ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

MICHEL HERVÉ

Caractère lipschitzien d'une distance associée à des champs de vecteurs engendrant une algèbre de Lie de rang maximal. Quelques conséquences

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 1 (1990), p. 131-152

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_1_131_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 1 (1990), 131–152

CARACTÈRE LIPSCHITZIEN D'UNE DISTANCE ASSOCIÉE À DES CHAMPS DE VECTEURS ENGENDRANT UNE ALGÈBRE DE LIE DE RANG MAXIMAL. QUELQUES CONSÉQUENCES

par R.-M. et M. HERVÉ

0. Introduction.

Dans un travail de J.-M. Bony [1], l'axiomatique de M. Brelot est vérifiée par le faisceau L−harmonique des solutions de $Lu = 0$, où L est un opérateur elliptique dégénéré de la forme

$$(1) \qquad Lu = \sum_{k=1}^{p} X_k^2 u + X_0 u \ ,$$

$X_0, X_1, \ldots, X_p$ étant des champs de vecteurs de classe C^∞, définis sur un ouvert connexe Ω de $\mathbf{R}^N$, et $X_1, \ldots, X_p$ engendrant une algèbre de Lie de rang N en tout point de Ω . Dans cette vérification, l'existence d'une base des ouverts formée d'ouverts réguliers (pour le problème de Dirichlet) est loin d'être immédiate, en raison d'un fait récemment mis en lumière par W. Hansen et H. Hueber (th. 3.4 de [3]) : un cône d'intérieur non vide peut être effilé en son sommet.

Dans les nombreux travaux consacrés aux opérateurs de la forme (1), dont on trouve un exposé d'ensemble dans [6], un rôle clé revient à la

Mots-clés : Champs de vecteurs – Opérateurs différentiels – Points réguliers.
Classification A.M.S. : 35J70.

distance d_L ainsi définie sur Ω : pour x et $y \in \Omega$, $x \neq y$, $d_L(x,y)$ est la borne inférieure des nombres $T > 0$ pour lesquels il existe une application φ absolument continue $[0,T] \to \Omega$ telle que

$$\varphi(0) = x \ , \ \varphi(T) = y \ , \ \varphi'(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k(t) X_k \circ \varphi(t) \tag{2}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$, et

$$\sum_{k=1}^{p} a_k^2(t) \leq 1 \tag{3}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Ainsi [7], $d_L^2(x,y)$ est la limite quand $t \to 0$ de $-4t\ell n[h(t,x,y)]$, où h est le noyau de la chaleur pour l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t} - L$, autrement dit, $(t,x) \mapsto h(t,x,y)$ est la solution de $h'_t - L_x h = \delta_{0,y}$.

Pour les boules ouvertes relatives à la distance d_L , $B_L(x,r) = \{y \in \Omega\colon d_L(x,y) < r\}$, D. Jerison [5] a prouvé une inégalité du type de Poincaré : si $\omega = B_L(x,r)$, x donné dans Ω ,

$$\int_{\omega} (f - f_\omega)^2 dx \leq C r^2 \sum_{k=1}^{p} \int_{\omega} |X_k f|^2 dx \ , \ \forall f \in C^\infty(\overline{\omega}) \tag{4}$$

(où f_ω est la valeur moyenne de f sur ω), alors qu'on peut trouver des ω bornés, à frontière C^∞ , pour lesquels (4) n'a lieu avec aucune constante à la place de Cr^2. La validité de (4) pour $\omega = B_L(x,r)$ est importante pour le faisceau L-harmonique, puisque D. Jerison en déduit une preuve directe (*i.e.* parallèle à celle de J. Moser [8] pour le cas des opérateurs uniformément elliptiques sous forme de divergence) de l'inégalité de Harnack pour les solutions positives de $\sum_{k=1}^{p} X_k^* X_k u = 0$. Elle tient aux propriétés géométriques des boules B_L , essentiellement :

a) si $B_L(x_1,r_1) \cap B_L(x_2,r_2) \neq \emptyset$, alors $B_L(x_1,r_1) \subset B_L(x_2,Cr_2)$ avec un nombre C constant quand x_1, x_2 décrivent une partie compacte K de Ω , r_1, r_2 étant assez petits;

b) la propriété dite de doublement : le quotient des mesures (de Lebesgue) de $B_L(x,2r)$ et $B_L(x,r)$ est majoré pour r assez petit, uniformément pour $x \in K$.

Ces propriétés subsistent si l'on remplace $d_L(x,y)$ par une distance équivalente, c'est-à-dire comprise entre $\dfrac{1}{C} d_L(x,y)$ et $C \ d_L(x,y)$, avec un nombre C constant pour $x, y \in K$. C'est pourquoi A. Nagel, E. Stein et S. Wainger [9], pour les démonstrations, ont pu substituer à d_L la distance équivalente, notée par eux ρ_4 , obtenue en remplaçant dans (3) $\sum_{k=1}^{p} a_k^2(t)$ par $\sup_k |a_k(t)|$ ou même la distance ρ (mais cette fois l'équivalence est très cachée) définie comme suit.

On ajoute aux champs donnés X_k des commutateurs assez nombreux pour engendrer l'espace vectoriel tangent en tout point de Ω; on a ainsi des champs $Y_1, \ldots, Y_q$ tels que $Y_1(x), \ldots, Y_q(x)$ engendrent l'espace vectoriel $\mathbf{R}^N$, $\forall x \in \Omega$, et l'on définit $\rho(x,y)$ comme borne inférieure des nombres $\delta > 0$ pour lesquels il existe une application φ absolument continue $[0,1] \to \Omega$ telle que

$$\varphi(0) = x \ , \ \varphi(1) = y \ , \ \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) Y_j \circ \varphi(t) \tag{5}$$

pour presque tout $t \in [0,1]$,

$$|a_j(t)| \leq \delta^{d_j} \tag{6}$$

pour presque tout $t \in [0,1]$, où d_j est le degré formel du champ Y_j , valant 1 si Y_j est un X_k et, sinon, la longueur du commutateur Y_j : c'est seulement à ce prix que la distance ρ est équivalente à ρ_4 [9], th. 4, donc à d_L .

L'intervention des boules B_L dans l'inégalité de Poincaré nous a conduits à une recherche de leur régularité (éventuelle) pour le problème de Dirichlet; mais ici la réponse dépend de la distance choisie, et n'est pas la même pour deux distances équivalentes. En effet, nous avons utilisé le fait que $\rho(x,y)$ est localement lipschitzienne pour $x \neq y$ (th. 2.1 ci-dessous), ce qui n'est pas vrai pour ρ_4 (exemple 2.2).

Nous remercions le "referee" de ses remarques sur la première rédaction de cet article.

1. Hypothèses – Rappels – Enoncé des principaux résultats.

a) Les **hypothèses** sont celles de A. Nagel, E. Stein et S. Wainger [9].

Ω est un ouvert connexe borné de $\mathbf{R}^N$; $Y_1, \ldots, Y_q$ sont des champs de vecteurs réels C^∞ sur un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$; on note d_j le degré formel du champ Y_j et on suppose :

(i) $\forall j$ et k , $[Y_j, Y_k] = \sum_{d_\ell \leq d_j + d_k} c^\ell_{jk}(x) Y_\ell$, où $c^\ell_{jk} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$;

(ii) pour chaque $x \in \overline{\Omega}$, $Y_1(x), \dots, Y_q(x)$ engendrent l'espace vectoriel $\mathbf{R}^N$.

b) Rappels.

Définition de la métrique ρ sur Ω.

Pour x et $y \in \Omega$, on appelle "courbe joignant x et y" toute fonction absolument continue $\varphi : [0,1] \to \overline{\Omega}$, $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$, telle que, pour presque tout $t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) Y_j(\varphi(t))$ avec $a_j \in L^\infty(0,1)$, $j = 1, \dots, q$. (1)

Selon [9], $\rho(x,y)$ est le plus petit nombre tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une courbe φ joignant x et y avec

$$\|a_j\|^{1/d_j}_{L^\infty(0,1)} \leq \rho(x,y) + \varepsilon \text{ pour chaque } j = 1, \dots, q .$$

En fait, il existe toujours une courbe φ joignant x et y, dite *minimale*, pour laquelle

$$\|a_j\|^{1/d_j}_{L^\infty(0,1)} \leq \rho(x,y) \text{ pour chaque } j = 1, \dots, q ,$$

d'où l'égalité pour au moins un j .

Si en effet $\varphi_n(0) = x$, $\varphi_n(1) = y$, $\varphi'_n(t) = \sum_{j=1}^{q} a^n_j(t) Y_j(\varphi_n(t))$ pour presque tout $t \in [0,1]$, avec $\|a^n_j\|^{1/d_j}_{L^\infty(0,1)} \leq \rho(x,y) + \frac{1}{n}$ pour chaque j , la suite $(a^n_j)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est faiblement * relativement compacte dans $L^\infty(0,1)$ et la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ bornée équicontinue; après extraction de suites partielles convenables, il existe $\varphi = \lim \operatorname{unif} \varphi_n$ et des $a_j \in L^\infty(0,1)$ tels que $\|a_j\|^{1/d_j}_{L^\infty(0,1)} \leq \rho(x,y)$ et $\forall t \in [0,1]$,

$$\sum_{j=1}^{q} \int_0^t a_j(\tau) Y_j(\varphi(\tau)) d\tau = \lim_n \sum_{j=1}^{q} \int_0^t a^n_j(\tau) Y_j(\varphi_n(\tau)) d\tau = \varphi(t) - x .$$

Définition de la métrique ρ_4.

Dans le cas où les Y_j , $j = 1, \dots, q$, sont une énumération des vecteurs $X_1, \dots, X_p$ et de leurs commutateurs de longueur $\leq m$, A. Nagel, E. Stein

(1) On peut donc remplacer φ absolument continue par φ lipschitzienne.

et S. Wainger définissent la distance $\rho_4(x,y)$ [9] en considérant les fonctions absolument continues $\varphi : [0,1] \to \overline{\Omega}$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$, telles que

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k(t) X_k(\varphi(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0,1] ,$$

où $a_k \in L^\infty(0,1)$, $k = 1, \ldots, p$.

$\rho_4(x,y)$ est le plus petit nombre tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une courbe φ joignant x et y avec $\|a_k\|_{L^\infty(0,1)} \leq \rho_4(x,y) + \varepsilon$ pour chaque $k = 1, \ldots, p$.

Le même raisonnement que ci-dessus montre qu'en fait il existe toujours une courbe φ minimale joignant x et y pour laquelle

$$\|a_k\|_{L^\infty(0,1)} \leq \rho_4(x,y) \text{ pour chaque } k = 1, \ldots, p ,$$

avec égalité pour au moins un k .

En outre, les degrés formels n'intervenant plus, il revient au même de dire qu'une courbe minimale est une fonction absolument continue $\psi : [0,T] \to \overline{\Omega}$, où $T = \rho_4(x,y)$, $\psi(0) = x$, $\psi(T) = y$, telle que

$$\psi'(t) = \sum_{k=1}^{p} a_k(t) X_k(\psi(t)) \text{ pour presque tout } t \in [0,T] ,$$

avec $\|a_k\|_{L^\infty(0,T)} \leq 1$ pour chaque k .

Rappelons quelques *résultats de base de A. Nagel, E. Stein et S. Wainger.*

PROPOSITION 1.1 ([9], p. 107). — *ρ est une métrique sur Ω . Si $m = \max d_j$, il existe 2 constantes c_1 et $c_2 > 0$ telles que, $\forall x$ et $y \in \Omega$*

$$c_1 \|x - y\| \leq \rho(x,y) \leq c_2 \|x - y\|^{1/m} .$$

THÉORÈME 1 ([9], p.110). — *Pour chaque multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_N)$ de longueur N , soient $\lambda_I = \det(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_N})$ et $d(I) = d_{i_1} + \cdots + d_{i_N}$; la mesure (de Lebesgue) de la ρ-boule ouverte $B(x,\delta)$ de centre x , rayon δ , et la quantité $\Lambda(x,\delta) = \sum_I |\lambda_I(x)| \delta^{d(I)}$ sont dans un rapport compris entre 2 nombres > 0 , indépendants de $x \in K$ (partie compacte de Ω) et $\delta \in]0, +\infty[$.*

THÉORÈME 4 ([9], p. 113). — *Les distances ρ et ρ_4 sont équivalentes.*

c) Nos principaux résultats sont les suivants.

Nous commençons par montrer (§2) que $y \mapsto \rho(x,y)$ est lipschitzienne sur tout compact de $\Omega\backslash\{x\}$; la démonstration est autonome et consiste à comparer les sup ess des coefficients de la décomposition sur les Y_j des vecteurs vitesses de 2 chemins voisins partant de x .

D'après la proposition 1.1 de [9] rappelée ci-dessus, ρ est lipschitzienne sur $\Omega \times \Omega$ lui-même si $m = 1$, ce qui revient à dire que les champs Y_j de degré formel 1 suffisent à engendrer l'espace vectoriel $\mathbf{R}^N$ en tout point de Ω : c'est le cas si l'opérateur L est elliptique.

Dans le cas général, on peut se demander si $y \mapsto \rho_4(x,y)$ jouit aussi du caractère lipschitzien hors du point x : un exemple simple montre que non, et du même coup (par l'inégalité du triangle) que $\rho_4(x,y)$ n'est pas $O(\|x-y\|)$ quand $y \to x$; par suite $\rho(x,y)$ ne l'est pas non plus : le caractère lipschitzien de $y \mapsto \rho(x,y)$ ne s'étend pas au point x .

Puis nous étudions (§3) la décomposition sur les $Y_j(x)$ d'un vecteur de $\mathbf{R}^N$ en un point $x \in \overline{\Omega}$, en particulier, pour une courbe minimale φ , la décomposition de $\varphi'(t)$ au point $\varphi(t)$. Si l'on appelle optimale une décomposition

$$v = \sum_{j=1}^{q} u_j Y_j(x)$$

d'un vecteur v de $\mathbf{R}^N$ au point $x \in \overline{\Omega}$ telle que $\max_j |u_j|^{1/d_j}$ soit le plus petit possible, on démontre (§4) que la décomposition de $\varphi'(t)$ au point $\varphi(t)$ est optimale pour presque tout $t \in [0,1]$. La démonstration utilise un théorème de dérivation de Lebesgue : si $\lambda(t)$ est la mesure de l'intersection de $[0,t]$ avec un ensemble mesurable E de $[0,1]$, alors $\lambda'(t) = 1$ en presque tout $t \in E$, et 0 en presque tout $t \in \complement E$.

Nous utilisons le caractère localement lipschitzien de $\rho(x,\cdot)$ pour établir (§6), dans le cas des opérateurs elliptiques dégénérés considérés dans [10], l'existence de nombreux points y réguliers pour la ρ-boule ouverte de centre x , rayon $\rho(x,y)$.

2. Propriété de Lipschitz locale de la distance ρ.

THÉORÈME 2.1. — *$\forall x_0 \in \Omega$, $y \mapsto \rho(x_0,y)$ est localement lipschitzienne dans $\Omega\backslash\{x_0\}$.*

Preuve. — Soit $\alpha > 0$ et $K = \{x \in \Omega\ ,\ d(x, \complement\Omega) \geq \alpha\}$. On prend $y \in K$ et tel que $\|y - x_0\| \geq \frac{\alpha}{2}$; les constantes c_1 à c_6 ci-dessous ne dépendent que de α . Il existe une fonction absolument continue $\varphi : [0,1] \to \overline{\Omega}$, $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = y$, et pour presque tout $t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) Y_j(\varphi(t))$ avec $\sup\limits_{t\in[0,1]} \text{ess}\ |a_j(t)|^{1/d_j} \leq \rho(x_0, y)$, $j = 1, \ldots, q$. On va construire une courbe ψ joignant x_0 et z voisin de y .

Distinguons 2 cas :

– ou bien $d(\varphi(t), \complement\Omega) \geq \frac{\alpha}{2}$, $\forall t \in [0,1]$ (ce qui signifie que la courbe φ ne s'approche pas trop de $\complement\Omega$);

– ou bien $\exists t_0 \in [0,1[$ tel que $d(\varphi(t_0), \complement\Omega) = \frac{\alpha}{2}$ et $d(\varphi(t), \complement\Omega) \geq \frac{\alpha}{2}$ $\forall t \in [t_0, 1]$: alors $\|y - \varphi(t_0)\| \geq \frac{\alpha}{2}$.

A partir de

$v = y - x_0$, $w = z - x_0$ dans le 1er cas,

$v = y - \varphi(t_0)$, $w = z - \varphi(t_0)$ dans le 2ème cas,

on choisit un endomorphisme A de $\mathbf{R}^N$, voisin de l'identité pour z voisin de y , tel que $w = Av$: comme dans les 2 cas $\|v\| \geq \frac{\alpha}{2}$, on peut plus précisément choisir A de manière que les coefficients des matrices $A - I$ et $A^{-1} - I$ soient $O(\|w - v\|)$, donc $\|A - I\|$ et $\|A^{-1} - I\|$ majorés par $c_1\|w - v\|$.

On pose dans le 1er cas :

$$\psi(t) - x_0 = A(\varphi(t) - x_0) \quad \text{pour} \quad t \in [0,1] \ ,$$

et dans le 2ème cas :

$$\psi(t) = \varphi(t)\ \forall t \in [0, t_0]\ ,\ \psi(t) - \varphi(t_0) = A(\varphi(t) - \varphi(t_0))\ \forall t \in [t_0, 1]\ .$$

Dans les 2 cas, ψ est absolument continue sur $[0,1]$, $\psi(0) = x_0$ et $\psi(1) = z$; en posant $R =$ diam $\overline{\Omega}$:

$$\forall t \in [0,1]\ ,\ \|\psi(t) - \varphi(t)\| \leq c_1 R \|z - y\|\ ,$$

donc, si $\|z - y\| \leq \frac{\alpha}{2c_1 R}$, $\psi(t) \in \overline{\Omega}$ ainsi que le segment de droite joignant $\varphi(t)$ et $\psi(t)$.

On suppose dorénavant cette condition remplie, et on va montrer que $|\rho(x_0, z) - \rho(x_0, y)| \leq \mathrm{C^{te}}\|z - y\|$, en utilisant les notations $M_j = \sup\limits_{\overline{\Omega}} \|Y_j\|$, $M'_j = \sup\limits_{\overline{\Omega}'} \|Y'_j\|$, où Ω' est un voisinage de Ω.

Dans le 1er cas, posons $t_0 = 0$, de sorte que dans les 2 cas : $\forall t \in [t_0, 1]$,

$$\psi(t) = \varphi(t_0) + A(\varphi(t) - \varphi(t_0))$$

d'où

$$\psi'(t) = A\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) AY_j(\varphi(t)) .$$

$\forall t \in [t_0, 1]$, on a

$$\|Y_j(\varphi(t)) - Y_j(\psi(t))\| \leq M'_j \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq c_1 R M'_j \|z - y\| ,$$

puis

$$\|AY_j(\varphi(t)) - Y_j(\psi(t))\| \leq \|A - I\| M_j + c_1 R M'_j \|z - y\| \leq c_2 \|z - y\| .$$

D'autre part, si les vecteurs $Y_1, \ldots, Y_N$ sont linéairement indépendants, la relation $v = \sum\limits_{i=1}^{N} u_i Y_i$ définit l'endomorphisme $v \mapsto u$ de $\mathbf{R}^N$ dont l'inverse a pour matrice $(Y_1 \cdots Y_N)$; sa norme étant fonction continue des coefficients de celle-ci, $\exists c_3$ tel que, $\forall x \in \overline{\Omega}$, tout $v \in \mathbf{R}^N$ peut s'écrire $v = \sum\limits_{i=1}^{q} u_i Y_i(x)$ avec $|u_i| \leq c_3 \|v\|$, $\forall i = 1, \ldots, q$. En particulier, $AY_j(\varphi(t)) = Y_j(\psi(t)) + \sum\limits_{i=1}^{q} u_{i,j}(t) Y_i \circ \psi(t)$, avec $|u_{i,j}(t)| \leq c_3 c_2 \|z - y\|$, $\forall i$ et $j = 1, \ldots, q$, d'où $\psi'(t) = \sum\limits_{i=1}^{q} b_i(t) Y_i(\psi(t))$ avec $b_i(t) = a_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{q} a_j(t) u_{i,j}(t)$, donc

$$|b_i| \leq |a_i| + c_3 c_2 \|z - y\| \sum_{j=1}^{q} \rho(x_0, y)^{d_j} \leq |a_i| + c_4 \|z - y\| .$$

En outre, chaque $u_{i,j}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[t_0, 1]$, donc chaque b_i est mesurable sur le même intervalle.

Parmi les indices i, distinguons maintenant, pour presque tout t donné $\in [t_0, 1]$: ceux pour lesquels $|a_i(t)| \leq \frac{1}{2}\rho(x_0, y)^{d_i}$, donc aussi $|b_i(t)| \leq \rho(x_0, y)^{d_i}$ si

$$c_4 \|z - y\| \leq \frac{1}{2} \inf\{\rho(x_0, y)^{d_i} \ , \ i = 1, \ldots, q \ , \ y \in K \ , \ \|y - x_0\| \geq \frac{\alpha}{2}\} ;$$

et ceux pour lesquels $|a_i(t)| \geq \frac{1}{2}\rho(x_0,y)^{d_i}$: pour ceux-ci, la fonction $u \mapsto u^{1/d_i}$ étant concave pour $u \geq 0$,

$$|b_i(t)| \leq |a_i(t)| + c_4\|z-y\|$$

entraîne

$$|b_i(t)|^{1/d_i} \leq |a_i(t)|^{1/d_i} + c_4|a_i(t)|^{(1/d_i)-1}\|z-y\| \leq |a_i(t)|^{1/d_i} + c_5\|z-y\| .$$

Finalement :

$$\rho(x_0,z) \leq \rho(x_0,y) + c_6\|z-y\|$$

et

$$|\rho(x_0,z) - \rho(x_0,y)| \leq c_6\|z-y\| \text{ en échangeant } y \text{ et } z ,$$

avec $z \in K$, $\|z - x_0\| \geq \frac{\alpha}{2}$. □

Il est naturel de se demander si $y \mapsto \rho_4(x,y)$ est localement lipschitzienne dans $\Omega\backslash\{x\}$. L'exemple suivant prouve qu'il n'en est rien.

Exemple 2.2. — Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ (où les coordonnées sont notées x,y,z), considérons les champs de vecteurs $X = (x,1,1)$ et $Y = (1,y,1)$, qui, avec leurs commutateurs de longueur ≤ 3 , engendrent en tout point $M(x,y,z)$ l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$. Nous nous proposons de montrer que $\rho_4(0,\cdot)$ *n'est pas lipschitzienne* hors du point 0.

Les courbes minimales $\varphi = (\xi,\eta,\zeta)$ qui interviennent dans la définition de ρ_4 sont solutions du système différentiel

$$\xi' = a\xi + b \ , \ \eta' = a + b\eta \ , \ \zeta' = a + b \tag{1}$$

où la variable t décrit $[0,T]$, $|a(t)|$ et $|b(t)| \leq 1$ pour presque tout $t \in [0,T]$.

Avec la notation $A(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$, $B(t) = \int_0^t b(\tau)d\tau$, donc $|A(t)| \leq t$, $|B(t)| \leq t$, la solution de (1) nulle pour $t = 0$ est

$$\begin{cases} \xi(t) &= e^{A(t)} \displaystyle\int_0^t b(\tau)e^{-A(\tau)}d\tau \ , \\ \eta(t) &= e^{B(t)} \displaystyle\int_0^t a(\tau)e^{-B(\tau)}d\tau \ , \\ \zeta(t) &= A(t) + B(t) \ . \end{cases} \tag{2}$$

Une solution particulière, obtenue avec $T = \frac{1}{2}$, $a(t) = b(t) = 1$ $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$, est

$$\xi(t) = \eta(t) = e^t - 1 \ , \ \zeta(t) = 2t \ ;$$

c'est donc une courbe joignant l'origine et le point $P(\sqrt{e}-1,\sqrt{e}-1,1)$. C'est même *l'unique courbe minimale* joignant ces 2 points, car la 3ème équation (2) montre que $\zeta(T)=1$ exige $T\geq\frac{1}{2}$ [de sorte que $\rho_4(0,P)=\frac{1}{2}$] et que $\zeta(\frac{1}{2})=1$ exige $a(t)=b(t)=1$ pour presque tout $t\in[0,\frac{1}{2}]$.

On va maintenant raisonner par l'absurde en supposant $\rho_4(0,\cdot)$ lipschitzienne au point P : alors, pour chaque $n\in\mathbf{N}^*$, il existe une solution de (2) sur $[0,T_n]$, avec $T_n=\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n})$, joignant l'origine au point $P_n(\sqrt{e}-1,\sqrt{e}-1,1+\frac{1}{n})$. Chaque quantité figurant dans (2) étant affectée d'un indice n , sont successivement $O(\frac{1}{n})$:

– $\int_0^{T_n}(1-a_n)dt$ et $\int_0^{T_n}(1-b_n)dt$ dont la somme vaut $2T_n-(1+\frac{1}{n})$;

– les bornes supérieures pour $t\in[0,T_n]$ de $t-A_n(t)$ et $t-B_n(t)$ [par intégration];

– pour $\varepsilon=\pm1$, celles de $|e^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon A_n(t)}|$ et $|e^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon B_n(t)}|$ [car les exposants sont bornés dans leur ensemble];

– celle de $|\int_0^t b_n(\tau)e^{-A_n(\tau)}d\tau-\int_0^t e^{-\tau}d\tau|$ [par intégration à partir de l'inégalité $|b_n(\tau)e^{-A_n(\tau)}-e^{-\tau}|\leq(1-b_n(\tau))e^{-A_n(\tau)}+(e^{-A_n(\tau)}-e^{-\tau})$];

– celle de $|\xi_n(t)-(e^t-1)|$ [car $\sup|u_n-u|=O(\frac{1}{n})$ et $\sup|v_n-v|=O(\frac{1}{n})$ entraîne $\sup|u_nv_n-uv|=O(\frac{1}{n})$ si u et v sont bornés];

– de même celle de $|\eta_n(t)-(e^t-1)|$, donc aussi celle de $|\xi_n-\eta_n|$.

De ces dernières majorations résulte en particulier que $1-|\xi_n|$ et $1-|\eta_n|$ ont des minorants >0 .

D'autre part (1) entraîne :

$$\frac{\xi_n'}{1+\xi_n}-\frac{\eta_n'}{1+\eta_n}=\frac{1-\xi_n\eta_n}{(1+\xi_n)(1+\eta_n)}(b_n-a_n)\ ,$$

d'où

$$\int_0^{T_n}\left|\frac{\xi_n'}{1+\xi_n}-\frac{\eta_n'}{1+\eta_n}\right|dt=O(\frac{1}{n})\ ,$$

car $|b_n-a_n|\leq(1-a_n)+(1-b_n)$; $a_n=\dfrac{\eta_n'-\eta_n\xi_n'}{1-\xi_n\eta_n}$, $b_n=\dfrac{\xi_n'-\xi_n\eta_n'}{1-\xi_n\eta_n}$, $a_n+b_n=\zeta_n'$, d'où

$$\frac{d}{dt}[\zeta_n-\ell n(1+\xi_n)(1+\eta_n)]=\zeta_n'-\frac{\xi_n'}{1+\xi_n}-\frac{\eta_n'}{1+\eta_n}=\frac{\xi_n-\eta_n}{1-\xi_n\eta_n}\Big(\frac{\xi_n'}{1+\xi_n}-\frac{\eta_n'}{1+\eta_n}\Big);$$

la valeur pour $t = T_n$ de $\zeta_n - \ell n(1+\xi_n)(1+\eta_n)$ est donc

$$\int_0^{T_n} \frac{\xi_n - \eta_n}{1-\xi_n\eta_n}\left(\frac{\xi_n'}{1+\xi_n} - \frac{\eta_n'}{1+\eta_n}\right)dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right) ;$$

mais cette valeur est $\frac{1}{n}$, d'où la contradiction cherchée.

3. Décomposition optimale d'un vecteur de $\mathbf{R}^N$ en un point $x \in \overline{\Omega}$ à l'aide des $Y_i(x)$.

Soit x fixé dans $\overline{\Omega}$. Tout vecteur $v \in \mathbf{R}^N$ peut s'écrire d'une infinité de façons $v = \sum_{i=1}^{q} u_i Y_i(x)$.

Par définition, $\delta(x,v)$ est la borne inférieure des nombres $\max_i |u_i|^{1/d_i}$ relatifs à ces diverses décompositions.

Alors v admet au moins une décomposition

$$v = \sum_{i=1}^{q} v_i Y_i(x) \ , \ \text{avec } \max_i |v_i|^{1/d_i} = \delta(x,v) \ ,$$

qu'on appelle décomposition optimale de v au point x . En effet, si $v = \sum_{i=1}^{q} u_i^n Y_i(x)$ est une suite de décompositions de v au point x telles que la suite $s_n = \max_i |u_i^n|^{1/d_i}$ tende en décroissant vers $\delta(x,v)$, on peut extraire de la suite bornée $(u_i^n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite partielle convergente vers v_i , pour chaque $i = 1,\ldots,q$, et $v = \sum_{i=1}^{q} v_i Y_i(x)$ répond à la question.

THÉORÈME 3.1. — *$(x,v) \mapsto \delta(x,v)$ est une fonction continue sur $\overline{\Omega} \times \mathbf{R}^N$.*

Preuve. — Tout d'abord,

$$v = \sum_{i=1}^{q} v_i Y_i(x) \quad , \quad \max_i |v_i|^{1/d_i} = \delta(x,v) \ ,$$

et

$$v' = \sum_{i=1}^{q} v_i' Y_i(x) \quad , \quad \max_i |v_i'|^{1/d_i} = \delta(x,v') \ ,$$

entraînent

$$v + v' = \sum_{i=1}^{q} (v_i + v'_i) Y_i(x) ,$$

avec $|v_i + v'_i| \leq [\delta(x,v)]^{d_i} + [\delta(x,v')]^{d_i} \leq [\delta(x,v) + \delta(x,v')]^{d_i}$, d'où

$$\delta(x, v + v') \leq \delta(x,v) + \delta(x,v')$$

et

$$|\delta(x,v) - \delta(x,v')| \leq \delta(x, v - v') .$$

On commence donc par montrer la continuité de $\delta(x,v)$ en $(x_0, 0)$; elle résulte de la propriété déjà utilisée dans la démonstration du théorème 2.1 : $\exists c_3$ tel que $\forall x \in \overline{\Omega}$, tout $v \in \mathbf{R}^N$ admet une décomposition à l'aide des $Y_i(x)$ pour laquelle

$$|u_i| \leq c_3 \|v\| , \ i = 1, \ldots, q ,$$

d'où $\delta(x,v) \leq (c_3\|v\|)^{1/m}$ ou $c_3\|v\|$, selon que $c_3\|v\| \leq 1$ ou $c_3\|v\| \geq 1$.

Soient maintenant x_0 et $x \in \overline{\Omega}$, v_0 et $v \in \mathbf{R}^N$, r et R , $0 < r < R$, tels que $\|v_0\|$ et $\|v\| \in [r, R]$; d'après l'inégalité précédente, $\delta(x_0, v_0)$ et $\delta(x,v)$ sont majorés par $1 + c_3 R$.

D'autre part, pour x assez voisin de x_0 , le segment $[x_0, x]$ est contenu dans un voisinage Ω' de $\overline{\Omega}$ et

$$\|Y'_j\| \leq M'_j \text{ sur } \overline{\Omega}' \text{ entraîne } \|Y_j(x) - Y_j(x_0)\| \leq M'_j \|x - x_0\| ,$$

d'où $Y_j(x) = Y_j(x_0) + \sum_{i=1}^{q} u_{i,j}(x) Y_i(x_0)$ avec $|u_{i,j}(x)| \leq c_3 M'_j \|x - x_0\|$.

Alors $v = \sum_{j=1}^{q} v_j Y_j(x)$, avec $\max_j |v_j|^{1/d_j} = \delta(x,v) \leq 1 + c_3 R$ entraîne $v = \sum_{i=1}^{q} u_i^\circ Y_i(x_0)$, avec $u_i^\circ = v_i + \sum_{j=1}^{q} u_{i,j}(x) v_j$ et $|u_i^\circ| \leq |v_i| + c_1 \|x - x_0\|$, où c_1 est une nouvelle constante.

Parmi les indices i , distinguons, comme on l'a déjà fait dans la démonstration du théorème 2.1 : ceux pour lesquels $|v_i| \leq \frac{1}{2}\delta(x,v)^{d_i}$, donc aussi $|u_i^\circ| \leq \delta(x,v)^{d_i}$ si $c_1\|x - x_0\| \leq \frac{1}{2}\inf\{\delta(x,v)^{d_i} , \ x \in \overline{\Omega} , \ \|v\| \geq r\}$, quantité > 0 puisque $\|Y_j\| \leq M_j$ sur $\overline{\Omega}$ entraîne $\|v\| \leq \sum_{j=1}^{q} M_j \delta(x,v)^{d_j}$;

et ceux pour lesquels $|v_i| \geq \frac{1}{2}\delta(x,v)^{d_i}$; pour ceux-ci, comme dans la démonstration du théorème 2.1, on a $|u_i^\circ|^{1/d_i} \leq |v_i|^{1/d_i} + c_2\|x - x_0\|$.

Finalement
$$|\delta(x,v) - \delta(x_0,v)| \leq c_4\|x - x_0\| ,$$
puis $|\delta(x,v) - \delta(x_0,v_0)| \leq c_4\|x - x_0\| + (c_3\|v - v_0\|)^{1/m}$ ou $c_4\|x - x_0\| + c_3\|v - v_0\|$ selon que $c_3\|v - v_0\| \leq 1$ ou $c_3\|v - v_0\| \geq 1$.

4. Caractère optimal de la décomposition du vecteur vitesse d'une courbe minimale.

Prenons maintenant pour vecteur v le vecteur vitesse $\varphi'(t)$ d'une courbe minimale φ joignant x et y , en chaque point $\varphi(t)$.

Pour presque tout $t \in [0,1]$:
$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t)Y_j(\varphi(t)) ,$$
donc $\delta(\varphi(t),\varphi'(t)) \leq \max_j |a_j(t)|^{1/d_j} \leq \max_j \ \operatorname*{sup\,ess}_{[0,1]} \ |a_j(t)|^{1/d_j} \leq \rho(x,y)$.

Nous allons démontrer qu'en fait ces inégalités sont des égalités pour presque tout t .

Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto \delta(\varphi(t),\varphi'(t))$ est mesurable sur $[0,1]$, car δ et φ sont continues et φ' mesurable.

Montrons l'existence d'une décomposition optimale de $\varphi'(t)$ à coefficients mesurables.

LEMME 4.1. — *Soit φ une fonction lipschitzienne : $[0,1] \to \overline{\Omega}$. Pour presque tout $t \in [0,1]$, $\varphi'(t)$ admet une décomposition optimale :*
$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} v_j(t)Y_j(\varphi(t)) , \text{ avec } \max_j |v_j(t)|^{1/d_j} = \delta(\varphi(t),\varphi'(t)) ,$$
où chaque v_j est une fonction mesurable sur $[0,1]$.

Preuve. — L'existence des v_j mesurables résulte du théorème des sections boréliennes [2] ([1]) : étant donné une application continue f d'un

([1]) Le théorème proprement dit ([2], chap. IX, §6, th. 4) dit seulement qu'il existe B borélien dans K tel que $f|_B$ soit une bijection de B sur L; g est l'application réciproque de $f|_B$. Si 0 ouvert et F fermé sont complémentaires dans K : $g^{-1}(0) = f(B \cap 0)$ et $g^{-1}(F) = f(B \cap F)$ sont sousliniens (§6, coroll. de la prop. 11) et complémentaires dans L , donc boréliens (§6, coroll. du th. 2).

compact $K \subset \mathbf{R}^{N+q}$ sur un compact $L \subset \mathbf{R}^{2N+1}$, il existe une application borélienne g de L sur K telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_K$.

Soit $R = \sup\operatorname{ess}_{t\in[0,1]} \|\varphi'(t)\|$; on a vu, dans la démonstration du théorème 3.1, que

$$\|v\| \leq R \text{ entraîne } \delta(x,v) \leq 1 + c_3 R \ , \ \forall x \in \overline{\Omega} \ .$$

On peut donc considérer l'application f définie sur $K = \overline{\Omega} \times \prod_{i=1}^{q}[-(1 + c_3R)^{d_i} \ , (1 + c_3R)^{d_i}]$ par

$$f(x,u) \doteq \left(x, v = \sum_{i=1}^{q} u_i Y_i(x) \ , \ s = \max_i |u_i|^{1/d_i}\right) .$$

Par définition de $\delta(x,v)$: si $s = \delta(x,v)$, il existe des u_i tels que $v = \sum_{i=1}^{q} u_i Y_i(x)$, $s = \max_i |u_i|^{1/d_i}$ et par suite $|u_i| \leq (1 + c_3R)^{d_i}$ si $s = \delta(x,v) \leq 1 + c_3R$, a fortiori si $s = \delta(x,v)$, $\|v\| \leq R$.

Ceci veut dire que $f(K)$ contient le compact

$$\{(x,v,s) \ , \ x \in \overline{\Omega} \ , \ \|v\| \leq R \ , \ s = \delta(x,v)\} \ ,$$

et l'on peut restreindre l'application borélienne g à ce dernier compact :

$$\overline{\Omega} \times \overline{B}(0,R) \ni (x,v) \mapsto g(x,v,\delta(x,v)) = (x, u(x,v)) \ ,$$

les composantes u_j de u étant boréliennes.

Par suite, en prenant $x = \varphi(t)$ et $v = \varphi'(t)$, on obtient q fonctions composées $t \mapsto u_j(\varphi(t), \varphi'(t))$, $j = 1, \ldots, q$, qui sont mesurables sur $[0,1]$. □

THÉORÈME 4.2. — *Soit φ une courbe minimale joignant 2 points x et $y \in \Omega$, c'est-à-dire une fonction absolument continue $\varphi : [0,1] \to \overline{\Omega}$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$, telle que $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) Y_j(\varphi(t))$ p.p. sur $[0,1]$ avec $\sup\operatorname{ess}_{t\in[0,1]} |a_j(t)|^{1/d_j} \leq \rho(x,y)$, $\forall j = 1, \ldots, q$.*

Alors $\delta(\varphi(t), \varphi'(t)) = \max_j |a_j(t)|^{1/d_j} = \rho(x,y)$ pour presque tout $t \in [0,1]$; autrement dit, la décomposition de $\varphi'(t)$ au point $\varphi(t)$ est optimale pour presque tout $t \in [0,1]$.

Preuve. — Posons $\rho(x,y) = \rho$ et supposons qu'il existe $\rho' \in]0, \rho[$ tel que l'ensemble $E = \{t \in [0,1] \ , \ \delta(\varphi(t), \varphi'(t)) \leq \rho'\}$ ait une mesure > 0 .

Pour $t \in E$, remplaçons les coefficients $a_j(t)$ de la décomposition de $\varphi'(t)$ par les fonctions $v_j(t)$ déterminées au lemme 4.1, ce qui revient à supposer que, pour $t \in E$, $\max_j |a_j(t)|^{1/d_j} \leq \rho'$.

Posons $\complement E = [0,1] \backslash E$ et pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\theta = \mu(t) &= \frac{\rho'}{\rho} \text{ mes } (E \cap [0,t]) + \text{mes } (\complement E \cap [0,t]) \\ &= t - (1 - \frac{\rho'}{\rho}) \text{ mes } (E \cap [0,t]) \ ,\end{aligned}$$

de sorte que $\mu(1) = 1 - (1 - \frac{\rho'}{\rho}) \text{ mes } E < 1$.

La fonction μ est continue, strictement croissante, lipschitzienne ainsi que μ^{-1} car, pour $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 1$, on a $\frac{\rho'}{\rho}(t_1 - t_0) \leq \mu(t_1) - \mu(t_0) \leq t_1 - t_0$.

Par suite, la fonction $\psi = \varphi \circ \mu^{-1}$ est absolument continue sur $[0, \mu(1)]$, $\psi(0) = x$ et $\psi(\mu(1)) = y$; en outre la bijection μ de $[0,1]$ sur $[0, \mu(1)]$ conserve les ensembles mesurables, en particulier les ensembles négligeables.

Etudions la décomposition de $\psi'(\theta)$ au point $\psi(\theta)$. Pour presque tout $\theta \in [0, \mu(1)]$:

$$\psi'(\theta) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j(\theta) Y_j(\psi(\theta)) \ , \text{ où } \alpha_j(\theta) = a_j \circ \mu^{-1}(\theta)(\mu^{-1})'(\theta) \ .$$

D'après un théorème de Lebesgue, la fonction $t \mapsto \text{mes } (E \cap [0,t])$ a une dérivée p.p. sur $[0,1]$, égale à 1 en presque tout $t \in E$ et à 0 en presque tout $t \in \complement E$.

Par suite

$$\mu'(t) = \left| \begin{array}{ll} \frac{\rho'}{\rho} & \text{pour presque tout } t \in E \\ 1 & \text{pour presque tout } t \in \complement E \ , \end{array} \right.$$

donc

$$(\mu^{-1})'(\theta) = \left| \begin{array}{ll} \frac{\rho}{\rho'} & \text{pour presque tout } \theta \in \mu(E) \\ 1 & \text{pour presque tout } \theta \in \mu(\complement E) \ , \end{array} \right.$$

et

$$\alpha_j(\theta) = \left| \begin{array}{ll} \frac{\rho}{\rho'} a_j(t) & \text{pour presque tout } \theta \in \mu(E) \\ a_j(t) & \text{pour presque tout } \theta \in \mu(\complement E) \ . \end{array} \right.$$

Comme $|a_j(t)| \leq \rho'^{d_j}$ pour $t \in E$ et $|a_j(t)| \leq \rho^{d_j}$ pour presque tout $t \in [0,1]$, on a

$$|\alpha_j(\theta)| \leq \left| \begin{array}{ll} \frac{\rho}{\rho'}\rho'^{d_j} \leq \rho^{d_j} & \text{pour presque tout } \theta \in \mu(E) \\ \rho^{d_j} & \text{pour presque tout } \theta \in \mu(\complement E)\ . \end{array} \right.$$

On peut encore faire le changement de variable $\theta = \mu(1)u$: $u \mapsto \psi(\mu(1)u)$ est absolument continue sur $[0,1]$; vaut x pour $u = 0$ et y pour $u = 1$, et pour presque tout $u \in [0,1]$:

$$\frac{d}{du}\psi(\mu(1)u) = \sum_{j=1}^{q} b_j(u)Y_j \circ \psi(\mu(1)u)\ ,\ \text{avec } b_j(u) = \mu(1)\alpha_j(\mu(1)u)\ .$$

On a donc, pour chaque $j = 1, \ldots, q$ et presque tout $u \in [0,1]$:

$$|b_j(u)| \leq \mu(1)\rho^{d_j} \leq (\mu(1)^{1/m}\rho)^{d_j}\ ,$$

ce qui contredit la définition de ρ puisque $\mu(1)^{1/m} < 1$. □

5. Différentiabilité de $\rho(x,\cdot)$.

THÉORÈME 5.1. — *Etant donné $x \in \Omega$, $\Omega\backslash\{x\}$ a une partie négligeable E telle que la fonction $\rho(x,\cdot)$ ait une différentielle non nulle en tout point $y \in \Omega\backslash\{x\}\backslash E$ et la norme de son gradient en y garde un minorant > 0 quand y reste dans une partie compacte de Ω .*

Preuve. — D'après H. Rademacher [11], on peut trouver E négligeable tel que la fonction $\rho(x,\cdot)$ soit différentiable en tout point $y \in \Omega\backslash\{x\}\backslash E$. Un tel point y peut être joint à x par une courbe minimale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $\varphi = [0,1] \to \overline{\Omega}$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$, telle que pour presque tout $t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t)Y_j(\varphi(t))$ et $\sup\operatorname{ess}_{t\in[0,1]} |a_j(t)|^{1/d_j} \leq \rho(x,y)$, $\forall j = 1, \ldots, q$.

Pour $T \in]0,1[$, posons $z = \varphi(T)$; la fonction absolument continue $\psi : u \in [0,1] \mapsto \varphi(Tu)$ définit une courbe joignant x et z , et pour presque tout $u \in [0,1]$:

$$\psi'(u) = \sum_{j=1}^{q} b_j(u)Y_j \circ \psi(u)\ ,\ \text{avec } b_j(u) = Ta_j(Tu)\ .$$

Par suite, pour chaque $j = 1, \dots, q$:

$$\sup_{u \in [0,1]} \text{ess } |b_j(u)| \leq T\rho(x,y)^{d_j} \leq (T^{1/m}\rho(x,y))^{d_j} ,$$

donc $\rho(x,z) \leq T^{1/m}\rho(x,y) \leq \rho(x,y) - \dfrac{1-T}{m}\rho(x,y)$.

D'autre part :

$$\|z-y\| = \| \int_T^1 \sum_{j=1}^q a_j(t)Y_j(\varphi(t))dt\| \leq (1-T)\sum_{j=1}^q M_j\rho(x,y)^{d_j} ,$$

$$M_j = \sup_{\overline{\Omega}} \|Y_j\|$$

d'où finalement

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) - k\|z-y\| ,$$

où $k = \dfrac{1}{m}\dfrac{\rho(x,y)}{\sum_{j=1}^q M_j\rho(x,y)^{d_j}}$.

Prenons maintenant dans $]0,1[$ une suite $T_n \to 1$ telle que, si $z_n = \varphi(T_n)$, le vecteur unitaire $\dfrac{y-z_n}{\|y-z_n\|}$ ait une limite v; de la formule

$$\rho(x,z_n) - \rho(x,y) = \nabla_y\rho(x,y)\cdot(z_n-y) + o(\|z_n-y\|)$$

résulte $\nabla_y\rho(x,y)\cdot v \geq k$. On achève en remarquant que k ne dépend que de y et a une borne inférieure > 0 quand y décrit une partie compacte de Ω .

Remarque 5.2. — Le théorème 5.1 entraîne évidemment l'existence, pour tout $y \in \Omega\backslash\{x\}\backslash E$, d'un cône de sommet y, d'ouverture arbitrairement grande pourvu qu'il soit saillant, disjoint à la ρ-boule ouverte de centre x , rayon $\rho(x,y)$; mais ceci n'entraîne pas que y soit point frontière régulier de cette boule.

En effet, d'après W. Hansen, H. Hueber (th. 3.4 de [3] avec $\alpha = 1$), si l'axe d'un cône de sommet y est en quelque façon mal placé par rapport aux vecteurs donnés $Y_j(y)$, ce cône peut être effilé en y , quelle que soit son ouverture.

Au paragraphe suivant, nous examinons cette question pour l'opérateur L étudié dans [10] à l'aide d'un critère de Wiener.

COROLLAIRE 5.3. — *On suppose que les champs Y_j sont une énumération des champs X_k (de degré formel 1) et de leurs commutateurs de longueur $\leq m$; alors $\Omega\backslash\{x\}$ ne contient aucun ouvert ω non vide* *tel qu'en presque tout point de ω où $\rho(x,\cdot)$ est différentiable, son gradient soit orthogonal à chaque champ X_k .*

Preuve. — Sur un tel ouvert ω, considérons la distribution $[\rho]$ définie par la fonction continue $\rho(x,\cdot)$: par hypothèse, chaque distribution $X_k[\rho]$ est nulle, donc aussi de proche en proche chaque distribution $Y_j[\rho]$. Or, pour chaque point $y \in \omega$, on peut trouver un multi-indice I de longueur N tel que $\lambda_I(y) \neq 0$, donc aussi des fonctions $\chi_j \in \mathcal{D}(\omega)$ telles que $\sum_{j=1}^{q} \chi_j Y_j$ ait pour composantes $1, 0, \ldots, 0$ sur un voisinage de y; alors $\sum_{j=1}^{q} \chi_j Y_j[\rho] = 0$ prouve que la dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial y_1}\rho(x,y)$ est nulle en presque tout point assez voisin de y où elle existe, et de même pour les autres dérivées partielles du premier ordre, en contradiction avec le Théorème 5.1. □

6. Recherche de points L-réguliers sur la frontière d'une ρ-boule.

Les hypothèses sur $L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2 + \sum_{i,j=1}^{p} b_{i,j}[X_i, X_j] + \sum_{j=1}^{p} c_j X_j$ sont celles de [10] :

(i) L'algèbre de Lie engendrée par les X_j est de rang N en tout point de Ω : cela entraîne que les X_j ne s'annulent pas tous en un même point de Ω , ce qu'on exprime dans [10] en disant que L n'est pas totalement dégénéré.

(ii) $\exists \theta$, $\theta^* \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbf{R})$ et > 0 telles que $L\theta$ et $L^*\theta^* < 0$, L^* étant l'adjoint formel de L .

On attribue aux X_j le degré formel 1.

THÉORÈME 6.1. — *$\forall x_0 \in \Omega$, pour tout vecteur X_j non nul en x_0 , tout cône de sommet x_0 , axe $X_j(x_0)$, est non L-effilé en x_0 .*

Preuve. — D'après l'hypothèse (i), on peut choisir un champ X_j tel que $X_j(x_0) = X_0 \neq 0$. Soit γ la courbe intégrale de ce champ X_j passant par x_0 : $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(t) = X_j(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq r$, en particulier $\gamma'(0) = X_0$, donc

$$\frac{d}{dt}\gamma(tr) = rX_j(\gamma(tr)) \ , \ 0 \leq t \leq 1 \ .$$

Le champ X_j ayant pour degré formel 1, on a $\rho[x_0,\gamma(r)] \leq r$; alors, pour $k \in \mathbf{N}^*$, $\rho[\gamma(r),z] \leq \frac{r}{2k}$ entraîne, d'une part $\rho(x_0,z) < 2r$, d'autre part

– $\|z-\gamma(r)\| \leq \frac{r}{2kc_1}$ d'après la Proposition 1.1 de [9] rappelée ci-dessus (§1);

– puis $\|x_0 + rX_0 - z\| \leq \frac{r}{kc_1}$ pour $0 \leq r \leq r_0$ convenable, puisque

$$\gamma(r) = x_0 + rX_0 + o(r) \quad \text{quand} \quad r \to 0 \, .$$

Si $kc_1\|X_0\| > 1$, les boules fermées euclidiennes de centres $x_0 + rX_0$, rayon $\frac{r}{kc_1}$, $0 \leq r \leq r_0$, ont pour réunion un cône K de sommet x_0 , axe X_0, et l'on vient de voir que, si $B(x,\delta)$ désigne la ρ-boule ouverte de centre x , rayon δ :

$$B(\gamma(r),\frac{r}{2k}) \subset K \cap B(x_0,2r) \ , \ \forall r \in [0,r_0] \, .$$

Rappelons le Théorème 9 de [10] : un point-frontière x_0 d'un ouvert ω_0 (relativement compact dans Ω) est L-régulier si le rapport des mesures (de Lebesgue) de $(\Omega\backslash\omega_0) \cap B(x_0,\delta)$ et de $B(x_0,\delta)$ est, pour δ assez petit, minoré par un nombre > 0 indépendant de δ . Alors, si l'on vérifie que le rapport des mesures de $B\left(\gamma(r),\frac{r}{2k}\right)$, et $B(x_0,2r)$ est minoré, pour r assez petit, par un nombre > 0 indépendant de r , en résultera que K n'est pas L-effilé en x_0 , et K est arbitrairement mince puisque k est arbitrairement grand.

Pour comparer les mesures des 2 boules, on recourt au Théorème 1 de [9] rappelé au §1 : parmi les multi-indices I de longueur N pour lesquels $\lambda_I(x_0) \neq 0$, soient $I_1,\ldots,I_n$ ceux pour lesquels $d(I)$ a la plus petite valeur, soit d_0; alors

$$\Lambda(x_0,2r) \sim (2r)^{d_0} \sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_{I_\nu}(x_0)| \quad \text{quand} \quad r \to 0 \, ,$$

et

$$\Lambda(\gamma(r),\frac{r}{2k}) \geq (\frac{r}{2k})^{d_0} \sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_{I_\nu}(\gamma(r))| > (1-\varepsilon)(\frac{r}{2k})^{d_0} \sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_{I_\nu}(x_0)|$$

pour r assez petit. □

THÉORÈME 6.2. — *Les points $y \in \Omega\backslash\{x\}$ qui sont réguliers pour la ρ-boule ouverte de centre x, rayon $\rho(x,y)$, forment un ensemble dont l'intersection avec tout sous-ouvert ω non vide est de mesure > 0 .*

Preuve. — D'après le corollaire 5.3, les points $y \in \omega$ où $\rho(x,\cdot)$ est différentiable et son gradient non orthogonal à un champ X_j au moins forment un ensemble de mesure > 0; soient donc y un tel point, $X_j(y)$ non orthogonal au gradient de $\rho(x,\cdot)$ en y, γ la courbe intégrale du champ X_j passant par y , $\gamma(t_0) = y$. La fonction $\rho[x,\gamma(t)]$ a, pour $t = t_0$, une dérivée $\neq 0$, qu'on peut supposer > 0 en changeant au besoin t en $-t$. Alors il existe $k > 0$ tel que, pour $t_0 \leq t \leq t_1$ convenable :

$$\rho[x,\gamma(t)] \geq \rho[x,\gamma(t_0)] + k(t - t_0) \;;$$

on a d'autre part

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + o(t - t_0) \quad \text{quand} \quad t \to t_0 \;,$$

d'où

$$\rho[x,\gamma(t_0) + u\gamma'(t_0)] \geq \rho[x,\gamma(t_0)] + \frac{k}{2}u \quad \text{pour} \quad 0 \leq u \leq u_0$$

en utilisant l'inégalité $|\rho(x,y_1) - \rho(x,y_2)| \leq c\|y_1 - y_2\|$ pour y_1 , y_2 voisins de $\gamma(t_0)$, qui résulte du Théorème 2.1; de là on déduit $\rho(x,z) > \rho[x,\gamma(t_0)]$ pour tout z appartenant à une boule ouverte euclidienne de centre $\gamma(t_0) + u\gamma'(t_0)$, rayon $\dfrac{k}{2c}u$, $0 \leq u \leq u_0$, et la réunion de ces boules est un cône de sommet $\gamma(t_0)$, disjoint à la ρ-boule de centre x dont la frontière passe par $\gamma(t_0)$.

Comme l'axe de ce cône est le vecteur non nul $X_j(\gamma(t_0))$, d'après le Théorème 6.1 ce cône n'est pas L-effilé au point $\gamma(t_0)$. □

PROPOSITION 6.3. — *Soit γ une courbe intégrale, tracée dans Ω , d'un champ X_j : $\gamma'(t) = X_j(\gamma(t))$; étant donné $x \in \Omega\backslash\gamma$, pour presque tout rayon δ tel que γ rencontre la ρ-sphère de centre x , rayon δ , chaque point d'intersection est L-régulier pour la ρ-boule $B(x,\delta)$.*

Preuve. — $\|\gamma'(t)\| \leq M_j \; \forall t$ entraîne $\|\gamma(t') - \gamma(t)\| \leq M_j|t' - t|$, de sorte que $\rho[x,\gamma(t)]$ est fonction localement lipschitzienne de t; d'après une propriété, voisine du Théorème de Sard, dont on donne ci-dessous (prop. 6.4) une démonstration, $\exists E$ négligeable dans $\mathbf{R}$ tel que, en tout point t_0 où $\rho[x,\gamma(t_0)] \notin E$, cette fonction $\rho[x,\gamma(t)]$ a une dérivée $\neq 0$, ce qui implique $X_j(\gamma(t_0)) = \gamma'(t_0) \neq 0$, et la démonstration s'achève comme celle du Théorème 6.2.

PROPOSITION 6.4. — *Soit f lipschitzienne $[a,b] \to \mathbf{R}$: les valeurs de f, aux points où f n'a pas de dérivée ou en a une nulle, forment un ensemble négligeable.*

Preuve. — Si L est la constante de Lipschitz : tout intervalle $\subset [a,b]$ de longueur α , toute partie ouverte de $[a,b]$ de mesure α , a une image par f de mesure $\leq \alpha L$; on choisit une 1ère partie ouverte, de mesure $\leq \frac{\varepsilon}{2L}$, contenant les points de $[a,b]$ où f' n'existe pas, puis (grâce à la propriété de Lusin) une 2ème contenant la 1ère, de mesure $\leq \frac{\varepsilon}{L}$, telle que f' existe et soit continue sur son complémentaire K; alors

$$\varepsilon_k = \sup \left\{ |f'(x) - f'(y)| \ : \ x \text{ et } y \in K \ , \ |x-y| \leq \frac{b-a}{k} \right\} \longrightarrow 0$$

quand $k \to \infty$, et $f([a,b] \backslash K)$ est de mesure $\leq \varepsilon$. Reste à évaluer $f(E)$ si $E = \{x \in K \ : \ f'(x) = 0\}$.

Partageons $[a,b]$ en k intervalles égaux, et retenons seulement les intervalles partiels I_n rencontrant E en x_n : $\forall x \in I_n$ on a

$$f(x) - f(x_n) = \int_{x_n}^{x} f'(t)dt \ ,$$

où $|f'(t)| \leq \varepsilon_k$ si $t \in K$, $|f'(t)| \leq L$ si $t \notin K$, d'où

$$|f(x) - f(x_n)| \leq \frac{b-a}{k} \varepsilon_k + L \cdot \text{mesure de } I_n \cap ([a,b] \backslash K) \ .$$

Ainsi le 2ème membre doublé majore la mesure de $f(I_n)$, et celle de $f(E)$ est majorée par le double de

$$(b-a)\varepsilon_k + L \cdot \text{mesure de } ([a,b] \backslash K) \leq (b-a)\varepsilon_k + \varepsilon \ .$$

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. BONY, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, Cours du C.I.M.E., Stresa, Juillet 1969.

[2] N. BOURBAKI, Topologie générale, Chapitre IX.

[3] W. HANSEN & H. HUEBER, The Dirichlet problem for sublaplacians on nilpotent Lie groups, Math. Annalen, 276 (1987), 537–547.

[4] R.-M. et M. HERVÉ, Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot associées à un opérateur elliptique dégénéré, Ann. Inst. Fourier, 22-2 (1972), 131–145.

[5] D. JERISON, The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition, Duke mathematical Journal, 53-2 (1986), 503–523.

[6] D. JERISON, A. SANCHEZ-CALLE, Subelliptic, second order differential operators, Lecture Notes in Maths, 1277, 46–77.

[7] R. LÉANDRE, Estimation en temps petit de la densité d'une diffusion hypoelliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, 301 (1985), 801–804.

[8] J. MOSER, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 577–591.

[9] A. NAGEL, E. STEIN, S. WAINGER, Balls and metrics defined by vector fields, Acta Math., 155 (1985), 103–147.

[10] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI, Wiener criterion for a class of degenerate elliptic operators, Journal of Diff. Eq., 66 (1987), 151–164.

[11] H. RADEMACHER, Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale, Math. Ann., 79 (1918), 340–359.

Manuscrit reçu le 8 février 1989.

R.-M. & M. HERVÉ,
Université de Paris VI
Mathématiques
Tour 45-46, 5ème étage
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France).