

DANIEL LEHMANN

**Résidus des sous-variétés invariantes d'un
feuilletage singulier**

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 1 (1991), p. 211-258

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_1_211_0

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉSIDUS DES SOUS-VARIÉTÉS INVARIANTES D'UN FEUILLETAGE SINGULIER

par Daniel LEHMANN

-
1. Introduction – Énoncé du théorème 1.
 2. Connexions spéciales et théorème d'annulation.
 3. Rappels sur le complexe de Mayer-Vietoris et la dualité d'Alexander-Lefschetz.
 4. Classes résiduelles et résidus des sous-variétés invariantes d'un feuilletage singulier.
 5. Démonstration du théorème 1.
 6. Intégration sur le complexe de Čech-de Rham et résidus de Grothendieck.
 7. Application aux éclatements – Exemples.
 8. Résidus des sous-ensembles analytiques invariants.
- Bibliographie.

1. Introduction – Énoncé du théorème 1.

Soit W une variété lisse, et V une sous-variété lisse fermée. On sait qu'il n'existe pas toujours de feuilletage \mathcal{F} sur W admettant V comme feuille, ni même de germe de feuilletage défini seulement au voisinage de V : une condition nécessaire pour cela, c'est que l'idéal engendré dans $H^*(V, \mathbf{R})$ par l'anneau des classes caractéristiques réelles du fibré ν_V normal à V dans W ($\text{Pont}^*(\nu_V)$ ou $\text{Chern}^*(\nu_V)$ selon que le contexte est C^∞ réel ou

analytique complexe) soit trivial (c'est-à-dire nul en dimension $* > 0$) : c'est une conséquence immédiate de ce que la restriction à chaque feuille d'une connexion de Bott sur le fibré normal au feuilletage est plate (cf. [B1]).

Nous allons voir plus généralement (cf. théorème 2 du §2) qu'une condition nécessaire pour qu'il existe sur W un feuilletage \mathcal{F} laissant V invariante (c'est-à-dire tel que V soit une réunion de feuilles, ou – ce qui revient au même – tel que \mathcal{F} induise un feuilletage \mathcal{F}_V sur V) est que l'idéal engendré par les classes caractéristiques réelles de ν_V soit nul en dimension $* > 2s$, où s désigne la codimension (réelle ou complexe suivant le contexte) du feuilletage \mathcal{F}_V dans V : ce sera une conséquence de l'existence d'une structure de "fibré feuilleté" sur ν_V , au sens de F. Kamber et P. Tondeur [KT] (lemme fondamental du §2).

Lorsqu'un tel feuilletage \mathcal{F} n'existe, ou en tout cas n'est donné, qu'en dehors d'une partie fermée \mathcal{S} de W (\mathcal{S} sera appelé "l'ensemble singulier" de \mathcal{F}), il est raisonnable de s'attendre à ce que les classes caractéristiques réelles $\varphi(\nu_V)$ de ν_V , en dimension $* > 2s$, se "localisent" au voisinage de la partie singulière $\Sigma = \mathcal{S} \cap V$. Nous allons effectivement montrer que la donnée de \mathcal{F} sur $W - \mathcal{S}$ va permettre de définir un relèvement naturel $\varphi_0(\nu_V)$ dans $H^*(V, V - \Sigma; \mathbf{R})$ de toute classe $\varphi(\nu_V)$ de dimension $* > 2s$, par l'application naturelle $H^*(V, V - \Sigma; \mathbf{R}) \xrightarrow{j} H^*(V; \mathbf{R})$. $[\varphi_0(\nu_V)]$ s'appellera la *classe caractéristique résiduelle* de ν_V pour \mathcal{F} , correspondant à $\varphi(\nu_V)$. Si la variété V est compacte, de dimension réelle N , et orientable, la dualité de Poincaré \mathcal{P}_V induit la dualité d'Alexander-Lefschetz AL :

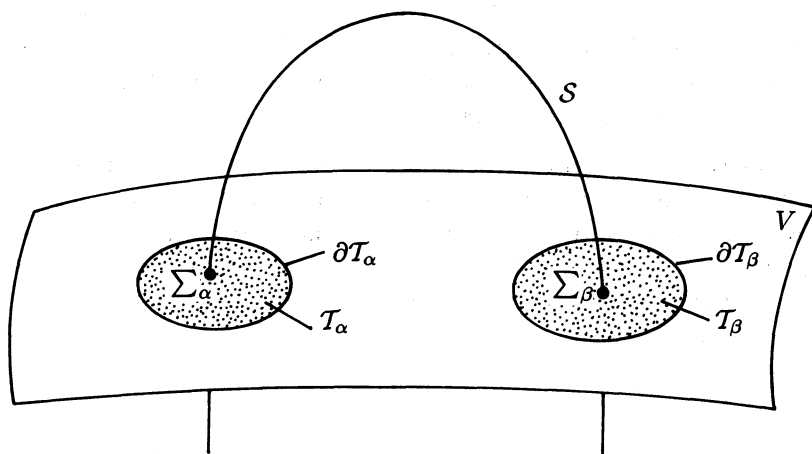
$$\begin{array}{ccc} H^*(V, V - \Sigma; \mathbf{R}) & \xrightarrow{j} & H^*(V, \mathbf{R}) \\ \simeq \downarrow AL & & \simeq \downarrow \mathcal{P}_V \\ H_{N-*}(\Sigma, \mathbf{R}) & \xrightarrow{[i]} & H_{N-*}(V, \mathbf{R}) \end{array}$$

($[i]$ étant induit par l'inclusion naturelle de Σ dans V), sous réserve d'hypothèses assez peu contraignantes sur Σ . On appelle alors *résidu de $\varphi(\nu_V)$ sur Σ , relativement à \mathcal{F}* , l'élément

$$\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V) = AL(\varphi_0(\nu_V)) \in H_{N-*}(\Sigma, \mathbf{R}) .$$

Si Σ est réunion de composantes connexes Σ_α , et si $i_\alpha : \Sigma_\alpha \rightarrow V$ désigne l'inclusion naturelle, $H_{N-*}(\Sigma, \mathbf{R}) = \oplus_\alpha H_{N-*}(\Sigma_\alpha, \mathbf{R})$, et, notant $\text{Rés}_{\mathcal{F}}^\alpha(\varphi, V)$: la composante de $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V)$ sur $H_{N-*}(\Sigma_\alpha, \mathbf{R})$ on obtient la "formule des résidus" (§4) :

$$\varphi(\nu_V) = \sum_\alpha (\mathcal{P}_V)^{-1} \circ [i_\alpha]_* \circ \text{Rés}_{\mathcal{F}}^\alpha(\varphi, V) .$$



Cette situation n'est pas gratuite : lorsqu'on a un feuilletage défini sur $W - S$ (en dehors d'une partie fermée S de W), l'éclatement normal de chaque composante connexe lisse S_α de S permet de relever \mathcal{F} en un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ sur la variété éclatée \tilde{W} et $\tilde{\mathcal{F}}$ laisse invariante chaque sous-variété $V_\alpha = F^{-1}(S_\alpha)$ ($F : \tilde{W} \rightarrow W$ désignant la projection naturelle). En outre, la restriction $F : V_\alpha \rightarrow S_\alpha$ de cette projection à V_α est une fibration en espaces projectifs (réels ou complexes selon le contexte), dont le fibré tautologique en droites $L_\alpha \rightarrow V_\alpha$ s'identifie naturellement au fibré normal $\nu(V_\alpha)$ de V_α dans \tilde{W} , et dont la restriction à chaque fibre de π est stablement équivalente au fibré normal à cette fibre dans \tilde{W} .

Dans le contexte holomorphe, lorsque $\dim_{\mathbb{C}} W = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$, $s = 0$, $\varphi = c_1$, le résidu que nous définissons coïncide avec celui défini dans [CS] par C. Camacho et P. Sad, et plus généralement par Gmira Bouchra [GB] et A. Lins Neto [LN1] ⁽¹⁾ pour $s = 0$, $\varphi = c_1$, lorsque la codimension du feuilletage est égale à 1. Si S_α est un point, la fibration $L_\alpha \rightarrow V_\alpha$ s'identifie au fibré tautologique $L \rightarrow \mathbf{PC}(1)$ en droites complexes, et

$$\langle c_1(L), \mathbf{PC}(1) \rangle = -1 .$$

Ceci prouve que les différents résidus de $\tilde{\mathcal{F}}$ en les points singuliers d'un

⁽¹⁾ A. Lins Neto signale dans son papier que ce résultat lui a été "communiqué" par J.-P. Brasselet.

même diviseur exceptionnel V_α ne peuvent être tous nuls ou positifs; C. Camacho et P. Sad en ont déduit, qu'après un nombre fini d'éclatements, il existe au moins une singularité admettant une séparatrice se laissant projeter sur W [ils ont montré, à partir de là, l'existence de sous-variétés intégrales irréductibles passant par 0, pour toute forme de Pfaff holomorphe sur \mathbf{C}^2 admettant en 0 une singularité].

Dans le cas général, la théorie est vide si $2s + 2 > \dim_{\mathbf{R}} V$. Par conséquent, dans le contexte réel C^∞ , il faut que \mathcal{F} ait des feuilles de dimension ≥ 3 . Par contre, dans le contexte analytique complexe, la théorie s'applique aux feuilletages définis localement par des champs de vecteurs holomorphes, pour les classes caractéristiques de dimension $*$ = $\dim_{\mathbf{R}} V = 2 \times \dim_{\mathbf{C}} V$.

Nous donnerons des formules explicites de résidus dans le cas général, en termes intrinsèques de géométrie différentielle (connexions). Le principal outil utilisé sera le complexe de Mayer-Vietoris de V associé à Σ , qui n'est autre que le complexe total de Čech-de Rham associé au recouvrement de V par 2 ouverts : $V - \Sigma$ et un voisinage U de Σ dans V se rétractant par déformations sur Σ (la seule restriction que nous ferons sur Σ sera précisément de supposer l'existence d'un tel U); ce complexe est particulièrement bien adapté à la manipulation des cohomologies $H^*(V, V - \Sigma; \mathbf{R})$ et $(H^*(\Sigma, \mathbf{R}))$; la théorie de Chern-Weil et l'intégration des formes différentielles s'étendant à ce complexe, le calcul des classes résiduelles et des résidus se fera tout naturellement. Bien que le principe général de ce type de calcul ait déjà été exposé dans [L1], nous rappellerons sans démonstration au §3, le minimum indispensable pour permettre une lecture "self-contained" de ce papier, et en particulier l'expression de la dualité d'Alexander-Lefschetz dans ce contexte (cf. théorème 4).

Nous pousserons les calculs, dans le contexte analytique complexe, pour des feuilletages \mathcal{F} avec singularités dont les feuilles sont de $\dim_{\mathbf{C}} 1$, dans deux cas :

1) Σ_α est une sous-variété holomorphe lisse de V , il existe un voisinage \tilde{U}_α de Σ_α dans W , et un champ de vecteurs holomorphe X_α sur \tilde{U}_α définissant la restriction de \mathcal{F} à $\tilde{U}_\alpha - \Sigma_\alpha$, et l'action infinitésimale de X_α sur le fibré normal à Σ_α dans V est "non dégénérée" (au sens de Bott [B2]).

2) Σ_α est incluse dans le domaine \tilde{U}_α d'une carte locale complexe $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p, y_1, \dots, y_\lambda, \dots, y_q)$ sur W , telle que $U_\alpha = V \cap \tilde{U}_\alpha$ soit défini par les équations $y_\lambda = 0$ ($1 \leq \lambda \leq q$), et telle que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ pour $\alpha \neq \beta$.

Le premier cas sera une application directe du théorème 2 de Bott [B2], du lemme fondamental du §2 (et du théorème 4 dans le cas où \mathcal{F} n'est pas globalement défini par un champ de vecteurs sur W) : cf. corollaire 4", et le dernier exemple du §7.

Exposons ici la formule à laquelle nous parviendrons dans le deuxième cas. On suppose donc $\dim_{\mathbb{C}} W = p + q$, $\dim_{\mathbb{C}} V = p = N/2$. On suppose aussi V compacte.

Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe sur $W - S$, dont les feuilles sont de dimension complexe 1, et dont la restriction à $\tilde{U}_\alpha - S \cap \tilde{U}_\alpha$ peut toujours se définir par un champ de vecteurs holomorphe X_α sur $\tilde{U}_\alpha - S \cap \tilde{U}_\alpha$

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^p A_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^q B_\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y_\lambda} .$$

L'hypothèse selon laquelle V est invariante par \mathcal{F} (c'est-à-dire : $X_\alpha|_V$ est tangent à V) implique : $B_\lambda(x, 0) = 0$ ($1 \leq \lambda \leq q$). Notons U_i^α l'ouvert de $U_\alpha - \Sigma_\alpha$ formé de l'ensemble des points $x \in U_\alpha - \Sigma_\alpha$ tels que $A_i(x, 0) \neq 0$: les U_i^α ($i = 1, \dots, p$) constituent alors un recouvrement \mathcal{U}_α de $U_\alpha - \Sigma_\alpha$ par des ouverts. Soit \mathcal{T}_α une sous-variété à bord de U_α , de dimension (réelle) $N = 2p$, telle que $\Sigma_\alpha \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}_\alpha$, ($\Sigma_\alpha \cap \partial\mathcal{T}_\alpha = \emptyset$) : \mathcal{U}_α induit alors un recouvrement $\mathcal{U}(\partial\mathcal{T}_\alpha)$ de $\partial\mathcal{T}_\alpha$ par les ouverts $U_i^\alpha \cap \partial\mathcal{T}_\alpha$. On appellera "système d'alvéoles" subordonné au recouvrement $\mathcal{U}(\partial\mathcal{T}_\alpha)$ la donnée d'une famille $(R_i^\alpha)_{1 \leq i \leq p}$ de sous-variétés réelles R_i^α de $\partial\mathcal{T}_\alpha$, recouvrant $\partial\mathcal{T}_\alpha$, de dimension $2p - 1$, d'intérieur $\overset{\circ}{R}_i^\alpha$ de classe C^∞ , à bord ∂R_i^α orientable et C^∞ par morceaux, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $R_i^\alpha \subset U_i^\alpha \cap \partial\mathcal{T}_\alpha$,

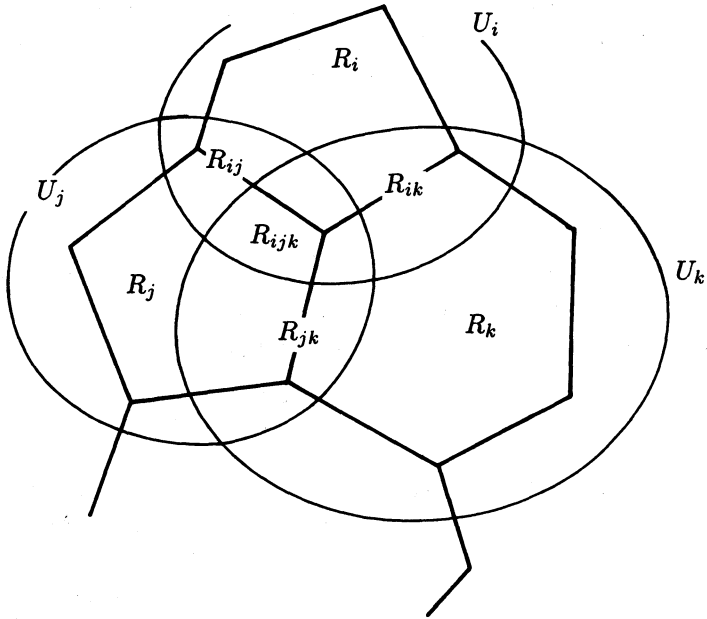
(ii) $\overset{\circ}{R}_i^\alpha \cap \overset{\circ}{R}_j^\alpha = \emptyset$ pour $i \neq j$,

(iii) pour tout k -simplexe $I = (i_0, i_1, \dots, i_k)$ du nerf du recouvrement $\mathcal{U}(\partial\mathcal{T}_\alpha)$ (c'est-à-dire : $\partial\mathcal{T}_\alpha \cap (\bigcap_{r=0}^k U_{i_r}^\alpha) \neq \emptyset$, les indices i_r étant tous distincts), l'intersection

$$R_I = R_{i_0, \dots, i_k}^\alpha = \bigcap_{r=0}^k R_{i_r}^\alpha = \bigcap_{r=0}^k \partial R_{i_r}^\alpha$$

est une variété de dimension (réelle) $2p - k - 1$, à bord C^∞ par morceaux,

(iv) $R_{1,2,\dots,p}^\alpha = \bigcap_{i=1}^p R_i^\alpha = \bigcap_{i=1}^p \partial R_i^\alpha$ est une variété sans bord, de dimension (réelle) p .



Pour tout $I = (i_0, i_1, \dots, i_k)$, on conviendra d'orienter R_I de la façon suivante :

1) Pour toute permutation σ de $\{0, 1, \dots, k\}$, $R_{i_0, i_1, \dots, i_k}^\alpha$ et $R_{i_{\sigma(0)}, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}}^\alpha$ seront égales en tant que variétés à bord non orientées, mais ayant des orientations égales ou opposées selon la parité de la permutation σ .

2) Pour tout I , le bord orienté de R_I^α sera supposé vérifier :

$$\partial R_I^\alpha = \sum_{j \neq i_r} R_{i_0, i_1, \dots, i_k, j}^\alpha.$$

(Ainsi, par exemple,

$$\partial R_{i_0}^\alpha = \sum_{j > i_0} R_{i_0, j}^\alpha - \sum_{j < i_0} R_{j, i_0}^\alpha.)$$

3) L'orientation de R_i^α est induite par celle de $\partial \mathcal{T}_\alpha$ (c'est-à-dire par la normale de $\partial \mathcal{T}_\alpha$ sortant de \mathcal{T}_α).

Ces règles permettent de définir, de proche en proche, par induction croissante sur k , l'orientation de $R_{i_0, \dots, i_k}^\alpha$ d'où celle de $R_{1, 2, \dots, p}^\alpha$.

Soit $\varphi \in \mathbf{R}[c_1, \dots, c_q]$ une classe caractéristique de dim $2p$, c'est-à-dire un polynôme à coefficients complexes sur l'algèbre de lie $gl(q, \mathbf{C})$ des

matrices $q \times q$ à coefficients complexes, invariant par la représentation adjointe de $GL(q, \mathbf{C})$ sur $\mathfrak{gl}(q, \mathbf{C})$, polynôme de degré p par rapport aux coefficients de la matrice, et normalisé en particulier de façon que sa restriction aux matrices antihermitiennes (c'est-à-dire à l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(q)$ du groupe unitaire) soit à coefficients réels et aussi de façon que les classes caractéristiques c_j correspondantes soient dans l'image de la cohomologie entière [chaque c_j s'identifie à $(\frac{-1}{2i\pi})^j \times (j$ -ième fonction symétrique élémentaire des valeurs propres de la matrice), et φ est un polynôme de poids p à coefficients réels en c_1, \dots, c_q].

Notons $D(x)$ la matrice jacobienne $\left(\left(\frac{\partial B_\lambda}{\partial y_\mu}(x, 0) \right) \right)_{\lambda, \mu}$.

THÉORÈME 1. — *Posons*

$$\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V, \Sigma_\alpha) = (-1)^p \int_{R_{1,2,\dots,p}^\alpha} \frac{\varphi(D(x))}{\prod_{i=1}^p A_i(x, 0)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p .$$

- (i) *Ce nombre ne dépend pas des choix effectués pour le définir.*
- (ii) *Si V est compacte,*

$$\langle \varphi(\nu_V), V \rangle = \sum_{\alpha} \text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V, \Sigma_\alpha) .$$

(iii) *Si Σ_α est un point isolé m_α , $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V, m_\alpha)$ n'est rien d'autre que la valeur en m_α du symbole résidu de Grothendieck dans V :*

$$\text{Rés}_{m_\alpha} \left[\begin{array}{c} \varphi(D) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \\ \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_p \end{array} \right]$$

(où $\bar{A}_i(x) = A_i(x, 0)$).

Pour $p = q = 1, s = 0, \varphi = c_1$, on retrouve la définition de l'indice de Camacho-Sad [CS]. La formule a aussi été conjecturée par Camacho dans le cas $p = 2, q = s = 1, \varphi = (c_1)^2$.

Nous démontrerons en fait, au §5, le théorème 1', plus général, relatif aux fibrés holomorphes qui sont feuilletés (au sens de Kamber et Tondeur [KT]) relativement à un feuilletage sur $V - \Sigma$ dont les feuilles sont de $\dim_{\mathbf{C}} 1$. L'intérêt de cette généralisation sera de redonner au passage, outre le théorème 1, une nouvelle démonstration, très naturelle, de la formule des résidus de Baum-Bott [BB1], dont on aura noté la parenté avec celle du théorème 1. Ce théorème 1' généralise aussi, en termes de résidus de Grothendieck, le théorème des résidus de Bott [B2] relatif au cas des

fibrés munis d'une \mathbf{C} -action : (Bott imposait à Σ_α d'être une composante connexe "non dégénérée" du champ de vecteurs X sous-jacent à la \mathbf{C} -action, hypothèse que nous n'exigerons plus; en revanche nous imposerons à Σ_α d'être incluse dans le domaine d'une carte locale sur V , hypothèse que Bott n'exigeait pas).

Pour démontrer les théorèmes 1 et 1', il nous faudra, au §6, dire un mot de ce qu'est, au moins en dimension maximum, l'intégration sur le complexe de Čech-de Rham associé à un recouvrement, relativement à un système d'alvéoles subordonné à ce recouvrement (théorèmes 5 et 6). La théorie de cette intégration, qui prolonge l'intégration usuelle des formes différentielles, et qui généralise aussi celle exposée au §3 dans le cas particulier du complexe de Mayer-Vietoris (recouvrement avec 2 ouverts), a été exposée en détail ([L2], [L3]) pour les recouvrements adaptés à une stratification. Mais le recouvrement utilisé ici est d'une autre nature, et l'intégration pourra aussi s'interpréter, dans cette situation, comme une extension à tout le complexe de Čech-de Rham des résidus de Grothendieck.

Quelques exemples de calculs explicites sont donnés au §7, dans le cas des éclatements, y compris dans un cas où le théorème 1 n'est pas utilisable.

Au §8 enfin, sont définis des résidus dans le cas où l'ensemble invariant V n'est plus nécessairement une variété, mais un ensemble analytique (éventuellement non lisse) de W , avec le théorème de résidus correspondant. Pour $q = 1$, $s = 0$, on démontrera que cet indice coïncide avec celui défini par A. Lins Neto [LN2]. Dans le cas où cet ensemble analytique V est compact (cas des sous-ensembles algébriques d'un espace projectif complexe), il résultera de façon tout à fait triviale de leur définition et sans aucun éclatement ni résolution de singularité, que la somme de ces résidus est un entier, et que cet entier ne dépend pas du feuilletage singulier défini dans W au voisinage de V . (Ce résultat a été démontré par A. Lins Neto [LN2], pour $q = p = 1$, $s = 0$, en se ramenant au cas lisse grâce à une résolution par éclatements de la courbe algébrique V dans $\mathbf{PC}(2)$. Il l'a utilisé en particulier pour démontrer qu'il existe un ouvert partout dense de systèmes différentiels algébriques sur $\mathbf{PC}(2)$ n'admettant aucune solution algébrique).

Ce travail a été réalisé en août et septembre 90, à la suite de conversations avec C. Camacho que je remercie particulièrement. J'ai également eu de fructueuses discussions, avec en particulier Y. Hantout, A. Lins Neto, M. Sebastiani, P. Schweitzer et M. Soares. J'ai bénéficié enfin

d'une aide matérielle du CAPES, du COFFECUB, de l'IMPA de Rio, de l'UFC de Fortaleza et de l'UFRGS de Porto Alegre. Merci à tous.

J'ai voulu rendre cet article aussi lisible que possible, en essayant d'explicitier les idées et en détaillant les démonstrations. Cela explique sa longueur, et je suis reconnaissant aux rédacteurs des Annales de l'Institut Fourier de l'avoir accepté.

2. Connexions spéciales et théorème d'annulation.

Jusqu'au §4 inclus, nous traiterons simultanément le cas des feuilletages C^∞ réels, ou analytiques complexes : \mathbf{K} désignera l'un des corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} , et les fibrés vectoriels tangents ou normaux considérés seront C^∞ réels ou holomorphes, selon le contexte).

On notera :

W une variété lisse de $\dim_{\mathbf{K}} n$,

V une sous-variété propre lisse de $\dim_{\mathbf{K}} p$,

\mathcal{F} un feuilletage sur W , de $\text{codim}_{\mathbf{K}}(p + s)$, laissant V invariante,

\mathcal{F}_V le feuilletage, de $\text{codim}_{\mathbf{K}} s$, induit par \mathcal{F} sur V ,

τ_W le fibré tangent à W ,

τ_V le fibré tangent à V ,

$\tau_{\mathcal{F}}$ le fibré tangent aux feuilles de \mathcal{F} ,

$\tau_{\mathcal{F}_V} = \tau_{\mathcal{F}}|_V$ le fibré tangent aux feuilles \mathcal{F}_V ,

$\nu_{\mathcal{F}}$ le fibré normal à \mathcal{F} dans W ,

$\nu_{\mathcal{F}_V}$ le fibré normal à \mathcal{F}_V dans V ,

ν_V le fibré normal à V dans W .

On a la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \tau_{\mathcal{F}} \longrightarrow \tau_W \xrightarrow{p} \nu_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

ainsi que le diagramme naturel formé de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{F}_V} & \longrightarrow & \tau_V & \xrightarrow{q} & \nu_{\mathcal{F}_V} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{F}}|_V & \longrightarrow & \tau_W|_V & \xrightarrow{p} & \nu_{\mathcal{F}}|_V & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \pi & & \downarrow \bar{\pi} & & \\
 & & & & \nu_V & = & \nu_V & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

LEMME FONDAMENTAL 2.1. — Soient \tilde{X} et \tilde{Y} deux sections C^∞ de τ_W définies sur un voisinage de V dans W , dont on notera X et Y les restrictions à V . On suppose en outre que \tilde{X} est une section du sous-fibré $\tau_{\mathcal{F}}$ de τ_W . La section $\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]|_V)$ de ν_V

- 1) ne dépend alors que de X et de $\pi(Y)$,
- 2) elle dépend $C^\infty(V)$ linéairement de X ,
- 3) elle vérifie, pour toute fonction $u \in C^\infty(V)$:

$$\pi([\tilde{X}, \tilde{u}\tilde{Y}]|_V) = u(\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]|_V)) = (X \cdot u)\pi(Y)$$

\tilde{u} désignant un prolongement C^∞ de u dans W , défini au voisinage de V .

Tout d'abord, si X est tangent à V , $X \cdot (\tilde{Y} \cdot \tilde{u})$ ne dépend que de la restriction $Y \cdot \tilde{u}$ de $\tilde{Y} \cdot \tilde{u}$ à V , et par conséquent $([\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot \tilde{u})|_V = X \cdot (Y \cdot \tilde{u}) - Y \cdot (\tilde{X} \cdot \tilde{u})$ ne dépend que de Y , et non de \tilde{Y} .

D'autre part, puisque \tilde{X} est une section de $\tau_{\mathcal{F}}$, qui est stable pour le crochet, $p[\tilde{X}, \tilde{Y}]$

- ne dépend que de $p(\tilde{Y})$ et non de \tilde{Y} ,
- dépend $C^\infty(W)$ linéairement de \tilde{X} ,
- vérifie $p[\tilde{X}, \tilde{u}\tilde{Y}] = \tilde{u}p[\tilde{X}, \tilde{Y}] + (\tilde{X} \cdot \tilde{u})p(\tilde{Y})$.

Par restriction à V , puisque $\tau_{\mathcal{F}}|_V \subset \tau_V$, on observe que $p[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_V$

- ne dépend que de $p(Y)$,
- ne dépend que de X et en dépend $C^\infty(V)$ linéairement,

- vérifie $p([\tilde{X}, \tilde{u}\tilde{Y}]|_V = up([\tilde{X}, \tilde{Y}]|_V) + (X \cdot u)p(Y)$.

Projetant par $\bar{\pi}$, compte tenu de ce que $\bar{\pi} \circ p = \pi$, et une fois observé que τ_V est stable pour le crochet et que par conséquent $\pi[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ si Y est dans $\nu_{\mathcal{F}_V}$, on en déduit le lemme.

On appellera "connexion spéciale" toute connexion ∇ sur ν_V , de classe C^∞ (y compris dans le contexte holomorphe), vérifiant :

$$\nabla_X(\pi Y) = \pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]|_V)$$

- { pour \tilde{X} , section C^∞ de $\tau_{\mathcal{F}}$ définie au voisinage de V dans W ,
- { pour \tilde{Y} , section C^∞ de τ_W définie au voisinage de V dans W ,

et vérifiant en plus, dans le contexte holomorphe, $\nabla_Z(\pi Y) = 0$, chaque fois que

- { Y est une section holomorphe de $\tau_W|_V$,
- { Z est une section du fibré $\bar{\tau}_V$ (conjugué de τ_V).

Remarques :

1) Dans le contexte holomorphe, les sections holomorphes de ν_V engendrent toutes les sections C^∞ pour la structure de $C^\infty(V, \mathbf{C})$ -module.

2) Le fibré tangent réel $T(V)$, qui est aussi le fibré réel sous-jacent au fibré holomorphe τ_V , admet pour complexifié :

$$T(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \tau_V \oplus \bar{\tau}_V \quad (\tau_V = T^{1,0}(V), \bar{\tau}_V = T^{0,1}(V)) .$$

3) Pour $s = 0$, les connexions spéciales coïncident avec les restrictions à la feuille V des connexions de Bott (définies sur tout le fibré normal au feuilletage).

LEMME 2.2. — Soit K la courbure d'une connexion spéciale sur ν_V , et F un supplémentaire de $\tau_{\mathcal{F}_V}$ dans τ_V . On a toujours :

(i) $K(X_1, X_2) = 0, \forall X_1, X_2 \in \tau_{\mathcal{F}_V}$ et, dans le contexte holomorphe, on a aussi :

(ii) $K(X, Z) = 0, \forall X \in \tau_{\mathcal{F}_V}, \forall Z \in \bar{\tau}_V,$

(iii) $K(Z_1, Z_2) = 0, \forall Z_1, Z_2 \in \bar{\tau}_V.$

L'égalité (i) est une simple conséquence de l'identité de Jacobi, et de la stabilité de $\tau_{\mathcal{F}_V}$ pour le crochet.

Pour démontrer (ii), on peut supposer X holomorphe et Z antiholomorphe, puisque les sections holomorphes de $\tau_{\mathcal{F}_V}$ engendrent linéairement

toutes les sections C^∞ , que les sections antiholomorphes de $\bar{\tau}_V$ engendrent toutes les sections C^∞ , et que $K(X, Z)$ est bilinéaire. On en déduit, pour Y holomorphe :

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Z(\pi Y) &= 0 \quad \text{car} \quad \nabla_Z(\pi Y) = 0, \\ \nabla_Z(\nabla_X \pi Y) &= 0 \quad \text{car} \quad \nabla_X(\pi Y) \text{ est holomorphe,} \\ \nabla_{[X, Z]}(\pi Y) &= 0 \quad \text{car} \quad [X, Z] = 0.\end{aligned}$$

Pour démontrer (iii), il suffit de remarquer que $\bar{\tau}_V$ est stable pour le crochet.

On peut paraphraser les lemmes 2.1 et 2.2 en disant que l'on a muni ν_V d'une structure de "fibré feuilleté" relativement à \mathcal{F}_V (au sens de F. Kamber et P. Tondeur [KT]), c'est-à-dire d'une connexion partielle plate le long des feuilles de \mathcal{F}_V , qui – de plus – dans le contexte holomorphe, est de type $(1, 0)$. [Les connexions spéciales sont celles dites "adaptées" dans la terminologie de [KT] dans le cas réel C^∞ . Pour éviter toute ambiguïté, compte tenu de la condition supplémentaire dans le cas holomorphe, nous avons préféré utiliser un autre mot.]

LEMME 2.3. — *Il existe toujours des connexions spéciales.*

Il suffit en effet de se donner un supplémentaire F , C^∞ , y compris dans le contexte holomorphe, de $\tau_{\mathcal{F}_V}$ dans τ_V , et de fixer arbitrairement $\nabla_A(\pi Y)$ pour $A \in F$ (par exemple à l'aide d'une connexion arbitraire C^∞ , $\bar{\nabla}$, sur ν_V , en posant $\nabla_A(\pi Y) = \bar{\nabla}_A(\pi Y)$).

Notons $I^*(GL(\mathbf{K}, q))$ l'algèbre des polynômes φ sur l'algèbre de Lie $gl(\mathbf{K}, q)$ des matrices $q \times q$ à coefficients dans \mathbf{K} , invariants par la représentation adjointe de $GL(\mathbf{K}, q)$, graduée en dimension paire par le double du degré polynomial :

- * désignera la "dimension" de φ , égale à deux fois le "degré" de φ (on prendra garde à distinguer ces 2 mots).

Pour toute connexion ω sur ν_V , notons

$$\Delta_\omega : I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow Z(\Omega_{DR}^*(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K})$$

l'homomorphisme de Chern-Weil qui, à tout polynôme φ de degré k , associe la $2k$ -forme fermée $\varphi(\underbrace{K, K, \dots, K}_k)$. Pour toute famille de connexions

$\omega_0, \dots, \omega_r$ sur ν_V , notons plus généralement

$$\Delta_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r} : I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow \Omega_{DR}^{*-r}(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$$

l'opérateur de différences itérées de Bott ([B1]), tel que

$$d \circ \Delta_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r} = \sum_{j=0}^r (-1)^j \Delta_{\omega_0, \dots, \widehat{\omega}_j, \dots, \omega_r} .$$

Des théorèmes généraux de [KT] sur les fibrés feuilletés, résulte le

THÉORÈME 2.

- (i) Si ω est une connexion spéciale sur ν_V , $\Delta_\omega(\varphi) = 0$ pour $d^\circ \varphi > s$ ($\dim \varphi > 2s$).
- (ii) Si $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r$ est une famille de connexions spéciales sur ν_V ,

$$\Delta_{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r}(\varphi) = 0 \text{ pour } d^\circ \varphi > s .$$
- (iii) L'anneau $\text{Pont}^*(\nu_V)$ (resp. $\text{Chern}^*(\nu_V)$) des classes caractéristiques réelles de ν_V est nul en dimension $*$ $> 2s$.

Remarques :

- 1) Ce théorème est valable pour les fibrés feuilletés quelconques. On utilisera cette remarque au §5.
- 2) Si ν_V est réel, orienté, C^∞ , le théorème ci-dessus ne concerne que l'anneau engendré par les classes de Pontryagin réelles. La classe d'Euler n'est pas concernée, car une connexion spéciale ne préserve en général aucune métrique riemannienne sur ν_V .

3. Rappels sur le complexe de Mayer-Vietoris et la dualité d'Alexander-Lefschetz.

On se reportera à [L1] ou [L2] pour toute démonstration.

Soit V une variété C^∞ de dimension N , et Σ une partie fermée de V dont on supposera seulement qu'elle admet un voisinage "régulier" U dans V , c'est-à-dire un voisinage ouvert dont Σ est un rétracte par déformations.

On appellera "complexe de Mayer-Vietoris" (associé au recouvrement $\mathcal{U} = (V - \Sigma, U)$ de V) l'algèbre différentielle graduée $MV^*(\mathcal{U})$ égale à

$$\Omega_{DR}^*(V - \Sigma) \oplus \Omega_{DR}^*(U) \oplus \Omega_{DR}^{*-1}(U - \Sigma)$$

en tant qu'espace vectoriel gradué, avec la multiplication (non commutative au sens gradué) :

$$(\alpha, \beta, \xi) \smile (\alpha', \beta', \xi') = (\alpha \wedge \alpha', \beta \wedge \beta', \xi \wedge \beta' + (-1)^{d^\circ \alpha} \alpha \wedge \xi')$$

et la différentielle

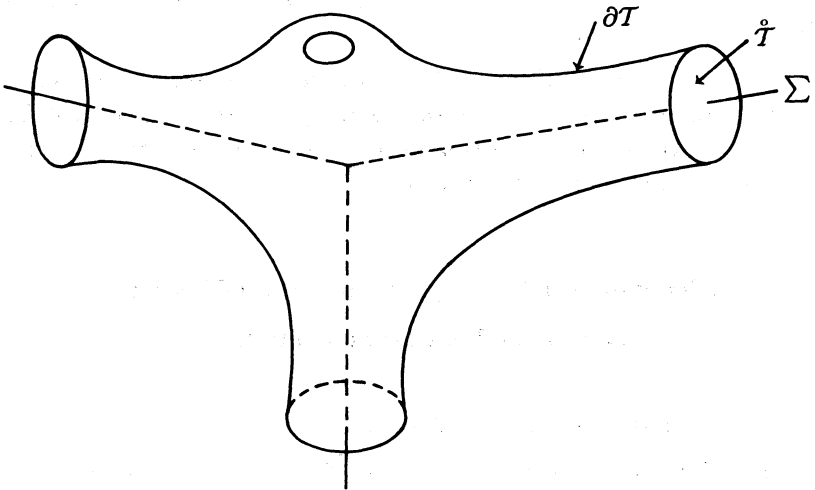
$$D(\alpha, \beta, \xi) = (d\alpha, d\beta, -d\xi + \beta - \alpha)$$

(on a partout sous-entendu les restrictions éventuelles à $U - \Sigma$; d désigne la différentiation extérieure et \wedge le produit extérieur dans l'algèbre de de Rham Ω_{DR}^* concernée). [Ce complexe n'est rien d'autre que le complexe total de Čech-de Rham associé au recouvrement \mathcal{U} .]

Soit $\iota : \Omega_{DR}^*(V) \rightarrow MV^*(\mathcal{U})$ l'application

$$\iota(\alpha) = (\alpha|_{V-\Sigma}, \alpha|_U, 0) :$$

c'est un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées, qui induit un *isomorphisme* d'algèbres graduées en cohomologie (A. Weil [BT]), de sorte que l'on identifiera désormais $H(MV^*(\mathcal{U}))$ à $H^*(V, \mathbf{R})$ via la cohomologie de de Rham.



Soit \mathcal{T} une sous-variété à bord de V , de dimension N , incluse dans U , telle que Σ soit inclus dans l'intérieur de \mathcal{T} , $(\Sigma \cap \partial\mathcal{T}) = \emptyset$ séparant V en les deux sous-variétés à bord \mathcal{T} et $V - \overset{\circ}{\mathcal{T}}$, $(\partial(V - \overset{\circ}{\mathcal{T}})) = -\partial\mathcal{T}$. [On peut, mais il n'est pas nécessaire, supposer que \mathcal{T} se rétracte par déformations sur Σ .]

Supposons V compacte, orientée et connexe. On étend alors l'intégration

$$\int_V : \Omega_{DR}^N(V) \longrightarrow \mathbf{R}$$

à $MV^N(\mathcal{U})$ en posant :

$$\int_V (\alpha, \beta, \xi) = \int_{V-\overset{\circ}{T}} \alpha + \int_T \beta - \int_{\partial T} \xi .$$

Il n'est pas difficile de voir que cette intégrale est nulle sur $D(MV^{n-1}(\mathcal{U}))$ et définit un isomorphisme $H^N(MV(\mathcal{U})) \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}$. La dualité de Poincaré

$$H^k(V, \mathbf{R}) \xrightarrow[\cong]{P_V} H_{N-k}(V, \mathbf{R})$$

est donc induite par l'application

$$MV^k(\mathcal{U}) \longrightarrow \text{Hom}(MV^{N-k}(\mathcal{U}), \mathbf{R})$$

définie par

$$(\alpha, \beta, \xi) \longmapsto ((\alpha', \beta', \xi') \longmapsto \int_{V-\overset{\circ}{T}} \alpha \wedge \alpha' + \int_T \beta \wedge \beta' + \int_{\partial T} [\xi \wedge \beta' + (-1)^k \alpha \wedge \xi']).$$

Les projections naturelles

$$MV^*(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega_{DR}^*(V - \Sigma)$$

et

$$MV^*(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega_{DR}^*(U)$$

étant surjectives, leurs noyaux, notés respectivement $MV^*(\mathcal{U}, V - \Sigma)$ et $MV^*(\mathcal{U}, \Sigma)$, ont pour cohomologie $H^*(V, V - \Sigma; \mathbf{R})$ et $H^*(V, \Sigma; \mathbf{R})$ respectivement. Pour $(0, \beta, \xi) \in MV^k(V, V - \Sigma)$, le produit

$$(0, \beta, \xi) \smile (\alpha', \beta', \xi') = (0, \beta \wedge \beta', \xi \wedge \beta')$$

ne dépend pas de α' et ξ' et permet donc d'écrire la dualité d'Alexander-Lefschetz

$$H^k(V, V - \Sigma; \mathbf{R}) \xrightarrow[\cong]{AL} H_{N-k}(\Sigma, \mathbf{R})$$

qui est induite par l'application

$$MV^k(V, V - \Sigma) \longrightarrow \text{Hom}(\Omega_{DR}^{N-k}(U), \mathbf{R})$$

$$(0, \beta, \xi) \longmapsto (\beta' \longmapsto \int_T \beta \wedge \beta' - \int_{\partial T} \xi \wedge \beta')$$

[V étant compacte, Σ fermé, et U se rétractant par déformations sur Σ , on peut identifier $H_*(\Sigma, \mathbf{R})$ et $H(\text{Hom}(\Omega_{DR}^*(U), \mathbf{R}))$.]

Soit $E \rightarrow V$ un \mathbf{K} -fibré vectoriel C^∞ de rang q , ω une connexion sur E ,

$$\Delta_\omega : I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow Z(\Omega_{DR}^*(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K})$$

l'homomorphisme de Chern-Weil, et

$$\Delta_{\omega\omega'} : I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow \Omega_{DR}^{*-1}(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$$

l'opérateur différence associé à 2 connexions ω et ω' sur E .

Si l'on suppose maintenant ω définie sur $E|_{V-\Sigma}$ et ω' sur $E|_U$, on définit une application

$$\mu_{\omega,\omega'} : I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow MV^*(\mathcal{U}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$$

en posant

$$\mu_{\omega,\omega'}(\varphi) = (\Delta_{\omega}(\varphi), \Delta_{\omega'}(\varphi), \Delta_{\omega,\omega'}(\varphi)) .$$

La formule $d \circ \Delta_{\omega\omega'} = \Delta_{\omega'} - \Delta_{\omega}$ exprime que $\mu_{\omega\omega'}(\varphi)$ est un D -cocycle dans $MV^*(\mathcal{U}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$, dont il est facile de vérifier que la classe de cohomologie dans $MV^*(\mathcal{U}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$ ne dépend pas du choix de ω et ω' (c'est un cas particulier de la théorie de Chern-Weil dans le complexe de Čech-de Rham, exposée par Bott [B1] ou Kamber-Tondeur [KT] avec une toute autre motivation.

L'homomorphisme caractéristique ainsi défini

$$I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow H(MV^*(\mathcal{U}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K})$$

coïncide avec le classique

$$I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow H(\Omega_{DR}^*(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K})$$

quand on identifie $H(\Omega_{DR}^*(V))$ et $H(MV^*(\mathcal{U}))$ par ι^* , puisque, si ω est une connexion globale sur E ,

$$\mu_{\omega|_{V-\Sigma}, \omega|_U} \circ \iota = \Delta_{\omega} .$$

Remarque. — Le principe de l'intégration sur le complexe de Mayer-Vietoris figure en germe dans Allendoerfer-Eells [AE], son utilisation pour construire des résidus de champs de vecteurs appartenant à un pseudo-groupe infinitésimal elliptique dans B. Cenk [C], et pour construire des résidus de formes différentielles à singularités sous-analytiques dans Dolbeault-Poly [DP].

4. Classes résiduelles et résidus des sous-variétés invariantes d'un feuilletage singulier.

On note désormais :

W une variété lisse de $\dim_{\mathbf{K}} n$,

V une sous-variété propre lisse de $\dim_{\mathbf{K}} p$,

\mathcal{S} une partie fermée de W ,

$\Sigma = \mathcal{S} \cap V$,

\mathcal{F} un feuilletage sur $W - \mathcal{S}$, de $\text{codim}_{\mathbf{K}}(p + s)$, laissant $V - \Sigma$ invariante,

\mathcal{F}_V le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $V - \Sigma$, de $\text{codim}_{\mathbf{K}} s$.

Les autres notations du §2 sont reprises sans ambiguïté.

On suppose que Σ admet un voisinage ouvert régulier U dans V , et on recouvre V par $\mathcal{U} = (V - \Sigma, U)$.

Soit ω une connexion spéciale sur $\nu_V|_{V-\Sigma}$ et ω_0 une connexion quelconque sur $\nu_V|_U$. D'après la théorie de Chern-Weil dans $MV^*(\mathcal{U}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$ rappelée au §3, on peut représenter, pour tout $\varphi \in I^*(GL(\mathbf{K}, q))$, la classe caractéristique $\varphi(\nu_V)$ par le D -cocycle $(\Delta_{\omega}(\varphi), \Delta_{\omega_0}(\varphi), \Delta_{\omega\omega_0}(\varphi))$.

D'après le théorème 2, $\Delta_{\omega}(\varphi) = 0$ si $d^{\circ}\varphi > s$, et

$$(0, \Delta_{\omega_0}(\varphi), \Delta_{\omega\omega_0}(\varphi))$$

est alors un D -cocycle dans $MV^*(\mathcal{U}, V - \Sigma) \otimes \mathbf{K}$.

THÉOREME 3 (Théorème d'existence et formule des classes résiduelles). — *Supposons $d^{\circ}\varphi > s$. La classe de cohomologie de $(0, \Delta_{\omega_0}(\varphi), \Delta_{\omega\omega_0}(\varphi))$ dans $H^*(V, V - \Sigma; \mathbf{K})$ ne dépend que du comportement local de \mathcal{F} au voisinage de Σ . Elle ne dépend ni du choix de la connexion spéciale ω , ni du choix de la connexion ω_0 .*

La classe de cohomologie $\varphi_{\mathcal{F}}(\nu_V) \in H^*(V, V - \Sigma; \mathbf{K})$, bien définie dès que $d^{\circ}\varphi > s$, s'appellera la *classe résiduelle* de $\varphi(\nu_V)$ pour \mathcal{F} .

Rappelons, d'après Bott ([B1]), qu'étant donné 3 connexions $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sur un même fibré, l'application linéaire

$$\Delta_{\omega_1\omega_2\omega_3} : I^*(GL(\mathbf{K}, q)) \longrightarrow \Omega^{*-2}(V) \otimes \mathbf{K}$$

vérifie :

$$d \circ \Delta_{\omega_1\omega_2\omega_3} = \Delta_{\omega_2\omega_3} - \Delta_{\omega_1\omega_3} + \Delta_{\omega_1\omega_2} .$$

Si ω_1 et ω_2 sont 2 connexions spéciales sur $\nu_{V-\Sigma}$ on en déduit :

$$D(0, 0\Delta_{\omega_1\omega_2\omega_0}(\varphi)) = (0, \Delta_{\omega_0}(\varphi), \Delta_{\omega_1\omega_0}(\varphi)) - (0, \Delta_{\omega_2}(\varphi), \Delta_{\omega_2\omega_0}(\varphi)) - (0, 0, \Delta_{\omega_1\omega_2}(\varphi)) .$$

Mais, si $d^{\circ}\varphi > s$, $\Delta_{\omega_1\omega_2}(\varphi) = 0$ d'après le théorème 2. Puisque $(0, 0, \Delta_{\omega_1\omega_2\omega_0}(\varphi))$ est dans le sous-complexe relatif $MV^*(\mathcal{U}, V - \Sigma) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{K}$,

ceci prouve que la classe de cohomologie relative $[(0, \Delta_{\omega_0}(\varphi), \Delta_{\omega\omega_0}(\varphi))]$ ne dépend pas du choix de la connexion spéciale ω .

De même, si ω est spéciale, et si ω_0 et ω'_0 désignent 2 connexions arbitraires sur $\nu_V|_U$, $(0, \Delta_{\omega_0, \omega'_0}(\varphi), \Delta_{\omega\omega_0, \omega'_0}(\varphi))$ appartient au complexe relatif $MV^*(U, V - \Sigma)$, et a pour cobord la différence

$$(0, \Delta_{\omega'_0}(\varphi), \Delta_{\omega, \omega'_0}(\varphi)) - (0, \Delta_{\omega_0}(\varphi), \Delta_{\omega\omega'_0}(\varphi)) .$$

Ceci prouve que la classe de cohomologie relative ne dépend pas non plus du choix de ω_0 .

Le fait que $\Omega_{DR}^*(U) \oplus \Omega_{DR}^*(U - \Sigma)$ ne fasse pas intervenir de formes en dehors de U prouve que la classe résiduelle ne dépend que du comportement de \mathcal{F} dans $W - S$ un voisinage de Σ , U pouvant d'ailleurs être choisi arbitrairement petit.

THÉORÈME 4 (Théorème des résidus). — *Supposons V compacte, orientée, de $\dim_{\mathbf{R}} N$, connexe, ($N = p$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $N = 2p$ si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). Pour tout $\varphi \in I^*(GL(\mathbf{K}, q))$ de dimension $*$ = $2k > 2s$, il existe une classe d'homologie $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V) \in H_{N-2k}(\Sigma, \mathbf{K})$ ne dépendant que du comportement de \mathcal{F} dans $W - \Sigma$ au voisinage de Σ , telle que*

$$\varphi(\nu_V) = (\mathcal{P}_V)^{-1} \circ [i] \circ \text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V)$$

(où $[i] : H_{N-*}(\Sigma, \mathbf{K}) \rightarrow H_{N-*}(V, \mathbf{K})$ désigne l'application naturelle, et

$$\mathcal{P}_V : H^*(V, \mathbf{K}) \xrightarrow[\cong]{} H_{N-*}(V, \mathbf{K})$$

la dualité de Poincaré).

Cette classe d'homologie est définie, dans le complexe $\text{Hom}(\Omega_{DR}^{N-2k}(U), \mathbf{K})$ par l'application :

$$b' \in \Omega_{DR}^{N-k}(U) \rightarrow \int_{\mathcal{T}} \Delta_{\omega_0}(\varphi) \wedge b' - \int_{\partial \mathcal{T}} \Delta_{\omega\omega_0}(\varphi) \wedge b'$$

(où \mathcal{T} désigne n'importe quelle variété à bord de dimension N dans U , telle que $\Sigma \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}$).

Il suffit en effet de prendre pour $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V)$ l'image de la classe résiduelle $\varphi_{\mathcal{F}}(\nu_V)$ définie au théorème 3, par la dualité AL d'Alexander-Lefschetz. L'expression de AL dans $MV^*(U) \otimes \mathbf{K}$, telle que nous l'avons rappelée au §3, et la commutativité $\mathcal{P}_V \circ j = [i] \circ AL$ (cf. le diagramme de l'introduction) permettent de conclure.

On appellera $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V)$ le résidu de $\varphi(\nu_V)$ sur Σ relativement à \mathcal{F} .

Remarques :

1) Si Σ a plusieurs composantes connexes Σ_α ,

$$H_*(\Sigma, \mathbf{K}) = \bigoplus_{\alpha} H_*(\Sigma_\alpha, \mathbf{K}) .$$

On peut définir un résidu

$$\text{Rés}_{\mathcal{F}}^\alpha(\varphi, V) \in H_{N-2k}(\Sigma_\alpha, \mathbf{K})$$

pour chacune d'elles, par l'application

$$b' \in \Omega_{DR}^{N-2k}(U_\alpha) \longrightarrow \int_{\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha}(\varphi) \wedge b' - \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha}(\varphi) \wedge b'$$

(où U_α est un voisinage régulier de Σ_α , \mathcal{T}_α une sous-variété à bord, de dimension N , dans U_α telle que Σ_α ne coupe pas $\partial\mathcal{T}_\alpha$, ω_α une connexion arbitraire sur $\nu_V|_{U_\alpha}$, et où l'on a supposé aussi $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ pour $\alpha \neq \beta$).

On a alors :

$$\varphi(\nu_V) = \sum_{\alpha} (\mathcal{P}_V)^{-1} \circ [i_\alpha] \circ \text{Rés}_{\mathcal{F}}^\alpha(\varphi, V)$$

où l'on a noté $[i_\alpha]$ la flèche naturelle

$$H_{N-2k}(\Sigma_\alpha, \mathbf{K}) \longrightarrow H_{N-2k}(V, \mathbf{K}) .$$

2) Si Σ est lisse et de dimension strictement inférieure à N , on peut prendre pour U un voisinage tubulaire de Σ , qui fibre (en disques) au-dessus de Σ ; soit $\ell : U \rightarrow \Sigma$ cette fibration (choisie C^∞). On peut alors choisir une connexion $\bar{\omega}_0$ sur $\nu_V|_\Sigma$ et prendre pour ω_0 la connexion correspondant à $\ell^*\bar{\omega}_0$ par un isomorphisme $\nu_V|_U \cong \ell^{-1}(\nu_V|_\Sigma)$. Dans la définition du résidu, on peut remplacer $\Omega_{DR}^{N-2k}(U)$ par $\Omega_{DR}^{N-2k}(\Sigma)$, et le résidu est alors défini par

$$\gamma \longrightarrow \left(\Omega_{DR}^{N-2k}(\Sigma) \longrightarrow \int_{\mathcal{T}} \ell^*(\Delta_{\bar{\omega}_0}(\varphi) \wedge \gamma) \longrightarrow \int_{\partial\mathcal{T}} \Delta_{\omega, \ell^*\bar{\omega}_0}(\varphi) \wedge \ell^*(\gamma) \right) .$$

On a alors nécessairement $\int_{\mathcal{T}} \ell^*(\Delta_{\bar{\omega}_0}(\varphi) \wedge b) = 0$ pour des raisons de dimension, de sorte que la définition du résidu se simplifie : $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V)$ est défini maintenant par l'élément :

$$\gamma \longrightarrow \int_{\partial\mathcal{T}} \Delta_{\ell^*\bar{\omega}_0, \omega}(\varphi) \wedge \ell^*(\gamma)$$

dans $\text{Hom}(\Omega_{DR}^{N-2k}(\Sigma), \mathbf{K})$.

Bien entendu, cette remarque s'applique aussi au calcul du résidu relatif à chaque composante connexe Σ_α lisse de Σ , de dimension $< N$:

$$\text{Rés}_{\mathcal{F}}^\alpha(\varphi, V) \text{ est défini par l'élément } \gamma \longrightarrow \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\ell^*\bar{\omega}_\alpha, \omega}(\varphi) \wedge \ell^*(\gamma)$$

dans $\text{Hom}(\Omega_{DR}^{N-2k}(\Sigma_\alpha), \mathbf{K})$, $\bar{\omega}_0$ désignant une connexion arbitraire sur $\nu_V|_{\Sigma_\alpha}$ et ω une connexion spéciale sur $\nu_V|_{V-\Sigma}$.

3) Si Σ (ou Σ_α) n'est plus nécessairement lisse, mais si l'on suppose $\nu_V|_U$ (ou $\nu_V|_{U_\alpha}$) trivial, ou même simplement plat, on peut alors choisir pour ω_0 une connexion triviale (ou même seulement à courbure 0). On a alors $\Delta_{\omega_0}(\varphi) = 0$, et l'expression du résidu se simplifie de la même façon que dans le cas où Σ est lisse.

COROLLAIRE 4.1. — *Supposons*

- (i) V compacte et orientée,
- (ii) $\dim \varphi = \dim V$ (dimension maximum de φ).

Alors :

$$\langle \varphi(\nu_V), V \rangle = \sum_{\alpha} \left[\int_{\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha}(\varphi) + \int_{\partial \mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha, \omega}(\varphi) \right]$$

où ω est une connexion spéciale au-dessus de $V-\Sigma$, et ω_α une connexion arbitraire sur U_α , et :

$$\langle \varphi(\nu_V), V \rangle = \sum_{\alpha} \int_{\partial \mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha, \omega}(\varphi),$$

si l'on a choisi les ω_α de façon que $\Delta_{\omega_\alpha}(\varphi) = 0$.

Remarques :

1) Le théorème d'annulation de Bott, pour les feuilletages, exprime que les classes caractéristiques réelles du fibré $\nu_{\mathcal{F}}$ normal à un feuilletage \mathcal{F} sont nulles en dimension $> 2 \text{codim}_{\mathbf{K}} \mathcal{F}$. Dans le cas de feuilletages avec singularités, $\nu_{\mathcal{F}}$ n'est pas défini sur toute la variété et le problème d'exprimer les classes caractéristiques concernées en termes de résidus ne se pose a priori que si l'on a su prolonger $\nu_{\mathcal{F}}$, ou du moins sa classe stable sur le lieu singulier. Dans [PS], Paul Schweitzer a contourné cette difficulté par des restrictions sur la dimension $*$, permettant d'affirmer que

$$H^*(V) \longrightarrow H^*(V-\Sigma)$$

est un isomorphisme. Pour le problème que nous traitons, ν_V est bien défini sur V , et la difficulté n'apparaît pas (excepté au §8).

2) Cette théorie des résidus s'étend sans aucune difficulté au cas des fibrés $E \rightarrow V$, tels que $E|_{V-\Sigma}$ soit feuilleté au sens de [KT]. Nous utiliserons cette remarque au §5.

Cas des feuilletages holomorphes de $\dim_{\mathbf{C}} 1$, à singularités non dégénérées
 – Théorème de Bott ([B2]).

On suppose :

1) Σ_{α} est une sous-variété lisse holomorphe de V .

2) Il existe un voisinage \tilde{U}_{α} de Σ_{α} dans W , et un champ de vecteurs holomorphe X_{α} sur \tilde{U}_{α} , non nul sur $V \cap \tilde{U}_{\alpha} - \Sigma_{\alpha}$, tel que X_{α} ait même singularités que $\mathcal{F}/\tilde{U}_{\alpha}$ et définisse le même feuilletage que \mathcal{F} en dehors de ces singularités.

3) L'action infinitésimale θ_{α}^{ν} de X_{α} sur le fibré normal $\nu_V(\Sigma_{\alpha})$ à Σ_{α} dans V est un automorphisme (c'est-à-dire, selon la terminologie de [B2], que Σ_{α} est une composante connexe "non dégénérée" du lieu singulier de $\mathcal{F}|_V$).

Posons, pour toute section πY de ν_V (π projection naturelle $\tau_W|_V \rightarrow \nu_V$) : $\Lambda_{\alpha}(\pi Y) = \pi[X_{\alpha}, \tilde{Y}]$ (cf. notations du lemme 2.1). On a alors le

COROLLAIRE 4.2.

$$(\mathcal{P}_V)^{-1} \circ [i_{\alpha}] \circ \text{Rés}_{\mathcal{F}}^{\alpha}(\varphi, V) = \left\langle \frac{\varphi(\Lambda_{\alpha})}{\det(\theta_{\alpha}^{\nu})}, \Sigma_{\alpha} \right\rangle$$

(notations de [B2]).

Il suffit en effet de remarquer que Λ_{α} permet de munir le fibré $\nu_V|_{U_{\alpha}}$ d'une \mathbf{C} -action subordonnée à $X_{\alpha}|_{U_{\alpha}}$, où $U_{\alpha} = V \cap \tilde{U}_{\alpha}$: la définition de $\text{Rés}_{\mathcal{F}}^{\alpha}(\varphi, V)$ étant purement locale, et le résidu existant même si la \mathbf{C} -action n'est pas définie globalement (théorème 4), le théorème 2 de Bott ([B2]) permet de conclure (cf. exemple de calcul à la fin du §7).

5. Démonstration du théorème 1.

Ainsi qu'annoncé dans l'introduction, nous allons d'abord énoncer et démontrer un théorème un peu plus général (théorème 1').

Soit $E \rightarrow V$ un fibré vectoriel holomorphe et \mathcal{F}_V un feuilletage sur $V - \Sigma$ (Σ fermé de V , composantes connexes de Σ notées Σ_{α}), dont les feuilles sont de $\dim_{\mathbf{C}} 1$. On suppose que $E|_{V-\Sigma}$ "feuilleté" relativement à \mathcal{F}_V , au sens de Kamber et Tondeur, c'est-à-dire muni d'une connexion partielle $(X, \sigma) \rightarrow \bar{\nabla}_X \sigma$ définie seulement pour $X \in \Gamma(\mathcal{T}_{\mathcal{F}_V})$, nécessairement

plate puisque $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_V}$ est de $\dim_{\mathbf{C}} 1$, et vérifiant en plus la condition suivante : $\bar{\nabla}_X \sigma$ est holomorphe chaque fois que σ est holomorphe.

Exemple 1. — Avec les notations du §2, $E = \nu_V$, $\bar{\nabla}_X Y = \pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]|_V)$.

Exemple 2. — On s'est donné un champ de vecteurs holomorphe X sur tout V et E est muni d'une \mathbf{C} -action de X (au sens de Bott [B2]), c'est-à-dire d'un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1, $\theta_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, tel que

- 1) $\theta_X(\sigma)$ est holomorphe si σ est holomorphe,
- 2) $\theta_X(f\sigma) = f\theta_X(\sigma) + (X \cdot f)\sigma$, $\forall f \in C^\infty(V, \mathbf{C})$.

Un tel fibré est évidemment feuilleté, relativement au feuilletage défini par X sur $V - \{\text{ensemble singulier de } X\}$. Par exemple, le fibré tangent \mathcal{T}_V est muni de la \mathbf{C} -action $\theta_X : Y \rightarrow [X, Y]$, une fois X fixé.

Toute la théorie des §2 et 4 s'applique sans changement à de tels fibrés quand on prend pour "connexion spéciale" (sous-entendu : relativement à θ_X) toute connexion sur $E|_{V-\Sigma}$ prolongeant la connexion partielle $\bar{\nabla}$ définissant la structure feuilletée et de type $(1, 0)$:

$$\begin{cases} \nabla_X \sigma \text{ est donné par la connexion partielle si } X \in \Gamma(\mathcal{T}_{\mathcal{F}_V}) \\ \nabla_Z \sigma = 0 \text{ si } Z \in T^{01}(V - \Sigma), \text{ et } \sigma \text{ holomorphe} \end{cases}$$

On a donc en particulier un théorème de résidus :

THÉORÈME 4 GÉNÉRALISÉ. — *Pour tout $\varphi \in \text{Chern}^{2p}[c_1, \dots, c_q]$ (où $q = \text{rang}_{\mathbf{C}} E$), et pour toute composante connexe Σ_α de Σ , il existe des nombres I_α , ne dépendant que de $(E, \bar{\nabla})$ sur un voisinage de Σ_α , et vérifiant, si V est compacte :*

$$\langle \varphi(E), V \rangle = \sum_{\alpha} I_{\alpha}$$

(I_α étant égal à $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V, \Sigma_\alpha)$ dans le cas de l'exemple 1).

Supposons maintenant qu'il existe un voisinage ouvert U_α de Σ_α dans V , ayant les propriétés suivantes :

- (i) U_α est inclus dans le domaine d'une carte locale (x_1, \dots, x_p) de V ,
- (ii) $E|_{U_\alpha}$ est trivial,
- (iii) $\mathcal{F}_V|_{U_\alpha - \Sigma_\alpha}$ est défini par un champ de vecteurs X_α .

(Une telle hypothèse est évidemment vérifiée si Σ_α est un point.) Posons :

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^p A_i(x_1, \dots, x_p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\bar{\nabla}_{X_\alpha} \sigma_\lambda = \sum_{\mu=1}^q \theta_\lambda^\mu \sigma_\mu$$

(où $(\sigma_1, \dots, \sigma_\lambda, \dots, \sigma_q)$ désigne une trivialisatation de $E|_{U_\alpha}$ par des sections holomorphes).

Notons $M_\theta = ((\theta_\lambda^\mu))$ (matrice à coefficients dans les fonctions holomorphes sur $U_\alpha - \Sigma_\alpha$).

Soit $\varphi \in \text{Chern}^{2p}[c_1, \dots, c_q]$.

THÉORÈME 1'. — *Le nombre I_α du théorème 4 généralisé est égal à l'intégrale*

$$\int_{R_{1,2,\dots,p}^\alpha} \frac{\varphi(M_\theta(x))}{\prod_{i=1}^p A_i(x)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p,$$

(qui ne dépend donc, ni de la trivialisatation $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$, ni du système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_p) , et est aussi égal à $\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V, \Sigma_\alpha)$ dans le cas de l'exemple 1).

[$R_{1,2,\dots,p}^\alpha$ est défini comme au théorème 1. En pratique, $R_{1,2,\dots,p}^\alpha$ est souvent défini par la condition $|A_i| = \varepsilon, \forall i = 1, \dots, p$ (où ε est un nombre > 0 suffisamment petit).]

Dans le cas de l'exemple 1, avec la trivialisatation locale $\sigma_\lambda = \pi(\frac{\partial}{\partial y_\lambda})$ ($1 \leq \lambda \leq q$), on obtient :

$$\theta_\lambda^\mu = -\frac{\partial B_\lambda}{\partial y_\mu}(x, 0) \text{ et } M_\theta = -\left(\left(\frac{D(B_1, \dots, B_q)}{D(y_1, \dots, y_q)}\right)\right)_{y=0}.$$

On en déduit le théorème 1.

Dans le cas de l'exemple 2, avec la trivialisatation locale $\sigma_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ de $T(V)$ ($1 \leq i \leq p$), on obtient :

$$\theta_i^j = -\frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad M_\theta = -\left(\left(\frac{D(A_1, \dots, A_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}\right)\right),$$

et l'on retrouve la formule des résidus de Baum-Bott [BB1].

Démonstration du théorème 1'. — D'après le corollaire 4.1 du théorème 4 (§4),

$$I_\alpha = \int_{\partial T_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha, \omega}(\varphi)$$

pour toute connexion triviale ω_α sur $E|_{U_\alpha}$, et toute connexion spéciale ω sur $E|_{V-\Sigma}$. Aucune ambiguïté n'étant possible, nous noterons désormais Ω_{DR}^* au lieu de $\Omega_{DR}^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ l'algèbre de de Rham à coefficients complexes.

Notons $\rho : \Omega_{DR}^*(U_\alpha - \Sigma_\alpha) \hookrightarrow CDR^*(U_\alpha)$ l'inclusion naturelle de l'algèbre de de Rham de $U_\alpha - \Sigma_\alpha$ dans le complexe total de Čech-de Rham

$$CDR^*(U_\alpha) = \bigoplus_{a+b=*} C^a(U_\alpha, \Omega_{DR}^b)$$

associé au recouvrement \mathcal{U}_α de $U_\alpha - \Sigma_\alpha$. D'après A. Weil (cf. par exemple [BT], p. 94), ρ induit un isomorphisme d'algèbres graduées en cohomologie.

En particulier, la forme différentielle

$$\eta = \frac{\varphi(M_\theta(x))}{\prod_{i=1}^p A_i(x, 0)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$$

est définie sur l'intersection $\bigcap_{i=1}^p U_i^\alpha$ de tous les ouverts du recouvrement \mathcal{U}_α et définit donc un élément, encore noté η , dans

$$C^{p-1}(U_\alpha, \Omega^p) \subset CDR^{2p-1}(U_\alpha),$$

nécessairement fermé dans $CDR^*(U_\alpha)$ pour des raisons de dimension :

$$C^p(U_\alpha, \Omega^*) = 0 \quad \text{et} \quad d_{DR}\eta = 0 \in C^{p-1}(U_\alpha, \Omega^{p-1}).$$

LEMME 5.1. — *Les cocycles $\rho(\Delta_{\omega_\alpha, \omega}(\varphi)) \in C^0(U_\alpha, \Omega_{DR}^{2p-1})$ et $\eta \in C^{p-1}(U_\alpha, \Omega^p)$ sont cohomologues dans $CDR^{2p-1}(U_\alpha)$, pour un choix particulier de ω_α précisé ci-dessous.*

Afin de construire $\mu(\varphi) \in CDR^{2p-1}(U_\alpha)$ tel que

$$D\mu(\varphi) = -\rho(\Delta_{\omega_\alpha, \omega}(\varphi)) + \eta$$

(D désignant la différentielle totale dans $CDR^*(U_\alpha)$), introduisons, sur chaque ouvert U_i^α , une connexion particulière ω_i de la façon suivante :

on remarque que $(X, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p})$ forment une base locale du

module des champs holomorphes sur U_i^α . Si l'on note ∇^i la loi de dérivation associée à ω_i , $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\bar{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$, on pose :

$$\begin{cases} \nabla_{X_\alpha}^i \sigma = \bar{\nabla}_{X_\alpha} \sigma, \\ \nabla_{\partial_j}^i \sigma_\lambda = 0, & \forall j, j \neq i, \forall \lambda, \\ \nabla_{\bar{\partial}_j}^i \sigma = 0, & \forall j = 1, \dots, p, \forall \sigma \text{ holomorphe.} \end{cases}$$

Choisissons, pour ω_α , la connexion triviale définie par :

$$\begin{cases} \nabla_{\partial_j}^\alpha \sigma_\lambda = 0, \\ \nabla_{\bar{\partial}_j}^\alpha \sigma_\lambda = 0, & \forall j (j = 1, \dots, p, \forall \lambda (\lambda = 1, \dots, q)). \end{cases}$$

Notons θ_{∂_j} l'opérateur

$$\sum_\lambda f_\lambda \sigma_\lambda \longrightarrow \sum_\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} \sigma_\lambda.$$

On remarque que ω_i est spéciale relativement à θ_X et aussi à chaque θ_{∂_j} pour $j \neq i$, tandis que ω_α est spéciale pour tous les θ_{∂_j} , ($j = 1, \dots, p$). Pour tout k -simplexe $I = (i_0, \dots, i_k)$ du nerf de \mathcal{U}_α , posons :

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_I \omega} = \Delta_{\omega_{i_0} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} \omega} \\ \Delta_{\omega_\alpha \omega_I} = \Delta_{\omega_\alpha \omega_{i_0} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k}} \\ \Delta_{\omega_\alpha \omega_I \omega} = \Delta_{\omega_\alpha \omega_{i_0} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} \omega} \end{cases}$$

(ces opérateurs n'ayant évidemment de sens que sur l'intersection $U_I = \bigcap_{r=0}^k U_{i_r}^\alpha$ des ouverts où toutes ces connexions sont simultanément définies).

On définira alors $\mu(\varphi) \in CDR^{2p-2}(\mathcal{U}_\alpha)$, en posant, pour tout k -simplexe I du nerf de \mathcal{U}_α :

$$(\mu(\varphi))_I = (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \Delta_{\omega_\alpha \omega_I \omega}(\varphi) \in \Omega_{DR}^{2p-2-k}(U_I).$$

Puisque $d^\circ \varphi = p$, et puisque les connexions $\omega_{i_0} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} \omega$ sont toutes spéciales relativement à un même opérateur θ_X , $\Delta_{\omega_I \omega}(\varphi) = 0$ pour tout k -simplexe I . De même, puisque les connexions $\omega_\alpha \omega_{i_0} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k}$ sont toutes spéciales relativement à au moins un même opérateur θ_{∂_j} , pourvu que k soit $\leq p - 2$, $\Delta_{\omega_\alpha \omega_I}(\varphi) = 0$ pour tout k -simplexe I de dimension $\leq p - 2$.

On en déduit :

$$(D\mu(\varphi))_i = d\Delta_{\omega_\alpha \omega_i \omega}(\varphi) = -\Delta_{\omega_\alpha \omega}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} (D\mu(\varphi))_I &= (-1)^{k + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} d\Delta_{\omega_\alpha \omega_I \omega}(\varphi) + \sum_{r=0}^k (-1)^{r + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \Delta_{\omega_\alpha \omega_{I-r}, \omega}(\varphi) \\ &= (-1)^{k + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} + (-1)^{k+2} \Delta_{\omega_\alpha \omega_I}(\varphi) + \Delta_{\omega_\alpha \omega_{I-r}, \omega}(\varphi) \\ &= (-1)^{\lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor} \Delta_{\omega_\alpha \omega_I}(\varphi). \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} (D\mu(\varphi))_i = -\Delta_{\omega_\alpha\omega}(\varphi)|_{U_i}, \forall i, \\ (D\mu(\varphi))_I = 0 \text{ pour } 0 < |I| = k \leq p-2, \\ (D\mu(\varphi))_{1,2,\dots,p} = (-1)^{[\frac{p}{2}]} \Delta_{\omega_\alpha\omega_1\omega_2\dots\omega_p}(\varphi). \end{cases}$$

Pour achever la démonstration du lemme, il suffit de prouver le

LEMME 5.2.

$$(-1)^{[\frac{p}{2}]} \Delta_{\omega_\alpha\omega_1\dots\omega_p}(\varphi) = \frac{\varphi(M_\theta(x))}{\prod_{i=1}^p A_i(x, 0)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p .$$

Notons encore $\omega_\alpha, \omega_i, \omega_p$ les formes de connexions relatives à la trivialisation $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$.

On a alors

$$\begin{cases} \omega_i(X) = A_i(x)M_\theta(x) \\ \omega_i(\partial_j) = 0 \\ \omega_i(\bar{\partial}_j) = 0 \end{cases}$$

soit $\omega_i = \frac{1}{A_i} M_\theta dx_i, (1 \leq i \leq p)$, tandis que $\omega_\alpha = 0$.

Pour calculer $\Delta_{\omega_\alpha\omega_1\omega_2\dots\omega_p}$, on introduit (Bott [B1]) la connexion $\tilde{\omega}$ sur $E|_{U_1\dots U_p} \times \Delta_p \rightarrow U_1^{\alpha\dots p} \times \Delta_p$ (Δ^p désignant le p -simplexe

$$0 \leq \sum_{i=1}^p t_i \leq 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1,$$

dans \mathbf{R}^p), définie par

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^p t_i \omega_i + \left[1 - \left(\sum_{i=1}^p t_i \right) \right] \omega_\alpha = \left(\sum_{i=1}^p \frac{t_i}{A_i} dx_i \right) M_\theta .$$

La courbure $\tilde{\Omega}$ de cette connexion est égale à

$$\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^p dt_i \wedge \frac{1}{A_i} dx_i \cdot M_\theta + (\text{termes sans } dt_i) .$$

Par conséquent, pour tout polynôme φ dans $\text{Chern}^{2p}[c_1 \cdot c_q]$,

$$\Delta_{\tilde{\omega}}(\varphi) = p! (-1)^{[\frac{p}{2}]} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_p \times \frac{\varphi(M_\theta)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p)}{\prod_{i=1}^p A_i}$$

+ (termes de degré $< p$ en dt_j) .

Par intégration sur Δ_p , et en utilisant l'égalité $\int_{\Delta_p} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_p = \frac{1}{p!}$, on obtient :

$$(-1)^{[\frac{p}{2}]} \Delta_{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_p}(\varphi) = \eta .$$

Ceci achève la démonstration du lemme. Pour achever celle du théorème 1', il faut encore démontrer le

LEMME 5.3.

$$\int_{\partial \mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha \omega}(\varphi) = \int_{R_{1,2,\dots,p}^\alpha} \eta .$$

Tel est l'objet du paragraphe suivant.

COROLLAIRES DU THÉORÈME 1. — Si $U_{1,2,\dots,p}^\alpha = \emptyset$,

$$\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V, \Sigma_\alpha) = 0, \quad \forall \varphi .$$

(Cette situation ne peut se produire que pour $p \geq 3$).

Si le champ X_α définissant \mathcal{F} au voisinage de Σ_α , est une combinaison linéaire (à coefficients holomorphes) des seuls champs $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ($1 \leq i \leq p$), sur un voisinage de Σ_α dans W (pas seulement dans V),

$$\text{Rés}_{\mathcal{F}}(\varphi, V, \Sigma_\alpha) = 0, \quad \forall \varphi .$$

Cela reste vrai si l'on autorise X à avoir des composantes normales B^λ , lorsque celles-ci ne dépendent que des coordonnées x_i .

6. Intégration sur le complexe Čech-de Rham , et résidus de Grothendieck.

THÉORÈME 5. — Il existe une application linéaire

$$\int_{\partial \mathcal{T}_\alpha} : CDR^{2p-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbf{C}$$

ayant les propriétés suivantes :

(i) elle prolonge l'intégration usuelle

$$\int_{\partial \mathcal{T}_\alpha} : \Omega^{2p-1}(U_\alpha - \Sigma_\alpha) \longrightarrow \mathbf{C}$$

des formes différentielles,

(ii) elle est nulle sur les cobords $D(CDR^{2p-2}(\mathcal{U}_\alpha))$,

(iii) sa restriction à $C^{p-1}(\mathcal{U}_\alpha, \Omega^p) = \Omega_{DR}^p(U_{1,2,\dots,p}^\alpha)$ est égale à l'intégrale usuelle des p -formes sur la variété (sans bord) $R_{1,2,\dots,p}^\alpha$.

On déduit immédiatement le lemme 5.3 du théorème 5, d'où le théorème 1', le terme de droite dans la formule du lemme s'identifiant à la définition usuelle de la valeur en m_α du résidu de Grothendieck, si $\Sigma_\alpha = \{m_\alpha\}$.

Soit $\lambda = (\lambda_I)_I \in CDR^{2p-1}(\mathcal{U}_\alpha)$: pour chaque I , λ_I est une $(2p - k - 1)$ -forme sur U_I , tandis que R_{I_α} est, rappelons-le, une variété à bord orientée, de dimension $(2p - k - 1)$, incluse dans U_I . On définit alors $\int_{\partial T_\alpha} : CDR^{2p-1}(\mathcal{U}_\alpha) \rightarrow \mathbf{C}$ en posant :

$$\int_{\partial T_\alpha} \lambda = \sum_I \left(\int_{R_I^\alpha} \lambda_I \right)$$

(les intégrales à droite du signe = étant les intégrales usuelles).

Il est clair que les propriétés (i) et (iii) sont vérifiées. Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer :

$$\int_{\partial T_\alpha} D\mu = 0, \quad \forall \mu \in CDR^{2p-2}(\mathcal{U}_\alpha).$$

Pour tout $I = (i_0 < i_1 < \dots < i_k)$, posons :

$$|I| = k \text{ et } (-1)^I = (-1)^k.$$

Pour tout $j \neq i_0, \dots, i_k$, notons (I, j) la suite $(i_0, i_1, \dots, i_k, j)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_\alpha} D\mu &= \sum_I \int_{R_I^\alpha} \left[(-1)^I d\mu_I + \sum_{r=0}^{|I|} (-1)^r \mu_{I-i_r} \right] \\ &= \sum_{\substack{I,j \\ j \notin I}} (-1)^I \int_{R_{Ij}^\alpha} \mu_I + \sum_{\substack{J,r \\ 0 \leq r \leq |J|}} (-1)^r \int_{R_J^\alpha} \mu_{J-j_r}. \end{aligned}$$

On définit une bijection $\phi_k : (I, j) \rightarrow (J, r)$ où

$$\begin{cases} I = i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1}, & j \neq i_0, i_1, \dots, i_{k-1}, \\ J = j_0 < j_1 < \dots < j_k, & j \leq r \leq k, \end{cases}$$

de la façon suivante : notant $r(I, j)$ l'entier $\in \{0, 1, \dots, k\}$ tel que

$$i_0 < \dots < i_{r(I,j)-1} < j < i_{r(I,j)} < \dots < i_{k-1},$$

et $J(I, j)$ la suite croissante à $(k + 1)$ termes ainsi définie, on pose :

$$\phi_k(I, j) = (J(I, j), r(I, j)) .$$

On a alors :

$$R_{Ij}^\alpha = (-1)^{k-r(I,j)} R_{J(I,j)}^\alpha$$

de sorte que

$$(-1)^I \int_{R_{Ij}^\alpha} \mu_I = -(-1)^{r(I,j)} \int_{R_{J(I,j)}^\alpha} \mu_{J(I,j)-r(I,j)} .$$

On en déduit que tous les termes se détruisent deux à deux dans l'expression de $\int_{\partial T_\alpha} D\mu$, qui est donc nulle, c.q.f.d.

On démontre au passage le

THÉORÈME 6. — Soit $\text{Rés}_{\Sigma_\alpha} : \Omega_{\text{hol}}^p(U_{1,2,\dots,p}^\alpha) \rightarrow \mathbf{C}$ la restriction de l'intégration $\xi \rightarrow \int_{R_{1,2,\dots,p}^\alpha} \xi$ aux p -formes holomorphes sur $U_{1,2,\dots,p}^\alpha$.

(i) $\text{Rés}_{\Sigma_\alpha}(\xi)$ ne dépend que de la classe de cohomologie de ξ dans $H(\text{CDR}^{2p-1}(\mathcal{U}_\alpha)) \cong H^{2p-1}(U_\alpha - \Sigma_\alpha, \mathbf{C})$, et non de ξ à proprement parler.

(ii) $\text{Rés}_{\Sigma_\alpha}(\xi)$ ne dépend pas du système d'alvéoles subordonné à $\mathcal{U}(\partial T_\alpha)$.

(iii) $\text{Rés}_{\Sigma_\alpha}(\xi)$ ne dépend pas du choix de T_α vérifiant : $\Sigma_\alpha \subset \overset{\circ}{T}_\alpha$.

Remarque. — Supposons que T_α soit défini par l'équation $\sum_{i=1}^p |A_i|^2 \leq \varepsilon^2$ (où ε est un nombre > 0 suffisamment petit). On suppose aussi que les hypersurfaces $|A_i| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$ ($1 \leq i \leq p$) forment une intersection complète. On peut alors prendre pour alvéole R_i^α la variété à bord ($|A_i| \geq |A_j|, \forall j; \sum_{i=1}^p |A_i|^2 = \varepsilon^2$), $R_{1,2,\dots,p}^\alpha$ étant alors l'intersection des hypersurfaces $|A_i| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$.

Démonstration du théorème 6. — Tout p -forme holomorphe ξ est nécessairement fermée pour des raisons de dimension. On en déduit :

$$\Omega_{\text{hol}}^p(U_{1,2,\dots,p}^\alpha) \subset Z^{2p-1}(\text{CDR}(\mathcal{U}_\alpha)) .$$

Il existe par conséquent une $(2p - 1)$ forme fermée $\bar{\xi} \in Z^{2p-1}(U_\alpha - \Sigma_\alpha)$, dont la classe de cohomologie $[\bar{\xi}]$ est bien définie dans $H^{2p-1}(U_\alpha - \Sigma_\alpha, \mathbf{C})$,

et dont l'image dans $CDR^{2p-1}(U_\alpha)$ est D -cohomologue à ξ . On déduit du théorème 5 :

$$\int_{R_{1,2,\dots,p}^\alpha} \xi = \int_{\partial T_\alpha} \bar{\xi}.$$

Le théorème 6 en résulte, puisque $\int_{\partial T_\alpha} \bar{\xi}$ ne dépend que de la classe de cohomologie de $\bar{\xi}$, ne dépend pas du système d'alvéoles sur ∂T_α , et ne dépend pas non plus du choix de T_α , pourvu que $\Sigma_\alpha \subset \overset{\circ}{T}_\alpha$; ($\Sigma_\alpha \cap \partial T_\alpha = \emptyset$).

7. Eclatements – Exemples.

Soit V une sous-variété analytique complexe ($\dim_{\mathbb{C}} p$) d'une variété analytique complexe W de $\dim_{\mathbb{C}}(p+q)$, et $F : \widetilde{W} \rightarrow W$ l'éclatement normal de V : \widetilde{W} est encore une variété analytique complexe, de même dimension que W , et F une application holomorphe.

Notons respectivement $\tau(V)$, $\tau(W)$ les espaces tangents complexes à V et W . Notons $\nu_V = \tau(W)|_V / \tau(V)$ le fibré normal à V dans W , et $D \xrightarrow{f} V$ le fibré en espaces projectifs $\mathbf{PC}(q-1)$ associé à ν_V : du point de vue *ensembliste*, \widetilde{W} est la réunion disjointe

$$\widetilde{W} = (W - V) \amalg D,$$

$F : \widetilde{W} \rightarrow W$ étant égale à l'identité sur $W - V$, et $F|_D$ étant la projection f de D sur V .

Du point de vue *analytique*, rappelons la façon de procéder : soit $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ un système de coordonnées analytiques au voisinage U_{m_0} d'un point $m_0 \in V$, par rapport auquel $V \cap U_{m_0}$ a pour équations : $y_\lambda = 0, \forall \lambda = 1, \dots, q$. Soit $\tilde{m}_0 \in f^{-1}(m_0)$ la direction du vecteur normal $\sum_{\lambda=1}^q b_\lambda^0 \left(\frac{\partial}{\partial y_\lambda}\right)_{m_0}$ supposé non nul (mod $\tau_{m_0}(V)$). L'un au moins des coefficients b_λ^0 est $\neq 0$. Choisissons donc un indice λ_0 tel que $b_{\lambda_0}^0 \neq 0$. On définit alors un système de coordonnées locales $(x'_1, \dots, x'_p, y'_1, \dots, y'_q)$ dans \widetilde{W} sur un voisinage $U_{\tilde{m}_0}$ de \tilde{m}_0 , par rapport auquel : $F(x'_1, \dots, x'_p, y'_1, \dots, y'_q)$ a pour coordonnées dans U_{m_0} :

$$\begin{cases} x_i = x'_i & (i = 1, \dots, p), \\ y_\lambda = y'_{\lambda_0} \cdot y'_\lambda & \text{si } \lambda \neq \lambda_0, \\ y_{\lambda_0} = y'_{\lambda_0}. \end{cases}$$

Cela signifie en particulier :

1) Si m a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ dans $(U_{m_0} - U_{m_0} \cap V)$, il n'est dans l'image $F(U_{m_0}^-)$ que si $y_{\lambda_0} \neq 0$, et - en tant que point de W - a alors pour coordonnées dans $U_{m_0}^-$:

$$(x_1, \dots, x_p, y_1/y_{\lambda_0}, \dots, y_{\lambda_0-1}/y_{\lambda_0}, Y_{\lambda_0}, y_{\lambda_0+1}/y_{\lambda_0}, \dots, y_q/y_{\lambda_0}) .$$

2) Si $[v]$ est la direction du vecteur normal

$$v = \sum_{\lambda=1}^q c_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial y_\lambda} \right)_m \neq 0 \pmod{(\tau_m(V))} ,$$

$[v]$ n'est dans $U_{m_0}^-$ que si $m \in U_{m_0} \cap V$ et $c_{\lambda_0} \neq 0$, ses coordonnées dans $U_{m_0}^-$ étant alors égales à :

$$\left(x_1(m), \dots, x_p(m), \frac{c_1}{c_{\lambda_0}}, \dots, \frac{c_{\lambda_0-1}}{c_{\lambda_0}}, 0, \frac{c_{\lambda_0+1}}{c_{\lambda_0}}, \dots, \frac{c_q}{c_{\lambda_0}} \right) .$$

3) $(c_1, \dots, c_{\lambda_0}, \dots, c_q)$ constitue un système de coordonnées homogènes adaptée à la structure projective de chaque fibre $f^{-1}(m)$ d'un point m de $U_{m_0} \cap V$.

Supposons maintenant que V soit l'une des composantes connexes de l'ensemble des zéros d'un champ de vecteurs holomorphe X sur W . Relativement aux coordonnées locales définies ci-dessus,

$$X|_{U_{m_0}-V} = \sum_{i=1}^p A_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^q B_\lambda(x, y) \frac{\partial}{\partial y_\lambda} .$$

Par le difféomorphisme $F : \widetilde{W} - D \rightarrow W - V$, il lui correspond, dans $U_{m_0}^- - D$, le champ de vecteurs

$$X|_{U_{m_0}-V} = \sum_{i=1}^p (A_i \circ F) \frac{\partial}{\partial x'_i} + \frac{1}{y'_{\lambda_0}} \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} [B_\lambda \circ F - y'_\lambda (B_{\lambda_0} \circ F)] \frac{\partial}{\partial y'_\lambda} + (B_{\lambda_0} \circ F) \frac{\partial}{\partial y'_{\lambda_0}} .$$

Puisque les fonctions $A_i \circ F$ et $B_\lambda \circ F$ s'annulent lorsque $y'_{\lambda_0} = 0$, il existe des fonctions $\bar{A}_i(x', y')$ et $\bar{B}_\lambda(x', y')$ telles que

$$(A_i \circ F)(x', y') = y'_{\lambda_0} \cdot \bar{A}_i, \quad B_\lambda \circ F = y'_{\lambda_0} \cdot \bar{B}_\lambda ,$$

d'où

$$X|_{U_{\lambda, m_0}-D} = y'_{\lambda_0} \cdot \left(\sum_{i=1}^p \bar{A}_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \right) + \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} (\bar{B}_\lambda - y'_\lambda \bar{B}_{\lambda_0}) \frac{\partial}{\partial y_\lambda} + y'_{\lambda_0} \bar{B}_{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial y'_{\lambda_0}} .$$

[Puisque, seul, le feuilletage défini par \tilde{X} nous intéresse, on peut éventuellement remplacer $\tilde{X}_{U_{m_0}-D}$ par un champ colinéaire : par exemple, si les fonctions $A_i(x, y)$ et $B_\lambda(x, y)$ sont homogènes de degré d par rapport aux variables y_μ , on aura intérêt à diviser $\tilde{X}_{U_{m_0}-D}$ par $(y'_{\lambda_0})^{d-1}$ pour que le feuilletage se prolonge éventuellement à certains points de D .]

Ce champ de vecteurs (ou tout champ colinéaire) se prolonge à $D \cap U_{m_0}$ en

$$\tilde{X} = \sum_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} (\bar{B}_\lambda - y'_\lambda \bar{B}_{\lambda_0}) \frac{\partial}{\partial y'_\lambda},$$

qui laisse invariant chaque fibre D_m ($m \in V$) du fibré $D \xrightarrow{f} V$. Le fibré normal ν_{D_m} à D_m dans \tilde{W} est somme directe

$$L_m \oplus f^{-1}(\tau_m(V))$$

du fibré tautologique en droites L_m sur $D_m \cong \mathbf{PC}(q-1)$ et du fibré trivial image réciproque de l'espace tangent complexe $\tau_m(V)$ à V en m : il a donc mêmes classes de Chern que L_m : $c_1(\nu_{D_m}) = c_1(L_m)$, $c_\lambda(\nu_{D_m}) = 0$ pour $\lambda > 1$. On en déduit, pour $j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + \dots + j_{q-1} \lambda_{q-1} = q-1$:

$$\begin{cases} \langle c_{\lambda_1}^{j_1} \cdot c_{\lambda_2}^{j_2} \cdots c_{\lambda_{q-1}}^{j_{q-1}}(\nu_{D_m}), D_m \rangle = 0 & \text{si l'un des } j_\lambda \text{ est } > 0 \text{ pour } \lambda > 1, \\ \langle (c_1)^{q-1}(\nu_{D_m}), D_m \rangle = (-1)^{q-1}. \end{cases}$$

On est donc en mesure d'appliquer le théorème 1, chaque fois que les composantes connexes Σ_α de l'ensemble singulier de $\tilde{F}|_{D_m}$ sont incluses dans l'un des ouverts du type $U_{m_0} \cap D_m$ ($m \in U_{m_0}$). Mais la matrice jacobienne

$$J(x) = \left(\frac{D(y'_{\lambda_0} \bar{A}_1, \dots, y'_{\lambda_0} \bar{A}_p, y'_{\lambda_0} \bar{B}_{\lambda_0})}{D(x'_1, \dots, x'_p, y'_{\lambda_0})} \right)_{y'_{\lambda_0}=0}$$

est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_1 & \bar{A}_2 & \bar{A}_p & \bar{B}_{\lambda_0} \end{pmatrix}$$

et par conséquent :

$$\varphi(J_x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \varphi = c_1^{j_1} c_2^{j_2} \cdots c_{\lambda_{q-1}}^{j_{q-1}} \text{ si l'un des } j_\lambda \text{ est } > 0 \text{ pour } \lambda > 1, \\ \frac{(-1)^{q-1}}{(2i\pi)^{q-1}} (\bar{B}_{\lambda_0})^{q-1}, & \text{pour } \varphi = (c_1)^{q-1}. \end{cases}$$

On en déduit le

THÉORÈME 7.

(i) Si Σ_α est inclus dans \tilde{U}_{m_0} ,

$$\begin{aligned} & \text{Rés}_{\tilde{\mathcal{F}}}((c_1)^{q-1}, D_m, \Sigma_\alpha) \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^{q-1}} \int_{R^\alpha} \frac{(\overline{B}_{\lambda_0})^{q-1}}{\prod_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq \lambda_0}} (\overline{B}_\lambda - y_\lambda \overline{B}_{\lambda_0})} dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_{\lambda_0}} \wedge \cdots \wedge dy_q, \end{aligned}$$

(ii) $\sum_\alpha \text{Rés}_{\tilde{\mathcal{F}}}((c_1)^{q-1}, D_m, \Sigma_\alpha) = (-1)^{q-1}$.

Remarques :

- 1) R^α est une notation abrégée pour le $R_{1,2,\dots,p}^\alpha$ du théorème 1.
- 2) Dans la formule d'intégration, on a négligé de primer les variables (x_i au lieu de x'_i , y_λ au lieu de y'_λ), aucune confusion n'étant à craindre puisqu'il s'agit de variables muettes.
- 3) A_i n'intervient pas dans la formule.

Exemples.

1) $W = \mathbf{C}^{p+q}$, $V = \mathbf{C}^p$, ($p \geq 0$). Prenons :

$$X = \sum_{i=1}^p L_i(y_1, \dots, y_q) \cdot H_i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^q a_\lambda(x) y_\lambda \frac{\partial}{\partial y_\lambda}$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \text{les } L_i \text{ sont des fonctions linéaires de } y_1, \dots, y_q, \\ \text{les } H_i \text{ des fonctions holomorphes arbitraires,} \\ \text{et } a_\lambda \text{ des fonctions holomorphes.} \end{array} \right.$

Supposons, pour fixer les idées, que l'on fasse le calcul dans l'ouvert \tilde{U}_{m_0} défini avec $\lambda_0 = q$, soit, en coordonnées (x'_i, y'_λ) ,

$$F : (x'_i, y'_\lambda, y'_q) \longrightarrow (x_i = x'_i, y_\lambda = y'_\lambda, y_q = y'_q) \quad (\lambda \neq q),$$

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= y'_q \cdot \sum_{i=1}^q L_i(y'_1, \dots, y'_{q-1}) \cdot H_i(x'_j, y'_q \cdot y'_\lambda, y'_q) \frac{\partial}{\partial x'_i} \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{q-1} (a_\lambda - a_q) y'_\lambda \frac{\partial}{\partial y'_\lambda} + y'_q a_q \frac{\partial}{\partial y'_q}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose $a_\lambda(m) \neq a_q(m) \forall \lambda \geq q-1$, le seul point singulier \tilde{m}_q de $\tilde{X}|_{D_{m_0}}$ est le point de coordonnées homogènes $(0, 0, \dots, 0, 1)$, c'est-à-dire de coordonnées affines $y'_\lambda = 0, \forall \lambda = 1, \dots, q-1$, dans $\mathbf{PC}(q-1)$ (hyperplan de l'infini).

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^{q-1}, D_m, \tilde{m}_q) &= \int_{\substack{|Y_\lambda|=\varepsilon \\ 1 \leq \lambda \leq q-1}} \frac{(a_q)^{q-1} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{q-1}}{\prod_{\lambda=1}^{q-1} [(a_\lambda - a_q)y_\lambda]} \\ &= \frac{(a_q)^{q-1}(m)}{\prod_{\lambda=1}^{q-1} (a_\lambda - a_q)(m)} \end{aligned}$$

en tout point $m \in \mathbf{C}^q$ où $a_\lambda(m) \neq a_q(m), \forall \lambda = 1, \dots, q-1$.

Si l'on fait le calcul analogue en remplaçant y_q par y_{λ_0} (λ_0 quelconque), on trouvera un point singulier \tilde{m}_λ pour tout $\lambda = 1, \dots, q$ si tous les $a_\lambda(m)$ sont distincts.

Notant \tilde{m}_λ le point de coordonnées homogènes $(0 \dots 0 \dots 1 \dots 0 \dots 0)$ dans $\mathbf{PC}(q-1)$, le résidu correspondant est :

$$\text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^{q-1}, D_m, \tilde{m}_q) = \frac{(a_\lambda)^{q-1}}{\prod_{\mu \neq \lambda} (a_\mu - a_\lambda)} .$$

On peut vérifier alors (par exemple à l'aide des formules d'interpolation polynomiale de Lagrange) que

$$\sum_{\lambda=1}^q \frac{(a_\lambda)^{q-1}}{\prod_{\mu, \mu \neq \lambda} (a_\mu - a_\lambda)} = (-1)^{q-1} .$$

2) $W = \mathbf{C}^{p+q}, V = \mathbf{C}^p, (p \geq 0)$.

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^p S_i(y_1, \dots, y_q) \cdot H_i(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^q a_\lambda(x_1, \dots, x_p)(y_\lambda)^d \frac{\partial}{\partial y_\lambda} \end{aligned}$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \text{les } S_i \text{ sont des polynômes homogènes de degré } d > 1, \\ \text{les } H_i \text{ des fonctions holomorphes arbitraires,} \\ \text{et } a_\lambda(x_1, \dots, x_p) \text{ des fonctions holomorphes.} \end{array} \right.$

Avec les mêmes notations que dans l'exemple précédent, on a :

$$\frac{1}{(y'_q)^{d-1}} \tilde{X} = y'_q \cdot \sum_{i=1}^q S_i(y'_1, \dots, y'_{q-1} 1) \cdot H_i(x'_j, y'_q \cdot y'_\lambda, y'_q) \frac{\partial}{\partial x'_i} + \sum_{\lambda=1}^{q-1} y'_\lambda (a_\lambda (y'_\lambda)^{d-1} - a_q) \frac{\partial}{\partial y'_\lambda} + y'_q a_q \frac{\partial}{\partial y'_q} .$$

En un point m où les $a_\lambda(m)$ sont tous $\neq 0$, notons $\xi_\lambda(m)$ l'une quelconque des racines $(d - 1)$ de $\frac{a_q(m)}{a_\lambda(m)}$, et posons

$$\varepsilon_\ell = e^{\frac{2i\ell\pi}{d-1}} \quad (\ell \in \mathbf{Z} \bmod d - 1) .$$

Dans l'ouvert considéré, les points singuliers \tilde{m}_α de

$$\sum_{\lambda=1}^{q-1} y'_\lambda (a_\lambda (y'_\lambda)^{d-1} - a_q) \frac{\partial}{\partial y'_\lambda}$$

sont en nombre d^2 : notons $(y_\lambda^\alpha)_{1 \leq \lambda \leq q-1}$ les coordonnées de \tilde{m}_α , fixé pour le moment : soient $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u, \dots, \lambda_r)$, $(0 \leq r \leq q - 1)$ les indices de celles de ces coordonnées qui sont nulles, et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v, \dots, \mu_{q-1-r})$ les indices restants :

$$\begin{cases} y_{\lambda_u}^\alpha = 0 & 1 \leq u \leq r , \\ y_{\mu_v}^\alpha = \varepsilon_{k_v} \cdot \xi_v & \text{pour un certain entier } k_v . \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^{q-1}, D_m, \tilde{m}_\alpha) &= \frac{1}{(2i\pi)^{q-1}} \int_{|y_\lambda - y_\lambda^\alpha| = \varepsilon} \frac{(a_q)^{q-1}}{\prod_{\lambda=1}^{q-1} y_\lambda (a_\lambda (y_\lambda)^{d-1} - a_q)} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{q-1} . \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_{|y_\lambda - y_\lambda^\alpha| = \varepsilon} \frac{dy_\lambda}{y_\lambda (a_\lambda (y_\lambda)^{d-1} - a_q)} = \begin{cases} -\frac{2i\pi}{a_q} & \text{pour } \lambda = \lambda_u \quad (u = 1, \dots, r) , \\ +\frac{2i\pi}{(d-1)a_q} & \text{pour } \lambda = \lambda_v \quad (v = 1, \dots, a - 1 - r) , \end{cases}$$

on en déduit :

$$\text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^{q-1}, D_m, \tilde{m}_\alpha) = \frac{(-1)^r}{(d-1)^{q-1-r}} ,$$

en tout point m tel que $\prod_{\lambda=1}^q a_\lambda(m) \neq 0$.

[En comptant aussi les nouveaux points \tilde{m}_α obtenus avec y_{λ_0} pour $\lambda_0 \neq q$, il est facile de vérifier que la somme des résidus est $(-1)^{q-1}$.]

Connexion canonique sur le fibré tautologique $L \rightarrow \mathbf{PC}(q - 1)$.

Il se peut que certaines composantes connexes Σ_α ne puissent être incluses dans le domaine d'un système de coordonnées locales. Le théorème 1 n'est donc plus applicable. Cependant, la définition directe du résidu (cf. théorème 4) :

$$\int_{\partial T_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha}((c_1)^{q-1}) + \int_{\partial T_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha \omega}((c_1)^{q-1})$$

peut suffire parfois à mener les calculs jusqu'au bout. On a besoin de disposer pour cela d'une connexion explicite ω_α sur $L|_{U_\alpha}$. Voici une façon de procéder : pour fixer les idées, supposons $\lambda_0 = q$, et notons $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ les coordonnées de $U_{\tilde{m}_0}$ dans \tilde{W} (au lieu de $(x'_1, \dots, x'_p, y'_1, \dots, y'_q)$, aucune confusion n'étant maintenant à craindre, une fois que \tilde{X} a été calculé à partir de X). Identifiant D_m à l'espace projectif $\mathbf{PC}(q - 1)$ de coordonnées homogènes (Y_1, \dots, Y_q) avec $y_\lambda = Y_\lambda/Y_q$ ($1 \leq \lambda \leq q - 1$) (les $x_i(m)$ étant fixés), $\pi(\frac{\partial}{\partial y_q})$ s'identifie alors à la section canonique σ_q du fibré tautologique $L|_{Y_q \neq 0}$ définie par $\sigma_q(y_1, \dots, y_{q-1}) = (y_1, \dots, y_{q-1}, 1)$.

[Rappelons que L s'identifie naturellement à un sous-fibré vectoriel du fibré trivial $\mathbf{C}^q \times \mathbf{PC}(q - 1) \rightarrow \mathbf{PC}(q - 1)$, et qu'une section σ de L est en particulier une section du fibré trivial et peut donc se définir par q fonctions (f_1, \dots, f_q) .]

On définit une connexion $\bar{\nabla}^0$ sur L en posant, pour toute section $\sigma = (f_1, \dots, f_q)$ de L et pour tout champ de vecteurs H sur $\mathbf{PC}(q - 1)$: $\bar{\nabla}_H^0 \sigma = \text{image de } (H \cdot f_1, H \cdot f_2, \dots, H \cdot f_q) \text{ par la projection orthogonale du fibré trivial sur } L, \text{ relativement à la métrique hermitienne canonique sur } \mathbf{C}^q$.

Dans l'ouvert $Y_q \neq 0$ de $\mathbf{PC}(q - 1)$, on trouve :

$$\bar{\nabla}^0 \sigma_q = \bar{\omega}_q^0 \cdot \sigma_q, \text{ avec } \bar{\omega}_q^0 = \frac{1}{\left(1 + \sum_{\lambda=1}^{q-1} |y_\lambda|^2\right)} \sum_{\lambda=1}^{q-1} \bar{y}_\lambda \cdot dy_\lambda.$$

(On définit $\bar{\omega}_\lambda^0$ de façon analogue sur chaque ouvert $Y_\lambda \neq 0$.)

On obtient, notant encore $\bar{\omega}_0$ la connexion $\bar{\nabla}^0$:

$$\Delta_{\bar{\omega}_0}((c_1)^{q-1})|_{U_q} = \frac{1}{(2i\pi)^{q-1}} \cdot \frac{d\bar{y}_1 \wedge dy_1 \wedge d\bar{y}_2 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{y}_{q-1} \wedge dy_{q-1}}{\left(1 + \sum_{\lambda=1}^{q-1} |y_\lambda|^2\right)^q}.$$

Pour continuer, on a alors le choix entre prendre pour ω_α la restriction $\bar{\omega}_0|_{U_\alpha}$ de ω_0 à un voisinage U_α de Σ_α dans $\mathbf{PC}(q-1)$ (mais attention : il faut savoir calculer $\int_{\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\bar{\omega}_0}((c_1)^{q-1})$), ou bien, lorsque Σ_α est lisse, identifier $L|_{U_\alpha}$ à l'image réciproque $(p_\alpha)^{-1}(L|_{\Sigma_\alpha})$ de $L|_{\Sigma_\alpha}$ par la rétraction $p_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Sigma_\alpha$, et prendre $\omega_\alpha = (p_\alpha)^*(\bar{\omega}_0|_{\Sigma_\alpha})$ (qui vérifie : $\int_{\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha}((c_1)^{q-1}) = 0$).

Exemple. — Dans \mathbf{C}^4 , prenons

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z} + d \frac{\partial}{\partial t} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{C}).$$

Dans le cas où les 4 nombres a, b, c, d sont distincts 2 à 2, nous avons déjà vu dans le 1er exemple ci-dessus (cas $p = 0, q = 4$) que \tilde{X} admet 4 points singuliers isolés dans le diviseur exceptionnel $D = \mathbf{PC}(3)$ de l'éclaté du point 0, avec, pour résidus respectifs de $(c_1)^3$: $\frac{d^3}{(a-d)(b-d)(c-d)}$ et les nombres qui s'en déduisent par permutation circulaire de a, b, c, d .

Supposons maintenant :

$$a = b \neq c, d \quad c \neq d.$$

Le lieu singulier de \tilde{X} dans $\mathbf{PC}(3)$ est maintenant constitué des 2 points isolés de coordonnées homogènes $m_0 = (0, 0, 0, 1)$ et $m_1 = (0, 0, 1, 0)$, ainsi que de la droite Δ d'équations $Z = T = 0$. En m_0 et m_1 , le calcul précédent est encore valable :

$$\text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^3, \mathbf{PC}(3), m_0) = \frac{d^3}{(a-d)^2(c-d)}$$

et

$$\text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^3, \mathbf{PC}(3), m_1) = \frac{c^3}{(a-c)^2(d-c)}.$$

La somme des 3 résidus devant être -1 , on peut se dispenser de calculer le 3ème résidu, qui doit être égal à

$$\text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^3, \mathbf{PC}(3), \Delta) = -1 - \left(\frac{d^3}{(a-d)^2(c-d)} + \frac{c^3}{(a-c)^2(d-c)} \right).$$

Supposons $a = b = c \neq d$. Le lieu singulier de \tilde{X} est constitué de l'origine $m_0 = (0, 0, 0, 1)$ dans $\mathbf{PC}(3)$, et de l'hyperplan Π d'équation $T = 0$.

$$\text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^3, \mathbf{PC}(3), m_0) = \frac{d^3}{(a-d)^3},$$

toujours en vertu du même calcul. On en déduit :

$$\text{Rés}_{\tilde{X}}((c_1)^3, \mathbf{PC}(3), \Pi) = -1 - \frac{d^3}{(a-d)^3}.$$

Supposons enfin $a = b \neq c = d$: c'est le cas vraiment nouveau.

En coordonnées (x', y', z', t') dans l'éclaté du point 0, telles que $F(x', y', z', t') = (t'x', t'y', t'z', t')$,

$$\tilde{X} = \left[(a-c) \left(x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} \right) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \right] + ct' \frac{\partial}{\partial t'}.$$

La droite Δ_0 d'équations $X = Y = 0$ dans $\mathbf{PC}(3)$ est donc partie du lieu singulier de \tilde{X} . On trouve de même la droite Δ_1 d'équation $Y = T = 0$.

Toutefois, le point à l'infini $\Delta_0 \cap (T = 0)$ nous a échappé avec les coordonnées (x', y', z') . Il faut donc aussi, pour le récupérer, utiliser les coordonnées (x'', y'', z'', t'') obtenues en permutant les rôles de z et t :

$$\tilde{X} = \left[(a-c) \left(x'' \frac{\partial}{\partial x''} + y'' \frac{\partial}{\partial y''} \right) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial t''} \right] + cz'' \frac{\partial}{\partial z''}$$

(on vérifie ainsi de plus que Δ_0 est toute une composante connexe de Σ).

En coordonnées homogènes, on peut séparer les 2 composantes connexes Δ_0 et Δ_1 de Σ par l'hypersurface réelle \mathcal{H} de $\mathbf{PC}(3)$, d'équation

$$|X|^2 + |Y|^2 = |Z|^2 + |T|^2$$

et \mathcal{T}_0 étant défini par $|X|^2 + |Y|^2 \leq |Z|^2 + |T|^2$

\mathcal{T}_1 étant défini par $|X|^2 + |Y|^2 \geq |Z|^2 + |T|^2$.

(On conviendra d'orienter \mathcal{H} de façon que $\partial\mathcal{T}_0 = \mathcal{H}$ et $\partial\mathcal{T}_1 = -\mathcal{H}$.)

1ère méthode.

Notons U' le domaine des coordonnées (x', y', z') dans $\mathbf{PC}(3)$ et U'' celui de (x'', y'', t'') .

Notons $p_0 : (X, Y, Z, T) \rightarrow (0, 0, Z, T)$, la rétraction de $(\mathbf{PC}(2) - \Delta_1)$ sur Δ_0 qui préserve les intersections avec U' et U'' , et s'écrit :

$$\begin{aligned} (x', y', z') &\rightarrow (0, 0, z') \text{ sur } U', \\ (x'', y'', z'') &\rightarrow (0, 0, t'') \text{ sur } U''. \end{aligned}$$

On a alors : $\omega_4^0|_{\Delta_0 \cap U'} = \frac{\bar{z}' dz'}{1 + |x'|^2}$, et par conséquent $\omega_0|_{U'} = p_0^*(\omega_4^0) = \frac{\bar{z}' dz'}{1 + |z'|^2}$ (forme de connexion relative à la section $\sigma_4 = \pi(\frac{\partial}{\partial t'})$ de L).

Puisque ω_0 n'a pas de terme en dx' , dy' , ni de terme en $d\bar{x}'$, $d\bar{y}'$, $d\bar{z}'$ et puisque

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial t'} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial t'} \right] = 0 \quad \text{dans } \widetilde{W} ,$$

c'est que ω_0 est spéciale pour les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x'}$ et $\frac{\partial}{\partial y'}$ (qui préservent le diviseur exceptionnel $\mathbf{PC}(3)$ dans \widetilde{W}), sur U' du moins. Mais, sur $U' \cap U''$,

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial x''} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{1}{z'} \frac{\partial}{\partial y''} .$$

La connexion ω_0 est donc aussi spéciale pour $\frac{\partial}{\partial x''}$ et $\frac{\partial}{\partial y''}$ sur U'' . Finalement, ω_0 est spéciale, sur $\mathbf{PC}(3) - \Delta_1$, pour les champs de directions \mathcal{X} et \mathcal{Y} définis respectivement par $\frac{\partial}{\partial x'}$ et $\frac{\partial}{\partial x''}$ d'une part, $\frac{\partial}{\partial y'}$ et $\frac{\partial}{\partial y''}$ d'autre part. [On notera $\vec{\mathcal{X}}$ et $\vec{\mathcal{Y}}$ n'importe quels champs, définis localement, de directions respectives \mathcal{X} , et \mathcal{Y} .] Soit U_ξ l'ouvert $X \neq 0$ dans $\mathbf{PC}(3) - (\Delta_0 \cup \Delta_1)$, et U_Y l'ouvert $Y \neq 0$. Dans U_X , \vec{X} et \vec{Y} sont linéairement indépendants : on peut donc trouver une connexion ω_X spéciale à la fois pour \vec{X} et \vec{Y} . De même peut-on trouver, dans U_Y , une connexion spéciale à la fois pour \vec{X} et \vec{X} . Soit

$$\mu = (\Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega}((c_1)^3), \Delta_{\omega_0, \omega_Y, \omega}((c_1)^3), -\Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega_Y, \omega}((c_1)^3))$$

dans le complexe de Mayer-Vietoris associé au recouvrement (U_X, U_Y) . De façon analogue au lemme 5.1, on a alors :

$$D\mu = (-\Delta_{\omega_0, \omega}((c_1)^3), -\Delta_{\omega_0, \omega}((c_1)^3), 0) + (0, 0, -\Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega_Y}((c_1)^3)) .$$

C'est dire que $\Delta_{\omega_0, \omega}((c_1)^3)$ est cohomologue, dans le complexe de Mayer-Vietoris ci-dessus, à

$$(0, 0, -\Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega_Y}((c_1)^3)) .$$

Définissons R_X (resp. R_Y) dans \mathcal{H} par la relation

$$|X| \leq |Y| \quad (\text{resp. } |Y| \leq |X|) ,$$

et orientons l'intersection $R_{X,Y} = R_X \cap R_Y$ de telle façon que $\partial R_X = R_{X,Y} = -\partial R_Y$. On a alors :

$$\int_{\mathcal{H}} \Delta_{\omega_0, \omega}((c_1)^3) = \int_{R_{X,Y}} \Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega_Y}((c_1)^3) .$$

Calculons l'expression de droite.

Pour éviter toute confusion, on notera ω'_0 , ω'_X , ω'_Y les formes de connexion de ω_0 , ω_X , ω_Y sur U' relatives à la trivialisaton $\sigma_4 = \pi\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)$ de L , et ω''_0 , ω''_X , ω''_Y sur U'' relatives à la trivialisaton $\sigma_3 = \pi\left(\frac{\partial}{\partial z''}\right)$:

$$\begin{aligned} \omega'_0 &= \rho' dz' \quad \text{où} \quad \rho' = \frac{\bar{z}'}{(\delta')^2} = \frac{\bar{z}'}{1 + (\bar{z}')^2} , \\ \omega''_0 &= \rho'' dt'' \quad \text{où} \quad \rho'' = \frac{\bar{t}''}{(\delta'')^2} = \frac{\bar{t}''}{1 + (\bar{t}'')^2} . \end{aligned}$$

Puisque ω_X est spéciale à la fois pour $\tilde{X} = (a-c)\left(x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) + ct' \frac{\partial}{\partial t'}$ et pour $\frac{\partial}{\partial y'}$ et, puisque $[X, \frac{\partial}{\partial t'}] = -c \frac{\partial}{\partial t'}$, et $[\frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial t'}] = 0$, on doit avoir :

$$\omega'_X = \frac{c}{(c-a)} \frac{dx'}{x'} + \varphi' dz'$$

et de même,

$$\omega'_Y = \frac{c}{(c-a)} \frac{dy'}{y'} + \psi' dz'$$

(où φ' , ψ' sont, comme ρ' , des fonctions C^∞ mais non holomorphes).

Soit $\tilde{\omega}' = (1 + (u+v))\omega'_0 + u\omega'_X + v\omega'_Y$ sur $(U' \cap U'') - \Delta^2$, où $(u, v) \in \Delta^2 = \{u, v | u, v \geq 0, 0 \leq u+v \leq 1\}$:

$$\tilde{\omega}' = \rho' dz' + u \left(\frac{c}{(c-a)} \frac{dx'}{x'} + (\varphi' - \rho') dz' \right) + v \left(\frac{c}{(c-a)} \frac{dy'}{y'} + (\psi' - \rho') dz' \right) .$$

Posons $\hat{\varphi}' = \varphi' - \rho'$, $\hat{\psi}' = \psi' - \rho'$. On a alors :

$$\tilde{\omega}' = \rho' dz' + uK + vL ,$$

$$d\tilde{\omega}' = du \wedge K + dv \wedge L + udK + vdL ,$$

$$(d\tilde{\omega}')^3 = -6 \left(\frac{c}{c-a} \right)^2 du \wedge dv \wedge (d\rho' + u d\hat{\varphi}' + v d\hat{\psi}') \wedge \frac{dx'}{x'} \wedge \frac{dy'}{y'} \wedge dz' .$$

Puisque $\int_{\Delta^2} u \, du \, dv = \int_{\Delta^2} v \, du \, dv = \frac{1}{6}$, tandis que $\int_{\Delta^2} du \, dv = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega_Y}((c_1)^3) = \frac{-1}{(2i\pi)^3} \left(\frac{c}{c-a} \right)^2 d\Lambda' \wedge \frac{dx'}{x'} \wedge \frac{dy'}{y'} \wedge dz' ,$$

où $\Lambda' = 3\rho' + \widehat{\varphi}' + \widehat{\psi}' = \rho' + \varphi' + \psi'$ sur $U' \cap U_X \cap U_Y$.

De même, avec des notations analogues, obtient-on sur $U'' \cap U_X \cap U_Y$:

$$\Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega_Y}((c_1)^3) = \frac{-1}{(2i\pi)^3} \left(\frac{c}{c-a}\right)^2 d\Lambda'' \wedge \frac{dx''}{x''} \wedge \frac{dy''}{y''} \wedge dt'' .$$

Notons R'_{XY} (resp. R''_{XY}) la sous-variété à bord de R_{XY} définie par $|Z| \leq |T|$ (resp. $|Z| \geq |T|$). Notons :

$$S^{ZT}_{XY} = \partial R'_{XY} = -\partial R''_{XY}$$

(sur S^{ZT}_{XY} , $|X| = |Y|$ et $|Z| = |T|$).

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_0, \omega_X, \omega_Y}((c_1)^3) &= \frac{-1}{(2i\pi)^3} \left(\frac{c}{c-a}\right)^2 \left[\int_{R'_{XY}} d(\Lambda' \wedge \frac{dx'}{x'} \wedge \frac{dy'}{y'} \wedge dz') \right. \\ &\quad \left. + \int_{R''_{XY}} d(\Lambda'' \wedge \frac{dx''}{x''} \wedge \frac{dy''}{y''} \wedge dt'') \right] \\ &= \frac{-1}{(2i\pi)^3} \left(\frac{c}{c-a}\right)^2 \int_{S^{ZT}_{XY}} \left[(\rho'' + \varphi'' + \psi'') \frac{dx''}{x''} \wedge \frac{dy''}{y''} \wedge dt'' \right. \\ &\quad \left. - (\rho' + \varphi' + \psi') \frac{dx'}{x'} \wedge \frac{dy'}{y'} \wedge dz' \right] . \end{aligned}$$

Des égalités $x'' = \frac{x'}{z'}$, $y'' = \frac{y'}{z'}$, $t'' = \frac{1}{z'}$, on déduit :

$$\frac{dx''}{x''} \wedge \frac{dy''}{y''} \wedge \frac{dt''}{t''} = -\frac{dx'}{x'} \wedge \frac{dy'}{y'} \wedge \frac{dz'}{z'} .$$

L'expression à intégrer s'écrit donc :

$$- [z'(\rho' + \varphi' + \psi') + t''(\rho'' + \varphi'' + \psi'')] \frac{dx'}{x'} \wedge \frac{dy'}{y'} \wedge \frac{dz'}{z'} .$$

Sur S^{ZT}_{XY} , $|z'| = |t''| = 1$. D'autre part, puisque

$$\sigma_3 = \pi \left(\frac{\partial}{\partial z''} \right) = t'' \pi \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right) = t'' \sigma_4 ,$$

la dérivée covariante ∇ de ω_X vérifie :

$$\nabla \sigma_3 = \nabla(t'' \sigma_4) = dt'' \sigma_4 + t'' \nabla \sigma_4 .$$

Mais $\nabla \sigma_3 = \omega''_X \sigma_3$, tandis que $\nabla \sigma_4 = \omega''_X \sigma_4$. On en déduit : $\omega''_X = \omega'_X + \frac{dt''}{d''}$

et, de même, $\omega''_Y = \omega'_Y + \frac{dt''}{t''}$, soit :

$$\frac{c}{c-a} \frac{dx''}{x''} + \psi'' dt'' = \frac{c}{c-a} \frac{dx'}{x'} + \varphi' dz' \frac{dt''}{t''} ,$$

d'où : $z'\varphi' + t''\varphi'' = \frac{a}{a-c}$ et, de même, $z'\psi' + t''\psi'' = \frac{a}{a-c}$.

Finalement, le résidu de $(c_1)^3$ sur Δ_0 est égal à

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(2i\pi)^3} \left(\frac{c}{c-a}\right)^2 \int_{S_{\tilde{X}\tilde{Y}}} -\left(1 + \frac{2a}{a-c}\right) \frac{dx'}{x'} \wedge \frac{dy'}{y'} \wedge \frac{dz'}{z'} &= -\left(1 + \frac{2a}{a-c}\right) \left(\frac{c}{c-a}\right)^2 \\ &= \frac{c^2(c-3a)}{(a-c)^3}. \end{aligned}$$

Le calcul analogue sur Δ_1 donnerait $\frac{a^2(a-3c)}{(c-a)^3}$. Il n'est pas difficile de vérifier que la somme est -1 .

2ème méthode.

Nous allons reprendre ce calcul, de façon beaucoup plus simple, comme application du corollaire 4.2.

Observons d'abord que Δ_0 est une sous-variété holomorphe de $\mathbf{PC}(3)$ et que $\mathcal{F}|_{\mathbf{PC}(3)-\Sigma}$ est défini par le champ de vecteurs holomorphe \tilde{X} . Puisqu'une base de $\nu_{\mathbf{PC}(3)}(\Delta_0)|_{U'}$ est donnée par $(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'})$, et puisque

$$\tilde{X}|_{U'} = \left[(a-c) \left(x' \frac{\partial}{\partial x'} + y' \frac{\partial}{\partial y'} \right) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \right],$$

l'action infinitésimale θ'_0 de $\tilde{X}|_{U'}$ sur $\nu_{\mathbf{PC}(3)}(\Delta_0)|_{U'}$, est donnée par la matrice $-\begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & a-c \end{pmatrix}$, et de même dans U'' . De façon analogue, puisqu'au voisinage de $\mathbf{PC}(3) \cap U'$,

$$\tilde{X} = (a-c) \left(x' \frac{\partial}{\partial x'} \right) + \left(y' \frac{\partial}{\partial y'} \right) + ct' \frac{\partial}{\partial t'},$$

Λ_0 est l'application $\frac{\partial}{\partial t'} \rightarrow -c \frac{\partial}{\partial t'}$, et de même sur U'' . Avec les notations de [B2], on en déduit :

$$\text{Rés}((c_1)^3, \mathbf{PC}(3), \Delta_0) = \left\langle \frac{(-c + c_1(L))^3}{\det \begin{pmatrix} c-a+u & 0 \\ 0 & c-a+v \end{pmatrix}}, \Delta_0 \right\rangle,$$

où $u + v = c_1(\nu_{\mathbf{PC}(3)}(\Delta_0))$, et $uv = c_2(\nu_{\mathbf{PC}(3)}(\Delta_0))$. Notons en abrégé ν_0 le fibré $\nu_{\mathbf{PC}(3)}(\Delta_0)$ dans la suite de ce calcul. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} c-a+u & 0 \\ 0 & c-a+u \end{pmatrix} &= (c-a)^2 + (c-a)c_1(\nu_0) + c_2(\nu_0) \\ &= (c-a)^2 \left(1 + \frac{c_1(\nu_0)}{c-a} + \frac{c_2(\nu_0)}{(c-a)^2} \right), \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{\det \begin{pmatrix} c-a+u & 0 \\ 0 & c-a+u \end{pmatrix}} = \frac{1}{(c-a)^2} \left(1 - \frac{c_1(\nu_0)}{c-a} - \frac{c_2(\nu_0)}{(c-a)^2} + \dots \right)$$

$$\left\langle \frac{(-c + c_1(L))^3}{\det \begin{pmatrix} c-a+u & 0 \\ 0 & c-a+v \end{pmatrix}}, \Delta_0 \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(c-a)^2} \langle (-c^3 + 3c^2 \cdot c_1(L)) \left(1 - \frac{c_1(\nu_0)}{c-a} \right), \Delta_0 \rangle,$$

$$= \frac{c^2}{(c-a)^3} \langle c \cdot c_1(\nu_0) + 3(c-a) \cdot c_1(L), \Delta_0 \rangle.$$

Or $\langle c_1(L), \Delta_0 \rangle = -1$ d'une part. D'autre part,

$$\nu_0 + \tau(\Delta_0) = \tau(\mathbf{PC}(3))|_{\Delta_0}$$

a même classe stable que $4\widehat{L}|_{\Delta_0}$. On en déduit :

$$\langle c_1(\nu_0) + c_1(\tau_0), \Delta_0 \rangle = -4\langle c_1(L), \Delta_0 \rangle$$

$$= +4.$$

Comme $\langle c_1(\tau_0), \Delta_0 \rangle$ est l'invariant d'Euler Poincaré de la sphère de Riemann, c'est-à-dire +2, on en déduit $\langle c_1(\nu_0), \Delta_0 \rangle = 2$, et

$$\text{Rés}((c_1)^3, \mathbf{PC}(3), \Delta_0) = \frac{c^2}{(a-c)^3} (-2c + 3(c-a))$$

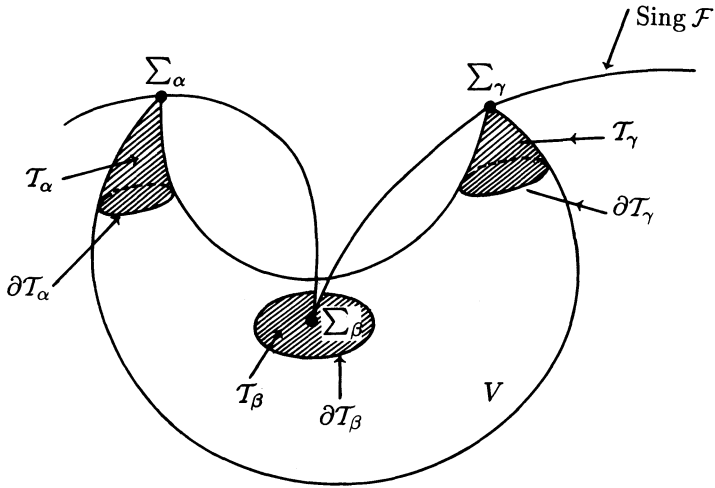
$$= \frac{c^2(c-3a)}{(a-c)^3}.$$

On retrouve donc le même résultat.

Remarque. — La première méthode est plus lourde, mais n'utilise pas le fait que l'action infinitésimale de \tilde{X} sur ν_0 est non dégénérée, contrairement à la seconde.

8. Résidus des sous-ensembles analytiques invariants par un feuilletage.

Dans le contexte holomorphe d'un feuilletage \mathcal{F} avec singularités sur W_{p+q} , on suppose que V_p est maintenant un sous-ensemble analytique de W_{p+q} , plus nécessairement lisse, invariant par \mathcal{F} .



Soit $\varphi \in (\mathbf{Z}[c_1, \dots, c_{p+q}])^{2p}$ un polynôme à coefficients entiers en c_1, \dots, c_{p+q} , correspondant à une classe caractéristique de dimension $2p$ ($= \dim_{\mathbf{R}} V$).

Soit U un voisinage ouvert régulier de V dans W (c'est-à-dire admettant une rétraction par déformations sur V) et τ_U le fibré holomorphe tangent à U .

Soit $\Sigma = \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap V$, et $(\Sigma_\alpha)_\alpha$ les composantes connexes de Σ . Notons \tilde{U}_α un voisinage ouvert régulier de Σ_α dans U , et $\tilde{U}_0 = U - \text{Sing}(\mathcal{F})$. On supposera $\tau_{\tilde{U}_0}$ trivial : $\mathcal{F}|_{\tilde{U}_0}$ peut être défini par un champ de vecteurs holomorphe X_0 sans singularité. On suppose en outre $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta = \emptyset$, pour $\alpha \neq \beta$. Soit ω une connexion sur $\tau_{\tilde{U}_0}$, définie par une loi de dérivation ∇ vérifiant :

$$\nabla_{X_0} Y = [X_0, Y] \text{ pour toute section } Y \text{ de } \tau_{\tilde{U}_0} ,$$

$$\nabla_Z Y = 0 \quad \text{pour toute section } Z \in T^{0,1}(\tilde{U}_0) \text{ (antiholomorphe),}$$

$$\text{et toute section } Y \text{ de } \tau_{\tilde{U}_0} .$$

(On dira que ω est spéciale relativement à \mathcal{F} .)

Donnons-nous aussi une connexion arbitraire ω_α sur $\tau_{\tilde{U}_\alpha}$.

Notons $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ une variété à bord, incluse dans \tilde{U}_α , de $\dim_{\mathbf{R}}(p+q)$, telle que Σ_α soit inclus dans l'intérieur de $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ et dont le bord $\partial\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ est transverse à $V - \Sigma$. Posons alors :

$$\mathcal{T}_\alpha = \tilde{\mathcal{T}}_\alpha \cap V , \quad \partial\mathcal{T}_\alpha = \partial\tilde{\mathcal{T}}_\alpha \cap (V - \Sigma) .$$

THÉORÈME 8. — Posons :

$$I_\alpha(\mathcal{F}, V_\varphi) = \int_{\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha}(\varphi) + \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha, \omega}(\varphi)$$

- (i) $I_\alpha(\mathcal{F}, V_\varphi)$ ne dépend pas des choix de $\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$, ω , ω_α .
- (ii) Supposons V compacte : $\sum_\alpha I_\alpha(\mathcal{F}, V_\varphi)$ est un entier.
- (iii) Cet entier ne dépend que de V et φ mais pas de \mathcal{F} .
- (iv) Si $p = q = 1 = \dim_{\mathbb{C}}(\text{feuilles de } \mathcal{F})$, avec $\varphi = c_1$, $I_\alpha(\mathcal{F}, V, c_1)$ coïncide avec l'indice défini dans [LN2] par A. Lins Neto.

Démonstration. — Puisque V est un sous-ensemble analytique complexe de W , sa partie singulière est de codimension réelle ≥ 2 , et V admet par conséquent une classe fondamentale. On en déduit immédiatement que $\langle \varphi(\tau_U), V \rangle$ est un entier (qui ne dépend évidemment pas de \mathcal{F}). D'après les théories de Chern Weil et de l'intégration sur le complexe de Mayer-Vietoris associées au recouvrement $(\tilde{U}_0, \tilde{U}_1 = \bigcup_\alpha (\tilde{U}_\alpha))$ (cf. §4),

$$\langle \varphi(\tau_U), V \rangle = \int_{V - \bigcup_\alpha \tilde{\mathcal{T}}_\alpha} \Delta_\omega(\varphi) + \sum_\alpha I_\alpha(\mathcal{F}, V_\varphi).$$

Les parties (i), (ii) et (iii) du théorème résulteront donc immédiatement du

LEMME 8.1.

$\Delta_\omega(\varphi)|_{V-\Sigma} = 0$ pour toute connexion ω spéciale relativement à \mathcal{F}
 $\Delta_{\omega, \omega'}(\varphi)|_{V-\Sigma} = 0$ si ω et ω' sont deux connexions spéciales.

Posons en effet :

$$\tau(U)|_{V-\Sigma} = \tau_{\mathcal{F}}|_{V-\Sigma} \oplus F$$

(F est un fibré complexe C^∞ , la décomposition en somme directe est seulement C^∞).

On a alors :

$$F = G \oplus \nu_W(V-\Sigma) \quad (\text{décomposition } C^\infty).$$

Comme $\tau(U)|_{V-\Sigma}$ est "feuilleté" (au sens de [KT]) pour la connexion partielle obtenue en restreignant ω aux feuilles de $\mathcal{F}|_{V-\Sigma}$, et comme

$$\dim \varphi = 2p \geq 2 \dim_{\mathbb{C}} G = 2s,$$

le lemme en résulte (les parties (ii) et (iii) du théorème n'utilisant que la première partie du lemme, et la partie (i) la seconde).

Supposons maintenant $p = q = 1$, $\varphi = c_1$. Soit m_α une singularité isolée de $\mathcal{F}|_V$. On suppose V définie au voisinage de m_α par l'équation $f(x, y) = 0$, et \mathcal{F} par l'équation $\xi = 0$, ξ désignant une 1-forme sur le voisinage \tilde{U}_α de m_α : d'après [LN2], il existe, au voisinage de m_α , des germes de fonctions analytiques h et k , ainsi qu'un germe de 1-forme analytique η telles que :

- (i) k et f sont premiers entre eux dans l'anneau local des germes de fonctions analytiques au voisinage de m_α ,
- (ii) $df \wedge \eta$ non identiquement nul, si η n'est pas identiquement nul,
- (iii) $k\xi = h df + f\eta$.

Choisissons ω_α triviale au voisinage de m_α . La partie (iv) du théorème va résulter du

LEMME 8.2.

$$\int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha, \omega}(c_1) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \frac{1}{h} \eta.$$

Posons $\eta = a dx + b dy$. Sur $V \cap \tilde{U}_\alpha$, $f'_x dx + f'_y dy \equiv 0$. D'autre part, au voisinage de m_α , \mathcal{F} est défini par le champ de vecteurs

$$X_0 = (h f'_y + f b) \frac{\partial}{\partial x} - (h f'_x + f a) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Notant encore ω et ω_α par abus de notation les formes de connexion (à valeurs dans les matrices 2×2) relatives à la trivialisations $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de $\tau_{\tilde{U}_\alpha}$, $\omega_\alpha = 0$, et $\Delta_{\omega_\alpha, \omega}(c_1) = \frac{1}{2i\pi} \text{Tr } \omega$.

Soit $\bar{X} \in T^{01}(V - \Sigma) : \omega(\bar{X}) = 0$, et $\frac{1}{2i\pi} \text{Tr } \omega_{\bar{X}} = -\frac{1}{2i\pi} \frac{1}{h} \eta(\bar{X}) = 0$. D'autre part, par définition d'une connexion spéciale,

$$\omega(X_0) = \frac{D((h f'_y + f b), -(h f'_x + f a))}{D(x, y)}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \text{Tr}(\omega(X_0)) &= (h f'_y + f b)'_x - (h f'_x + f a)'_y \\ &= h'_x f'_y - h'_y f'_x + (f'_x b - f'_y a) + f(b'_x - a'_y) \\ &= (h'_x f'_y - h'_y f'_x) + (f'_x b - f'_y a) \text{ sur } V - \Sigma \text{ (car, alors } f = 0). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \eta(X_0) &= \frac{a}{h} (h f'_y + f b) - \frac{b}{h} (h f'_x + f a), \\ &= a f'_y - b f'_x \text{ sur } V - \Sigma. \end{aligned}$$

On en déduit, sur $V - \Sigma$:

$$\Delta_{\omega_\alpha, \omega}(c_1) + \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{h} \eta = \frac{dh}{h} .$$

Mais $\partial\mathcal{T}_\alpha$ est inclus dans une sphère S^3 , simplement connexe, et $\frac{dh}{h}$, définie sur toute la sphère, est une forme exacte, d'où :

$$\int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \frac{dh}{h} = 0 ,$$

et

$$\int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \Delta_{\omega_\alpha, \omega}(c_1) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} \frac{1}{h} \eta .$$

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

- [AE] C.B. ALLENDOERFER et J. EELLS JR., On the cohomology of smooth manifolds, *Comment. Math. Helvet.*, 32 (1957), 165-176.
- [B1] R. ROTT, Lectures on characteristic classes and foliations, Springer Lecture Notes, 279 (1972).
- [B2] R. BOTT, A residue formula for holomorphic vector field, *J. of Diff. Geom.*, vol. 1, fasc. 4 (1967), 311-330.
- [BB1] P. BAUM et R. BOTT, On the zeroes of meromorphic vector fields, *Essays on Topology and Related Topics*, Mémoires dédiés à G. de Rham, Springer (1970), 29-47.
- [BB2] P. BAUM et R. BOTT, Singularities of holomorphic foliations, *Jal. of Diff. Geom.*, vol. 7 (1972), 279-342.
- [BT] R. BOTT et W. TU, *Differential forms in Algebraic Topology*, GTM 82, Springer (1982).
- [C] B. CENKL, Zeroes of vectorfields and characteristic numbers, *J. of Diff. Geom.*, vol. 8, fasc. 1 (1973), 25-46.
- [CS] C. CAMACHO et P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vectorfields, *Annals of Maths*, 115 (1982), 579-595.
- [D] P. DOLBEAULT et J. POLY, Differential forms with subanalytic singularities; integral cohomology; residues, *Proceedings of symposia in Pure Mathematics*, vol. 30 (1977), 255-261.
- [GB] GMIRA BOUCHRA, Une généralisation d'un théorème de C. Camacho et P. Sad relatif aux feuilletages holomorphes singuliers, Thèse de 3ème cycle, Lille, 1984.
- [H] J. HEITSCH, Independent variation of secondary characteristic classes, *Annals of Maths*, 108 (1978), 421-460.
- [KT] F. KAMBER et P. TONDEUR, *Characteristic classes for foliated bundles*, Springer Lecture Notes, 493 (1975).
- [L1] D. LEHMANN, Classes caractéristiques résiduelles, *Differential Geometry and its applications*, Proc. Conf. Aug. 27-Sep. 2 1989, Brno (Tchecoslovaquie), World Scientific edit. (1989).

- [L2] D. LEHMANN, Variétés stratifiées C^∞ , intégration de Čech-de Rham et théorie de Chern-Weil, Geometry and Topology of submanifolds II, Proc. Conf. 30 may-3 june 1988, Avignon (Fr), World Scientific edit. (1990).
- [L3] D. LEHMANN, Intégration sur les variétés stratifiées, Théorème de Gauss-Bonnet sur les variétés stratifiées, C.R. Acad. Sc. Paris, 307, ser. I (1988), 603-606, 671-673.
- [LN1] A. LINS NETO, Complex codimension one foliations leaving a compact submanifold invariant, Dynamical systems and bifurcation theory (Rio de Janeiro 1985), 295-317, Pitman Res. Notes Math. Ser. 160, Longman Sci. Tech. Harlow (1987).
- [LN2] A. LINS NETO, Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two, Springer Lecture Notes 1345 (1986), Conference on holomorphic dynamics, Mexico, 192-232.
- [PW] P.A. SCHWEITZER et A.P. WHITMAN, Pontryagin polynomial residues of isolated foliation singularities, Differential Topology, Springer Lecture Notes 652 (1978), 95-103.

Manuscrit reçu le 12 novembre 1990.

Daniel LEHMANN,
Université des Sciences & Techniques de Lille I
UFR de Mathématiques
URA CNRS 751
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).