

B. NADIR

JEAN-PIERRE VARENNE

**Régularité conormale classique des problèmes  
de Cauchy et de réflexion transverse pour un  
système  $2 \times 2$  semi-linéaire**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 40, n° 4 (1990), p. 849-866

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1990\\_\\_40\\_4\\_849\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_4_849_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# RÉGULARITÉ CONORMALE CLASSIQUE DES PROBLÈMES DE CAUCHY ET DE RÉFLEXION TRANSVERSE POUR UN SYSTÈME $2 \times 2$ SEMI-LINÉAIRE

par B. NADIR et J.-P. VARENNE

## 1. Introduction.

On considère un système semi-linéaire du premier ordre de taille  $2 \times 2$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , une hypersurface  $S$  non caractéristique et une hypersurface  $\Gamma$  de  $S$ . On suppose que, par  $\Gamma$ , passent deux hypersurfaces caractéristiques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  transverses et que les bicaractéristiques sur  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sont transverses à  $\Gamma$ . Soit  $u$  une solution dans une demi-région  $\Omega$  délimitée par  $S$ . On suppose que  $u$  est la restriction à  $\Omega$  d'une distribution conormale  $H^s$  par morceaux par rapport à  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 (s > 1)$ . On trouvera dans [7] des théorèmes d'existence pour de telles distributions. Pour le problème de Cauchy, on montre ici que si la trace du  $u$  sur  $S$  est classique par rapport à  $\Gamma$  (voir définition (2.2)), alors  $u$  est classique par rapport à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Pour le problème aux limites hyperbolique à donnée au bord sur  $S$  vérifiant la condition de Lopatinski uniforme, on montre que si cette donnée est classique par rapport à  $\Gamma$  et si  $u$  est classique par rapport à  $\Sigma_2$  (par exemple) supposée sortante, alors  $u$  est classique par rapport à l'hypersurface réfléchie  $\Sigma_1$ .

Rappelons que la propagation de la régularité conormale classique d'une onde conormale  $H_\Sigma^s$  par morceaux le long d'une seule hypersurface  $\Sigma$  a été étudiée par J. Rauch et M. Reed [9] pour un système semi-linéaire, et par A. Piriou [6] dans le cas complètement non linéaire.

---

*Mots-clés* : Équations aux dérivées partielles - Problème hyperbolique semi-linéaire - Non linéaire - Distributions conormales classiques - Propagation de régularité.

*Classification A.M.S.* : 35L60 - 35F30.

L'interaction de deux telles ondes a été traitée par B. Nadir et A. Piriou [4] pour les systèmes  $2 \times 2$ .

Les résultats démontrés ici ont été annoncés dans [5].

## 2. Notations et énoncés des résultats.

Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\Sigma$  désigne une hypersurface dans  $X$  ou la réunion de deux hypersurfaces  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  se coupant transversalement suivant une arête  $\Gamma$  de codimension deux, on définit (voir [1]) l'ensemble des distributions conormales  $H^s$  par rapport à  $\Sigma$  (pour  $s \in \mathbb{R}$ ), notée  $H_\Sigma^s(X)$ , comme l'ensemble des distributions  $u$  appartenant à l'espace de Besov  ${}^\infty H_{\text{loc}}^s(X)$  (voir [3]), ainsi que toutes leurs dérivées suivant des champs de vecteurs tangents à  $\Sigma$ . Dans le cas où  $\Sigma$  est une seule hypersurface, on sait (voir [3]), que ceci équivaut à :  $u \in C^\infty(X \setminus \Sigma)$  et, au voisinage de chaque point de  $\Sigma$ , pour des coordonnées locales  $x = (x_1, \dots, x_n)$  telles que :  $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ ,  $u$  est une distribution lagrangienne de la forme :

$$u(x) = \int e^{ix_1 \xi_1} a(x, \xi_1) d\xi_1,$$

où  $a(x, \xi_1) \in S^\mu(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  est un symbole ordinaire de degré

$$\mu = -s - \frac{1}{2}.$$

On note  $H_\Sigma^s(X) = H_\Sigma^s = I_\Sigma^s$  et  $I_\Sigma^{-\infty} = \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} I_\Sigma^\mu$ .

Dans le cas de deux hypersurfaces, au voisinage  $V$  d'un point  $p$  de l'arête  $\Gamma$ , on introduit (voir [4]), pour  $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ , les espaces  $J^{\mu, \nu}(V) = J^{\mu, \nu}$  (resp :  $I^{\mu, \nu}$ ), ensemble des distributions  $u$ , qui s'écrivent, dans des coordonnées locales où  $\Sigma_i = \{x_i = 0\}$  (pour  $i = 1, 2$ ) et  $x = (x_1, x_2, x'')$  :

$$u(x) = \iint e^{i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} a(x, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

avec pour le symbole  $a(x, \xi_1, \xi_2)$  des majorations du type :

Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ,

$$|\partial_x^\beta \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2}^{\alpha_2} a(x, \xi_1, \xi_2)| \leq C(1 + |\xi_1|)^{\mu - \alpha_1} (1 + |\xi_2|)^{\nu - \alpha_2}$$

(resp :

$$|\partial_x^\beta \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2}^{\alpha_2} a(x, \xi_1, \xi_2)| \leq C \begin{cases} (1 + |\xi_1|)^{\mu - \alpha_1} (1 + |\xi_2|)^{\nu - \alpha_2}, & \text{si } |\xi_2| \leq |\xi_1| \\ (1 + |\xi_2|)^{\mu - \alpha_2} (1 + |\xi_1|)^{\nu - \alpha_1}, & \text{si } |\xi_1| \leq |\xi_2|. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que si  $u \in J^{\mu, \nu}$  (resp :  $I^{\mu, \nu}$ ), alors  $u \in C^\infty$ , en dehors de  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , et au voisinage d'un point de  $(\Sigma_i \setminus \Gamma)$ ,  $u \in I_{\Sigma_i}^{\mu_i}$  (resp :  $I_{\Sigma_i}^{\mu_i}$ ) pour  $i = 1, 2$ . On sait aussi (voir [4]) que l'on peut se ramener à un symbole  $a$  indépendant de  $x_1$  et  $x_2$ .

De plus, on a (voir [4]) :  $H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s \subset I^{\mu, -1/2} \subset \bigcap_{(\varepsilon > 0)} H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^{s - \varepsilon}$  pour

$$\mu = -s - \frac{1}{2}.$$

On note, pour  $\mu < -1$ ,  $J_1^{\mu, \nu}$  le sous-espace des distributions  $u$  de  $J^{\mu, \nu}$ , telles que, sur  $\Sigma_1$ ,  $u = 0$  et  $Z_1 \dots Z_j u = 0$ , lorsque  $Z_1, \dots, Z_j$  sont des champs tangents à  $\Sigma_2$ , pour  $j$  vérifiant :  $\mu + j < -1$ . Avec une définition analogue pour  $J_2^{\mu, \nu}$ , on pose :  $J_{1,2}^{\mu, \nu} = J_1^{\mu, \nu} \cap J_2^{\mu, \nu}$ .

Notons qu'au voisinage d'un point de  $\Sigma_1 \setminus \Gamma$  (par exemple),  $J_1^{\mu, \nu}$  coïncide avec le sous-espace  $I_{\Sigma_1}^{\mu}$  des distributions  $u$  de  $I_{\Sigma_1}^{\mu}$  nulles à l'ordre  $(k + 1)$  sur  $\Sigma_1$ , où  $k$  est défini par :  $-2 \leq \mu + k < -1$ . On notera :  $I_{\Sigma_1}^{-\infty} = \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} I_{\Sigma_1}^{\mu}$ .

Les propriétés suivantes (voir [4]) interviennent constamment : Soient  $\mu, \mu', \nu < -1$ ,

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} u \in I_{\Sigma}^{\mu}, u' \in I_{\Sigma}^{\nu} \Rightarrow u \cdot u' \in I_{\Sigma}^{\nu} \\ u \in I_{\Sigma}^{\mu}, u' \in I_{\Sigma}^{\nu} \Rightarrow u \cdot u' \in I_{\Sigma}^{\mu + \nu + 1} \quad \text{si } \mu, \nu \notin \mathbb{Z} \\ \left( \bigcap_{\varepsilon > 0} I_{\Sigma}^{\mu + \nu + 1 + \varepsilon} \text{ si } \mu \text{ ou } \nu \in \mathbb{Z} \right) \\ u \in J_1^{\mu, \nu}, u' \in J_1^{\mu', \nu} \Rightarrow u \cdot u' \in J_1^{\mu', \nu} \\ u \in J_1^{\mu, \nu}, u' \in J_1^{\mu', \nu} \Rightarrow u \cdot u' \in J_1^{\mu + \mu' + 1, \nu} \quad \text{si } \mu, \mu' \notin \mathbb{Z} \\ \left( \bigcap_{\varepsilon > 0} J_1^{\mu + \mu' + 1 + \varepsilon, \nu} \text{ si } \mu \text{ ou } \mu' \in \mathbb{Z} \right) \end{array} \right.$$

On a des énoncés analogues pour  $J_2^{\mu, \nu}$ .

Rappelons maintenant la définition des distributions conormales classiques (voir [9], [4]). On se donne une famille de degrés d'homogénéité  $D \subset \mathbb{C}$ , vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \subset D, \bar{D} \subset D, D + D \subset D \\ \forall M \in \mathbb{R}, \{d \in D, \operatorname{Re}(d) \leq M\} \text{ est fini.} \end{array} \right.$$

Dans le cas d'une seule hypersurface  $\Sigma$ , on définit l'algèbre  $I_{\Sigma}^D$  des distributions conormales classiques bilatérales de type  $D$  par rapport à  $\Sigma$ , par (voir [9]) : Pour  $x = (x_1, x')$  et  $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ ,

$$(2.2) \quad u(x) \sim \sum_{d \in D} \sigma_d^{\pm}(x') |x_1|^d \text{ pour } \pm x_1 > 0, \text{ avec } \sigma_d^{\pm} \in C^{\infty},$$

au sens :  $u - \sum_{\operatorname{Re}(d) < M} \sigma_d^{\pm}(x') |x_1|^d \in I_{\Sigma}^{-M-1}$ .

Lorsque  $u$  est définie d'un seul côté de  $\Sigma$ , on notera encore  $I_{\Sigma}^D$  l'algèbre des distributions conormales classiques unilatérales par rapport à  $\Sigma$  (dans les coordonnées précédentes,  $u$  vérifiera (2.2) seulement pour  $x_1 > 0$ , par exemple). Le domaine de définition de  $u$  enlèvera toute ambiguïté à la notation.

Soit  $C$  un quadrant délimité par  $\Sigma_1, \Sigma_2$  au voisinage d'un point  $p$  de  $\Gamma$ . Pour  $\nu < -1$ , on définit l'espace  $J^{D, \nu}(C)$  comme l'ensemble des distributions  $u$ , dans  $C$ , telles que, dans des coordonnées locales où  $C = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ , on a, pour  $x = (x_1, x_2, x'')$  :

$$u(x) \sim \sum_{d \in D} \sigma_d(x_2, x'') x_1^d, \text{ avec } \sigma_d \in I_{\Gamma}^{\nu}$$

(d'un voisinage de  $p$  dans  $\Sigma_1$ ), au sens :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad u - \sum_{\operatorname{Re}(d) < M} \sigma_d(x_2, x'') x_1^d \in J_1^{-M-1, \nu}(C).$$

On a appelé  $J^{\mu, \nu}(C)$ ,  $I^{\mu, \nu}(C)$ ... l'espace des restrictions à  $C$  des éléments de  $J^{\mu, \nu}$ ,  $I^{\mu, \nu}$ ... On définit de même les espaces  $J^{\nu, D}$ . Notons qu'au voisinage d'un point de  $\Sigma_1 \setminus \Gamma$  (par exemple), l'espace  $J^{\nu, D}(C)$  coïncide avec l'espace  $I_{\Sigma_1}^D$ .

Notons que les hypothèses sur  $D$  impliquent :

$$D \subset \{0\} \cup \{\operatorname{Re}(d) > 0\},$$

et donc :

$$(2.3) \quad J^{D,v} \subset J^{-1-\delta,v}, \text{ où } \delta = \text{Min} \{ \text{Re}(d)/d \in D \setminus \mathbb{N} \}.$$

On dira que

$$u \in J_2^{D,v} (\text{resp} : J_1^{v,D}) \text{ si } u \in J^{D,v} \cap J_2^{-1-\delta,v} (\text{resp} : u \in J^{v,D} \cap J_1^{v,-1-\delta}).$$

Enfin, pour étudier la classicité simultanément par rapport à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , au voisinage d'un point  $p$  de  $\Gamma$ , on introduit la notion d'onde conormale biclassique dans  $C$  (voir [4]). On dit que :  $u \in J^{D,D}(C)$  si

$$u \sim \sum_{(d,d') \in D \times D} \sigma_{d,d'}(x'') x_1^d x_2^{d'} \quad \text{avec} \quad \sigma_{d,d'} \in C^\infty$$

au sens suivant :  $\forall (M, M') \in \mathbb{R}^2$

$$(2.4) \quad u - \sum_{\substack{\text{Re}(d) < M \\ \text{Re}(d') < M'}} \sigma_{d,d'}(x'') x_1^d x_2^{d'} \in J_1^{-M-1,D}(C) \\ + J_2^{D,-M'-1}(C) + J_{1,2}^{-M-1,-M'-1}(C).$$

On peut maintenant énoncer les principaux résultats obtenus. On considère un système semi-linéaire du premier ordre de taille  $2 \times 2$ , à  $n$  variables :

$$Lu + f(x, u) = 0, \quad \text{où} \quad L = \sum_{j=1}^n A_j(x) \partial_j$$

avec  $A_j(x) \in C^\infty(X)$  et  $f \in C^\infty(X \times \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ .

On désigne par  $S$  une hypersurface non caractéristique, et par  $\Gamma$  une hypersurface de  $S$ . On suppose que par  $\Gamma$  passent deux hypersurfaces caractéristiques transverses  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et que les bicaractéristiques sur  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sont transverses à  $\Gamma$ . On désigne par  $C$  un quadrant de bord  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  au voisinage d'un point  $p$  de  $\Gamma$ , contenant une des deux composantes connexes de  $S \setminus \Gamma$ . Soit  $u \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(C)$ ,  $s > 1$ , vérifiant :  $Lu + f(x, u) = 0$  dans  $C$  (l'espace  $H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(C)$  étant défini par restriction). On sait (voir [4]) que  $u \in I^{\mu,\mu-1}(C)$  pour  $\mu = -s - 1/2$ , et donc  $u \in I^{\mu,\mu}(C) = J^{\mu,\mu}(C)$ . On démontre alors le :

**THÉORÈME 1.** - Soit  $u \in J^{\mu,\mu}(C)$  vérifiant, pour  $\mu < -1$ ,  $Lu + f(x, u) = 0$  dans  $C$ . On suppose que  $u|_S \in I_\Gamma^D$  au voisinage de  $p$  : alors  $u \in J^{D,D}$  au voisinage de  $p$ .

Notons par  $B_1$  et  $B_2$  les courbes bicaractéristiques nulles pour  $L$ , tracées dans  $C$  sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , issues de  $p \in \Gamma$ .

Les propriétés de propagation d'une onde conormale classique sur une seule hypersurface, en dehors de l'arête (voir [9], [4]) permettent d'énoncer le :

**COROLLAIRE 1.1.** — Soit  $u \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(C)$ ,  $s > 1$  vérifiant  $Lu + f(x, u) = 0$  dans  $C$ . On suppose que  $u|_S \in I_\Gamma^p$  au voisinage de  $p$ . Alors  $u \in I_{\Sigma_i}^p$  au voisinage de chaque point de  $B_i \setminus \{p\}$  pour  $i = 1, 2$ .

La démonstration du théorème 1 est une version plus simple de la démonstration du théorème suivant, nécessaire pour le problème de réflexion.

On désigne par  $C^+$  un des deux demi-quadrants de  $C$  délimité par  $S$  au voisinage de  $p$ . On dit que  $u \in J^{\mu, \nu}(C^+)$  (resp :  $I^{\mu, \nu}(C^+)$ ) si  $u$  est la restriction à  $C^+$  d'un élément de  $J^{\mu, \nu}$  (resp :  $I^{\mu, \nu}$ ) et on définit les espaces  $J^{D, \nu}(C^+)$ ,  $J^{D, D}(C^+)$  en remplaçant  $C$  par  $C^+$  dans les définitions (2.2) et (2.4). On notera que, par exemple, pour  $u \in J^{D, \nu}(C^+)$ , cette définition (2.2) implique l'existence d'un prolongement du reste d'ordre  $M$ , quel que soit  $M$ , mais pas nécessairement d'un prolongement de  $u$  dans  $J^{D, \nu}(C)$ . On démontre alors le :

**THÉORÈME 2.** — Soit  $u \in J^{\mu, \mu}(C^+)$ , pour  $\mu < -1$ , vérifiant  $Lu + f(x, u) = 0$  dans  $C^+$ . On suppose que  $u|_S \in I_\Gamma^p$  au voisinage de  $p$ . Alors  $u \in J^{D, D}$  au voisinage de  $p$ .

On désigne par  $\Omega$  une des deux demi-régions délimitées par  $S$  et  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  les trois ouverts disjoints de  $\Omega$  délimités respectivement par  $(S, \Sigma_1)$ ,  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ,  $(\Sigma_2, S)$ . On a alors, pour le problème de Cauchy, avec le théorème 5.5 de [4], le :

**COROLLAIRE 2.1.** — Soit  $u$  solution de  $Lu + f(x, u) = 0$  dans  $\Omega$ . On suppose que  $u \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(\Omega_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$  avec  $s > 1$  et que  $u|_S \in I_\Gamma^p$ .

Alors  $u \in I_{\Sigma_i \setminus \Gamma}^p$  pour  $i = 1, 2$ .

On étudie maintenant le problème de réflexion d'une onde conormale classique. On fait l'hypothèse supplémentaire que l'opérateur  $L$  est strictement hyperbolique par rapport à une variable de temps tangentielle  $t = t(x)$  (les hypersurfaces  $\{t(x) = C^{te}\}$  sont transverses à  $S = \partial\Omega$ ) et

on se donne une condition au bord sur  $S$ : pour  $(b_1(x), b_2(x)) \in C^\infty$ ,  $Bu|_S = b_1(x)u_1(x) + b_2(x)u_2|_S = g$  telle que  $(L, B)$  vérifie la condition de Lopatinski uniforme. On fait également l'hypothèse géométrique suivante: Sur  $\Sigma_2$  (par exemple) les bicaractéristiques sortent de  $\Omega$  si  $t$  croît, et celles sur  $\Sigma_1$  entrent dans  $\Omega$  si  $t$  croît. On démontre alors le:

**THÉORÈME 3.** — Soit  $u$  solution de  $Lu + f(x, u) = 0$  dans  $\Omega$  et  $Bu|_S = g$ . On suppose que  $u \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(\Omega_i)$  pour  $i = 1, 2, 3$  avec  $s > 1$ ,  $g \in I_\Gamma^p$  au voisinage d'un point  $p$  de  $\Gamma$  et  $u \in I_{\Sigma_2 \Gamma}^p$  au voisinage de  $p$ . Alors  $u \in J^{D,D}$  au voisinage de  $p$  dans chaque  $\Omega_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , et donc  $u \in I_{\Sigma_1 \Gamma}^p$  au voisinage de  $p$ .

Si  $B_2$  désigne une bicaractéristique nulle pour  $L$  sur  $\Sigma_2$  coupant  $\Gamma$  en un point  $p$ , et  $B_1$  la bicaractéristique réfléchie sur  $\Sigma_1$  issue de  $p$ , on a le:

**COROLLAIRE 3.1.** — Soit  $u \in H_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2}^s(\Omega_i)$ , pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $s > 1$ , telle que  $Lu + f(x, u) = 0$  dans  $\Omega$  et  $Bu|_S = g$ . Si  $g \in I_\Gamma^p$  au voisinage de  $p$  et si  $u \in I_{\Sigma_2}^p$  au voisinage d'un point  $q$  de  $B_{2\Gamma}$  alors  $u \in I_{\Sigma_1}^p$  au voisinage de tous les points de  $B_{1\Gamma}$ .

*Remarque 1.* — On n'utilise en fait que la condition de Lopatinski uniforme microlocale sur le fibré conormal à  $\Gamma$  dans  $\Omega$ . Si de plus  $\Gamma$  est inclus dans une hypersurface spatiale, la condition de Lopatinski (voir [2], p. 362) suffit.

*Remarque 2.* — Le cas où l'on a, pour l'échelle de degrés:  $D \subset \mathbb{N}$ , donne le cas des fonctions  $C^\infty$  jusqu'au bord, par morceaux, déjà étudiées par d'autres méthodes dans [8].

### 3. Démonstration du théorème 2.

On notera, pour simplifier, dans tout ce qui suit,  $u \in J^{D,D}(C)$  (resp:  $J^{D,D}(C^+), \dots$ ) si il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $X$  tel que  $u \in J^{D,D}(V \cap C)$  (resp:  $u \in J^{D,D}(V \cap C^+)$ ).

La méthode de démonstration consiste à construire d'abord une solution approchée  $v$  dans  $J^{D,D}(C)$  de

$$(3.1) \quad \begin{cases} Lv + f(x, v) \sim 0 \\ (v - u)|_S \in I_\Gamma^{-\infty}. \end{cases}$$



Ensuite, on montre que  $w = u - v \sim 0$  dans  $C^+$ , ce qui termine la démonstration.

Pour l'étude des traces sur  $S$  des éléments de  $J^{\mu, \nu}$ , nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.1. — Soit  $S$  une hypersurface transverse à  $\Sigma_1, \Sigma_2$  passant par  $\Gamma$ . Soit  $\varphi \in J^{\mu, \nu}$ . Alors  $\varphi|_S \in I_{\Gamma}^{\text{sup}(\mu, \nu)}$  pour  $\mu, \nu < -1$ . Si de plus  $\varphi \in J_1^{\mu, \nu}$ , alors  $\varphi|_S \in I_{\Gamma}^{\mu}(S)$ .

Démonstration. — On commence par montrer la deuxième propriété : Dans des coordonnées où  $\Sigma_i = \{x_i = 0\}$  ( $i=1, 2$ ) et  $S = \{x_1 = x_2\}$ , on a :

$$\varphi(x) = \iint e^{ix_1\xi_1 + ix_2\xi_2} b(x'', \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

avec

$$(3.2) \quad |\partial_{x''}^{\beta} \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2}^{\alpha_2} b| \leq C(1 + |\xi_1|)^{\mu - \alpha_1} (1 + |\xi_2|)^{\nu - \alpha_2}.$$

On omettra par la suite la variable  $x''$  qui ne joue aucun rôle et on notera  $\partial_1 b$  (resp :  $\partial_2 b$ ) pour  $\partial_{\xi_1} b$  (resp :  $\partial_{\xi_2} b$ ).

Puisque  $\varphi \in J_1^{\mu, \nu}$ , on a, pour  $k_1/$

$$-2 \leq \mu + k_1 < -1, \forall j, \forall \ell \leq j + k_1,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial x_1} (x_1^j \varphi)|_{\Sigma_1} = 0,$$

d'où

$$(3.3) \quad \forall \xi_2 \in \mathcal{R}, \forall \alpha_2 \in \mathcal{N}, \int \xi_1^{\ell} \partial_2^{\alpha_2} \partial_1^j b(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = 0.$$

On pose  $\psi = \varphi|_S$ . Montrons :  $\psi \in I_{\Gamma}^{\mu}$ . Il en découlera immédiatement que :  $\psi \in I_{\Gamma}^{\mu}$ . On peut écrire  $\psi$  sous la forme :

$$\psi(x_1, x_1, x'') = \int e^{ix_1\eta} d(\eta) d\eta \quad \text{avec} \quad d(\eta) = \int b(\eta - \xi_2, \xi_2) d\xi_2.$$

Il s'agit de montrer que :

$$(3.4) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad |\partial_{\eta}^j d(\eta)| \leq C(1 + |\eta|)^{\mu - j}.$$

Dans  $\partial_{\eta}^j d(\eta) = \int \partial_{\eta}^j b(\eta - \xi_2, \xi_2) d\xi_2$ , on découpe l'intégrale suivant deux régions  $D_1$  et  $D_2$ .

On pose  $D_1 = \{\xi_2/\exists c < 1, c' > 1 \text{ telles que : } c\eta < \xi_2 < c'\eta\}$  et  $D_2 = \complement D_1$ . Sur  $D_2$ , on a :  $|\xi_2 - \eta| \geq c|\eta|$ , d'où l'on déduit une majoration du type (3.4) pour l'intégrale correspondante. Sur  $D_1$ , on pose  $z = \eta - \xi_2$ , d'où :

$$\left| \int_{D_2} \partial_1^j b(\eta - \xi_2, \xi_2) d\xi_2 \right| = \left| \int_{|z| \leq c_1|\xi_2| \leq c_2|\eta|} \partial_1^j b(z, \eta - z) dz \right|.$$

On applique alors à  $\partial_1^j b(z, \eta - z)$  la formule de Taylor à l'ordre  $(j + k_1)$  au point  $(z, \eta)$ . On obtient immédiatement une majoration du type (3.4) pour le terme provenant du reste de Taylor. Pour un terme quelconque provenant du développement de Taylor, on l'obtient en utilisant (3.3) afin de remplacer le domaine d'intégration par  $\{|z| > c_2|\eta|\}$ , ce qui termine la démonstration de (3.4).

La démonstration de la première propriété du lemme 3.1 est une version plus simple de la précédente, la relation (3.3) étant remplacée par :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k/0 \leq k < j, \forall \xi_1 \in \mathbb{R}, \int \partial_1^j \partial_2^k b(\xi_1, \xi_2) \xi_1^k d\xi_1 = 0,$$

qui se vérifie par intégrations par parties.

Pour démontrer le théorème 2, on commence par se ramener à un système réduit. On peut choisir des coordonnées locales  $x = (x_1, \dots, x_n)$  telles que :  $\Sigma_i = \{x_i = 0\}$ ,  $\{x_i = C^{te}\}$  soient caractéristiques ( $i=1, 2$ ) et  $S = \{x_1 = x_2\}$ .

On désigne par  $C$  le quadrant  $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$  et  $C^+ : \{x_1 > 0, x_1 > x_2\}$ . On sait (voir [4]) qu'il existe une base de  $\mathbb{C}^2$  dans laquelle l'opérateur prend la forme réduite : pour  $u = (u_1, u_2)$ ,

$$Lu = \begin{cases} X_2 u_1 + T_1(x, \partial'') u_2 \\ X_1 u_2 + T_2(x, \partial'') u_1 \end{cases}$$

où

$$X_2 = \partial_2 + \sum_{j=3}^n a_j(x) \partial_j; \quad X_1 = \partial_1 + \sum_{j=3}^n b_j(x) \partial_j,$$

avec  $(a_j, b_j) \in C^\infty$ , et  $T_1, T_2$  sont des opérateurs différentiels à coefficients  $C^\infty$ , de degré un en  $\partial'' = (\partial_3, \dots, \partial_n)$ . Pour  $x_1 = 0, X_2$  est le champ bicaractéristique sur  $\Sigma_1$  (et  $X_1$  sur  $\Sigma_2$ , pour  $x_2 = 0$ ).

On définit les espaces :  $F_{\sigma, \sigma'} = J_1^{\sigma, D} + J_2^{D, \sigma} + J_{1,2}^{\sigma, \sigma'}$ .

(On notera  $F_{\sigma} = F_{\sigma, \sigma}$ ) et  $E = \bigcap_{\sigma} F_{\sigma}$ .

On va construire, dans le quadrant  $C$  (au voisinage de  $p$ ), un élément  $v$  de  $J^{D, D}(C) : v \sim \sum_{d, d'} \sigma_{d, d'}(x'') x_1^d x_2^{d'}$  vérifiant :

$$(3.5) \quad \begin{cases} Lv + f(x, v) \in E(C); \\ v|_S - u|_S \in \dot{I}_{\Gamma}^{-\infty} \end{cases}$$

(on a prolongé  $u$  des deux côtés de  $S$  par continuité).

Si  $\sigma_{d, d'} = (\sigma_{d, d'}^1, \sigma_{d, d'}^2)$ , la première équation de (3.5) équivaut à (voir [4]) :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \sigma_{d, d'}^1 = F_1(\sigma_{r, r'}, (r, r') \in \Delta_{d, d'-1}) & \text{pour } d' \neq 0 \\ \sigma_{d, d'}^2 = F_2(\sigma_{r, r'}, (r, r') \in \Delta_{d-1, d'}) & \text{pour } d \neq 0 \end{cases}$$

où  $\Delta_{d, d'} = \{(r, r') \in D \times D / \operatorname{Re}(r) \leq \operatorname{Re}(d), \operatorname{Re}(r') \leq \operatorname{Re}(d')\}$  et  $F_1, F_2$  sont des fonctions  $C^\infty$  des  $\sigma_{r, r'}$  et de leurs dérivées premières.

En posant :  $u(x_1, x_1, x') \sim \sum_{\ell \in D} \gamma_\ell(x'') x'_\ell$ , la deuxième équation de (3.5) donne :

$$(3.7) \quad \sum_{d+d'=\ell} \sigma_{d, d'} = \gamma_\ell.$$

Alors les relations (3.6) et (3.7) permettent de déterminer successivement tous les coefficients  $\sigma_{d, d'}$ .

En effet, on connaît  $\sigma_{0,0} = \gamma_0 = u|_{\Gamma}$ . On détermine  $\sigma_{0, d'}^1$  et  $\sigma_{d, 0}^2$  par (3.6). Soit  $d_0 \in D \setminus \{0\}$ .

On suppose connus  $\sigma_{r, r'}$  pour  $\operatorname{Re}(r) + \operatorname{Re}(r') < \operatorname{Re}(d_0)$ . Alors, pour  $\operatorname{Re}(d) + \operatorname{Re}(d') = \operatorname{Re}(d_0)$ ,  $\sigma_{d, d'}^1$  avec  $d' \neq 0$  et  $\sigma_{d, d'}^2$  avec  $d \neq 0$  sont déterminés par (3.6), et donc  $(\sigma_{0, \ell} + \sigma_{\ell, 0})$  par (3.7) pour  $\operatorname{Re}(\ell) = \operatorname{Re}(d_0)$ . On en déduit  $\sigma_{\ell, 0}^1, \sigma_{0, \ell}^2$  et donc  $\sigma_{d, d'}$ , pour  $\operatorname{Re}(d) + \operatorname{Re}(d') = \operatorname{Re}(d_0)$ .

La proposition 5.4 de [4] assure l'existence de  $v$  dans  $J^{D, D}(C)$  solution de (3.5).

Dans  $C^+$ , on pose :  $w = u - v$ . On va montrer que :  $w \in E(C^+)$ .  
On procède par récurrence.

D'après (2.3),  $\exists \lambda$  tel que :  $-2 \leq \lambda < -1$  avec  $u, v, w \in J^{\lambda, \lambda}(C^+)$ .

Soit  $W \in J^{\lambda, \lambda}(C)$  tel que  $W|_{C^+} = w$ . En écrivant :

$$W(x) = W(0, x_2, x'') x_1^0 + W(x_1, 0, x'') x_2^0 + (W - W|_{\Sigma_1} - W|_{\Sigma_2}),$$

on en déduit que :  $w \in F_\lambda(C^+)$ . On rappelle que :

$$(3.8) \quad W \in J^{\lambda_1, \lambda_2} \Rightarrow W|_{\Sigma_i} \in I_\Gamma^{\lambda_i} \text{ pour } i = 1, 2.$$

On suppose maintenant que :  $w \in F_\sigma(C^+)$  pour  $\sigma \leq \lambda < -1$ .

Montrons que :  $w \in F_{\sigma-p}(C^+)$  avec  $0 < p < -\lambda - 1$  (donc  $p < 1$ ).

Pour  $w = (w_1, w_2)$ , on a les relations :

$$(3.9) \quad \begin{cases} X_2 w_1 + T_1(x, \partial'') w_2 + f_1(x, u) - f_1(x, v) \in E(C^+) \\ X_1 w_2 + T_2(x, \partial'') w_1 + f_2(x, u) - f_2(x, v) \in E(C^+). \end{cases}$$

On commence par montrer :

$$(3.10) \quad \begin{cases} w_1 \in F_{\sigma, \sigma-1}(C^+) \\ w_1|_{\Sigma_2} \in I_\Gamma^{\sigma-1}. \end{cases}$$

On vérifie, comme dans [4], le

LEMME 3.2. -  $J^{D, D} + F_{\sigma, \sigma'}(C)$  (resp :  $J^{D, D} + F_{\sigma, \sigma'}(C^+)$ ) est stable par les fonctions  $C^\infty$ .

D'où on déduit :

$$(3.11) \quad f(x, u) - f(x, v) = h_1 w_1 + h_2 w_2$$

avec  $(h_1, h_2)$  dans  $J^{D, D} + F_\sigma(C^+)$ .

Notons que  $w \in F_{\sigma, \sigma'}(C^+)$  si et seulement si, il existe  $W \in F_{\sigma, \sigma'}(C)$  tel que :  $W|_{C^+} = w$  (car le développement classique dans  $W$  est fini).

On vérifie aisément :

$$(3.12) \quad \text{Si } \varphi \in J^{D, D} + F_\sigma(C) \text{ et } \psi \in F_\sigma(C) \text{ (resp : } C^+),$$

alors  $\varphi\psi \in F_\sigma(C)$  (resp :  $C^+$ ). On déduit de (3.12) :

$$f(x, u) - f(x, v) \in F_\sigma(C^+).$$

Par un changement de coordonnées conservant  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , on peut ramener la première équation de (3.9) à :

$$\partial_2 w_1 = g_1 \in F_\sigma(C^+),$$

d'où

$$(3.13) \quad w_1(x) = w_1(x_1, x_1, x'') + \int_{x_1}^{x_2} g_1(x_1, s, x'') ds.$$

Posons  $\Phi(x) = \int_0^{x_2} g_1(x_1, s, x'') ds$ . Alors,

$$w_1(x) = w_1(x_1, x_1, x'') - \Phi(x_1, x_1, x'') + \Phi(x).$$

D'après le lemme 4.3.1 de [4],  $\Phi \in F_{\sigma, \sigma-1}(C^+)$ . La régularité de la première ligne ainsi que la deuxième ligne de (3.10) s'en déduisent, grâce au :

LEMME 3.3. — Dans  $C$  ou  $C^+$ , soit  $\Phi \in F_{\sigma, \sigma-1}$ , nulle sur  $\Sigma_2$  (resp :  $\Phi \in F_{\sigma-1, \sigma}$ , nulle sur  $\Sigma_1$ ), tel que :

$$\Phi(x) = \int_C^{x_2} g(x_1, s, x'') ds$$

avec

$$C \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g \in F_\sigma \quad (\text{resp} : \Phi(x) = \int_C^{x_1} g(s, x_2, x'') ds),$$

alors  $\Phi|_S \in I_\Gamma^{\sigma-1}$ .

Montrons maintenant :

$$(3.14) \quad \begin{cases} w_2 \in F_{\sigma-1, \sigma}(C^+) \\ w_2|_{\Sigma_2} \in I_\Gamma^{\sigma-2}. \end{cases}$$

La première propriété se démontre par un raisonnement analogue à celui développé pour  $w_1$ .

Posons  $\gamma_2 = w_2|_{\Sigma_2}$ . Par restriction à  $\Sigma_2$  de la deuxième équation de (3.9), on obtient, après changement de coordonnées, en utilisant (3.11) et (2.1) :

$$\begin{cases} (\partial_1 + h'_2)\gamma_2 = r, & \text{avec } r \in I_\Gamma^{\sigma-1}, h'_2 \in I_\Gamma^1 \\ \gamma_2|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

En intégrant, on obtient :  $\gamma_2 \in I_\Gamma^{\sigma-2}$ , d'où (3.14).

On pose maintenant :  $w' = w - w(x_1, 0, x'')$ . On note  $\gamma = w(x_1, 0, x'')$ . On a :  $w' \equiv w[F_{\sigma-1}]$  et il nous faut montrer que  $w' \in F_{\sigma-p}(C^+)$ . Montrons d'abord :

$$(3.15) \quad w'_2 \in F_{\sigma-p}(C^+).$$

On vérifie que :  $L\gamma + f(x, v + \gamma) - f(x, v) \in F_{\sigma-1}(C^+)$ , et donc les équations vérifiées par  $w'$  sont du même type que celles pour  $w$ , mais avec reste dans  $F_{\sigma-1}$ . On obtient :

$$(3.16) \quad \begin{cases} X_2 w'_1 + T_1(x, \partial'') w'_2 + h_1 w'_1 + h_2 w'_2 \in F_{\sigma-1}(C^+) \\ X_1 w'_2 + T_2(x, \partial'') w'_1 + k_1 w'_1 + k_2 w'_2 \in F_{\sigma-1}(C^+) \end{cases}$$

avec  $(h_1, h_2, k_1, k_2)$  dans  $J^{D,D} + F_{\sigma}(C^+)$ .

Nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du lemme (5.5.6) de [4].

LEMME. - 3.4. - Soit  $\lambda < -1$ ,  $0 < p < -\lambda - 1$ ,  $\sigma - p \leq s \leq \sigma < -1$ ,  $\sigma' - p \leq s' \leq \sigma' < -1$ .

Soit  $h \in J^{D,D} + F_{\sigma, \sigma'}(C^+)$  et  $h \in J^{\lambda, \lambda}(C^+)$ ,  $\varphi \in F_{s, s'}(C^+)$ .

Alors, on obtient :

1°  $h\varphi \in F_{\sigma, s'}(C^+)$  si  $\varphi|_{\Sigma_2} = 0$ ,

2°  $h\varphi \in F_{s, s'}(C^+)$  si  $\varphi$  admet un prolongement dans  $J_1^{\lambda, D}(C) + J_{1,2}^{\lambda, \sigma'}(C)$  (donc à trace nulle sur  $\Sigma_1$ ),

3°  $h\varphi \in F_{s, s'}(C^+)$  si les 2 conditions précédentes sont vérifiées.

On en déduit, à partir de (3.16) :

$$(3.17) \quad \begin{cases} (\partial_1 + k_2) w'_2 = g_2 \in F_{\sigma, \sigma-p}(C^+), \text{ avec } k_2 \in J^{D,D} + F_{\sigma}(C^+) \\ w'_{2,S} \in I_{\Gamma}^{\sigma-2}. \end{cases}$$

L'intégration de cette équation différentielle linéaire donne :  $w'_2 \in F_{\sigma-1, \sigma-p} \subset F_{\sigma-p}(C^+)$ , d'où (3.15).

Montrons maintenant :

$$(3.18) \quad w'_1 \in F_{\sigma, \sigma-1-p}(C^+).$$

On peut également ramener l'équation pour  $w'_1$  à :

$$\begin{cases} (\partial_2 + h_1) w'_1 = g_1 \in F_{\sigma, \sigma-p}(C^+) \\ w'_{1\Sigma_2} = 0 \end{cases}$$

et  $h_1 \in J^{D,D} + F_{\sigma,\sigma-p}(C^+)$ , d'après (3.10) et (3.15). On en déduit (3.18) par intégration.

On a donc obtenu :

$$w' = (w'_1, w'_2) \text{ avec } w'_1 \in F_{\sigma,\sigma-p-1}(C^+), \quad w'_2 \in F_{\sigma-1,\sigma-p}(C^+).$$

Soit  $W'$  un prolongement de  $w'$  dans  $C$ , avec  $W'_1 \in F_{\sigma,\sigma-p-1}$ ,  $W'_2 \in F_{\sigma-1,\sigma-p}$ . On pose  $w''(x) = w'(x) - W'(0, x_2, x'')$ , dans  $C^+$ .

On a  $w'' \equiv w'[F_{\sigma-p}]$  et  $w''$  admet un prolongement dans  $C$ , dans  $J_T^{\sigma,D} + J_{1,2}^{\lambda,\sigma-p}$ , à traces nulles sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Il reste seulement à vérifier :

$$(3.19) \quad w''_1 \in F_{\sigma-p}(C^+).$$

Par le lemme 3.4, on obtient pour  $w''_1$  :

$$\begin{cases} (\partial_2 + h_1)w''_1 = g_1 \in F_{\sigma-p,\sigma}(C^+), & \text{avec } h_1 \in J^{D,D} + F_{\sigma}(C^+) \\ w''_1|_{\Sigma_2} = 0. \end{cases}$$

On en déduit (3.19) par intégration.

On a donc vérifié que :  $w \in F_{\sigma-p}(C^+)$  ce qui termine la démonstration du théorème 2.

#### 4. Démonstration du théorème 3.

On se place dans le même système de coordonnées, avec le même système réduit que ceux explicités dans la démonstration du théorème 2, et les mêmes conventions pour les notations.

Le demi espace  $\Omega$  devient :  $\{x_2 < x_1\}$ , le demi quadrant  $\Omega_1 : \{x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 < x_1\}$ , le quadrant  $\Omega_2 : \{x_1 > 0, x_2 < 0\}$ , et  $\Omega_3 : \{x_1 < 0, x_2 < 0, x_1 < x_2\}$ .

La condition de Lopatinski uniforme (voir [2], par exemple) implique  $b_1 \neq 0$  dans la condition au bord. On suppose désormais que :

$$(4.1) \quad b_1 = 1.$$

Pour démontrer le théorème 3, on étudie séparément chacun des ouverts  $\Omega_i (i=1,2,3)$ . On note  $u^i = u_{i,\Omega_i}$ , pour  $i = 1, 2, 3$ .

*Première étape :* Montrons que  $u^1 \in J^{D,D}(\Omega_1)$ .

On note encore  $C$  le quadrant  $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$  et, pour se référer à la démonstration du théorème 2,  $C^+$  au lieu de  $\Omega_1$ . On commence par montrer que la conormalité classique de  $u^1$  par rapport à  $\Sigma_2$  se propage jusqu'au bord. Si  $q \in \Sigma_2 \setminus \Gamma$  et  $p$  désigne le point d'intersection de  $\Gamma$  et de la bicaractéristique nulle sur  $\Sigma_2$  issue de  $q$ , on montre, en reprenant la démonstration du théorème (4.5) de [4], le lemme :

LEMME 4.1. — Soit  $u^1 \in J^{\mu,\mu}(C^+)$ ,  $\mu < -1$ , solution de  $Lu^1 + f(x, u^1) = 0$ . Si  $u^1 \in I_{\Sigma_2}^D$  (au voisinage de  $q$ ), alors  $u^1 \in J^{\mu,D}(C^+)$  au voisinage de  $p$ .

Pour prouver le lemme 4.1, on construit  $\ell(x)$  dans  $J^{\mu,D}(C)$  ( $\ell(x) \sim \sum_{d' \in D} \sigma_{d'}(x_1, x'')x_2^{d'}$  dans  $C$ )/

$$(4.2) \quad \begin{cases} L(\ell) + f(x, \ell) \in J_2^{\mu, -\infty}(C) \\ \ell|_{\Sigma_2} = u^1|_{\Sigma_2} \\ \ell - u^1 \in I_{\Sigma_2}^{-\infty} \text{ au voisinage de } q, \end{cases}$$

et on vérifie ensuite que  $(u^1 - \ell) \in J_2^{\mu,\sigma}(C^+)$ ,  $\forall \sigma$ .

On construit maintenant, dans  $C$ , une solution  $v$  dans  $J^{D,D}(C)$  ( $v \sim \sum \sigma_{d,d'}(x'')x_1^d x_2^{d'}$ ) de :

$$(4.3) \quad Lv + f(x, v) \in E(C)$$

$$(4.4) \quad \begin{cases} v|_{\Sigma_\Gamma} = \ell|_{\Sigma_\Gamma} \\ (Bv - Bu^1)|_S \in I_\Gamma^{-\infty} \end{cases}$$

$$(4.5)$$

où  $\ell(x)$  est la solution de (4.2) précédente.

On procède comme dans la résolution de (3.5). L'équation (4.3) donne encore (3.6).

Dans la récurrence, pour  $\text{Re}(d) + \text{Re}(d') = \text{Re}(d_0)$ , (3.6) détermine  $\sigma_{d,d'}^1$  si  $d' \neq 0$ ,  $\sigma_{d,d'}^2$  si  $d \neq 0$ , (4.4) détermine  $\sigma_{0,d'}^2$  (mais aussi  $\sigma_{0,d'}^1$ ) et on vérifie qu'il y a compatibilité avec la détermination précédente) et enfin (4.5) détermine  $\sigma_{d,v}^1$  grâce à la condition  $b_1 \neq 0$ .

On pose maintenant :  $w = u^1 - v$ , et, comme pour le théorème 2, il faut vérifier que :  $w \in E(C^+)$ . On montre, de même, que :  $w \in F_\sigma(C^+)$  pour  $\sigma < -1 \Rightarrow w \in F_{\sigma-p}(C^+)$  avec  $0 < p < -\lambda - 1$  (où  $\lambda$  est tel que :  $u^1, v, w \in J^{\lambda,\lambda}(C^+)$ ,  $\lambda < -1$ ).



On a encore (3.9) pour  $w$ , et

$$(4.6) \quad w_1 + b_2 w_{2|S} \in \dot{I}_\Gamma^{-\infty}.$$

Comme dans la démonstration du théorème 2, on obtient :

$$w_1 \in F_{\sigma, \sigma-1}(C^+), \quad w_2 \in F_{\sigma-1, \sigma}(C^+)$$

(car  $w \in F_\sigma$  entraîne :  $w_{|S} \in \dot{I}_\Gamma^\sigma$ , ce qui suffit pour reprendre la démonstration). Montrons maintenant :  $w_{|S} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-p}$ .

On écrit  $w_2 = (u_2^1 - \ell_2) + (\ell_2 - v_2)$ . Par le lemme 3.1,  $(u_2^1 - \ell_2)|_S \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-p}$  et en intégrant l'équation vérifiée par  $(v_2 - \ell_2)$ , à partir de la condition initiale (4.4), on obtient, par application du lemme 3.1 :  $(v_2 - \ell_2)|_S \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-1}$  et donc  $w_{2|S} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-p}$ , puis  $w_{1|S} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-p}$  par (4.6).

On étudie maintenant les traces de  $w$  sur  $\Sigma_2$ . On obtient :

$$w_{1|\Sigma_2} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-p} \text{ par (3.13)} \quad \text{et} \quad w_{2|\Sigma_2} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-1-p}$$

comme dans (3.14) (avec ici  $w_{1|\Sigma_2} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-p}$ , au lieu de  $w_{1|\Sigma_2} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-1}$  de (3.10)).

On modifie maintenant  $w$  afin de se ramener à une distribution ayant un prolongement dans  $C$  à traces nulles sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , afin de pouvoir utiliser le lemme 3.4. On sait que :  $\forall \sigma' \in \mathbb{R}, \exists R_{\sigma'} \in J_2^{\mu, \sigma'}(C)$  tel que :  $(R_{\sigma'})|_{C^+} = u^1 - \ell$ . Par conséquent,  $R_{\sigma'} + (\ell - v)$  constitue un prolongement de  $w$  dans  $J_2^{\mu, \sigma'}(C) + J^{\lambda, D}(C)$ .

On prend  $\sigma' = \sigma - 2$  et on pose :  $w'' = w - w(x_1, 0, x'') - R_{\sigma-2}(0, x_2, x'')$  dans  $C^+$ .

Alors  $w''$  convient, car :  $w'' \equiv w[F_{\sigma-p}]$ ,  $w''_{|\Sigma_2} = 0$  et  $w''$  admet un prolongement dans  $J_1^{\lambda, D} + J_{1,2}^{\lambda, \sigma-2}(C)$  (donc à trace nulle sur  $\Sigma_1$ ).

On vérifie ensuite que  $w'' \in F_{\sigma-p}(C^+)$ , par des raisonnements analogues à ceux développés dans le théorème 2, pour (3.15) et (3.19), ce qui termine la démonstration de la première étape.

*Deuxième étape :* On montre que  $u^2 \in J^{D, D}(\Omega_2)$  :

Dans le quadrant  $\Omega_2$ , on a :  $Lu^2 + f(x, u^2) = 0$ ,  $u^2 \in J^{\mu, \mu}(\Omega_2)$ , et  $u^2$  classique par rapport à  $\Sigma_2$  en dehors de  $\Gamma$ .

On en déduit, comme au lemme 4.1, que  $u^2 \in J^{\mu, D}(\Omega_2)$  et donc  $u^2_{|\Sigma_1} \in I_\Gamma^D$ .

Puisque  $u^1 \in J^{D, D}(\Omega_1)$ , on a :  $u^1_{|\Sigma_2} \in I_\Gamma^D$ .

Mais l'équation  $Lu + f(x,u) = 0$  étant vérifiée au sens des distributions dans tout  $\Omega$ , la forme réduite du système montre que:  $\partial_2 u_1$  (resp.:  $\partial_1 u_2$ ) doit être une fonction, donc  $u_1$  est continue à travers  $\Sigma_2$  (resp.:  $u_2$  à travers  $\Sigma_1$ ).

On a donc:  $u_{1\Sigma_2}^2 \in I_\Gamma^D$  et le théorème 5.5 de [4] donne:  $u^2 \in J^{D,D}(\Omega_2)$ .

Troisième étape: Montrons que  $u^3 \in J^{D,D}(\Omega_3)$ .

De  $u^2 \in J^{D,D}(\Omega_2)$  et  $u_2$  continue à travers  $\Sigma_1$ , on déduit:

$$u_{2\Sigma_1}^3 \in I_\Gamma^D.$$

Dans  $\Omega_3$ , on a:

$$\begin{cases} Lu^3 + f(x,u^3) = 0 \\ u_{2\Sigma_1}^3 \in I_\Gamma^D \\ u_1^3 + b_2 u_{2\Sigma_1}^3 = g \in I_\Gamma^D. \end{cases}$$

Comme d'habitude, on construit d'abord  $v$  dans  $J^{D,D}(C')$  solution dans  $C'$ , de:

$$\begin{cases} Lv + f(x,v) \sim 0 \\ v_{2\Sigma_1} = u_{2\Sigma_1}^3 \\ Bv|_S - g \in \dot{I}_\Gamma^{-\infty} \end{cases}$$

où  $C'$  désigne le quadrant  $\{x_1 < 0, x_2 > 0\}$  contenant  $\Omega_3$ , et ensuite on vérifie que  $w = u^3 - v \in E(\Omega_3)$ , en montrant que:  $w \in F_\sigma(\Omega_3) \Rightarrow w \in F_{\sigma-p}(\Omega_3)$ .

Nous indiquons brièvement les étapes pour ce dernier point, en notant les modifications par rapport aux démonstrations précédentes.

On a toujours  $w_1 \in F_{\sigma,\sigma-1}$ ,  $w_2 \in F_{\sigma-1,\sigma}$  (en intégrant l'équation pour  $w_2$  à partir de la condition initiale  $w_{2\Sigma_1} = 0$ ) et  $w_{1S} \in \dot{I}_\Gamma^{\sigma-1}$  par le lemme (3.3) et la condition au bord. Par restriction à  $\Sigma_1$  de l'équation pour  $w_1$  et en intégrant avec la condition initiale  $w_{1\Gamma} = 0$ , on obtient  $w_{1\Sigma_1} \in \dot{I}_\Gamma^{-\infty}$ .

On pose  $w' = w - w(0, x_2, x'')$ . En intégrant l'équation différentielle vérifiée par  $w'_1$  à partir de  $S$ , on obtient:

$$w'_1 \in F_{\sigma-p,\sigma-1}, \text{ puis } w'_2 \in F_{\sigma-1-p,\sigma}$$

comme pour (3.18).

Soit  $W'_1$  prolongeant  $w'_1$  dans  $F_{\sigma-p, \sigma-1}(C')$  et  $W'_2$  prolongeant  $w'_2$  dans  $F_{\sigma-1-p, \sigma}(C')$ . On pose  $w''(x) = w'(x) - (W')(x_1, 0, x'')$ . Alors  $w'' \equiv w[F_{\sigma-p}]$ ,  $w''_{|\Sigma_1} = 0$ ,  $w''$  admet dans  $C'$  un prolongement dans  $J_2^{p, \sigma} + J_{1,2}^{\sigma-p, \lambda}$  (donc à trace nulle sur  $\Sigma_2$ ).

Par des raisonnements analogues à ceux exposés dans les démonstrations précédentes, on vérifie que :  $w'' \in F_{\sigma-p}$ , ce qui termine la démonstration de la troisième étape et du théorème 3.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. BONY, Interaction de singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 22, 1979-1980 et 2, 1981-1982.
- [2] J. CHAZARAIN et A. PIRIOU, Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [3] L. HORMANDER, The Analysis of linear partial differential operators, III, Springer-Verlag, 1985.
- [4] B. NADIR et A. PIRIOU, Ondes semi-linéaires conormales par rapport à deux hypersurfaces transverses, Duke Math. J., 58 (1989), 577-599.
- [5] B. NADIR et J.-P. VARENNE, C. R. Académie des Sciences de Paris, t. 309, série I, (1989), 817-820.
- [6] A. PIRIOU, Calcul symbolique non linéaire pour une onde conormale simple, Ann. Inst. Fourier, tome XXXVIII, fascicule 4 (1988), 173-187.
- [7] A. PIRIOU et J.-P. VARENNE, Ondes semi-linéaires discontinues conormales par morceaux, Note aux C.R.A.S. de Paris, t. 311, série I (1990), 607-610.
- [8] J. RAUCH et M. REED, Discontinuous Progressing Waves for Semilinear Systems, Comm. in Partial Differential Equations, 10 (9) (1985), 1033-1075.
- [9] J. RAUCH et M. REED, Propagation of Equality and classicality for conormal solution of semilinear systems, Comm. in Partial Differential Equations, 13, n° 10 (1988).

Manuscrit reçu le 23 mai 1990,  
révisé le 9 octobre 1990.

B. NADIR et J.-P. VARENNE,  
Université de Nice  
I.M.S.P. Mathématiques  
Parc Valrose  
06034 Nice Cedex (France).