par :

$$G(x,y) = \exp[y_1^2 + \cdots + y_m^2] F(x,y)^2 \;.$$

La fonction G appartient à $\mathcal{A}_{p+m}$ et a même ensemble de zéros que la fonction F. On utilise sur $\mathbb{R}^p$ la norme euclidienne usuelle et sur $\mathbb{R}^m$ la norme $\|.\|$ définie par :

$$\|(y_1,\ldots,y_m)\| = \sup\{|y_1|,\ldots,|y_m|\} \;.$$

LEMME. — *Pour x dans $\mathbb{R}^p$, on note $g(x)$ la borne inférieure de la fonction sur $\mathbb{R}^m$: $y \mapsto G(x,y)$.*

i) *Il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ qui satisfait les conditions suivantes :*

1) *Ω et ${}^c\Omega$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_p$.*
2) *Ω est partout dense dans $\mathbb{R}^p$.*
3) *La restriction de g à Ω est continue.*

ii) *Le complémentaire de S dans $\overline{S}$ est μ_p-négligeable et appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$.*

i) Pour tout (x,ϵ) dans $\mathbb{R}^p \times]0,1]$, on note $\tilde{g}(x,\epsilon)$ la borne inférieure de la fonction : $y \mapsto G(x,y)$ sur l'ensemble des éléments y de $\mathbb{R}^m$ dont la norme n'est pas supérieure à ϵ^{-1}. Soit k un entier positif, non supérieur à m. Pour $J = \{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m\}$ et $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ dans $\{-1, +1\}^k$, on note $L_{J,\eta}$ l'ensemble des points (x, ϵ, y) de $\mathbf{R}\times]0,1] \times \mathbf{R}$ qui satisfont les conditions suivantes :

1) Pour $i = 1, \dots, k$, y_{j_i} est égal à $\eta_i \epsilon^{-1}$.
2) Pour i dans $\{1, \dots, m\} \backslash \{j_1, \dots, j_k\}$, $|y_i|$ est inférieur à ϵ^{-1}.
3) Le point y est un point critique de la restriction de la fonction : $y \mapsto G(x,y)$ au sous-ensemble de $\mathbf{R}^m$ défini par les conditions (1) et (2) ci-dessus.

Lorsque $k = m$, $L_{J,\eta}$ est défini par la condition (1) ci-dessus. On désigne par L la réunion des ensembles $L_{J,\eta}$ et de l'ensemble des points (x, ϵ, y) pour lesquels y est un point critique de la restriction de la fonction : $y \mapsto G(x,y)$, à l'ouvert $\{\epsilon\|y\| < 1\}$ de $\mathbf{R}^m$. On note $\tilde{L}$ l'image de L par l'application : $(x, \epsilon, y) \mapsto (x, \epsilon, G(x,y))$. Puisque les dérivées partielles d'une fonction de $\mathcal{A}_{p+m}$ appartiennent à $\mathcal{A}_{p+m}$, l'ensemble L appartient à $\mathcal{P}_{p+1+m}$. D'après le lemme 2.2, $\tilde{L}$ appartient à $\mathcal{P}_{p+2}$. D'après le lemme 2.6, il existe un entier positif n tel que pour tout (x, ϵ) dans $\mathbf{R}^p\times]0,1]$, l'intersection de L et de $\{x\} \times \mathbf{R}^m \times \{\epsilon\}$ ait au plus n composantes connexes. Ces composantes étant des sous-ensembles analytiques, la restriction de G à chacune d'elles est constante; donc pour tout (x, ϵ) dans $\mathbf{R}^p\times]0,1]$, l'intersection de $\tilde{L}$ et de $\{x\} \times \{\epsilon\} \times \mathbf{R}$ a au plus n points. En outre, $\tilde{L}$ contient le graphe de la fonction $\tilde{g}$.

Il résulte du théorème de Fubini et de la propriété $\mathbf{P}_{p+2}$ que l'intérieur de $\overline{\tilde{L}}$ est vide. Soit M l'intersection de $\overline{\tilde{L}}$ et de $\mathbf{R}^p \times \{0\} \times \mathbf{R}$. D'après la propriété $\mathbf{Q}_{p+1}$, l'intérieur de M est vide. Puisque $\tilde{L}$ contient le graphe de la fonction $\tilde{g}$, M contient le graphe de la fonction g. En outre, pour tout (x,t) dans M, t est non inférieur à $g(x)$. Puisque l'intérieur de M est vide, il résulte de 5.5 qu'il existe un entier positif d et une partie ω_1 de $\mathbf{R}^p$ qui satisfont les conditions suivantes :

a) ω_1 appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$.
b) ω_1 est fermé et son intérieur est vide.
c) Pour tout x dans ${}^c\omega_1$, l'intersection de M et de $\{x\} \times \mathbf{R}$ a au plus d éléments.

Soit N l'ensemble des éléments (x, η) de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}_+^*$ pour lesquels il existe des réels t_1 et t_2 qui satisfont les conditions suivantes :

$$(x, t_1) \in M \ , \ (x, t_2) \in M \ , \ t_1 < t_2 \ , \ t_2 - t_1 = \eta \ .$$

D'après ce qui précède, N appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{p+1}$. En outre, pour tout x dans ${}^c\omega_1$, l'intersection de $\{x\} \times \mathbf{R}$ et de N est finie; donc d'après le théorème de Fubini et la propriété $\mathbf{P}_{p+1}$, l'intérieur de $\overline{N}$ est vide. Par suite, d'après 5.7, il existe une partie fermée ω_2 de $\mathbf{R}^p$ qui satisfait les conditions suivantes :

I) ω_2 appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$.

II) L'intérieur de ω_2 est vide.

III) Pour toute boule fermée B de $\mathbf{R}^p$, ne rencontrant pas ω_2, il existe un réel positif η_0 pour lequel η est supérieur à η_0 si (x, η) appartient à l'intersection de $\overline{N}$ et de $B \times \mathbf{R}$.

D'après l'hypothèse de récurrence de §6, ${}^c\omega_1$ et ${}^c\omega_2$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_p$. Soient Ω l'intersection de ces deux ouverts et M' l'intersection de M et de $\Omega \times \mathbf{R}$. D'après ce qui précède et d'après l'hypothèse de récurrence de §6, Ω satisfait les conditions (1) et (2) de l'assertion (i) du lemme et M' appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{p+1}$. Soit g_0 la restriction de g à Ω. Son graphe est contenu dans M'. Pour tout (x, t) dans M', t est non inférieur à $g(x)$; donc d'après la condition (III) ci-dessus, le graphe de g_0 est fermé dans $\Omega \times \mathbf{R}$. Puisque la fonction g est localement bornée, g_0 est continue.

ii) Si x est un point de $\mathbf{R}^p$ en lequel g est positif, il est contenu dans ${}^cS$. Soit x dans ${}^cS$. Puisque F appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_{p+m}$, il existe des fonctions polynomiales $P_1, \ldots, P_k$ et des formes linéaires $L_1, \ldots, L_k$ sur $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^m$ pour lesquelles on a :

$$F(x,y)^2 = P_1(x,y)\exp[L_1(x,y)] + \cdots + P_k(x,y)\exp[L_k(x,y)] \ ,$$

pour tout y dans $\mathbf{R}^m$. Soit ϕ la fonction sur $\mathbf{R}^m$ définie par :

$$\phi(y) = |P_1(x,y)| + \cdots + |P_k(x,y)| \ .$$

Puisque x n'appartient pas à S, la fonction ϕ est positive en tout point de $\mathbf{R}^m$. Pour t réel positif, on désigne par $\mu(t)$ la borne inférieure de la fonction ϕ sur la boule fermée de $\mathbf{R}^m$, centrée en 0 et de rayon t. D'après le théorème de Tarski-Seidenberg [Go], Théorème 2.1, le graphe de la fonction μ est une partie semi-algébrique de $\mathbf{R}^2$; donc il existe une fonction polynomiale Q sur $\mathbf{R}^2$ pour laquelle $Q(t, \mu(t))$ est nul pour t assez grand. En utilisant un développement de Puiseux, on voit qu'il existe des réels positifs A et a pour lesquels on a :

$$\mu(t) \geq At^{-a} \ ,$$

pour tout réel positif t. Lorsque $\|y\|$ est assez grand, pour $i = 1, \ldots, k$, on a :

$$\frac{1}{2}\|y\|^2 + L_i(x,y) \geq 0 \ ;$$

donc pour $\|y\|$ assez grand, on a :

$$G(x,y) \geq A \exp[\frac{1}{2}\|y\|^2]\|y\|^{-a} .$$

Puisque $G(x,y)$ est positif en tout point de $\mathbb{R}^m$, $g(x)$ est positif. Par suite, ${}^cS$ coïncide avec l'ensemble des points de $\mathbb{R}^p$ en lesquels g est positif.

Puisque g est continu sur Ω et identiquement nul sur S, $\overline{S}\backslash S$ est contenu dans ${}^c\Omega$; donc d'après la condition (1) du lemme, $\overline{S}\backslash S$ est μ_p-négligeable. D'après l'hypothèse de récurrence de §6, le complémentaire de l'intersection de S et de ${}^c\Omega$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$; donc $\overline{S}\backslash S$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$.

6.3. Soient n et m deux entiers positifs tels que m soit supérieur à n. On note $\mathcal{F}_{m,n}$ l'ensemble des familles croissantes, $\iota = \{\iota_1, \ldots, \iota_n\}$, d'éléments de $\{1, \ldots, m\}$. Pour tout ι dans $\mathcal{F}_{m,n}$, on désigne par π_ι la projection :

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{\iota_1}, \ldots, x_{\iota_n}) .$$

LEMME. — *On suppose que $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient le complémentaire de ses éléments. Soit S un élément de dimension n de $\tilde{\mathcal{P}}_m$. Alors S est la réunion d'un élément S' de $\tilde{\mathcal{P}}_m$ et d'une famille $\{S_\iota; \iota \in \mathcal{F}_{m,n}\}$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_m$ qui satisfont les conditions suivantes :*

I) *La dimension de S' est inférieure à n.*

II) *Pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, l'intersection de $\pi_\iota^{-1}(x)$ et de S_ι est finie.*

i) Soit ι dans $\mathcal{F}_{m,n}$. Pour tout i dans $\{1, \ldots, m\}\backslash\iota$, on désigne par $\pi_{\iota,i}$ la projection de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $x \mapsto (\pi_\iota(x), x_i)$. Puisque la dimension de S est n, il résulte de la propriété $\mathbf{P}_{n+1}$ que l'intérieur de $\overline{\pi_{\iota,i}(S)}$ est vide. D'après 5.5 il existe un entier positif $\nu_{\iota,i}$ et un élément $S'_{\iota,i}$ de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ qui satisfont les conditions suivantes :

1) $S'_{\iota,i}$ est μ_n-négligeable et contenu dans $\pi_\iota(S)$.

2) pour tout x dans $\pi_\iota(S)\backslash S'_{\iota,i}$, l'intersection de $\pi_{\iota,i}(S)$ et de $\pi_{\iota,i}[\pi_\iota^{-1}(x)]$ a au plus $\nu_{\iota,i}$ éléments.

Soient ν_ι le produit des $\nu_{\iota,i}$ et $S_{\iota,1}$ la réunion des $S'_{\iota,i}$. D'après la condition (1) ci-dessus, $S_{\iota,1}$ est μ_n-négligeable et appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Soit $S_{\iota,2}$ le complémentaire de $S_{\iota,1}$ dans $\pi_\iota(S)$. Par hypothèse, $S_{\iota,2}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. D'après la condition (2) ci-dessus, pour tout x dans $S_{\iota,2}$, l'intersection de S et de $\pi_\iota^{-1}(x)$ a au plus ν_ι éléments.

Soit S' l'intersection de S et des ensembles $\pi_\iota^{-1}(S_{\iota,1})$. D'après la condition (1), la dimension de S' est inférieure à n. Pour tout ι, on note

S_ι l'intersection de S et de $\pi_\iota^{-1}(S_{\iota,2})$. La famille $\{S_\iota; \iota \in \mathcal{F}_{m,n}\}$ satisfait la condition (II) ci-dessus. En outre, S est la réunion de S' et des ensembles de la famille $\{S_\iota; \iota \in \mathcal{F}_{m,n}\}$.

6.4. Soient n et m deux entiers positifs. On désigne par π la projection canonique : $(x,t) \mapsto x$, de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^n$. On utilise sur $\mathbf{R}^m$ l'ordre lexicographique induit par l'ordre sur $\mathbf{R}$. On note $\prec$ l'ordre strict défini par cet ordre.

LEMME. — *On suppose que $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient le complémentaire de ses éléments et que tout élément T de $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient un élément T' de $\mathcal{P}_n$ pour lequel $T \backslash T'$ est μ_n-négligeable. Soient N un entier positif et S un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ qui satisfont la condition suivante : pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, l'intersection de S et de $\pi^{-1}(x)$ a au plus N éléments. On suppose que la dimension de S est n. Alors il existe un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ qui possède les propriétés suivantes :*

1) *Ω appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.*

2) *La dimension de l'intersection de S et de $\pi^{-1}({}^c\Omega)$ est inférieure à n.*

3) *L'intersection de S et de $\pi^{-1}(\Omega)$ est réunion finie d'éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ qui sont des graphes de fonctions continues sur des ouverts de Ω.*

Puisque la dimension de S est n, l'intérieur de $\pi(S)$ est non vide, d'après 6.1. On suppose que N est le plus petit entier qui satisfait la condition ci-dessus relativement à S. On raisonne par récurrence sur N. Soit Ω'_N l'ensemble des éléments x de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels l'intersection de S et de $\pi^{-1}(x)$ a N éléments. D'après la démonstration du lemme 5.5, Ω'_N appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. On note S_N l'intersection de S et de $\pi^{-1}(\overline{\Omega'_N})$. Puisque $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient le complémentaire de ses éléments, $S \backslash S_N$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$; l'assertion du lemme pour $S \backslash S_N$ résulte de l'hypothèse de récurrence. Si l'intérieur de Ω'_N est vide alors d'après la propriété $\mathbf{P}_n$, la dimension de $\overline{\Omega'_N}$ est inférieure à n; donc la dimension de S_N est inférieure à n. Par suite, il suffit de démontrer le lemme dans le cas où S est égal à S_N et où l'intérieur de Ω'_N est non vide. Dans ce qui suit, on suppose qu'il en est ainsi.

Soit S_+ l'ensemble des éléments (x,t) de S pour lesquels $\|t\|$ est supérieur à 1. On note $\tilde{S}_+$ l'image de S_+ par l'application :

$$(x,t) \mapsto \left(x, \frac{1}{\|t\|}\right) .$$

On désigne par T l'intersection de $\mathbf{R}^n$ avec $\overline{\tilde{S}_+}$. D'après les propriétés $\mathbf{P}_{n+1}$ et $\mathbf{Q}_n$, la dimension de T est inférieure à n. Soit $\tilde{D}$ l'ensemble des éléments

(x, t_1, t_2) de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$(x, t_1) \in S \ , \ (x, t_2) \in S \ , \ t_1 \neq t_2 \ .$$

On note D l'image de $\tilde{D}$ par l'application :

$$(x, t_1, t_2) \mapsto (x, \|t_1 - t_2\|) \ .$$

Pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, l'intersection de D et de $\pi^{-1}(x)$ est finie; donc d'après les propriétés $\mathbf{P}_{n+1}$ et $\mathbf{Q}_n$, la dimension de l'intersection de $\overline{D}$ et de $\mathbf{R}^n$ est inférieure à n. Soit T' la réunion de T et de cette intersection. Soit Ω_N l'intérieur du complémentaire de T' dans Ω'_N. D'après 6.1, Ω_N appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Pour $i = 1, \dots, N$, on désigne Γ_i, l'image par la projection : $(x, t_1, \dots, t_N) \mapsto (x, t_i)$, de l'ensembles des éléments $(x, t_1, \dots, t_N)$ de $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^m)^N$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$(x, t_1) \in S \ , \dots, \ (x, t_N) \in S \ , \ t_1 \prec \cdots \prec t_N \ .$$

Par définition, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ sont les graphes de fonctions $\tau_1, \dots, \tau_N$ sur Ω_N. Puisque Ω_N ne rencontre pas T, ces fonctions sont localement bornées. Puisque Ω_N ne rencontre pas $\overline{D}$, pour tout x dans Ω_N et pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, N\}$, la fonction $\|\tau_i - \tau_j\|$ est minorée par un réel positif au voisinage de x; donc les fonctions $\tau_1, \dots, \tau_N$ sont continues sur Ω_N. D'après les hypothèses du lemme et d'après 6.1, la dimension de $\overline{\Omega'_N} \backslash \Omega_N$ est inférieure à n; donc la dimension de l'intersection de S et de $\pi^{-1}[\overline{\Omega'_N} \backslash \Omega_N]$ est inférieure à n. Le lemme est ainsi démontré.

6.5. On conserve les notations de 6.4, avec les mêmes hypothèses.

LEMME. — *On suppose que n n'est pas supérieur à p et que $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient les composantes connexes de ses éléments.*

i) *Pour tout élément S de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$, de dimension n, $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ contient ${}^cS$ et les composantes connexes de S.*

ii) *Soit S une partie fermée de $\mathbf{R}^{n+m}$, de dimension n. Si S appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$, alors $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ contient les composantes connexes de ${}^cS$.*

i) Soient S_1 et S_2 deux éléments de $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ pour lesquels $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ contient leurs composantes connexes. Soit S la réunion de S_1 et S_2. Toute composante connexe de S est réunion de composantes connexes de S_1 et de S_2; or d'après 2.5, S_1 et S_2 n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes; donc $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ contient les composantes connexes de S. Le complémentaire de S est l'intersection de ${}^cS_1$ et ${}^cS_2$. D'après 6.3, 6.4 et d'après l'hypothèse de récurrence de §6, il suffit de démontrer l'assertion dans le cas où S est le graphe d'une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Dans ce qui suit, on suppose qu'il en est ainsi.

Soient Ω l'image de S par π et τ la fonction sur Ω dont S est le graphe. Puisque τ est continue, les composantes connexes de S sont les graphes des restrictions de τ aux composantes connexes de cet ouvert; or par hypothèse, $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient les composantes connexes de Ω; donc $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ contient les composantes connexes de S. Par hypothèse, ${}^c\Omega$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Soit S' l'ensemble des éléments (x,t) de $\Omega \times \mathbb{R}^m$ pour lesquels t est différent de $\tau(x)$. Puisque S est le graphe de τ, S' appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. La réunion de S' et de $\pi^{-1}({}^c\Omega)$ est égale à ${}^cS$; donc ${}^cS$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$.

ii) D'après la démonstration de 6.4, il existe un entier positif N, des ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ de $\mathbb{R}^n$ et une famille $\{\tau_{i,j}; 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq i\}$ de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ qui satisfont les conditions suivantes :

1) Les ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ sont deux à deux disjoints et appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

2) Pour $i = 1, \ldots, N$, les graphes des fonctions $\tau_{i,1}, \ldots, \tau_{i,i}$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ et leurs images par π sont égales à Ω_i.

3) pour tout x dans Ω_i, on a :
$$\tau_{i,1}(x) \prec \cdots \prec \tau_{i,i}(x) \ .$$

4) Pour tout i, l'intersection de S et de $\pi^{-1}(\Omega_i)$ est la réunion des graphes des fonctions $\tau_{i,1}, \ldots, \tau_{i,i}$.

5) La dimension de l'intersection de $\pi(S)$ et du complémentaire de la réunion des ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ est inférieure à n.

Pour $i = 1, \ldots, N$ et pour $j = 1, \ldots, i-1$, on note $S_{i,j}$ l'ensemble des éléments (x,t) de $\Omega_i \times \mathbb{R}^m$ qui satisfont les inégalités :
$$\tau_{i,j}(x) \prec t \prec \tau_{i,j+1}(x) \ .$$
Soient $S_{i,0}$ et $S_{i,N}$ les ensembles :
$$S_{i,0} = \{(x,t) \in \Omega_i \times \mathbb{R}^m \ ; \ t \prec \tau_{i,1}(x)\} \ ,$$
$$S_{i,N} = \{(x,t) \in \Omega_i \times \mathbb{R}^m \ ; \ \tau_{i,N}(x) \prec t\} \ .$$
D'après la condition (2) ci-dessus, pour tout (i,j), $S_{i,j}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. D'après la continuité des fonctions $\tau_{i,1}, \ldots, \tau_{i,i}$, pour toute composante connexe ω de Ω_i, l'intersection de $S_{i,j}$ et de $\pi^{-1}(\omega)$ est une composante connexe de $S_{i,j}$; or par hypothèse $\tilde{\mathcal{P}}_n$ contient les composantes connexes de Ω_i; donc $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ contient les composantes connexes de $S_{i,j}$. Soit Ω_0

l'intérieur du complémentaire de $\pi(S)$. D'après 6.1, Ω_0 appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Puisque S est fermé, la réunion des ensembles $\pi^{-1}(\Omega_0), S_{1,0}, \ldots, S_{N,N}$ est partout dense dans ${}^cS$. Puisque ${}^cS$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$, les adhérences dans ${}^cS$ des composantes connexes des ensembles $\pi^{-1}(\Omega_0), S_{1,0}, \ldots, S_{N,N}$ appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$. D'après 2.5, celles-ci sont en nombre fini; or chaque composante connexe de ${}^cS$ est réunion de certaines d'entre elles; donc $\tilde{\mathcal{P}}_{n+m}$ contient les composantes connexes de ${}^cS$.

6.6. On démontre dans cette section les assertions suivantes :

1) *Soit S dans $\tilde{\mathcal{P}}_p$. Si S est fermé et si sa dimension est inférieure à p, alors $\tilde{\mathcal{P}}_p$ contient les composantes connexes de ${}^cS$.*

2) *$\tilde{\mathcal{P}}_p$ contient le complémentaire des éléments de $\mathcal{P}_p$.*

3) *Tout élément S de $\tilde{\mathcal{P}}_p$ contient un élément S' de $\mathcal{P}_p$ pour lequel $S \backslash S'$ est μ_p-négligeable.*

L'assertion (1) résulte de l'hypothèse de récurrence de §6 et du lemme 6.5 pour $n \leq p-1$ et $m \geq 1$. Soit S dans $\mathcal{P}_p$. D'après 6.2 et d'après la propriété $\mathbf{P}_p$, $\overline{\overline{S}\backslash S}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$ et sa dimension est inférieure à p; donc d'après l'assertion (1), $\tilde{\mathcal{P}}_p$ contient les composantes connexes de son complémentaire. Le complémentaire de S est la réunion de $\overline{S}\backslash S$ et des composantes connexes du complémentaire de $\overline{\overline{S}\backslash S}$ qui ne rencontrent pas S; or celles-ci sont en nombre fini; donc ${}^cS$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$.

Par définition, $\tilde{\mathcal{P}}_p$ est la réunion des ensembles $\mathcal{P}_{p,k}$. On démontrera alors par récurrence sur l'entier k l'assertion suivante : *pour tout S dans $\mathcal{P}_{p,k}$, il existe un élément S' de $\mathcal{P}_p$ tel que le complémentaire de S' dans S soit μ_p-négligeable.* L'assertion est claire pour $k = 0$. On la suppose vraie pour tout entier k inférieur à k_0. Il s'agit de la prouver lorsque k est égal à k_0.

a) Soient S dans $\mathcal{P}_{p,k-1}$ et S' un élément de $\mathcal{P}_p$ pour lequel $S\backslash S'$ est μ_p-négligeable. On démontre dans ce paragraphe que $\overline{S}\backslash S'$ est μ_p-négligeable. D'après ce qui précède, $S\backslash S'$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$. Puisque $S\backslash S'$ est μ_p-négligeable, il résulte de la propriété $\mathbf{P}_p$ que $\overline{S\backslash S'}$ est μ_p-négligeable. D'après 6.2, $\overline{S'}\backslash S'$ est μ_p-négligeable; or $\overline{S}$ est la réunion des ensembles $\overline{S\backslash S'}$ et $\overline{S'}$; donc $\overline{S}\backslash S'$ est μ_p-négligeable.

b) Soit Σ un élément de $\mathcal{P}_{p,k}$. Soit $(m, \tilde{\Sigma})$ un couple associé à S. On désigne par π la projection canonique de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^p$. D'après l'assertion (ii) du lemme 2.2, il existe des entiers non négatifs l, m, p, des éléments

$$S \ , \ S_1 \ , \ldots , S_l \ , \ T_1 \ , \ldots , T_m \ , \ T_{1,1} \ , \ldots , T_{m,p} \ ,$$

dans $\mathcal{P}_{p+m,k-1}$ pour lesquels on a :

$$\tilde{\Sigma} = S \cap \overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_l} \cap \overline{T_1 \cap \overline{T_{1,1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{1,p}}} \cap \cdots \cap \overline{T_m \cap \overline{T_{m,1}} \cap \cdots \cap \overline{T_{m,p}}} .$$

Puisque Σ est égal à $\pi(\tilde{\Sigma})$, il est contenu dans :

$$\pi(S) \cap \overline{\pi(S_1)} \cap \cdots \cap \overline{\pi(S_l)} \cap \overline{\pi(T_1) \cap \overline{\pi(T_{1,1})} \cap \cdots \cap \overline{\pi(T_{1,p})}}$$
$$\cap \cdots \cap \overline{\pi(T_m) \cap \overline{\pi(T_{m,1})} \cap \cdots \cap \overline{\pi(T_{m,p})}}$$

et il contient :

$$\pi(S) \cap \pi(S_1) \cap \cdots \cap \pi(S_l) \cap \pi(T_1) \cap \pi(T_{1,1}) \cap \cdots \cap \pi(T_{1,p})$$
$$\cap \cdots \cap \pi(T_m) \cap \pi(T_{m,1}) \cap \cdots \cap \pi(T_{m,p}) .$$

Par définition les ensembles

$$\pi(S) \ , \ \pi(S_1)\ \pi(S_l) \ , \ \pi(T_1) \ , \ldots , \pi(T_m) \ , \ \pi(T_{1,1}) \ , \ldots , \ \pi(T_{m,p})$$

appartiennent à $\mathcal{P}_{p,k-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des éléments

$$S' \ , \ S'_1 \ , \ldots , \ S'_l \ , \ T'_1 \ , \ldots , \ T'_m \ , \ T'_{1,1} \ , \ldots , \ '_{m,p} \ ,$$

de $\mathcal{P}_p$ pour lesquels les ensembles :

$$\pi(S)\backslash S' \ , \ \pi(S_1)\backslash S'_1 \ , \ldots , \ \pi(S_l)\backslash S'_l \ , \ \pi(T_1)\backslash T'_1 \ , \ldots , \ \pi(T_m)\backslash T'_m \ ,$$
$$\pi(T_{1,1})\backslash T'_{1,1} \ , \ldots , \ \pi(T_{m,p})\backslash T'_{m,p}$$

sont μ_p-négligeables. D'après (a), les ensembles :

$$\overline{\pi(S)}\backslash S' \ , \ \overline{\pi(S_1)}\backslash S'_1 \ , \ldots , \ \overline{\pi(S_l)}\backslash S'_l \ , \ \overline{\pi(T_1)}\backslash T'_1 \ , \ldots , \ \overline{\pi(T_m)}\backslash T'_m \ ,$$
$$\overline{\pi(T_{1,1})}\backslash T'_{1,1} \ , \ldots , \ \overline{\pi(T_{m,p})}\backslash T'_{m,p}$$

sont μ_p-négligeables. On note Σ' l'ensemble :

$$S' \cap S'_1 \cap \cdots \cap S'_l \cap T'_1 \cap T'_{1,1} \cap \cdots \cap T'_{1,p} \cap \cdots \cap T'_m \cap T'_{m,1} \cap \cdots \cap T'_{m,p} .$$

Puisque $\mathcal{P}_p$ est stable par intersection finie, il contient Σ'. D'après ce qui précède, Σ' est contenu dans Σ et $\Sigma\backslash\Sigma'$ est μ_p-négligeable.

6.7. On achève la preuve des assertions (1), (2), (3) et (4) de §6. Soit S dans $\tilde{\mathcal{P}}_p$. D'après l'assertion (3) de 6.6 et d'après la propriété $\mathbf{P}_p$, S est la réunion d'un élément de $\mathcal{P}_p$ et d'un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_p$ de dimension inférieure à p; donc d'après l'hypothèse de récurrence de §6 et d'après l'assertion (2) de 6.6, $\tilde{\mathcal{P}}_p$ contient ${}^cS$. D'après 6.1, $S\backslash \overset{\circ}{S}$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_p$. D'après 6.1 et d'après la propriété $\mathbf{P}_p$, la dimension de $S\backslash \overset{\circ}{S}$ est inférieure à p. D'après 2.5, les composantes connexes de S sont réunions de composantes connexes de $\mathring{S}$ et de $S\setminus\mathring{S}$; or les composantes connexes de $\mathring{S}$ sont des composantes connexes de ${}^c(\overline{\overline{S}\setminus S})$; donc d'après 6.5, pour $n \leq p-1$ et $m \geq 1$, $\tilde{\mathcal{P}}_p$ contient $\mathring{S}$ et les composantes connexes de S.

D'après 6.5 et 6.6, pour $n = p$ et m quelconque, $\tilde{\mathcal{P}}_{p+m}$ contient le complémentaire et les composantes connexes de chacun de ses éléments de dimension p. D'après la propriété $\mathbf{P}_{p+m}$, tout élément de $\tilde{\mathcal{P}}_{p+m}$, de dimension p, est μ_{p+m}-négligeable lorsque m est positif; or la partie vide appartient à $\mathcal{P}_{p+m}$; donc d'après 6.6, pour tout entier non négatif m, tout élément S de $\tilde{\mathcal{P}}_{p+m}$, de dimension p, contient un élément S' de $\mathcal{P}_{p+m}$ pour lequel $S\setminus S'$ est μ_{p+m}-négligeable. L'assertion (&) de §6 est ainsi prouvée. Les assertions (1), (2) et (4) résultent de l'assertion (&). L'assertion (3) résulte de 6.1.

7. Applications à l'Analyse.

On utilise les notations de §1. Soit n un entier positif. On note π la projection : $(x,t) \mapsto t$, de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Soit Σ une partie fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$. On désigne par ω l'image de Σ par π. On suppose que Σ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ et que la restriction de π à Σ est propre.

PROPOSITION. — *Soit F une fonction continue, à valeurs réelles sur Σ, dont le graphe appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+2}$. Pour tout t dans ω, on note $f(t)$ la borne inférieure de la restriction de F à l'intersection de Σ et de $\pi^{-1}(t)$.*

i) *La fonction f ainsi définie sur ω est continue et son graphe appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$.*

ii) *Il existe une application continue : $t \mapsto \xi(t)$ de ω dans $\mathbb{R}^n$ qui satisfait les conditions suivantes :*

1) *L'image de ω par l'application : $t \mapsto (\xi(t),t)$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ et Σ la contient.*

2) *Pour tout t dans ω, $f(t)$ est égal à $F(\xi(t),t)$.*

3) *Si l'application ξ est bornée, alors $\xi(t)$ a une limite quand t tend vers l'infini dans ω.*

La démonstration de cette proposition utilise quelques lemmes préliminaires.

7.1. On démontre ici l'assertion (i) de la proposition. Soit $\tilde{\Gamma}$ l'ensemble des éléments (x,t,s) de $\mathbb{R}^{n+2}$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$(x,t) \in \Sigma \text{ et } F(x,t) \leq s \;.$$

Puisque le graphe de F appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+2}$, $\tilde{\Gamma}$ appartient à $\mathcal{P}_{n+2}$. On note Γ l'image de $\tilde{\Gamma}$ par la projection : $(x,t,s) \mapsto (t,s)$. Par hypothèse, la restriction de π à Σ est propre; donc Γ est fermé dans $\omega \times \mathbb{R}$. Par suite la fonction f est semi-continue inférieurement. Soit $\tilde{\Gamma}'$ l'ensemble des points (x,t,s) de $\mathbb{R}^{n+2}$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$(x,t) \in \Sigma \text{ et } F(x,t) < s \ .$$

Puisque F est continue, $\tilde{\Gamma}'$ est ouvert dans $\Sigma \times \mathbb{R}$; donc l'image Γ' de $\tilde{\Gamma}'$ par la projection: $(x,t,s) \mapsto (t,s)$, est ouverte dans $\omega \times \mathbb{R}$ et appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$. Puisque $\tilde{\mathcal{P}}_2$ est stable par passage au complémentaire, ${}^c\Gamma'$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ et appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$; or le graphe de f est l'intersection de Γ et de ${}^c\Gamma'$; donc le graphe de f est fermé dans $\mathbb{R}^2$ et appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$. Puisque la restriction de π à Σ est propre, la fonction f est localement bornée sur ω; donc f est continue.

7.2. Dans ce qui suit, on considère la droite réelle achevée. On la note $\overline{\mathbb{R}}$. Elle est la réunion de $\mathbb{R}$ et des deux symboles : $+\infty, -\infty$. Muni de sa toplogie naturelle, $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique compact. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note a et b ses bornes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

LEMME. — *Soit ξ une fonction continue sur I dont le graphe appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$. Alors la fonction ξ a une limite finie ou infinie quand t tend vers a ou b.*

La fonction ξ a au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$, quand t tend vers a. Il s'agit de prouver qu'elle en a au plus une. On suppose qu'il n'en est pas ainsi. On va prouver qu'on aboutit à une contradiction. Soient s_1 et s_2 deux valeurs d'adhérence distinctes de ξ quand s tend vers a. On suppose s_1 inférieur à s_2 et on considère un réel s de l'intervalle $]s_1, s_2[$. Soit S_s l'intersection de $\mathbb{R} \times \{s\}$ et du graphe de ξ. Puisque celui-ci appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$, S_s y appartient; donc d'après 2.5, il n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Puisque s_1 et s_2 sont valeurs d'adhérence de la fonction ξ quand t tend vers a, $\xi(t)$ est distinct de s pour t assez voisin de a. Ceci est absurde d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

7.3. On démontre ici l'assertion (ii) de la Proposition 7. On utilise les coordonnées usuelles $x_1, \ldots, x_n$ sur $\mathbb{R}^n$. On veut construire une famille décroissante $\{S_0, \ldots, S_n\}$ de parties fermées de Σ qui appartiennent à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$ et telle que pour $i = 1, \ldots, n$ et pour tout t dans ω, la fonction x_i soit constante sur l'intersection de S_i et de $\pi^{-1}(t)$. On procède par récurrence sur i.

Soit S_0 l'ensemble des points (x,t) de Σ pour lesquels $F(x,t)$ est égal $f(t)$. Puisque la restriction de π à Σ est propre, l'image de S_0 par π est ω. Par hypothèse le graphe de F appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+2}$; or d'après 7.1, le graphe de f appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$; donc S_0 appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{n+1}$. D'après la continuité de F, S_0 est fermé dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose connu S_{i-1}. On note $\psi_i(t)$ la borne inférieure de la restriction de la fonction x_i à l'intersection de S_{i-1} et de $\pi^{-1}(t)$. D'après l'assertion (i) de la proposition de §7 appliquée à S_{i-1} et à la fonction x_i, le graphe de la fonction ψ_i est fermé dans $\mathbb{R}^2$ et appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_2$. Soit S_i l'ensemble des points (x,t) de S_{i-1} pour lesquels x_i est égal à $\psi_i(t)$. D'après ce qui précède, S_i est fermé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et appartient à $\mathcal{P}_{n+1}$.

Puisque les fonctions $x_1,\ldots,x_n$ sont constantes sur l'intersection de S_n et de $\pi^{-1}(t)$, celle-ci a un élément; donc il existe une fonction ξ sur ω telle que S_n soit l'image de ω par l'application : $t \mapsto (\xi(t),t)$. Par construction la fonction ξ satisfait les conditions (1) et (2) de l'assertion (ii). Son graphe est fermé; or elle est localement bornée; donc elle est continue. La condition (3) résulte de 7.2.

7.4. Soit n un entier positif.

Lemme. — *Pour tout S dans $\tilde{\mathcal{P}}_n$, $\overline{S}$ est la réunion de S et d'un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$, de dimension inférieure à celle de S.*

Soit q un entier positif. On démontre l'assertion suivante : *pour tout entier positif n et pour tout élément S de $\tilde{\mathcal{P}}_n$, de dimension q, la dimension de $\overline{S}\backslash S$ est inférieure à q.* Pour cela on raisonne par récurrence sur l'entier q. Puisque tout élément de $\tilde{\mathcal{P}}_n$, de dimension 0, est fini, il est fermé. On suppose l'assertion vraie pour $q-1$. D'après les assertions (2) et (3) de §6, l'assertion est vraie pour tout élément de dimension q de $\tilde{\mathcal{P}}_q$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence et de 6.4 qu'il suffit de prouver l'assertion suivante : *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^q$ qui appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_q$. Soit Γ le graphe d'une fonction continue τ sur Ω, à valeurs réelles. On suppose que Γ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{q+1}$. Alors $\overline{\Gamma}$ est la réunion de Γ et d'un élément de $\tilde{\mathcal{P}}_{q+1}$, de dimension inférieure à q.*

On suppose l'assertion fausse. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Par hypothèse, Γ est fermé dans $\Omega\times\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, la dimension de $\overline{\Omega}\backslash\Omega$ est inférieure à q. D'après §6 et 6.3, il existe un élément ι de $\mathcal{F}_{q,q-1}$, un ouvert connexe ω de $\mathbb{R}^{q-1}$, une partie Δ de $\overline{\Omega}\backslash\Omega$, des réels a et b qui satisfont les conditions suivantes :

1) a est inférieur à b et $\Delta\times[a,b]$ est contenu dans $\overline{\Gamma}\backslash\Gamma$.

2) Δ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_q$.

3) Δ est le graphe d'une fonction continue sur ω.

4) Δ est une composante connexe de l'intersection de $\overline{\Omega}\backslash\Omega$ et de $\pi^{-1}(\omega)$.

Soit t dans $]a, b[$. D'après (4), pour tout point x de Δ, il existe une boule ouverte B de $\mathbb{R}^q$, centrée en x, pour laquelle l'intersection de B et de Ω est une composante connexe de $B\backslash\Delta$; or d'après (1), $(\Delta \cap B) \times [a, b]$ est contenu dans l'adhérence du graphe de la restriction de τ à B; donc Δ est contenu dans l'adhérence de $\tau^{-1}(t)$. Puisque Γ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_{q+1}$, l'intersection de B et de $\tau^{-1}(t)$ appartient à $\tilde{\mathcal{P}}_q$; or d'après la condition (3), la dimension de l'intersection de B et de Δ est égale à $q-1$; donc d'après ce qui précède, la dimension de l'intersection de B et de $\tau^{-1}(t)$ est égale à q. Vu l'arbitraire de B, l'adhérence de $\tau^{-1}(t)$ contient un voisinage de Δ dans la réunion de Ω et de Δ. Ceci est absurde car $\Delta \times \{a\}$ est contenu dans l'adhérence de Γ.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] N. BOURBAKI, Fonctions d'une variable réelle, Chapitres 4, 5, 6, 7, Hermann, Paris, 1961.

[Ch] J.-Y. CHARBONNEL, Méthode des orbites. Applications exponentielles et cônes polyédraux, preprint.

[Ga] A.M. GABRIELOV, Sur les projections d'ensembles semi-analytiques, Analyse fonctionnelle et ses applications, tome 2, n°4 (1968).

[Go] E.A. GORIN, Asymptotic properties of polynomials and algebraic functions of severable variables, Russian mathematical surveys, Vol. 16, n°1 (1961), 93-119.

[H] H. HIRONAKA, Introduction aux sous-ensembles sous-analytiques, Colloque sur les singularités en Géométrie Analytique (Cargèse 1972), Astérisque 7-8 (1973).

[Kh] A.G. KHOVANSKII, Sur une classe de systèmes d'équations transcendantes, Doklady Academii Nauk, tome 255, n°4, 804-807.

[Kh1] A.G. KHOVANSKII, Variétés analytiques réelles ayant une propriété de finitude et Intégrales abéliennes complexes, Analyse fonctionnelle et ses applications, tome 18, n°2 (1984).

[Lo] S. LOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, Preprint I.H.E.S, (1965).

[Van] VAN DEN DRIES, Tarski's problem and pfaffian functions, Logic colloquium'84, Studies in Logic and the foundations of Mathematics, North-Holland, 1986, p. 59-90.

[Va] A.N. VARCHENKO, Estimations du nombre des zéros d'une intégrale abélienne, dépendant d'un paramètre, et cycles limites, Analyse fonctionnelle et ses applications, tome 18, n°2 (1984).

Manuscrit reçu le 12 juillet 1990,
révisé le 21 mars 1991.

Jean-Yves CHARBONNEL,
Université de Paris VII
UFR de Mathématiques
URA 748
Couloir 45-55, 5ème étage
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05.