ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHALIS ANOUSSIS

Sur les caractères des groupes de Lie résolubles

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 1 (1991), p. 27-48

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_1_27_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 1 (1991), 27-48

SUR LES CARACTÈRES DES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

par Michalis ANOUSSIS

Introduction.

Soit G un groupe de Lie résoluble connexe, simplement connexe, unimodulaire. On suppose qu'il existe une forme linéaire ℓ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G telle que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell)$ soit réductive dans $\mathfrak{g}$. Le groupe $G(\ell)$ est alors abélien et connexe. D'après [3], Ch. VII, 4.1, on peut associer à ℓ une classe d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe G qu'on notera $\pi(\ell, G)$. Nous allons démontrer une formule pour le caractère de $\pi(\ell, G)$.

On construit en 3 une application $\varphi \to F_{\ell,\varphi}$ de $D(G)$ dans $C^\infty(G(\ell)')$, où $G(\ell)'$ est une partie ouverte et dense de $G(\ell)$. Cette application possède les propriétés suivantes :

i) Si g_1 est dans G et si φ_1 est la fonction sur G définie par : $\varphi_1(g) = \varphi(g_1 g g_1^{-1})$, on a $F_{\ell,\varphi} = F_{\ell,\varphi_1}$.

ii) Pour tout φ dans $D(G)$ il existe une partie compacte C_φ de $G(\ell)$ telle que $F_{\ell,\varphi}$ soit nulle en dehors de $C_\varphi Z(G)$.

On dira que $F_{\ell,\varphi}$ est l'intégrale invariante de φ relativement à ℓ. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes de Lie semi-simples, il existe en général des fonctions φ dans $D(G)$ telles que la fonction $F_{\ell,\varphi}$ ne soit pas sommable pour la mesure de Haar sur $G(\ell)$.

Mots-clés : Caractère – Groupe de Lie – Résoluble – Représentation de carré intégrable.
Classification A.M.S. : 22E30 – 43A65.

Soit dg une mesure de Haar sur le groupe G. On note dx la mesure de Haar sur le groupe $G(\ell)$ telle que la mesure quotient dg/dx corresponde à la mesure $d\beta_{O_\ell}$ sur l'orbite O_ℓ.

On note dz une mesure de Haar sur le groupe $Z(G)$ et $d\dot{x}$ la mesure quotient dx/dz. On note χ_ℓ le caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $X \to i\ell(X)$. On a :

THÉORÈME. — *Soit π une représentation du groupe G dont la classe d'équivalence est $\pi(\ell, G)$. Pour tout φ dans $D(G)$ l'opérateur $\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi(g)dg$ est à trace et on a :*

$$\operatorname{Tr} \pi(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(xz)\chi_\ell(xz)\, dz\, d\dot{x}$$

les intégrales successives étant convergentes.

Un cas particulier de ce théorème est obtenu par M. Duflo dans [3], Ch. IX, Prop. 2.4.1.

Le théorème 3.1.1 de [3], Ch. IX, fournit une formule pour la trace de l'opérateur $\pi(\varphi)$ pour toute fonction φ dans $D(U)$, où U est un voisinage de l'élément neutre du groupe G. La formule du théorème ci-dessus est valable pour toute fonction φ dans $D(G)$. En particulier, elle permet de déterminer le support de la distribution $\varphi \to \operatorname{Tr} \pi(\varphi)$ sur G.

Soit G un groupe résoluble simplement connexe unimodulaire.

D'après [1], [5], toute représentation de G de carré intégrable modulo $Z(G)$ est associée à une forme linéaire vérifiant les hypothèses de l'introduction. Le théorème s'applique donc en particulier à de telles représentations.

Ce travail comprend 5 parties :

1. Principales notations.
2. La structure du groupe G.
3. L'intégrale invariante sur le groupe G.
4. La proposition principale.
5. La formule du caractère.

1. Principales notations.

1.1. Si G est un groupe topologique on note G_0 la composante neutre de G.

1.2. Si G (resp. $\mathfrak{g}$) est un groupe de Lie (resp. une algèbre de Lie) on note $Z(G)$ (resp. $z(\mathfrak{g})$) le centre de G (resp. de $\mathfrak{g}$).

1.3. Si V est un espace vectoriel de dimension finie on notera V^* son dual.

1.4. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. On notera V^C son complexifié et $x \to \overline{x}$ l'involution de V^C définie par la forme réelle V. Si λ est dans $(V^C)^*$ on notera $\overline{\lambda}$ la forme linéaire sur V^C définie par $\overline{\lambda}(x) = \overline{\lambda(\overline{x})}$. Si $\lambda = \overline{\lambda}$ (resp. $\lambda = -\overline{\lambda}$) on dira que λ est réel (resp. imaginaire pur). Si λ n'est ni réel ni imaginaire pur on dira que λ est complexe. Si B est une forme bilinéaire sur V on notera par la même lettre l'extension complexe de B à V^C.

1.5. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{j}$ un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'idéal $\mathfrak{j}$ est un G-module pour la représentation adjointe et le dual $\mathfrak{j}^*$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{j}$ est un G-module pour la représentation contragrédiente. Si v est dans $\mathfrak{j}^*$ on notera $G(v)$ (resp. $\mathfrak{g}(v)$) le stabilisateur (resp. l'annulateur) de v dans G (resp. dans $\mathfrak{g}$).

Si ℓ est dans $\mathfrak{g}^*$ on notera B_ℓ la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ définie par $B_\ell(X, Y) = \ell([X, Y])$. On notera O_ℓ l'orbite de ℓ sous l'action de G. L'orbite O_ℓ porte une mesure G-invariante. On notera $d\beta_{O_\ell}$ cette mesure normalisée comme en [3], Ch. II, 2.6.

1.6. Si X est une variété on notera $C_C(X)$ (resp. $C^\infty(X)$) l'espace des fonctions continues et à support compact (resp. indéfiniment différentiables) définies sur X et à valeurs dans C. On notera $D(X)$ l'espace $C_C(X) \cap C^\infty(X)$.

1.7. Si G est un groupe topologique on note Δ_G la fonction module de G.

1.8. Soient K un groupe de Lie, E un sous-groupe fermé de K et A un groupe d'automorphismes du groupe K laissant invariant E. Posons $G = A \ltimes K$, $H = A \ltimes E$. Soit τ une représentation unitaire du groupe H. Notons σ la restriction de τ à E, π la représentation $\mathrm{ind}(\tau, H \uparrow G)$ et ρ la représentation $\mathrm{ind}(\sigma, E \uparrow K)$. D'après [9], Th. 7.1, la restriction de π à K est une représentation équivalente à ρ. On peut donc réaliser

π dans l'espace $H(\rho)$ de la représentation ρ. Soit dk une mesure de Haar sur le groupe K. Si φ est dans $C_C(G)$ et si a est dans A, l'opérateur $\pi(a)\int_K \varphi(ak)\pi(k)\,dk$ est représenté par un noyau $R(x,y)$ sur l'espace K/E et on a :

$$R(x,y) = \int_E \Delta_K(y)^{-1}\Delta_H(a\varepsilon)^{-1/2}\Delta_G(a\varepsilon)^{1/2}\varphi(xa\varepsilon y^{-1})\tau(a\varepsilon)\,d\varepsilon$$

où $d\varepsilon$ est une mesure de Haar sur le groupe E.

1.9. D'après [8], XII, Th. 2.2, tout sous-groupe analytique d'un groupe de Lie résoluble, connexe, simplement connexe est fermé et simplement connexe. On utilisera souvent ce résultat sans en faire une mention spéciale.

2. La structure du groupe G.

Soit G un groupe de Lie résoluble, connexe, simplement connexe, unimodulaire d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On suppose qu'il existe une forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$ telle que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\ell)$ soit réductive dans $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathfrak{g}(\ell)$ est abélienne. Posons pour λ dans $(\mathfrak{g}(\ell)^C)^*$, $\lambda \neq 0$, $(\mathfrak{g}^C)_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}^C,\ [A,X] = \lambda(A)X$ pour tout A dans $\mathfrak{g}(\ell)^C\}$. On note $P(\mathfrak{g}(\ell))$ l'ensemble des λ dans $(\mathfrak{g}(\ell)^C)^*$ qui sont différents de 0 et pour lesquels $(\mathfrak{g}^C)_\lambda$ est non trivial. Les éléments de $P(\mathfrak{g}(\ell))$ seront appelés les poids de $\mathfrak{g}(\ell)$. Si λ est dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$, $\overline{\lambda}$ est dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$ et $(\mathfrak{g}^C)_{\overline{\lambda}} = \overline{(\mathfrak{g}^C)_\lambda}$. Il existe donc un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tel que l'on ait : $\mathfrak{m}^C = \sum_{\lambda \in p(\mathfrak{g}(\ell))} \oplus (\mathfrak{g}^C)_\lambda$. On note $\mathfrak{h}$ le centralisateur de $\mathfrak{g}(\ell)$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{m}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. On notera H (resp. P) le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{p}$).

PROPOSITION 1.

a) *On a* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

b) *La forme linéaire ℓ est nulle sur $\mathfrak{m}$ et la restriction de la forme bilinéaire B_ℓ à $\mathfrak{m}$ est non dégénérée.*

c) *Si λ est dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$, $-\lambda$ est dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$ et la restriction de B_ℓ à $(\mathfrak{g}^C)_\lambda \oplus (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}$ est une forme bilinéaire non dégénérée.*

d) *Le normalisateur de $\mathfrak{g}(\ell)$ dans G est égal à H.*

Démonstration.

a) est clair.

b) Comme $[\mathfrak{g}(\ell), \mathfrak{g}] = \mathfrak{m}$, la forme linéaire ℓ est nulle sur $\mathfrak{m}$. Soit X dans le noyau de la restriction de B_ℓ à $\mathfrak{m}$. Comme ℓ est nulle sur $\mathfrak{m}$ et comme $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$, X est dans $\mathfrak{g}(\ell)$. On en déduit que $X = 0$.

c) Soit X dans $(\mathfrak{g}^C)_\lambda$. Si $-\lambda \notin P(\mathfrak{g}(\ell))$, X est dans le noyau de B_ℓ et donc $X = 0$.

Soit μ dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$, $\mu \neq \pm\lambda$. Les espaces vectoriels $(\mathfrak{g}^C)_\lambda + (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}$ et $(\mathfrak{g}^C)_\mu + (\mathfrak{g}^C)_{-\mu}$ sont orthogonaux pour la restriction de B_ℓ à $\mathfrak{m}^C$. La restriction de B_ℓ à $\mathfrak{m}^C$ étant non-dégénérée, la restriction de B_ℓ à $(\mathfrak{g}^C)_\lambda + (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}$ est non dégénérée.

d) Soit $N_G(\mathfrak{g}(\ell))$ le normalisateur de $\mathfrak{g}(\ell)$ dans G. Comme l'algèbre de Lie du groupe $N_G(\mathfrak{g}(\ell))$ est égale à $\mathfrak{h}$, il suffit de montrer que $N_G(\mathfrak{g}(\ell))$ est connexe. Le groupe $N_G(\mathfrak{g}(\ell))$ est égal à $HN_P(\mathfrak{g}(\ell))$ où $N_P(\mathfrak{g}(\ell))$ est le normalisateur de $\mathfrak{g}(\ell)$ dans P. Le groupe $N_P(\mathfrak{g}(\ell))$ étant connexe, $N_G(\mathfrak{g}(\ell))$ est connexe.

On note $z(\mathfrak{g})^\perp$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ qui sont nulles sur $z(\mathfrak{g})$. La proposition suivante est prouvée dans [1], Th. 2.9.

PROPOSITION 2. — *On suppose que $\mathfrak{g}(\ell) = z(\mathfrak{g})$. Alors l'orbite $G \cdot \ell$ est égale à $\ell + z(\mathfrak{g})^\perp$.*

Soient $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. On note A (resp. K) le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{k}$). On dira que l'hypothèse $H(G, A, K, \ell)$ est vérifiée si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Le groupe G est le produit semi-direct de A par K et l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ n'est pas triviale.

2) L'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est contenue dans $\mathfrak{g}(\ell)$.

3) On a : $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k} \subseteq z(\mathfrak{k})$.

On suppose qu'il existe des sous-groupes A et K de G tels que l'hypothèse $H(G, A, K, \ell)$ soit vérifiée. Il est clair que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{k}$. Posons $\mathfrak{u} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ et notons U le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. On a $\mathfrak{k} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{m}$. Notons $\ell_\mathfrak{k}$ (resp. $\ell_\mathfrak{u}$) la restriction de ℓ à $\mathfrak{k}$ (resp. à $\mathfrak{u}$) et $z(\mathfrak{k})^\perp$ (resp. $z(\mathfrak{u})^\perp$) l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathfrak{k}$ (resp. sur $\mathfrak{u}$) qui sont nulles sur $z(\mathfrak{k})$ (resp. sur $z(\mathfrak{u})$).

PROPOSITION 3.

a) *Les algèbres de Lie* $\mathfrak{u}(\ell_{\mathfrak{u}})$, $\mathfrak{k}(\ell_{\mathfrak{k}})$, $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k}$, $z(\mathfrak{k})$, $z(\mathfrak{u})$ *sont égales. De plus,* $z(\mathfrak{k})$ *est contenu dans* $z(\mathfrak{g})$.

b) *L'orbite* $K \cdot \ell_{\mathfrak{k}}$ *est égale à* $\ell_{\mathfrak{k}} + z(\mathfrak{k})^{\perp}$.

c) *L'orbite* $U \cdot \ell_{\mathfrak{u}}$ *est égale à* $\ell_{\mathfrak{u}} + z(\mathfrak{u})^{\perp}$. *Le groupe* U *est unimodulaire.*

d) *Le groupe* $K(\ell_{\mathfrak{k}})$ *est connexe. Le groupe* $G(\ell)$ *est connexe.*

Démonstration. — La démonstration de a) est facile.

b) Comme $\mathfrak{k}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, le groupe K est unimodulaire. L'assertion résulte alors de la proposition 2.

c) Pour montrer que $U \cdot \ell_{\mathfrak{u}} = \ell_{\mathfrak{u}} + z(\mathfrak{u})^{\perp}$ il suffit de montrer que l'orbite $U \cdot \ell_{\mathfrak{u}}$ est fermée dans $\mathfrak{u}^*$. La décomposition $\mathfrak{k} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{m}$ permet de définir un plongement i de $\mathfrak{u}^*$ dans $\mathfrak{k}^*$. On a : $U \cdot \ell_{\mathfrak{u}} = i^{-1}(U \cdot \ell_{\mathfrak{k}})$. Comme l'orbite $K \cdot \ell_{\mathfrak{k}}$ est fermée dans $\mathfrak{k}^*$, l'orbite $U \cdot \ell_{\mathfrak{k}}$ est fermée. On en déduit que $U \cdot \ell_{\mathfrak{u}}$ est fermée. La deuxième assertion résulte de [1], Th. 2.9.

d) L'orbite $K \cdot \ell_{\mathfrak{k}}$ étant simplement connexe, le groupe $K(\ell_{\mathfrak{k}})$ est connexe. Le groupe $G(\ell_{\mathfrak{k}})$ est égal à $AK(\ell_{\mathfrak{k}})$ et donc connexe. Comme $\mathfrak{g}(\ell_{\mathfrak{k}}) = \mathfrak{g}(\ell)$, on a : $G(\ell_{\mathfrak{k}})_0 \subseteq G(\ell) \subseteq G(\ell_{\mathfrak{k}})$. Il en résulte que $G(\ell)$ est connexe.

PROPOSITION 4. — *Il existe des sous-groupes fermés* A *et* K *du groupe* G *tels que l'hypothèse* $H(G, A, K, \ell)$ *soit vérifiée. En outre, on peut choisir* K *de façon que l'on ait :* $Z(K) = Z(G)_0$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Considérons un sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}(\ell)$, supplémentaire de $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(\ell)$.

L'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{u}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}$, contenant $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}$. Posons $\mathfrak{k} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{m}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Notons A (resp. K) le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{k}$). Il est facile de voir que G est le produit semi-direct de A par K.

Pour tout X dans $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{n}$ l'opérateur $\operatorname{ad} X$ est semi-simple et nilpotent. Par conséquent $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{k} \subseteq z(\mathfrak{k})$. Montrons que $Z(K) = Z(G)_0$. Le groupe $Z(K)$ étant connexe, il suffit de montrer que $z(\mathfrak{k}) = z(\mathfrak{g})$. On a $z(\mathfrak{g}) \subseteq z(\mathfrak{k})$ et d'après le a) de la proposition 3, $z(\mathfrak{k})$ est contenu dans $z(\mathfrak{g})$.

3. L'intégrale invariante sur le groupe G.

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent.

LEMME 1. — *Soit λ un poids imaginaire pur de $\mathfrak{g}(\ell)$. Il existe un entier naturel p_λ, $0 \le p_\lambda \le \dim(\mathfrak{g}^C)_\lambda$ tel que* $\dim(W \cap (\mathfrak{g}^C)_\lambda) = p_\lambda$ *pour toute polarisation positive W en ℓ dans $\mathfrak{g}^C$.*

Démonstration. — Soit H_ℓ la forme hermitienne sur $\mathfrak{g}^C$ définie par : $H_\ell(X,Y) = iB_\ell(X,\overline{Y})$. Il résulte de la proposition 2.1 que la restriction H_ℓ^λ de H_ℓ à $(\mathfrak{g}^C)_\lambda$ est une forme hermitienne non-dégénérée. On note (p_λ, n_λ) sa signature [4]. Comme $H_\ell(X,X) = -H_\ell(\overline{X},\overline{X})$ pour tout X dans $\mathfrak{g}^C$, on a : $(p_{-\lambda}, n_{-\lambda}) = (n_\lambda, p_\lambda)$. Soit W une polarisation positive en ℓ dans $\mathfrak{g}^C$. L'espace vectoriel $W \cap (\mathfrak{g}^C)_\lambda \oplus W \cap (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal pour la restriction de B_ℓ à $(\mathfrak{g}^C)_\lambda \oplus (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dim((\mathfrak{g}^C)_\lambda \oplus (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}) &= \dim(W\cap(\mathfrak{g}^C)_\lambda) + \dim(W\cap(\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}) \\ &\le p_\lambda + p_{-\lambda} \\ &= p_\lambda + n_\lambda = \frac{1}{2}\dim((\mathfrak{g}^C)_\lambda \oplus (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}) \ .\end{aligned}$$

Il en résulte que $p_\lambda = \dim(W \cap (\mathfrak{g}^C)_\lambda)$.

Le groupe $G(\ell)$ est abélien, connexe, simplement connexe. Si μ est dans $(\mathfrak{g}(\ell)^C)^*$ il existe un unique caractère du groupe $G(\ell)$ de différentielle $\mu|_{\mathfrak{g}(\ell)}$. On notera ξ_μ ce caractère. On note $P(\mathfrak{g}(\ell))_i$ (resp. $P(\mathfrak{g}(\ell))_r$, $P(\mathfrak{g}(\ell))_c$) l'ensemble des poids imaginaires purs (resp. réels, complexes) de $\mathfrak{g}(\ell)$. Pour x dans $G(\ell)$ on pose :

$$\begin{aligned} r_\ell(x) = \prod_{\lambda\in P(\mathfrak{g}(\ell))_i} (\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x))^{p_\lambda} & \prod_{\lambda\in P(\mathfrak{g}(\ell))_c} |\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x)|^{d_\lambda/2} \\ & \prod_{\lambda\in P(\mathfrak{g}(\ell))_r} |\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x)|^{d_\lambda/2}\end{aligned}$$

où $d_\lambda = \dim(\mathfrak{g}^C)_\lambda$.

Si x est dans $G(\ell)$ on dira que x est régulier si $r_\ell(x) \neq 0$. On notera $G(\ell)'$ l'ensemble des éléments réguliers de $G(\ell)$.

LEMME 2. — *Soit G un groupe de Lie résoluble, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On suppose qu'il existe une sous-aglèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ tels que :* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$.

On suppose que pour tout idéal $\mathfrak{j}$ *de* $\mathfrak{g}$ *on a* $\mathfrak{j} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{m} \cap \mathfrak{j}$. *On note* H *le sous-groupe analytique de* G *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$. *Alors l'application* $(h, X) \to h \exp X$ *est un difféomorphisme de* $H \times \mathfrak{m}$ *sur* G.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{z}$ le centre du plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

a) On suppose que $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$. Alors, l'algèbre de Lie $\mathfrak{j} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. On note J le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$ et G_1 le groupe quotient G/J. Il est facile de voir en utilisant l'hypothèse de récurrence que l'application $(h, X) \to h \exp X$ de $H \times \mathfrak{m}$ dans G est bijective. Montrons qu'elle est régulière en tout point (h_0, X_0) de $H \times \mathfrak{m}$. Pour x dans G, on note L_x (resp. R_x) la différentielle de l'application $g \to xg$ (resp. $g \to gx$). La différentielle de l'application $(h, X) \to h \exp X$ en (h_0, X_0) est l'application linéaire

$$(L_{h_0}(e)Y, X) \longrightarrow R_{\exp X_0}(h_0) L_{h_0}(e)(Y + \exp(\operatorname{ad} X_0)\rho(\operatorname{ad} X_0)X)$$

de $L_{h_0}(e)\mathfrak{h} \times \mathfrak{m}$ dans l'espace tangent en $h_0 \exp X_0$ à G. On a noté ρ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^{n-1}}{n!}$. Pour montrer qu'elle est bijective il suffit de montrer que si Y est dans $\mathfrak{h}$ et si X est dans $\mathfrak{m}$ et différent de 0, alors $Y + \exp(\operatorname{ad} X_0)\rho(\operatorname{ad} X_0)X$ est non nul. Supposons que

$$Y + \exp(\operatorname{ad} X_0)\rho(\operatorname{ad} X_0)X = 0 .$$

On a : $\pi(Y) + \exp \operatorname{ad} \pi(X_0)\rho(\operatorname{ad} \pi(X_0)\pi(X) = 0$, où π est l'homomorphisme canonique, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{j}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\pi(Y) = 0$, $\pi(X) = 0$. Comme la restriction de π à $\mathfrak{m}$ est injective, on a $X = 0$.

b) On suppose que $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. On a $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{m}$ et la démonstration du lemme dans ce cas est analogue à la démonstration ci-dessus.

Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{u}$, A, K les objets construits dans la démonstration de la proposition 2.4. On note U le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$.

LEMME 3. — *Soit* x *un élément régulier de* $G(\ell)$. *L'application* $(X, u) \to \exp X x \exp(-X)u$ *est un difféomorphisme de* $\mathfrak{m} \times U$ *sur* xK.

Démonstration. — Pour tout x dans $G(\ell)$ on a :

$$|r_\ell(x)|^2 = \det(\operatorname{ad} x^{-1} - 1)_{\mathfrak{m}} .$$

Par conséquent, si x est régulier la restriction de $\operatorname{ad} x^{-1} - 1$ à $\mathfrak{m}$ définit un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$. En utilisant ce fait, on démontre ce lemme comme le lemme 2.

COROLLAIRE 4. — *Soit* ψ *une fonction dans* $C_C(G)$. *La fonction* $(z, X) \to \psi(\exp Xx \exp(-X)z)$ *est dans* $C_C(Z(K) \times \mathfrak{m})$ *pour tout élément régulier* x *de* $G(\ell)$.

Démonstration. — Elle résulte du lemme 3 et du fait que $Z(K) = Z(U)$.

On construit maintenant l'intégrale invariante sur le groupe G. L'application canonique $G \to G/H$ induit un isomorphisme ρ de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$ sur l'espace tangent de la variété G/H au point H, $T_H(G/H)$. Posons $m = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{m}$ et notons $B_\ell^{\mathfrak{m}}$ la restriction de B_ℓ à $\mathfrak{m}$. Soit ω la forme extérieure sur $T_H(G/H)$ définie par :

$$\rho^* \omega = (2\pi)^{-m} (m!)^{-1} B_\ell^{\mathfrak{m}} \wedge \cdots \wedge B_\ell^{\mathfrak{m}} \quad (m \text{ facteurs}) .$$

Soit $\widetilde{\omega}$ la forme différentielle G-invariante sur G/H qui vérifie $\widetilde{\omega}(H) = \omega$. On notera $d\mu_1$ la mesure G-invariante sur G/H définie par $\widetilde{\omega}$.

Soient x un élément régulier de $G(\ell)$ et φ une fonction dans $D(G)$. La fonction $X \to \varphi(\exp Xx \exp(-X))$ est dans $D(\mathfrak{m})$. Par conséquent, la fonction $g \to \varphi(gxg^{-1})$ est une fonction continue et à support compact modulo H sur G et définit par passage au quotient une fonction dans $C_C(G/H)$. On notera $F_{\ell,\varphi}$ la fonction sur $G(\ell)'$ définie par :

$$F_{\ell,\varphi}(x) = r_\ell(x) \int_{G/H} \varphi(\dot{g} x \dot{g}^{-1}) d\mu_\ell(\dot{g}) .$$

On dira que $F_{\ell,\varphi}$ est l'intégrale invariante de φ relativement à ℓ.

LEMME 5. — *Soit* φ *une fonction dans* $D(G)$. *Il existe une partie compacte* C_φ *de* $G(\ell)$ *telle que* $F_{\ell,\varphi}(x) = 0$ *pour tout* x *dans* $G(\ell)'$ *n'appartenant pas à* $C_\varphi Z(G)_0$.

Démonstration. — Il existe une partie compacte C_φ de A tel que $\operatorname{supp} \varphi \subseteq C_\varphi \times K$. On a $G(\ell) = A \times Z(G)_0$. Soient a dans A et z dans $(Z(G)_0$. On suppose que $x = az$ est dans $G(\ell)'$ et que $F_{\ell,\varphi}(x) \neq 0$. Il existe g dans G tel que $gazg^{-1}$ soit dans $\operatorname{supp} \varphi$. Comme $gazg^{-1} = aa^{-1}gag^{-1}z$ et comme $a^{-1}gag^{-1}z$ est dans K, a est dans C_φ. Il en résulte que x est dans $C_\varphi Z(G)_0$.

L'intégrale invariante qu'on a construit rappelle l'intégrale invariante sur un groupe de Lie semi-simple [7]. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes de Lie semi-simples, il existe en général des fonctions φ dans $D(G)$ telles que la fonction $F_{\ell,\varphi}$ ne soit pas sommable pour la mesure de Haar sur $G(\ell)$.

4. La proposition principale.

Soient G un groupe de Lie résoluble, connexe, simplement connexe et ℓ une forme linéaire entière sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G. On suppose que le groupe $G(\ell)$ est connexe. D'après [3], Ch. VII, Th. 4.1, on peut associer à ℓ une classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles du groupe G. On notera $\pi(\ell, G)$ cette classe d'équivalence.

Dans ce qui suit, les hypothèses et les notations sont celles du paragraphe 2. On considère des sous-groupes A et K de G telles que l'hypothèse $H(G, A, K, \ell)$ soit vérifiée. (Il en existe d'après la proposition 2.4).

Soit dk une mesure de Haar sur le groupe K. D'après les assertions (a) et (d) de la proposition 2.3, le groupe $K(\ell_{\mathfrak{k}})$ est connexe et égal au groupe $Z(K)$. Notons dz la mesure de Haar sur le groupe $Z(K)$ telle que la mesure quotient dk/dz corresponde à la mesure $d\beta_{O_{\ell_{\mathfrak{k}}}}$ sur l'orbite $O_{\ell_{\mathfrak{k}}}$.

Posons $m = \dfrac{1}{2} \dim \mathfrak{m}$ et notons $B_\ell^{\mathfrak{m}}$ la restriction de B_ℓ à $\mathfrak{m}$. On notera dX la mesure sur $\mathfrak{m}$ définie par la forme extérieure $(2\pi)^{-m}(m!)^{-1} B_\ell^{\mathfrak{m}} \wedge \cdots \wedge B_\ell^{\mathfrak{m}}$ (m facteurs). Le groupe $G(\ell)$ est connexe. On notera χ_ℓ le caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $i\ell|_{\mathfrak{g}(\ell)}$ et π une représentation unitaire du groupe G dont la classe d'équivalence est $\pi(\ell, G)$. Nous allons dans ce paragraphe démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit φ dans $D(G)$. Pour tout a dans A l'opérateur $\pi(a) \int_K \varphi(ak)\pi(k)\, dk$ est à trace. Si a est régulier la trace de cet opérateur est donnée par la formule*

$$\mathrm{Tr}(\pi(a) \int_K \varphi(ak)\pi(k)\, dk) =$$
$$r_\ell(a)\chi_\ell(a) \int_{\mathfrak{m} \times Z(K)} \varphi(\exp X a z \exp(-X))\chi_\ell(z)\, dX\, dz\ .$$

Démonstration. — La restriction de π à K est dans la classe $\pi(\ell_{\mathfrak{k}}, K)$. D'après la proposition 2.3 (b), l'orbite $K \cdot \ell_{\mathfrak{k}}$ est tempérée. La première assertion résulte alors de [3], Ch. IX, 3.1.1.

Nous démontrerons la formule donnant la trace de l'opérateur $\pi(a) \int_K \varphi(ak)\pi(k)\, dk$ en raisonnant par récurrence sur la dimension du groupe G. Remarquons que si ℓ est nulle sur $z(\mathfrak{k})$, alors d'après la proposition 2.3 (b), $\mathfrak{k} = z(\mathfrak{k})$. Dans ce cas G est abélien et la formule est évidente.

A. — On suppose que $\dim z(\mathfrak{k}) > 1$. On pose $\mathfrak{b} = \ker \ell \cap z(\mathfrak{k})$. Il résulte de (a) de la proposition 2.3 que $\mathfrak{b}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note B le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. La représentation π est triviale sur B et définit par passage au quotient une représentation τ du groupe $G_1 = G/B$. En utilisant l'hypothèse de récurrence au groupe G_1, on obtient la formule de la proposition.

B. — On suppose maintenant que : i) $\dim z(\mathfrak{k}) = 1$, ii) l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ contient des idéaux abéliens de $\mathfrak{g}$ contenant strictement $z(\mathfrak{k})$. Soit $\mathfrak{q}$ un tel idéal de dimension minimale. D'après le théorème de Lie la dimension de $\mathfrak{q}$ est égale à 2 ou à 3. Notons μ la restriction de ℓ à $\mathfrak{q}$, G_1 (resp. $\mathfrak{g}_1$) le groupe de Lie $G(\mu)$ (resp. l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\mu)$) et ℓ_1 la restriction de ℓ à $\mathfrak{g}_1$. Notons $\mathfrak{k}_1$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1$ et K_1 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_1$.

Posons $\mathfrak{b} = \ker \ell \cap \mathfrak{q}$. On notera B le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et $N_G(\mathfrak{b})$ (resp. $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})$) le normalisateur de $\mathfrak{b}$ dans G (resp. dans $\mathfrak{g}$). On a :

LEMME 2.

a) *Le groupe G_1 est connexe et égal à $N_G(\mathfrak{b})$. La codimension de G_1 dans G est égale à la codimension de $z(\mathfrak{k})$ dans $\mathfrak{q}$.*

b) *Le groupe $G_1(\ell_1)$ est connexe et égal au groupe $G(\ell)B$.*

c) *Soit τ une représentation du groupe G_1, appartenant à la classe $\pi(\ell_1, G_1)$. Alors la représentation $\operatorname{ind}(\tau, G_1 \uparrow G)$ est équivalente à π.*

d) *La forme linéaire ℓ_1 s'annule sur $\mathfrak{b}$ et définit par passage au quotient une forme linéaire ℓ_2 sur $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1/\mathfrak{b}$. La représentation τ est triviale sur B et définit par passage au quotient une représentation ρ du groupe $G_2 = G_1/B$. La représentation ρ est dans la classe $\pi(\ell_2, G_2)$.*

e) *On note K_2 le groupe K_1/B. Alors l'hypothèse $H(G_2, A, K_2, \ell_2)$ est vérifiée.*

f) *Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On a :* $[\mathfrak{n}, \mathfrak{q}] \subseteq z(\mathfrak{k})$, $[\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_1, \mathfrak{q}] = \{0\}$.

Démonstration. — Les assertions (a), (b), (d) se démontrent facilement et (c) résulte du principe d'induction par étage.

e) Montrons que le groupe G_2 est unimodulaire. Soit X dans $\mathfrak{g}_1$. Les espaces vectoriels $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{b}$ se mettent en dualité par la forme bilinéaire B_ℓ. Si v est dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ et si w est dans $\mathfrak{b}$ on a : $B_\ell(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1} Xv, w) = B_\ell(v, \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}} Xw)$. Il en résulte que $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1} X = -\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{b}} X$. Par conséquent, $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} X = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$. Comme G est unimodulaire, $\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{b}} X = 0$.

f) Soit ω l'homomorphisme canonique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/z(\mathfrak{k})$. La dimension de l'idéal $[\omega(\mathfrak{n}), \omega(\mathfrak{q})]$ de l'algèbre de Lie $\omega(\mathfrak{q})$ est strictement inférieure à la dimension de $\omega(\mathfrak{q})$. Comme $\omega(\mathfrak{q})$ est un idéal de dimension minimale de $\omega(\mathfrak{g})$, on a : $[\mathfrak{n}, \mathfrak{q}] \subseteq z(\mathfrak{k})$.

On a :

$$[\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_1, \mathfrak{q}] \subseteq \mathfrak{b} \cap z(\mathfrak{k}) = \{0\} .$$

B.1. — On suppose que $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m} \neq \{0\}$.

B.1.1. — On suppose qu'il existe un poids complexe ou imaginaire pur λ dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$ tel que $\mathfrak{q}^C \cap (\mathfrak{g}^C)_\lambda \neq \{0\}$. Soient Z l'unique vecteur de $z(\mathfrak{k})$ tel que $\ell(Z) = 1$ et X un vecteur non nul dans $\mathfrak{q}^C \cap (\mathfrak{g}^C)_\lambda$. Le vecteur $\overline{X}$ est dans $\mathfrak{q}^C \cap (\mathfrak{g}^C)_{\overline{\lambda}}$ et $\{X, \overline{X}, Z\}$ est une base de $\mathfrak{q}^C$. Il existe Y dans $(\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}$ tel que $B_\ell(Y, X) = \pi$. Le vecteur $[X, Y]$ est dans $\mathfrak{q}^C \cap [(\mathfrak{g}^C)_\lambda, (\mathfrak{g}^C)_{-\lambda}] \subseteq \mathfrak{q}^C \cap \mathfrak{u}^C = z(\mathfrak{k})^C$. Il en résulte que $[Y, X] = \pi Z$. Le vecteur $[X, \overline{Y}]$ est dans $\mathfrak{q}^C \cap [(\mathfrak{g}^C)_\lambda, (\mathfrak{g}^C)_{-\overline{\lambda}}] \subseteq \mathfrak{q}^C \cap (\mathfrak{g}^C)_{\lambda-\overline{\lambda}} = \{0\}$. On en déduit que $[X, \overline{Y}] = [\overline{X}, Y] = 0$. Posons $E_1 = Y + \overline{Y}$, $E_2 = i(Y - \overline{Y})$, $F_1 = X + \overline{X}$, $F_2 = -i(X - \overline{X})$.

Il est facile de vérifier que :

a) Les vecteurs E_1, E_2, F_1, F_2 sont dans $\mathfrak{m}$. En plus : $[E_1, F_1] = [E_2, F_2] = 2\pi Z$, $[E_1, F_2] = [E_2, F_1] = 0$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbf{R}E_1 \oplus \mathbf{R}E_2$.

b) L'application $(t_1, t_2, k_1) \to \exp t_1 E_1 \exp t_2 E_2 k_1$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2 \times K_1$ sur K.

Si φ est dans $D(G)$ et si a est dans A, l'opérateur $\pi(a) \int_K \varphi(ak)\pi(k)\, dk$ est représenté par le noyau :

$$R(t_1, t_2, t_1', t_2') = \tau(a) \int_{K_1} \Delta_{G_1}(ak_1)^{-1/2} \varphi(\exp t_1 E_1 \exp t_2 E_2 a k_1 \exp(-t_2' E_2) \exp(-t_1' E_1)) \tau(k_1)\, dk_1 .$$

D'après le théorème de Mercer la fonction $\operatorname{Tr} R(t_1,t_2,t_1,t_2)$ est intégrable pour la mesure dt_1dt_2 et on a :

$$\operatorname{Tr}(\pi(a)\int_K \varphi(ak)\pi(k)\,dk) = \int_{\mathbf{R}^2} \operatorname{Tr} R(t_1,t_2,t_1,t_2)\,dt_1dt_2\ .$$

Pour $t=(t_1,t_2)$ dans $\mathbf{R}^2$ on notera φ_t la fonction sur G_1 définie par :

$$\varphi_t(g_1) = \Delta_{G_1}(g_1)^{-1/2}\varphi(\exp t_1E_1 \exp t_2E_2g_1 \exp(-t_2E_2)\exp(-t_1E_1))\ .$$

On a :

$$R(t,t) = \tau(a)\int_{K_1} \varphi_t(ak_1)\tau(k_1)\,dk_1\ .$$

Soit σ l'homomorphisme canonique $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. Posons $\mathfrak{m}_2 = \sigma(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{g}_1)$, $m_2 = \frac{1}{2}\dim\mathfrak{m}_2$. On note $B_{\ell_2}^{\mathfrak{m}_2}$ la restriction de la forme bilinéaire B_{ℓ_2} à $\mathfrak{m}_2$ et dX_2 la mesure sur $\mathfrak{m}_2$ définie par la forme extérieure $(2\pi)^{-m_2}(m_2!)^{-1}B_{\ell_2}^{\mathfrak{m}_2}\wedge\cdots\wedge B_{\ell_2}^{\mathfrak{m}_2}$ (m_2 facteurs). Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{g}_1$ supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{g}_1$. L'homomorphisme σ induit un isomorphisme de V sur $\mathfrak{m}_2$. On notera dY la mesure sur V dont l'image par σ est la mesure dX_2 sur $\mathfrak{m}_2$. On note $d\Omega$ la mesure sur $\mathfrak{b}$ définie par:

$$\theta \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^2} \theta(s_1F_1+s_2F_2)\,ds_1ds_2\ .$$

On note χ_{ℓ_1} le caractère unitaire du groupe $G_1(\ell_1)$ de différentielle $i\ell_{1|g_1(\ell_1)}$.

L'hypothèse $H(G_2,A,K_2,\ell_2)$ est vérifiée. On note r_{ℓ_2} la fonction sur $G_2(\ell_2)$ définie en 3. En appliquant l'hypothèse de récurrence au groupe G_2 on obtient :

$$\operatorname{Tr} R(t,t) = r_{\ell_2}(a)\chi_{\ell_1}(a)$$
$$\int_V\int_{Z(K)\times\mathfrak{b}} \varphi_t(\exp Yaz\exp(-Y)\exp\Omega)\chi_{\ell_1}(z)\,dz\,d\Omega dY\ .$$

D'après l'assertion (f) du lemme 2, $[\mathfrak{m}\cap\mathfrak{g}_1,\mathfrak{b}]=\{0\}$; par conséquent :

$$\operatorname{Tr} R(t,t) = r_{\ell_2}(a)\chi_{\ell_1}(a)$$
$$\int_V\int_{Z(K)\times\mathfrak{b}} \varphi_t(\exp Yaz\exp\Omega\exp(-Y))\chi_{\ell_1}(z)\,dz\,d\Omega dY\ .$$

Comme a est régulier, $\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1}-1)\neq 0$. On a :

$$a\exp\Omega = \exp((\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1}-1)^{-1}\Omega)a\exp(-(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1}-1)^{-1}\Omega)\ .$$

Il en résulte que

$$\operatorname{Tr} R(t,t) = r_{\ell_2}(a)\chi_{\ell_1}(a)|\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1}-1)|$$
$$\int_V\int_{Z(K)\times\mathfrak{b}} \varphi_t(\exp Y\exp\Omega az\exp(-\Omega)\exp(-Y))\chi_{\ell_1}(z)\,dzd\Omega dY\ .$$

Il est facile de voir que la mesure :

$$\theta \longrightarrow \int_{V \times \mathfrak{b} \times \mathbf{R}^2} \theta(Y + \Omega + t_1 E_1 + t_2 E_2)\, dY\, d\Omega\, dt_1\, dt_2$$

est la mesure dX sur $\mathfrak{m}$.

En tenant compte du corollaire 3.4 on a :

$$\operatorname{Tr} R(t,t) = r_{\ell_2}(a)\chi_{\ell_1}(a)|\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1} - 1)|\Delta_{G_1}(a)^{-1/2}$$
$$\int_{\mathfrak{m} \times Z(K)} \varphi(\exp Xaz \exp(-X)\chi_\ell(z)\, dz dX\ .$$

Pour terminer la démonstration de la formule il suffit de montrer que si a est un élément régulier de A, on a :

$$r_\ell(a) = \Delta_{G_1}(a)^{-1/2} |\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1} - 1)| r_{\ell_2}(a)\ .$$

a) Supposons λ imaginaire pur.

On a :

$$\Delta_{G_1}(a) = 1$$

et

$$\begin{aligned} |\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1} - 1| &= (\xi_\lambda(\alpha)^{-1} - 1)(\xi_{-\lambda}(\alpha)^{-1} - 1) \\ &= (\xi_{\lambda/2}(\alpha) - \xi_{-\lambda/2}(\alpha))(\xi_{-\lambda/2}(\alpha) - \xi_{\lambda/2}(\alpha))\ . \end{aligned}$$

Pour μ dans $P(\mathfrak{g}_2(\ell_2))$ on note $p_{\mu,2}$ le nombre défini dans le lemme 3.1. Si W est une polarisation positive en ℓ dans $\mathfrak{g}^C$, $\sigma(W)$ est une polarisation positive en ℓ_2 dans $\mathfrak{g}_2^C$ et on a :

$$\begin{aligned} p_\mu = \dim(W \cap (\mathfrak{g}^C)_\mu) &= \dim \sigma(W \cap (\mathfrak{g}^C)_\mu) + \dim((\mathfrak{g}^C)_\mu \cap \mathfrak{b}^C) \\ &= p_{\mu,2} + \dim((\mathfrak{g}^C)_\mu \cap \mathfrak{b}^C) \end{aligned}$$

pour tout μ dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$. Il en résulte que $p_\mu = p_{\mu,2}$ si $\mu \neq \pm\lambda$ et que $p_\mu = p_{\mu,2} + 1$ si $\mu = \pm\lambda$. L'assertion s'ensuit.

b) Supposons λ complexe.

On a :

$$\Delta_{G_1}(a)^{-1/2} = \xi_{\lambda/2}(\alpha)\xi_{\overline{\lambda}/2}(\alpha)$$

et

$$|\det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}} a^{-1} - 1| = (\xi_\lambda(a)^{-1} - 1)(\xi_{-\lambda}(\alpha)^{-1} - 1)\ .$$

Posons pour μ dans $P(\mathfrak{g}_2(\ell_2))$, $d_{\mu,2} = \dim(\mathfrak{g}_2^C)_\mu$. On a $d_{\mu,2} = d_\mu$ si $\mu \notin \{\lambda, -\lambda, \lambda, -\lambda\}$ et $d_{\mu,2} + 1 = d_\mu$ si $\mu \in \{\lambda, -\lambda, \overline{\lambda}, -\overline{\lambda}\}$, d'où l'assertion.

B.1.2. — On suppose qu'il existe un poids réel λ dans $P(\mathfrak{g}(\ell))$ tel que $\mathfrak{g}^C \cap (\mathfrak{g}^C)_\lambda \neq \{0\}$. Posons $\mathfrak{q}_\lambda = \mathfrak{q} \cap (\mathfrak{g}^C)_\lambda$. L'idéal $\mathfrak{q}$ est alors égal à $z(\mathfrak{k}) + \mathfrak{q}_\lambda$. On fait la démonstration de la formule dans ce cas comme en B.1.1.

B.2. — On suppose maintenant que $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$. L'idéal $\mathfrak{q}$ est alors contenu dans $\mathfrak{u}$. On va étudier la structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$.

Soit $\tilde{\mathfrak{u}}$ l'enveloppe algébrique de l'algèbre de Lie ad $\mathfrak{u}$. L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{u}}$ est résoluble et contenue dans l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Tout idéal de $\mathfrak{u}$ est stable par $\tilde{\mathfrak{u}}$ et la restriction de tout élément de $\tilde{\mathfrak{u}}$ à $z(\mathfrak{u})$ est l'endomorphisme nul de $z(\mathfrak{u})$, [6], Th. 13.

Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Lie de $\tilde{\mathfrak{u}}$, maximale parmi les sous-algèbres abéliennes d'endomorphismes semi-simples de $\mathfrak{u}$ contenues dans $\tilde{\mathfrak{u}}$. Si $\lambda \in (\mathfrak{s}^C)^*$, $\lambda \neq 0$ on notera : $(\mathfrak{u}^C)_\lambda = \{X \in \mathfrak{u}^C : sX = \lambda(s)X$ pour tout $s \in \mathfrak{s}^C\}$ et $P(\mathfrak{s})$ l'ensemble des $\lambda \in (\mathfrak{s}^C)^*$, $\lambda \neq 0$ tels que $(\mathfrak{u}^C)_\lambda \neq \{0\}$. Si λ est dans $P(\mathfrak{s})$ on dira que λ est un poids pour $\mathfrak{s}$. L'ensemble $P(\mathfrak{s})$ est stable par la conjugaison $\lambda \to \overline{\lambda}$. Il existe donc un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}'$ de $\mathfrak{u}$ tel que : $(\mathfrak{m}')^C = \sum_{\lambda \in P(\mathfrak{s})} \oplus (\mathfrak{u}^C)_\lambda$. Posons $\mathfrak{u}' = \{X \in u : s \cdot X = 0$ pour tout $s \in \mathfrak{s}\}$. L'espace vectoriel $\mathfrak{u}'$ est une sous-algèbre de Lie nilpotente de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}'$ et $z(\mathfrak{u})$ est contenu dans $\mathfrak{u}'$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ est égale à $\mathfrak{u}' \oplus \mathfrak{m}'$. D'après la proposition 2.3 (c) il existe x dans U tel que la forme linéaire $x \cdot \ell_\mathfrak{u}$ soit nulle sur $\mathfrak{m}'$. En remplaçant $\mathfrak{s}$ par $\operatorname{Ad} x^{-1} \cdot \mathfrak{s} \operatorname{Ad} x$ on peut supposer que $\ell_\mathfrak{u}$ est nulle sur $\mathfrak{m}'$.

On a :

LEMME 3.

a) *La restriction de la forme bilinéaire $B_{\ell_\mathfrak{u}}$ à $\mathfrak{m}'$ est non dégénérée. Le noyau de la restriction de la forme bilinéaire B_{ℓ_μ} à $\mathfrak{u}'$ est égal à $z(\mathfrak{u}') = z(\mathfrak{u})$.*

(b) *Si λ est dans $P(\mathfrak{s})$, $-\lambda$ est aussi dans $P(\mathfrak{s})$. La restriction de $B_{\ell_\mathfrak{u}}$ à $(\mathfrak{u}^C)_\lambda \oplus (\mathfrak{u}^C)_{-\lambda}$ est non dégénérée.*

Démonstration. — Elle est analogue à la démonstration des assertions (b) et (c) de la proposition 2.1.

B.2.1. — On suppose qu'il existe un poids complexe ou imaginaire pur λ dans $P(\mathfrak{s})$ tel que $\mathfrak{g}^C \cap (\mathfrak{u}^C)_\lambda \neq \{0\}$. En travaillant comme en B.1.1 on trouve des vecteurs E_1, E_2, F_1, F_2 dans $\mathfrak{m}'$, Z dans $z(\mathfrak{k})$ linéairement indépendants tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) Les vecteurs F_1, F_2 sont dans $\mathfrak{b}$ et $\ell(Z) = 1$.

b) On a : $[E_1, F_1] = [E_2, F_2] = 2\pi Z$, $[E_1, F_2] = [E_2, F_1] = 0$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathbf{R}E_1 \oplus \mathbf{R}E_2$.

c) L'application $(t_1, t_2, k_1) \to \exp t_1 E_1 \exp t_2 E_2 k_1$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2 \times K_1$ sur K.

Soient φ dans $D(G)$ et a dans A. Reprenons les notations $R(t,t)$, $\varphi(t)$, $d\Omega$ de B.1.1. En travaillant comme en B.1.1 on obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} R(t,t) &= r_\ell(a)\chi_\ell(a) \int_{\mathfrak{m}\times Z(K)\times \mathfrak{b}} \varphi_t(\exp Xaz \exp \Omega \exp(-X))\chi_\ell(z) dz db d\Omega \\ &= r_\ell(a)\chi_\ell(a) \\ &\int_{\mathfrak{m}\times Z(K)\times \mathbf{R}^2} \varphi(\exp X\gamma(t_1,t_2,s_1,s_2)az \exp(-X))\chi_\ell(z) dz ds_1 ds_2 dX,\end{aligned}$$

où $\gamma(t_1, t_2, s_1, s_2) = \exp t_1 E_1 \exp t_2 E_2 \exp s_1 F_1 \exp s_2 F_2 \exp(-t_2 E_2) \exp(-t_1 E_1)$. Soit η la fonction sur $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$\begin{aligned}\eta(s_1, s_2) &= r_\ell(a)\chi_\ell(a) \\ &\int_{\mathfrak{m}\times Z(K)} \varphi(\exp X \exp s_1 F_1 \exp s_2 F_2 az \exp(-X))\chi_\ell(z)\ dz\ dX\ .\end{aligned}$$

Il résulte du corollaire 3.4 que η est dans $D(\mathbf{R}^2)$. Il résulte de la condition (b) ci-dessus que

$$\gamma(t_1, t_2, s_1, s_2) = \exp s_1 F_1 \exp s_2 F_2 \exp(2\pi(t_1 s_1 + t_2 s_2)Z)\ .$$

On en déduit que :

$$\operatorname{Tr} R(t,t) = \int_{\mathbf{R}^2} n(s_1, s_2) e^{-2\pi i(t_1 s_1 + t_2 s_2)} ds_1 ds_2 = \widehat{\eta}(t_1, t_2)\ .$$

D'après la formule de l'inversion de la transformation de Fourier,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\pi(a) \int_K \varphi(ak)\pi(k)\ dk) &= \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{\eta}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \eta(0,0) \\ &= r_\ell(a)\chi_\ell(a) \int_{\mathfrak{m}\times Z(K)} \varphi(\exp Xaz \exp(-X))\chi_\ell(z)\ dz\ dX\ .\end{aligned}$$

B.2.2. — On suppose qu'il existe un poids réel λ dans $P(\mathfrak{s})$ tel que l'on ait : $\mathfrak{q}^C \cap (\mathfrak{u}^C)_\lambda \neq \{0\}$. L'idéal $\mathfrak{a}$ est alors égal à $z(\mathfrak{k}) \oplus q \cap (\mathfrak{u}^C)_\lambda$. La démonstration de la formule dans ce cas est analogue à la démonstration du paragraphe précédent.

B.2.3. — Il reste à examiner le cas où $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{u}'$. On a : $[\mathfrak{q}, \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}] = \{0\}$ et comme $\mathfrak{u}'$ est nilpotente, $\dim \mathfrak{g} = 2$. On démontre la formule dans ce cas comme en B.2.1.

C. — On suppose ici que i) $\dim z(\mathfrak{k}) = 1$, ii) il n'existe pas dans $\mathfrak{k}$ d'idéaux abéliens de $\mathfrak{g}$ contenant strictement $z(\mathfrak{k})$. On utilise les objets $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{m}'$ définis en B.2. Si $\mathfrak{m}' + \mathfrak{m} = \{0\}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente et l'hypothèse (ii) n'est vérifiée que si $\mathfrak{k} = z(\mathfrak{k})$. Dans ce cas l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne et la formule est évidente. On suppose donc que $\mathfrak{m}'+\mathfrak{m} \neq \{0\}$. On note $\mathfrak{l}$ la sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{m}'+\mathfrak{m}$.

LEMME 4.

a) *Soit $\mathfrak{j}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, contenu dans $\mathfrak{k}$. Alors, si $\mathfrak{j}$ est différent de $z(\mathfrak{k})$, il est isomorphe à une algèbre de Heisenberg et $z(\mathfrak{j}) = z(\mathfrak{k})$.*

b) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ est isomorphe à une algèbre de Heisenberg et $z(\mathfrak{l}) = z(\mathfrak{k})$. Si $\mathfrak{u}'$ est différent de $z(\mathfrak{k})$, il est isomorphe à une algèbre de Heisenberg et $z(\mathfrak{u}') = z(\mathfrak{k})$.*

c) *Pour tout X dans $\mathfrak{u}' \oplus \mathfrak{a}$, l'opérateur $\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}'+\mathfrak{m}} X$ est semi-simple et ses valeurs propres sont imaginaires pures.*

d) *Supposons $\mathfrak{u}' \neq z(\mathfrak{k})$. Soit $\{E_1, E_2, \ldots, E_n, F_1, F_2, \ldots, F_n, Z\}$ une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}'$ telle que $[E_i, F_i] = 2\pi Z$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\ell(Z) = 1$. Posons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}E_i + \mathfrak{l}$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons G_1 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ et f la restriction de ℓ à $\mathfrak{g}_1$. Le groupe $G_1(f)$ est connexe. Soit τ une représentation du groupe G_1 appartenant à la classe $\pi(f, G_1)$. La représentation $\mathrm{ind}(\tau, G_1 \uparrow G)$ est équivalente à π .*

Démonstration.

a) Le centre $z(\mathfrak{j})$ de $\mathfrak{j}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{k}$ et par conséquent $z(\mathfrak{j}) = z(\mathfrak{k})$ et $\dim z(\mathfrak{j}) = 1$. D'après [3], Ch. VIII, 3.2, si $\mathfrak{j}$ n'est pas isomorphe à une algèbre de Heisenberg il contient un idéal caractéristique abélien différent de $z(\mathfrak{j})$. L'existence d'un tel idéal est en contradiction avec l'hypothèse (ii).

b) La première assertion résulte de (a). Il résulte du lemme 5,(a) que $z(\mathfrak{u}') = z(\mathfrak{k})$.

Soit $(\mathfrak{u}')^1 = \mathfrak{u}', \ldots, (\mathfrak{u}')^{i+1} = [\mathfrak{u}', (\mathfrak{u}')^i], \ldots, (\mathfrak{u}')^n \neq \{0\}, (\mathfrak{u}')^{n+1} = \{0\}$ la série centrale descendante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}'$. Supposons que $n > 2$. L'algèbre de Lie $(\mathfrak{u}')^{n-1} + \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{k}$. Par conséquent, $[(\mathfrak{u}')^{n-1}, \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}] \subseteq z(\mathfrak{k}) = z(\mathfrak{u}')$ et l'algèbre de Lie $(\mathfrak{u}')^{n-1}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenant strictement $z(\mathfrak{k})$. On aboutit à une contradiction. Par conséquent $n = 2$.

c) On note μ la restriction de ℓ à $\mathfrak{l}$. Soit W une polarisation positive en μ dans $\mathfrak{l}^C$ stable par $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{u}'$. D'après [2], lemme II,3.1, une telle polarisation existe. L'algèbre de Lie $\mathfrak{d} = W \cap \mathfrak{l}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{k}$ et par conséquent $\mathfrak{d} = z(\mathfrak{k})$. On en déduit que $W + \overline{W} = \mathfrak{l}^C$. Comme W est stable par $\mathfrak{a}+\mathfrak{u}'$ on a : $(\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C = ((\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C \cap W) + ((\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C \cap \overline{W})$. Soit H_μ la forme hermitienne sur $(\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C$ définie par : $H_\mu(v,w) = iB_\mu(v,\overline{w})$, pour v, w dans $(\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C$. Les restrictions de H_μ à $(\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C \cap W$ et $(\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C \cap \overline{W}$ sont respectivement des formes hermitiennes définie positive et définie négative. Pour tout X dans $\mathfrak{a}+\mathfrak{u}'$, l'opérateur $\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}'+\mathfrak{m}} X$ est antihermitien par H_μ. Comme $(\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C \cap W$ et $(\mathfrak{m}'+\mathfrak{m})^C \cap \overline{W}$ sont stables par $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{u}'$, l'opérateur $\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}'+\mathfrak{m}} X$ est semi-simple et ses valeurs propres sont imaginaires pures.

d) Il est clair que $\mathfrak{g}_1$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et que le groupe $G_1(f)$ est connexe. Soit W la polarisation en μ dans $\mathfrak{l}^C$ considérée en (c). L'algèbre de Lie $V = \mathfrak{a}^C \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} CE_i \oplus W$ est une polarisation positive en ℓ dans $\mathfrak{g}^C$, admissible pour $\mathfrak{l}$ et telle que $\mathfrak{l}^C \cap V$ soit stable par $G(\mu)$. Il en résulte que la représentation $\mathrm{ind}(\tau, G_1 \uparrow G)$ est équivalente à π.

Montrons maintenant la formule de la proposition. Si $\mathfrak{u}' = z(\mathfrak{k})$ elle résulte de [3], Ch. IX, Prop. 2.1.1. Supposons $\mathfrak{u}' \neq z(\mathfrak{k})$. Posons $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{k}$ et notons K_1 (resp. L) les sous-groupes analytiques de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_1$ (resp. $\mathfrak{l}$). Soit dk_1 la mesure de Haar sur le groupe K_1 telle que l'on ait :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{K_1} \theta(\exp t_1 F_1 \cdots \exp t_n F_n k_1)\, dk_1\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n = \int_K \theta(k)\, dk$$

pour toute fonction θ dans $C_C(K)$. L'opérateur $\pi(a) \int_K \varphi(ak)\pi(k)\, dk$ est représenté par le noyau :

$$R(t_1, \ldots, t_n, t'_n, \ldots, t'_n) =$$
$$\tau(a) \int_{K_1} \varphi(\exp t_1 F_1 \cdots \exp t_n F_n a k_1 \exp(-t_n F_n) \cdots \exp(-t'1 F_1))\tau(k_1)\, dk_1 \ ,$$

d'après (1.8).

D'après le théorème de Mercer la fonction $\mathrm{Tr}\, R(t_1, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_n)$ est intégrable pour la mesure $dt_1 \cdots dt_n$ et on a :

$$\mathrm{Tr}(\pi(a) \int_K \varphi(ak)\pi(k)\, dk) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{Tr}\, R(t_1, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n \ .$$

Posons $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $dt = dt_1 \cdots dt_n$, $ds = ds_1 \cdots ds_n$, $\omega(t) = \exp t_1 F_1 \cdots \exp t_n F_n$, $\xi(s) = \exp s_1 E_1 \cdots \exp s_n E_n$, et notons $\tau^{\omega(t)}$ la représentation $x \to \tau(\omega(t)^{-1} x \omega(t))$ du groupe G_1. Il résulte de [3], Ch. IX, 2, que pour tout t dans $\mathbf{R}^n$ la restriction de la représentation $\tau^{\omega(t)}$ à L est une représentation unitaire irréductible du groupe L équivalente à la restriction de τ à L. Soit $d\ell$ la mesure de Haar sur le groupe L telle que l'on ait :

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_L \theta(\xi(s)\ell)\ d\ell\ ds = \int_{K_1} \theta(k_1)\ dk_1\ ,$$

pour toute fonction θ dans $C_C(K_1)$. On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} R(t,t) &= \operatorname{Tr}(\tau(a)\int_{K_1} \varphi(\omega(t)\alpha k_1\omega(t)^{-1})\tau(k_1)\ dk_1)\\ &= \operatorname{Tr}(\tau^{\omega(t)}(a)\int_{K_1}\varphi(ak_1)\tau^{\omega(t)}(k_1)\ dk_1)\\ &= \operatorname{Tr}\Big(\int_{\mathbf{R}^n}\tau^{\omega(t)}(a\xi(s))\int_L \varphi(a\xi(s)\ell)\tau^{\omega(t)}(\ell)\ d\ell\ ds\Big)\ .\end{aligned}$$

Comme la restriction de $\tau^{\omega(t)}$ à L est une représentation à trace de L, on a :

$$\operatorname{Tr} R(t,t) = \int_{\mathbf{R}^n} \operatorname{Tr}(\tau^{\omega(t)}(a\xi(s))\int_L \varphi(a\xi(s)\ell)\tau^{\omega(t)}(\ell)\ d\ell)\ ds\ .$$

Soit χ_f le caractère unitaire du groupe $G_1(f)$ de différentielle $if|_{\mathfrak{g}_1(f)}$. Pour t dans $\mathbf{R}^n$ on note $\chi_{\omega(t)f-f}$ le caractère unitaire du groupe $G_1(f)$ de différentielle $i(\omega(t)f - f)|_{\mathfrak{g}_1(f)}$. Il résulte de la démonstration de la proposition 2.4.1 de [3], Ch. IX, que :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}(\tau^{\omega(t)}(a\xi(s))\int_L \varphi(a\xi(s)\ell)\tau^{\omega(t)}(\ell)\ d\ell) =\\ &\qquad\qquad \chi_{\omega(t)f-f}(a\xi(s))\operatorname{Tr}\big(\tau(a\xi(s))\int_L \varphi(a\xi(s)\ell)\tau(\ell)\ d\ell\big)\ .\end{aligned}$$

Notons η la fonction sur $\mathbf{R}^n$ définie par :

$$\eta(s) = \operatorname{Tr}(\tau(a\xi(s))\int_L \varphi(a\xi(s)\ell)\tau(\ell)\ d\ell)\ .$$

La fonction η est dans $C_C(\mathbf{R}^n)$ et comme :

$$\begin{aligned}\chi_{\omega(t)f-f}(a\xi(s)) &= \chi_f(\omega(t)^{-1}\xi(s)\omega(t)\xi(s)^{-1})\\ &= \exp(i\sum_{i=1}^{n} 2\pi t_i s_i)\end{aligned}$$

on a : $\operatorname{Tr} R(t,t) = \widehat{\eta}(-t)$. D'après la formule de l'inversion de la transformation de Fourier on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} R(t,t) &= \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{\eta}(-t)\ dt = \eta(0)\\ &= \operatorname{Tr}\big(\tau(a)\int_L \varphi(a\ell)\tau(\ell)\ d\ell\big)\ .\end{aligned}$$

La formule de la proposition résulte alors de la proposition 2.4.1 de [3], Ch. IX, appliquée au groupe AL.

5. La formule du caractère.

Les hypothèses et les notations sont celles du paragraphe 2.

Soit dg une mesure de Haar sur le groupe G. On note dx la mesure de Haar sur le groupe $G(\ell)$ telle que la mesure quotient dg/dx définisse la mesure $d\beta_{O_\ell}$ sur l'orbite O_ℓ. Soit dz une mesure de Haar sur le groupe $Z(G)$. On note $d\dot{x}$ la mesure quotient dx/dz et χ_ℓ le caractère unitaire du groupe $G(\ell)$ de différentielle $i\ell|_{\mathfrak{g}(\ell)}$. On a :

THÉORÈME 1. — *Soit π une représentation unitaire du groupe G dont la classe d'équivalence est $\pi(\ell, G)$. Pour toute fonction φ dans $D(G)$ l'opérateur $\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi(g)\, dg$ est à trace et on a :*

$$\mathrm{Tr}(\pi(\varphi)) = \int_{G(\ell/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(xz)\chi_\ell(xz)\, dz\, d\dot{x}$$

les intégrales successives étant absolument convergentes.

Démonstration. — Soient A et K les sous-groupes de G construits dans la démonstration de la proposition 2.4. Posons $Q = A \cap Z(G)$. Le groupe Q est un sous-groupe discret de G et $Z(G) = Q \times Z(G)_0$.

Notons dq la mesure sur Q pour laquelle chaque point de Q est de masse 1. Soit dz_0 la mesure sur le groupe $Z(G)_0 = Z(K)$ telle que l'on ait $dz = dq dz_0$. On note da la mesure sur A qui vérifie la relation $da\, dz_0 = dx$ et dk la mesure sur K qui vérifie la relation $dg = da\, dk$.

Soit a un élément régulier de A. Il résulte de la proposition 4.1 que l'opérateur $\sum\limits_{q\in Q} \pi(aq) \int_K \varphi(aqk)\pi(k)\, dk$ est à trace et que sa trace est égale à :

$$\sum_{q\in Q} r_\ell(aq) \int_{Z(G)_0\times\mathfrak{m}} \varphi(\exp X a z_0 q \exp(-X))\chi_\ell(az_0q)\, dz_0\, dX\ .$$

Comme $r_\ell(aqz_0) = r_\ell(aq)$ pour tout z_0 dans $Z(G)_0 = Z(K)$, on a :

$$\mathrm{Tr}\Big(\sum_{q\in Q} \pi(aq) \int_K \varphi(aqk)\pi(k)\, dk\Big) = \sum_{q\in Q} \int_{Z(G)_0} F_{\ell,\varphi}(aqz_0)\chi_\ell(aqz_0)\, dz_0\ .$$

La fonction sur Q définie par $q \to \operatorname{Tr}\big(\sum_{q\in Q} \pi(aq)Q \int_K \varphi(aqk)\pi(k)\, dk\big)$ est à support fini. Par conséquent

$$\operatorname{Tr}\Big(\sum_{q\in Q} \pi(aq)\Big) \int_K \varphi(aqk)\pi(k)\, dk\Big) = \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(az)\chi_\ell(az)\, dz\ .$$

Calculons la trace de l'opérateur $\pi(\varphi)$. On a :

$$\operatorname{Tr}(\pi(\varphi)) = \int_{A/Q} \operatorname{Tr}\Big(\sum_{q\in Q} \pi(aq) \int_K \varphi(aqk)\pi(k)\, dk\Big) d\dot{a}$$

où $d\dot{a}$ est la mesure quotient da/dq.

Le complémentaire dans A de l'ensemble des éléments réguliers de A est de mesure nulle pour la mesure da. Par conséquent :

$$\operatorname{Tr}(\pi(\varphi)) = \int_{A/Q} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(az)\chi_\ell(az)\, dz\, d\dot{a}\ .$$

Le groupe A/Q est isomorphe au groupe $G(\ell)/Z(G)$ et l'image de la mesure $d\dot{a}$ par l'isomorphisme $A/Q \to G(\ell)/Z(G)$ est la mesure $d\dot{x}$. On en déduit que :

$$\operatorname{Tr}(\pi(\varphi)) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(xz)\chi_\ell(xz)\, dz\, d\dot{x}\ .$$

COROLLAIRE 2. — *Le support de la distribution $\varphi \to \operatorname{Tr}\pi(\varphi)$ est l'adhérence de l'ensemble des conjugués des éléments de $G(\ell)$.*

Démonstration. — Notons Ω l'ensemble des conjugués des éléments de $G(\ell)'$ et S le support de la distribution $\varphi \to \operatorname{Tr}\pi(\varphi)$. Il résulte de la formule de théorème que $S \subset \overline{\Omega}$. Soit W le complémentaire dans G de S. Pour montrer que $S = \overline{\Omega}$ il suffit de montrer que $\Omega \cap W = \emptyset$. Supposons que $W \cap \Omega \neq \emptyset$. Comme W est invariant par les automorphismes intérieurs du groupe G, il existe a_0 dans $A' = G(\ell)' \cap A$, z_0 dans $Z(K)$ tels que $a_0 z_0$ soit dans W.

Il est facile de voir en utilisant le lemme 3.3 que l'application $(a, X, u) \to \exp Xa \exp(-X)u$ est un difféomorphisme de $A' \times \mathfrak{m} \times U$ sur $A'K$. D'après [8], XII, Th. 2.2, il existe une sous-variété fermée V de U telle que l'application $(v, z) \to vz$ soit un difféomorphisme de $V \times Z(U)$ sur U. On en déduit que l'application α définie par $\alpha(a, X, z, v) = \exp Xa \exp(-X)vz$ est un difféomorphisme de $A' \times \mathfrak{m} \times Z(U) \times V$ sur $A'K$. Soit ζ la fonction sur $A'K$ définie par $\zeta(\alpha(a, X, z, v)) = r_\ell(az)^{-1}\chi_\ell(az)^{-1}$. La fonction ζ est dans $C^\infty(A'K)$. Soit ψ une fonction dans $D(W \cap A'K)$, à valeurs positives, constante et non nulle au voisinage de $a_0 z_0$. Posons $\varphi = \zeta\psi$. On a :

$$\mathrm{Tr}\,\pi(\varphi) = \int_{A' \times Z(K) \times \mathfrak{m}} r_\ell(az)\chi_\ell(az)\varphi(\exp X az \exp(-X))\; dX\; da\; dz$$

où les mesures da et dz sont telles que l'on ait : $da\; dz = dx$.

Il en résulte que :

$$\mathrm{Tr}\,\pi(\varphi) = \int_{A' \times Z(K) \times \mathfrak{m}} \psi(\exp X az \exp(-X))\; dX\; dx\; da > 0\ .$$

D'autre part, comme φ est dans $D(W)$ on a $\mathrm{Tr}\,\pi(\varphi) = 0$. On en déduit que $W \cap \Omega = \emptyset$.

Remerciement. — Je tiens à remercier J. Y. Charbonnel dont l'aide m'a été précieuse au cours de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. H. ANH, Classification of connected unimodular Lie groups with discrete series, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30, 1 (1980), 159–192.

[2] L. AUSLANDER, B. KOSTANT, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Inv. Math., 14 (1971), 255–354.

[3] P. BERNAT et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Paris, Dunod, 1972.

[4] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitre 9, Hermann, Paris, 1959.

[5] J. Y. CHARBONNEL, La formule de Plancherel pour un groupe de Lie résoluble connexe, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 587 (1977), 32–76.

[6] C. CHEVALLEY, Théorie des groupes de Lie, vol. II, Groupes algébriques, Hermann, Paris, 1951.

[7] HARISH-CHANDRA, A formula for semisimple Lie groups, Am. J. of Math., 79 (1957), 733–760.

[8] G. HOCHSCHILD, The structure of Lie groups, San Francisco, Holden-Day, 1965.

[9] G. W. MACKEY, Induced representations of locally compact groups I, Ann. Math., 55 (1952), 101–139.

Manuscrit reçu le 15 janvier 1991.

Michalis ANOUSSIS,
Département de Mathématiques
Université de la mer Egée
83200 Karlovassi
Samos (Grèce).