

THIERRY BOUCHE

## **Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 40, n° 1 (1990), p. 117-130

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1990\\_\\_40\\_1\\_117\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_1_117_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CONVERGENCE DE LA METRIQUE DE FUBINI-STUDY D'UN FIBRE LINEAIRE POSITIF

par Thierry BOUCHE

---

### Introduction.

Soit  $X$  une variété analytique complexe, compacte et connexe, de dimension  $n$  sur  $\mathbf{C}$  munie d'une métrique hermitienne  $\omega$ . Soit  $L$  un fibré linéaire holomorphe positif au-dessus de  $X$  (c'est-à-dire que  $L$  est muni d'une métrique hermitienne  $C^\infty$  dont la courbure  $ic(L)$  est une  $(1, 1)$ -forme définie positive. Cette condition équivaut en géométrie algébrique à l'amplitude). Notons  $L^k$  sa  $k$ -ième puissance tensorielle ( $k$  entier positif) et  $V_k = H^0(X, L^k)$  l'espace des sections holomorphes globales de  $L^k$ .  $L^k$  étant globalement engendré pour  $k$  suffisamment grand, il existe une application holomorphe naturelle :

$$\begin{aligned}\Phi_k : X &\longrightarrow \mathbf{P}(V_k^*) \\ x &\longmapsto H_x = \{\sigma \in V_k \mid \sigma(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Le théorème de plongement de Kodaira affirme que, pour  $k \geq k_0$ ,  $\Phi_k$  est en fait un plongement de  $X$  dans l'espace projectif  $\mathbf{P}(V_k^*)$ .

Soit  $\mathcal{O}(1)$ , le fibré canonique (dual du fibré en droites tautologique au-dessus de  $\mathbf{P}(V_k^*)$ ). On a un isomorphisme  $L^k \simeq \Phi_k^*(\mathcal{O}(1))$ . On appelle métrique de Fubini-Study la métrique induite sur  $L^k$  par celle de  $\mathcal{O}(1)$ , lorsque  $V_k$  est muni de sa métrique  $L^2$  naturelle. Si  $X$  est une variété

abélienne, Kempf [7] puis Ji [6] ont montré que la métrique de Fubini-Study converge vers la métrique initiale lorsque  $k$  tend vers l'infini. Tian [11] a étendu ce résultat au cas d'une variété projective quelconque, en se restreignant toutefois au cas  $\omega = ic(L)$ . Si  $\xi \in L_x^k \setminus \{0\}$ , notons  $|\xi|_k$  (resp.  $|\xi|_{k^{F-S}}$ ) la norme de  $\xi$  dans la métrique initiale (resp. de Fubini-Study); on définit alors la *fonction de distorsion* entre ces métriques

$$b_k(x) = \frac{|\xi|_k}{|\xi|_{k^{F-S}}}.$$

L'objet de cet article est de donner un équivalent ponctuel de  $b_k(x)$  lorsque  $k$  tend vers l'infini, sur toute variété projective.

Soit  $\det ic_x(L)$  le produit des valeurs propres de la courbure  $ic_x(L)$  par rapport à la métrique  $\omega$  sur  $X$ , nous montrons le

THÉORÈME PRINCIPAL. — *En tout point  $x$  de  $X$ , on a l'équivalent*

$$b_k(x) \sim k^n \det \frac{i}{2\pi} c_x(L)$$

lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , uniformément par rapport à  $x \in X$ .

Une conséquence immédiate est que  $(b_k)^{1/k}$  converge uniformément vers 1 sur  $X$ , c'est-à-dire que la métrique de Fubini-Study de  $L$  converge uniformément vers la métrique initiale.

Notre méthode de démonstration s'appuie sur une estimation asymptotique du noyau de l'opérateur de la chaleur  $e^{-\frac{t}{k}\Delta_k''}$  où  $\Delta_k''$  est le laplacien antiholomorphe défini par la connexion de Chern de  $L$  (théorème 1). Ces estimations sont comparables à celles de Bismut [1], mais plutôt que d'utiliser une méthode probabiliste, nous employons une approche analytique qui doit beaucoup à Mac Kean et Singer [8]. Certains détails techniques nous ont également été proposés par Jean-Pierre Demailly à la suite d'une discussion qu'il avait eue avec monsieur Mohan Ramachandran aux États-Unis. Cela nous permet d'obtenir des renseignements sur l'uniformité de notre équivalent par rapport aux différents paramètres (en particulier le temps).

L'organisation du papier est la suivante : la section 1 est consacrée à l'étude d'une formule asymptotique pour le noyau de la chaleur associé à un opérateur de Schrödinger général; dans la section 2 nous observons que la fonction  $b_k(x^0)$  est équivalente au noyau de la chaleur au point  $(x^0, x^0)$  lorsque, pour un  $\varepsilon$  petit,  $t = k^\varepsilon$  tend vers  $+\infty$ , il ne reste alors qu'à calculer explicitement, dans ce cas, les valeurs de la section 1.

Ces résultats, accompagnés des grandes lignes de leurs démonstrations ont été annoncés par Jean-Pierre Demailly [4], l'objet de ce travail est d'en donner les démonstrations complètes.

**1. Comportement asymptotique du noyau de la chaleur associé à un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique.**

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte,  $E$  et  $F$  deux fibrés vectoriels de classe  $C^\infty$ , hermitiens de rangs respectifs (sur  $\mathbb{C}$ ) 1 et  $r$ . Nous noterons  $C_q^\infty(M, F)$  l'espace des sections de classe  $C^\infty$  de  $\Lambda^q T^*M \otimes F$  (nous omettrons l'indice  $q$  lorsqu'il sera nul). Soit  $d\sigma$ , l'élément de volume riemannien de  $M$  ; les métriques considérées sur les fibres permettent de définir une norme quadratique

$$\|u\|^2 = \int_M |u|^2 d\sigma.$$

La fermeture pour cette norme de  $C_q^\infty(M, F)$  sera notée  $L_q^2(M, F)$ .

On appelle connexion  $D$  sur  $F$  un opérateur différentiel d'ordre 1 vérifiant, si  $f \in C_p^\infty(M, \mathbb{C})$  et  $u \in C_q^\infty(M, F)$

$$D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^p f \wedge Du.$$

Si  $(u, v)$  est l'accouplement sesquilinéaire canonique, la connexion  $D$  sera dite hermitienne si elle vérifie :

$$d(u, v) = (Du, v) + (-1)^{\deg u} (u, Dv).$$

L'opérateur  $D^2$  est alors un opérateur de multiplication extérieure par une 2-forme (appelée courbure de  $D$  et notée  $c(D)$ .)

Dans un ouvert  $U$  qui trivialisent  $F$ , toute connexion s'écrit :

$$Du = du + \Gamma \wedge u$$

$$c(D) = (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)$$

si  $F$  est de rang 1, et si la connexion  $D$  est hermitienne, on aura  $\Gamma = -iA$  où  $A$  est une 1-forme réelle, et  $c(D) = -idA$ ,  $B = dA = ic(D)$  est le champ magnétique de la connexion  $D$ . Nous noterons  $s = s(x)$  le rang de  $B$  en chaque point  $x \in M$ .

On peut toujours trouver un système de coordonnées sur  $U(x_1 \dots x_m)$  tel que  $(dx_1 \dots dx_m)$  soit un repère orthonormé de  $T^*M$ , et qui diagonalise  $B$  en un point  $x^0$  de  $U$  : soit

$$B_{x^0} = \sum_{j=1}^{s(x^0)} B_j(x^0) dx_j \wedge dx_{j+s}.$$

Si  $D^*$  est l'adjoint de  $D$ , l'opérateur de Laplace-Beltrami (ou laplacien brut) associé à  $D$  est  $\Delta = D^*D + DD^*$ . Le laplacien riemannien usuel  $\Delta_g$  correspond au cas où  $F = \mathbf{C}$  est trivial, et  $D = d$ . L'opérateur  $\Delta$  est elliptique (c'est un opérateur à symbole diagonal, dont chaque composante est le symbole principal de  $\Delta_g$ ). Soit  $E^k$  la  $k$ -ième puissance tensorielle du fibré  $E$ ,  $D_k$  la connexion induite sur  $F_k = E^k \otimes F$  par les connexions hermitiennes de  $E$  et  $F$ , et  $\Delta_k$  le laplacien brut associé. Soit  $V \in C^\infty(M, \text{Herm}(F, F))$ . Nous allons désormais étudier sur  $C^\infty(\mathbf{R} \times M, F_k)$  l'opérateur de la chaleur suivant :  $L_k = \frac{\partial}{\partial t} + \square_k$  où  $\square_k = \frac{1}{k} \Delta_k - V$ , avec l'abus de notation  $V = \text{id}_{E^k} \otimes V$ .  $\square_k$  étant un opérateur elliptique pour tout  $k$ , l'opérateur  $e^{-t\square_k}$  existe et possède un noyau  $e_k(t, x, y)$  dit *noyau de la chaleur*. Soit  $V_0 = \sup_M \|V\|$ ,  $M$  étant compacte, on sait que  $\square_k$  admet un spectre discret  $-V_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  et une base hilbertienne de sections propres correspondantes :  $\psi_j \in C^\infty(M, F_k)$ . Le noyau de la chaleur est alors donné par la formule :

$$e_k(t, x, y) = \sum_{j \geq 1} e^{-t\lambda_j} \psi_j(x) \otimes \psi_j^*(y)$$

et admet les propriétés suivantes :

- (li)  $e_k(t, x, y) \in C^\infty(]0, +\infty[ \times M \times M, \text{Hom}(F_k, F_k))$  ;
- (lii)  $L_k e_k = 0$  où  $\square_k$  est appliqué à la première variable ;
- (liii)  $e_k(t, x, y) \rightarrow \delta_y$  (masse de Dirac) si  $t \rightarrow 0$  ;
- (liv)  $e_k(t, x, y) = e_k^*(t, y, x)$ .

Les propriétés (li-iii) définissent  $e_k$ .

Si  $\Omega$  est un ouvert de  $M$ , et  $\square_{k,\Omega}$  est l'opérateur défini par  $\square_k$  sur  $\Omega$ , avec condition de Dirichlet au bord, on aura de même, en notant  $\bar{e}_{k,\Omega}$  le noyau de la chaleur associé :

- (2i)  $\bar{e}_{k,\Omega} \in C^\infty(]0, +\infty[ \times \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}, \text{Hom}(F, F))$
- (2ii)  $L_k \bar{e}_{k,\Omega} = 0$  à l'intérieur de  $\Omega$
- (2iii)  $\bar{e}_{k,\Omega}(t, \partial\Omega, y) = \{0\}$
- (2iv)  $\bar{e}_{k,\Omega} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \delta_y$ .

Si  $B = \sum_{j=1}^s B_j dx_j \wedge dx_{j+s}$  est la valeur du champ magnétique de la connexion  $D_E$  de  $E$  au point  $x \in M$ , le but de cette section est le

THÉORÈME 1. — Lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , on a l'équivalent

$$e_k(t, x, x) \sim \frac{k^{\frac{m}{2}} e^{tV(x)}}{(4\pi)^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m}{2}-s}} \prod_{j=1}^s \frac{B_j(x)}{\text{sh } B_j(x)t}$$

uniformément par rapport à  $(x, t) \in M \times [t_0, t_1] \subset M \times ]0, +\infty[$ .

Nous étudierons, en outre, le cas suivant pour la section 2 :

THÉORÈME 2. — Soit  $e^0(t, x) = \frac{e^{tV(x)}}{(4\pi)^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m}{2}-s}} \prod_{j=1}^s \frac{B_j(x)}{\text{sh } B_j(x)t}$ . Il existe

$\varepsilon > 0$  tel que, sur l'ensemble  $\{V(x) - \sum_{j=1}^s B_j(x) \leq 0\}$ , on ait

$$\left| \frac{e_k(t, x, x)}{k^{\frac{m}{2}}} - e^0(t, x) \right| \leq C e^0(t, x) k^{-1/5}$$

pour tout  $t \in ]0, k^\varepsilon]$  et  $k \geq k_0$ .

La méthode que nous suivons est analogue dans le principe à celle des articles [2], [3], mais très différente par ses détails : nous montrons avant tout que le problème est local (i.e.  $e_k(t, x^0, x^0) \sim \bar{e}_{k, \Omega}(t, x^0, x^0)$  où  $\Omega$  est un voisinage quelconque de  $x^0$ ) ceci grâce à une comparaison entre  $e_k$  et le noyau de la chaleur associé à  $\Delta_g$  déduite de l'inégalité de Kato. Ensuite, nous utilisons un calcul explicite du noyau  $e_k^0$  associé à l'opérateur  $\square_k^0$  (i.e.  $\square_k$  figé en  $x^0$ ). Enfin, nous vérifions que la différence entre  $e_k$  et  $e_k^0$  est négligeable devant  $e_k^0$ , lorsque l'on réduit le domaine à des boules dont le rayon tend vers 0.

Soit  $B_r$ , une boule de centre  $x^0$  et de rayon  $r$ , et qui soit un ouvert de carte pour  $M$ , et soit  $\bar{V}_r = \sup_{x \in B_r} \|V(x)\|$ .

PROPOSITION 1 (Principe de localisation pour  $e_k(t, x, y)$ ). — Il existe des constantes  $c_1$  et  $\varepsilon_1 > 0$  telles que l'on ait, pour tout  $t \in ]0, \min(k\varepsilon_1, \frac{kr^2}{2m})]$  et tout  $x^0 \in M$  :

$$|e_k(t, x^0, x^0) - \bar{e}_{k, B_r}(t, x^0, x^0)| \leq C_1 \frac{k^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{kr^2}{4t} + 2t\bar{V}_r}.$$

La proposition 1 est une conséquence du

LEMME 1. — Soit  $d(x, y)$ , la distance géodésique sur  $(M, g)$  de  $x$  à  $y$ . On a pour tout  $t \in ]0, k\varepsilon_1]$  et pour tout  $(x, y) \in M^2$  :

$$|e_k(t, x, y)| \leq C_1 \frac{k^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{m}{2}}} e^{-k \frac{d(x, y)^2}{4t} + t\bar{V}_r}.$$

Pour voir ceci, appelons  $e_g(\tau, x, y)$  le noyau de la chaleur associé à l'opérateur  $\Delta_g$ , et  $\hat{e}_k(\tau, x, y)$  le noyau de la chaleur associé à  $k\Box_k = \Delta_k - kV$ . L'inégalité de Kato s'écrit pour  $\Delta_k$  de la façon suivante :

$$(*) \quad \text{si } u \in C^\infty(B_r, F_k), \quad \langle \Delta_k u, u \rangle \geq |u| \Delta_g |u|$$

et, par suite :

$$\langle k\Box_k, u, u \rangle \geq |u| (\Delta_g - k\bar{V}_r |u|).$$

Cette inégalité a pour conséquence la relation de domination entre les semi-groupes associés (cf. Hess-Schrader-Uhlenbock [5] ou Simon [10]) qui donne ponctuellement :

$$(3) \quad |\hat{e}_k(t, x, y)| \leq \text{rg } F e^{k\bar{V}_r} e_g(\tau, x, y).$$

Mais  $e_g(\tau, x, y)$  admet le développement asymptotique (cf. Minakshisundaran-Pleijel [9]) au voisinage de  $\tau = 0$  :

$$e(\tau, x, y) \sim u_0 (4\pi\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4\tau}},$$

ce qui implique

$$(4) \quad \text{pour tout } \tau \leq \varepsilon, \quad e_g(\tau, x, y) \leq u_1 (4\pi\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4\tau}}.$$

Le lemme 1 est alors le résultat des majorations (3) et (4) où l'on a posé  $\tau = \frac{t}{k}$ . □

*Démonstration de la proposition 1.* — Soit  $\varphi$ , une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $B_r$ . Définissons :

$$\psi(t, x) = \int_{B_r} (\bar{e}_{k, B_r} - e_k) \varphi.$$

Cette fonction vérifie (d'après (1ii-iii) et (2ii-iv)) :

$$(5i) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Box_k \psi = 0 \quad \text{sur } ]0, +\infty[ \times B_r$$

$$(5ii) \quad \psi \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Or, d'après l'inégalité de Kato,  $e^{-t\bar{V}_r} |\psi|$  doit vérifier le principe du maximum pour l'opérateur de la chaleur<sup>(1)</sup> On a donc :

$$\begin{aligned} |\psi(t, x^0)| &\leq e^{t\bar{V}_r} \sup_{(\tau, x) \in [0, t] \times \partial B_r} |\psi| \\ &\leq C_1 \frac{k^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{k\alpha_0}{t} d^2(\text{supp } \varphi, \partial B_r) + 2t\bar{V}_r} \|\varphi\|_1 \end{aligned}$$

(1) En effet, si l'on remarque que  $\langle \frac{\partial}{\partial t} \psi, \psi \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = |\psi| \frac{\partial}{\partial t} |\psi|$ , l'inégalité de Kato (\*) implique :

$$\langle L_k, \psi, \psi \rangle \geq |\psi| \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \Delta_g - \bar{V}_r \right) |\psi|,$$

si  $t \leq \frac{2}{m} k a_0 d^2(\text{supp } \varphi, \partial B_r)$ .

La proposition 1 est la limite de cette majoration lorsque  $\varphi$  tend vers la masse de Dirac au point  $x_0$ . □

Définissons maintenant l'opérateur  $\square_k^0$  comme  $\square_k$  gelé en  $x^0$ , c'est-à-dire que :

- la courbure de  $E$  est constante :  $\square = \sum_{j=1}^s B_j dx_j \wedge dx_{j+s}$  soit, dans

une trivialisation *ad hoc* :  $A = \sum_{j=1}^s B_j x_j dx_{j+s}$ ,

- $D_F$  est plate,
- l'espace ambiant est  $\mathbf{R}^m$  muni de la métrique constante  $g^0 = \sum dx_j \otimes dx_j$ ,
- $V$  est constante, et diagonale dans un repère  $e_\lambda$  de  $F$  :

$$\langle V_{u,u} \rangle = \sum_{1 \leq \lambda \leq r} V_\lambda |u_\lambda|^2 \quad \text{si } u = \sum_{\lambda=1}^r u_\lambda \otimes e_\lambda.$$

On calcule alors directement la valeur du noyau de la chaleur associé (cf. Demailly [4]) :

(6)

$$e_k^0(t, x, y) = \prod_{j=1}^s \frac{k B_j}{4\pi s h B_j t} \exp \left( \frac{-k B_j}{4} \coth B_j t ((x_j - y_j)^2 + (x_{j+s} - y_{j+s})^2) + \frac{i}{2} k B_j (x_j + y_j)(x_{j+s} - y_{j+s}) \right) \\ \times e^{tV} \left( \frac{k}{4\pi t} \right)^{\frac{m-2s}{2}} \exp \left( -k \sum_{j>2s} (x_j - y_j)^2 / 4t \right).$$

d'où

(\*\*)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \Delta_g - \bar{V}_r \right) |\psi| \leq 0,$$

ce qui équivaut à

(\*\*)'

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k} \Delta_g \right) e^{-t\bar{V}_r} |\psi| \leq 0.$$

La fonction  $e^{-t\bar{V}_r} |\psi|$  atteint par conséquent son maximum sur  $\{0\} \times B_r \cup [0, t] \times \partial B_r$ . (cf. par exemple Folland, G.-B., *Introduction to partial differential equations*, Princeton Univ. Press (1976)).



La proposition 1 nous autorise à modifier  $\square_k$  hors d'une boule sans que cela modifie l'équivalent recherché : nous allons nous y prendre de la façon suivante : soit  $B_k = B_{r_k}$  la boule de centre  $x^0$  et de rayon  $r_k = k^{-5/12}$ , resp.  $B'_k$  la boule de même centre et de rayon  $2r_k$  (de façon à ce que  $k r_k^2 \rightarrow +\infty$  et  $k r_k^3 \rightarrow 0$ ), nous construisons un opérateur  $\tilde{\square}_k$  qui coïncide avec  $\square_k$  sur  $B_k$ , et avec  $\square_k^0$  sur  $\mathbf{R}^m \setminus B'_k$  (si  $\chi$  est une fonction troncante valant 1 sur  $B_k$ , et 0 hors de  $B'_k$ , on peut définir  $\tilde{\Delta}_k$  comme le laplacien associé à la connexion  $\tilde{D}_k = \chi D_k + (1 - \chi) D_k^0$ , de forme  $k\tilde{A}_k = k\chi A + k(1 - \chi)A_0 + \chi A_F$  où  $A_F$  est la forme de la connexion  $D_F$ , lorsque la variété est munie de la métrique  $\tilde{g} = \chi g + (1 - \chi)g^0$  ; de même  $\tilde{V} = \chi V + (1 - \chi)V(x^0)$ ).

Le calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \Delta_k u = & - \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_e} \left( g^{jl} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + ik \frac{\partial u}{\partial x_j} \bar{A}_\ell g^{j\ell} \\ & + ik \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (A_j g^{j\ell} \sqrt{\det g} u) + k^2 |A|^2 \end{aligned}$$

d'où l'estimation :

$$(7) \quad \tilde{\square}_k - \square_k^0 = \begin{cases} 0 \left( \frac{|x - x^0|}{k} \nabla^2 + \left( \frac{1}{k} + |x - x^0|^2 \right) \nabla + |x - x^0| + k|x - x^0|^3 \right) \\ 0 \text{ hors de } B'_k \end{cases}$$

si l'on a choisi  $A$  de sorte que

$$|A(x) - A(x^0)| \leq C_2 |x - x^0|^2 \quad (\text{cf. [3], lemme 2.10})$$

PROPOSITION 2. — On a l'équivalent suivant, lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  :

$$\tilde{e}_k(t, x^0, x^0) \sim e_k^0(t, x^0, x^0) \text{ uniformément pour } t \in [t_0, t_1] \subset ]0, +\infty[.$$

D'après le lemme 1, et les propriétés (1i-v) de  $\tilde{e}_k$  et  $e_k^0$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_k(t,x,y) - e_k^0(t,x,y) &= \int_{\mathbf{R}^m} e_k^0(0,z,y) \tilde{e}_k(t,x,z) dz - \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{e}_k(0,x,z) e_k^0(t,z,y) dz \\ &= \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{e}_k(\tau,x,z) e_k^0(t-\tau,z,y) dz \\ &= - \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^m} \{ \tilde{\square}_k^* \tilde{e}_k(\tau,x,z) e_k^0(t-\tau,z,y) \\ &\quad - \tilde{e}_k(t,x,z) \square_k^0(e_k^0(t-\tau,z,y)) \} dz \\ &= - \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{e}_k(\tau,x,z) (\tilde{\square}_k - \square_k^0)_z e_k^0(t-\tau,z,y) dz \\ &= - \int_0^t d\tau \int_{B'_k} \tilde{e}_k(\tau,x,z) (\tilde{\square}_k - \square_k^0)_z e_k^0(t-\tau,z,y) dz. \end{aligned}$$

Posons  $f_k(t,x,y) = (\tilde{\square}_k - \square_k^0) e_k^0(t,x,y)$ , et notons la dernière égalité  $\tilde{e}_k - e_k^0 = \tilde{e}_k \# f_k$ . Nous sommes donc conduits à la somme formelle :

$$\begin{aligned} (8) \quad \tilde{e}_k &= e_k^0 + e_k^0 \# f_k + \dots + e_k^0 \# f_k \# \dots \# f_k + \dots \\ &= \sum_{p \geq 0} e_k^0 \# f_k^{\# p}. \end{aligned}$$

LEMME 2. — La somme de Lévi (8) converge vers  $\tilde{e}_k$ .

Nous allons tout d'abord donner une estimation de  $f_k$  en combinant l'estimation (7) avec l'expression (6) :

$$|\nabla e_k^0(t,z,y)| \leq C_5 \left( \left( \frac{k}{t} |z-y| \right) + k(|z| + |y|) \right) |e_k^0(t,z,y)|$$

$$|\nabla^2 e_k^0(t,z,y)| \leq C_6 \left( \frac{k}{t} + k + \frac{k^2}{t^2} |y-z|^2 + k^2 (|y| + |z|)^2 + \frac{k^2}{t} |y-z| (|y| + |z|) \right) |e_k^0|$$

d'où,

$$|f_k(t,z,y)| \leq C_7 \left( \frac{k|z-y|^3}{t^2} + \frac{|z-y| + k|z-y|^2}{t} + kr_k^3 + r_k^2 \right) |e_k^0(t,z,y)|.$$

Comme  $r_k = k^{-5/12}$  et  $x^p e^{-\alpha x}$  est une fonction bornée sur  $\mathbf{R}^+$  pour tout  $p \geq 0$  et  $\alpha > 0$ , il vient, pour un  $a_0 > 0$ , et  $k$  assez grand :

$$(9) \quad |f_k(t,z,y)| \leq C_8 \frac{k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{t}} e^{t\sqrt{r}} t^{-\frac{m}{2}} e^{-a_0 k \frac{|z-y|^2}{t}},$$

d'où

$$|e_k^0 \# f_k(t,x,y)| \leq C_9 k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} e^{t\sqrt{r}} \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^m} \tau^{-\frac{m+1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-a_0 k \left( \frac{|z-y|^2}{\tau} + \frac{|z-x|^2}{t-\tau} \right)} dz$$

Or, par un calcul direct, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^m} \tau^{-\frac{m+1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-a_0 k \left( \frac{|z-y|^2}{\tau} + \frac{|z-x|^2}{t-\tau} \right)} dz = \left( \frac{\pi}{a_0} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{(kt)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{\tau}} e^{-a_0 k \frac{|x-y|^2}{t}}$$

et, par conséquent :

$$(10) \quad \begin{cases} |e_k^0 \# f_k(t, x, y)| \leq C_{10}^2 k^{\frac{m}{2} - \frac{1}{4}} e^{t\bar{V}_r} \frac{t^{-\frac{m+1}{2}}}{2} e^{-\frac{a_0 k}{t} |x-y|^2} \\ \dots \\ |e_k^0 \# \dots \# f_k(t, x, y)| \leq C_{10}^p k^{\frac{m}{2} - \frac{p}{4}} e^{t\bar{V}_r} \frac{t^{-\frac{m-1}{2} + p}}{p!} e^{-\frac{a_0 k}{t} |x-y|^2} \end{cases}$$

( $p$  fois)

(11i) si bien que la série (8) converge ainsi que toutes ses dérivées sur tout compact de  $]0, +\infty[ \times \mathbf{R}^{2m}$ . Cela établi, les propriétés (1ii-iii) en découlent rapidement :

(11ii) pour tout  $b \in C^\infty(]0, +\infty[ \times \mathbf{R}^{2m}, \text{Hom}(F, F))$ , on a les relations :

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_k^0 \# b) = -b - \square_k^0 (e_k^0 \# b) \quad \text{et} \quad f_k \# b = (\tilde{\square}_k - \square_k^0) (e_k^0 \# b)$$

où la dérivation porte sur  $x$ . Il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (e_k^0 + e_k^0 \# f_k + \dots) &= -\square_k^0 e_k^0 - (\tilde{\square}_k - \square_k^0) e_k^0 - (\tilde{\square}_k - \square_k^0) e_k^0 \# f_k - \square_k^0 e_k^0 - \dots \\ &= -\tilde{\square}_k (e_k^0 + e_k^0 \# f_k + \dots). \end{aligned}$$

(11iii) On a  $e_k^0(0, x, y) = \delta_x(y)$  et, d'après (10) :

$$(12) \quad |\tilde{e}_k - e_k^0| \leq k^{\frac{m}{2}} t^{-\frac{m-1}{2}} e^{t\bar{V}_r} \left( \exp(C_{10} \frac{t}{k^{1/4}}) - 1 \right) e^{-\frac{a_0 k}{t} |x-y|^2}$$

où le second membre tend vers 0 dans  $L^1(]0, +\infty[)$  lorsque  $t$  tend vers 0.

Le lemme 2 est donc démontré en vertu de l'unicité du noyau de la chaleur (cela parce que la série  $\tilde{e}_k$  est intégrable sur  $\mathbf{R}^m$ ). On pourra d'ailleurs remarquer que notre démonstration du lemme 2 est identique à celle de Mac Kean et Singer [8], car nous avons ici utilisé une majoration de  $|e_k^0|$  indépendante de  $B$  (cf. lemme 1).  $\square$

Il est clair que le lemme 2 et la proposition 1 impliquent le théorème 1 grâce à la majoration (12).

*Démonstration du théorème 2.* — Il suffit d'obtenir un ordre de convergence plus précis que celui donné par (12) pour la somme de Lévi de  $\tilde{e}_k$ , en  $(x^0, x^0)$ . Pour cela, observons tout d'abord que les estimations

utilisées pour la majoration (9) conduisent en fait à

$$(13) \quad |f_k(t, z, y)| \leq C_{11} \frac{k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{t}} e^{t\bar{V}_r} \prod_{j=1}^{2s} \frac{\sqrt{B_j} e^{-a_0 k B_j \coth B_j t |y_j - z_j|^2}}{\sqrt{\text{sh } B_j t}} \times \prod_{j>2s} \frac{e^{-\frac{a_0 k}{t} |y_j - z_j|^2}}{\sqrt{t}}.$$

Dans les calculs qui suivent, nous aurons pour convention  $B_j = B_{j-s}$  si  $j \in \{s+1 \dots 2s\}$ . Par conséquent, il vient

$$(14) \quad |e_k^0 \# f_k(t, x^0, x^0)| \leq C_{12} k^{m-\frac{1}{4}} e^{t\bar{V}_r} \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^m} \prod_{j=1}^{2s} \frac{B_j e^{-a_0 k B_j (\coth B_j \tau + \coth B_j (t-\tau)) |z_j - x_j^0|^2}}{\sqrt{\text{sh } B_j \tau \text{ sh } B_j (t-\tau)}} \times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \times \prod_{j>2s} \frac{e^{a_0 k (\frac{1}{\tau} + \frac{1}{t-\tau}) |z_j - x_j^0|^2}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}$$

Pour  $j > 2s$ , un calcul déjà explicité donne :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-a_0 k (\frac{1}{\tau} + \frac{1}{t-\tau}) |z_j - x_j^0|^2}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} dz_j = \sqrt{\frac{\pi}{ka_0 t}}$$

et, pour  $1 \leq j \leq 2s$ , on aura :

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{B_j e^{-a_0 k B_j (\coth B_j \tau + \coth B_j (t-\tau)) |z_j - x_j^0|^2}}{\sqrt{\text{sh } B_j \tau \text{ sh } B_j (t-\tau)}} dz_j = \sqrt{\frac{\pi B_j}{a_0 k}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{sh } B_j t}}.$$

Si bien que, d'après (14) :

$$(15) \quad \begin{cases} |e_k^0 \# f_k(t, x^0, x^0)| \leq C_{13} k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} e^{t\bar{V}_r} \prod_{j=1}^s \frac{B_j}{\text{sh } B_j t} \frac{t^{s-\frac{m}{2}+1}}{2} \\ \dots \\ |e_k^0 \# \dots \# f_k(t, x^0, x^0)| \leq C_{13}^p k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} e^{t\bar{V}_r} \prod_{j=1}^s \frac{B_j}{\text{sh } B_j t} \frac{t^{s-\frac{m}{2}+p}}{(p+1)!} \end{cases}$$

Nous aboutissons pour finir à la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_k - e_k^0| &\leq (e^{C_{13} t/k^{1/4}} - 1) k^{\frac{m}{2}} e^{t\bar{V}_r} t^{s-\frac{m}{2}} \prod_{j=1}^s \frac{B_j}{\text{sh } B_j t} \\ &\leq C_{14} k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} t^{s-\frac{m}{2}+1} e^{t\bar{V}_r} \prod_{j=1}^s \frac{B_j}{\text{sh } B_j t} \quad \text{si } t \leq k^{1/4} \\ &\leq C_{15} k^{-\frac{1}{4}} t e^{C_{16} t r_k} |e_k^0(t, x^0, x^0)|. \end{aligned}$$

Comme  $r_k = k^{-5/12}$ , et comme  $\varepsilon = \frac{1}{12}$  est l'ordre critique dans ce cas pour la validité du principe de localisation (proposition 1), le théorème 2 est conséquence de cette dernière majoration, avec  $\varepsilon < \frac{1}{12}$  car, en utilisant les notations du théorème 2,  $\left| \frac{e_k^0(t, x^0, x^0)}{k^{\frac{n}{2}}} \right| = e_k^0(t, x)$  est une fonction bornée de  $t$  et de  $k$  si  $x^0$  vérifie  $V(x^0) - \sum_{j=1}^s B_j(x^0) \leq 0$ .  $\square$

## 2. Fonction de distorsion d'un fibré ample.

Nous revenons à la variété complexe  $X$  présentée dans l'introduction. Le laplacien  $\frac{2}{k} \Delta_k''$  sur les  $(0, q)$ -formes à valeurs dans  $L^k$  peut être calculé comme un opérateur de type  $\square_k$  sur  $\Lambda^{0,q} T^* X \otimes L^k$ . (cf. par exemple [3]), avec  $B = -ic(L)$ , et, si l'on se place dans un système de coordonnées pour lequel on a :  $ic(L) = i \sum_{j=1}^s \alpha_j dz_j \wedge d\bar{z}_j$  (ici,  $s = n$  et  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \dots$ ),  $V$  est l'endomorphisme de  $\Lambda^{0,q} T^* X \otimes L$  diagonal dans la base  $(d\bar{z}_J, |J|=q)$ , et de valeurs propres associées  $(\alpha_{\mathbb{C}J} - \alpha_J)$  avec la convention  $\alpha_J = \sum_{j \in J} \alpha_j$ .

Comme de plus on a toujours  $\alpha_{\mathbb{C}J} - \alpha_J - \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \leq 0$ , le théorème 2 s'applique dans ce cas. On a, par conséquent, le

COROLLAIRE 1. — *Le noyau de la chaleur associé à  $e^{-\frac{2t}{k} \Delta_k''}$  en bidegré  $(0, q)$  admet l'équivalent suivant lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  :*

$$e_k^{(0,q)}(t, x, x) = \frac{\sum_{|J|=q} e^{t(\alpha_{\mathbb{C}J} - \alpha_J)}}{(4\pi)^n} \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j(x)}{\operatorname{sh} \alpha_j(x)t} (k^n + o(k^n))$$

uniformément pour  $x \in X, t \in [t_0, k^\varepsilon]$ .

Nous avons désormais en main les outils nécessaires pour attaquer la preuve du théorème principal (on notera en particulier la forme forte de l'uniformité par rapport aux différents paramètres donnée par le théorème 2, et qui sera utilisée dans toute sa force pour la formule (B) ci-dessous).

Soit  $N(k) = \dim V_k$  le nombre de sections holomorphes globales indépendantes pour la norme  $L^2$  de  $X$ , et soit  $(s_1 \dots s_{N(k)})$ , une base orthonormée de  $V_k$  pour cette norme. Pour  $k \geq k_0$  cette base réalise le plongement de  $X$  dans  $\mathbf{P}(V_k^*)$  et, par conséquent la métrique de Fubini-Study s'écrit, pour  $\xi \in L_x^k$

$$|\xi|_{F-S}^2 = \frac{|\xi|^2}{|s_1(x)|^2 + \dots + |s_{N(k)}(x)|^2}.$$

Nous appellerons  $b_k$  la fonction de distorsion entre ces deux métriques c'est-à-dire, si  $\xi \neq 0$  :

$$b_k(x) = \frac{|\xi|^2}{|\xi|_{F-S}^2} = |s_1(x)|^2 + \dots + |s_{N(k)}(x)|^2.$$

Cette expression est exactement le terme correspondant à la valeur propre 0 dans l'expression du noyau de la chaleur pour  $\frac{2}{k}\Delta_k''$ , en bidegré  $(0, 0)$  :

$$e_k^{(0,0)}(t, x, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{2\lambda_j^k t}{k}} |\psi_j(x)|^2,$$

et l'équivalent donné par le théorème principal est la limite pour  $t \rightarrow +\infty$  du second terme du corollaire 1 (en bidegré  $(0, 0)$ ,  $J = \emptyset$  et, par conséquent,  $\frac{\exp(t \sum_{j=1}^n \alpha_j)}{\prod_{j=1}^n \text{sh } \alpha_j t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ ). Il ne reste donc plus qu'à vérifier à l'aide du théorème 2 que le reste  $(e_k - b_k)$  tend vers 0 lorsque  $t = k^\varepsilon$  tend vers  $+\infty$ .

Tout d'abord, observons que le corollaire 1 implique :

$$e_k^{(0,0)}(t, x, x) \leq C_0 k^n \left( \frac{1}{t^n} + 1 \right) \quad \text{si } t \leq k^\varepsilon$$

et, par conséquent, pour tout  $j \in \mathbf{N}$  :

$$(A) \quad |\psi_j(x)|^2 \leq C_0 k^n e^{\frac{\lambda_j^k}{k}} \left( 1 + \frac{2^n}{t^n} \right).$$

Maintenant, observons que, si  $\psi_j$  est une section propre de  $\Delta_k''$  associée à la valeur propre  $\lambda_j^k$ ,  $D''\psi_j$  est une  $(0, 1)$ -forme propre (non nulle) pour la même valeur propre. On a par conséquent :

$$\sum_{j \geq N(k)+1} e^{-\frac{2\lambda_j^k t}{k}} \frac{|D''\psi_j(x)|^2}{\|D''\psi_j\|^2} \leq e_k^{(0,1)}(t, x, x) \leq C_1 k^n \left( \frac{1}{t^n} + 1 \right) e^{-2\alpha_1 t}$$

( $\alpha_1$  est la plus petite valeur propre de  $ic(L)$ , minorée sur  $X$  par  $\alpha_0 > 0$ ) d'où, en intégrant sur  $X$  :

$$(B) \quad \sum_{j \geq N(k)+1} e^{-\frac{2\lambda_j^k t}{k}} \leq C_2 k^n \left( 1 + \frac{1}{t^n} \right) e^{-2\alpha_0 t} \quad \text{si } t \leq k^\varepsilon$$

En composant les majorations (A) et (B), il vient donc :

$$\begin{aligned} |e_k^{(0,0)}(t, x, x) - b_k(t, x, x)| &\leq C_0 k^n \left(1 + \frac{2^n}{t^n}\right) \sum_{j \geq N(k)+1} e^{-\frac{t \lambda_j^k}{k}} \\ &\leq C_3 k^{2n} \left(1 + \frac{1}{t^{2n}}\right) e^{-\alpha_0 t}. \end{aligned}$$

Cette majoration achève la preuve du théorème principal.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. BISMUT, Demaily's asymptotic inequalities : a heat equation proof, *J. Funct. Anal.*, 72 (1987), 263–278.
- [2] Th. BOUCHE, Inégalités de Morse holomorphes pour un fibré linéaire à courbure dégénérée, à paraître, Prépublication de l'Institut Fourier, n°142, Grenoble (1990).
- [3] J.-P. DEMAILLY, Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la  $d''$ -cohomologie, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 35-4 (1985), 189–229.
- [4] J.-P. DEMAILLY, Holomorphic Morse Inequalities, Lectures given at the AMS Summer Institute, July 1989, to appear.
- [5] H. HESS, R. SCHRADER, D.A. UHLENBOCK, Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.*, 15 (1980), 7–38.
- [6] S. JI, Inequality for distortion function of invertible sheaves on Abelian varieties, *Duke Math. J.*, 58-3 (1989), 657–667.
- [7] G. KEMPF, Metric on invertible sheaves on Abelian varieties, preprint 1988.
- [8] H.P. MAC KEAN JR., I.M. SINGER, Curvature and the eigenvalues of the laplacian, *J. Differential Geom.*, 1 (1967), 43–69.
- [9] S. MINAKSHISUNDARAN, À PLEIJEL, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace Operator on Riemannian manifolds, *Can. J. Math.*, 1 (1949), 242–256.
- [10] B. SIMON, Kato's inequality and the comparison of semi-groups, *J. Funct. Anal.*, 32 (1979), 97–101.
- [11] G. TIAN, Kähler metrics on algebraic manifolds, Ph. D. Thesis, Harvard University, 57 p., 1988.

Manuscrit reçu le 2 février 1990.

Thierry BOUCHE,  
 Institut Fourier  
 Laboratoire de Mathématiques  
 associé au CNRS  
 Université de Grenoble I  
 B.P. 74  
 38402 St-Martin d'Hères Cedex (France).