Annales de l'institut Fourier

David J. A. Trotman

Une version microlocale de la condition (w) de Verdier

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 3 (1989), p. 825-829

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_825_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 825-829

UNE VERSION MICROLOCALE DE LA CONDITION (w) DE VERDIER

par David TROTMAN

En 1976, Verdier a introduit une condition de régularité locale sur des couples de strates d'une stratification C^2, qu'il a notée (w). Verdier a démontré qu'une stratification C^2 $(w)-$régulière est localement topologiquement triviale le long de chaque strate (par isotopie rugueuse), et que tout ensemble sous-analytique admet une stratification sous-analytique $(w)-$régulière. Deux démonstrations de ce dernier résultat, sans la désingularisation de Hironaka, ont été trouvées récemment par Denkowska-Wachta et Lojasiewicz-Stasica-Wachta. Celle de Lojasiewicz et al. est extraordinairement élémentaire.

Kashiwara et Schapira ont proposé (depuis 1984) une nouvelle condition de régularité sur un couple de sous-variétés C^2, X, Y d'une variété C^2, M :

$$(\mu) \qquad (T^*_Y M \mathbin{\widehat{+}} T^*_X M) \cap (T^*M)|_Y \subseteq T^*_Y M \ ,$$

où $\widehat{+}$ est une "somme" géométrique naturelle dans l'analyse microlocale et ses applications aux E.D.P. (*cf.* les travaux cités de Kashiwara-Schapira, Delort-Lebeau, et Lebeau). Dans cette note, nous démontrons que la $(\mu)-$régularité de Kashiwara et Schapira équivaut à la $(w)-$régularité de Verdier, répondant à une question posée par Kashiwara en 1984. On déduit des théorèmes cités ci-dessus l'existence de stratifications $(\mu)-$régulières sous-analytiques des ensembles sous-analytiques. Kashiwara et Schapira ont une preuve directe de l'existence des stratifications $(\mu)-$régulières dont la rédaction est en cours.

Mots-clés : Stratification – $(w)-$régularité – Microlocale.
Classification A.M.S. : 58A35 – 35A27.

Je remercie P. Schapira de m'avoir posé ce problème (lors de son cours à Paris 7 en 1985), ainsi que J.-C. Delort, G. Lebeau et L.-C. Wilson pour des discussions utiles.

1. Définitions.

Soit M une variété différentiable de classe C^2. Pour tout couple de sous-ensembles coniques $A, B \subset T^*M$ on définit suivant Kashiwara-Schapira [5, p.18] un sous-ensemble $A \widehat{+} B$ de T^*M :

$$A \widehat{+} B = \{(c,\gamma) | \exists \text{ des suites } (a_n, \alpha_n) \in A,\ (b_n, \beta_n) \in B$$
$$\text{telles que } \lim_{n\to\infty} (a_n, b_n, \alpha_n + \beta_n, |a_n - b_n| \cdot |\alpha_n|) = (c, c, \gamma, 0)\}.$$

On rappelle que pour toute sous-variété X de classe C^2 de M le fibré conormal $T^*_X M$ est $\{(x,\xi) \in T^*_x M | x \in X,\ T_x X \subseteq \ker \xi\}$. Selon Kashiwara et Schapira un couple de sous-variétés X, Y de M, tel que $Y \subseteq \overline{X} - X$, est (μ)−régulier si l'inclusion (μ) ci-dessus a lieu. Evidemment (X, Y) est (μ)−régulier si et seulement si (X, Y) est (μ)−régulier en y_0 pour tout $y_0 \in Y$.

Rappelons que, selon Verdier, un couple de sous-variétés (X, Y) de M, tel que $Y \subseteq \overline{X} - X$, est (w)−régulier en $y_0 \in Y$ si dans une carte locale pour Y en y_0 on peut trouver un voisinage U de y_0 dans M et une constante $C > 0$ tels que

$$\varepsilon(T_y Y, T_x X) < C|x - y| \tag{1}$$

pour $x \in U \cap X,\ \ y \in U \cap Y$. Ici, nous suivons Lojasiewicz-Stasica-Wachta en notant $\varepsilon(V, W)$ la distance (non-symétrique) entre deux sous-espaces vectoriels V, W d'un espace vectoriel euclidien E de dimension finie :

$$\varepsilon(V, W) = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|v - \pi_W(v)\|$$

où π_W est la projection orthogonale $\pi_W : E \to W$. Il est facile de vérifier que $\varepsilon(V, W) = \varepsilon(W^\perp, V^\perp)$. Ainsi l'inégalité (1) devient

$$\varepsilon(N_x X, N_y Y) < C|x - y|$$

avec $N_x X = (T_x X)^\perp$, $N_y Y = (T_y Y)^\perp$, ou encore,

$$\sup_{\xi \in N_x X} \|\xi - \pi_{N_y Y}(\xi)\| < C|x - y| \cdot \|\xi\|. \tag{2}$$

2. Equivalence de (μ) et (w).

THÉORÈME. — *Un couple de sous-variétés (X,Y) d'une variété C^2, M, tel que $Y \subseteq \overline{X} - X$, est (μ)−régulier (en $y_0 \in Y$) si et seulement si (X,Y) est (w)−régulier (en y_0).*

Démonstration. — On suppose d'abord que la condition (w) n'est pas vérifiée en y_0 pour (X,Y). Il existe donc par (2) des suites $x_n \in X$, $y_n \in Y$ et $\xi_n \in N_{x_n}X$ telles que $x_n \to y_0$, $y_n \to y_0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\xi_n - \eta_n\|}{|x_n - y_n| \cdot \|\xi_n\|} = \infty \tag{3}$$

où $\eta_n = \pi_{N_{y_n}Y}(\xi_n)$.

On pose $\lambda_n = (\|\xi_n - \eta_n\|)^{-1}$, et (3) devient

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| \cdot \|\lambda_n \xi_n\| = 0. \tag{4}$$

Mais,

$$\begin{aligned}\|\lambda_n\eta_n\| &= \|\lambda_n\eta_n - \lambda_n\xi_n + \lambda_n\xi_n\| \\ &\leq (\lambda_n\|\eta_n - \xi_n\| + \|\lambda_n\xi_n\|) \\ &= (1 + \|\lambda_n\xi_n\|).\end{aligned}$$

Donc (4) entraîne

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| \cdot \|\lambda_n\eta_n\| = 0. \tag{5}$$

Maintenant, on considère les suites $(y_n, -\lambda_n\eta_n)$ dans $T^*_Y M$ et $(x_n, \lambda_n\xi_n)$ dans $T^*_X M$, par l'identification évidente de $(T^*_Y M)_{y_n}$ avec $N_{y_n}Y$, etc. Après extraction éventuelle de sous-suites on peut supposer que

$$\eta_0 = \lim_{n\to\infty}(-\lambda_n\eta_n + \lambda_n\xi_n)$$

existe, et vu que $\|\eta_0\| = 1 < \infty$, nous avons montré que $(y_0, \eta_0) \in (T^*_Y M \mathbin{\widehat{+}} T^*_X M) \cap T^*_{y_0} M$.

Mais on a $(\xi_n - \eta_n) \perp N_{y_n}Y$ pour tout n, et donc on a $\eta_0 \perp N_{y_0}Y$, en identifiant $N_{y_0}Y$ avec $\{\eta \in T^*M | T_{y_0}Y \subset \ker \eta\}$. Ceci implique que (y_0, η_0) n'appartient pas à $T^*_Y M$ et donc que la condition (μ) n'est pas vérifiée en y_0. Ainsi (μ) implique (w).

Réciproquement, supposons que (μ) ne soit pas vérifiée et qu'il existe (y_0, η_0) dans $(T^*_Y M \mathbin{\widehat{+}} T^*_X M) \cap T^*_{y_0} M$ tel que $(y_0, \eta_0) \notin T^*_Y M$. Nous avons alors des suites $(x_n, \xi_n) \in T^*_X M$ et $(y_n, \eta_n) \in T^*_Y M$ telles que $x_n \to y_0$, $y_n \to y_0$, $(\xi_n + \eta_n) \to \eta_0$ et $(|x_n - y_n| \cdot \|\eta_n\|) \to 0$, mais $(y_0, \eta_0) \notin T^*_Y M$.

On en déduit que $\eta_0 - \pi_{(T^*_Y M)_{y_0}}(\eta_0) \neq 0$; autrement dit on a

$$\lim_{n\to\infty} (\xi_n - \pi_{(T^*_Y M)_{y_n}}(\xi_n)) \neq 0. \tag{6}$$

Parce que $\|\xi_n + \eta_n\|$ est borné, et $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| \cdot \|\eta_n\| = 0$, il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| \cdot \|\xi_n\| = 0, \tag{7}$$

et (6) et (7) contredisent (2) après identification de $N_{y_n}Y$ avec $(T^*_Y M)_{y_n}$ et de $N_{x_n}X$ avec $(T^*_X M)_{x_n}$, et donc impliquent que la condition (w) n'est pas vérifiée en y_0. Ainsi (w) implique (μ).

3. Remarques.

(i) La même démonstration s'applique à l'équivalence entre une condition

$$\varepsilon(T_x X, T_y Y) < C|x-y|^r$$

pour un nombre réel r positif, et une inclusion d'espaces

$$(T^*_Y M \mathbin{\widehat{+}_r} T^*_X M) \cap (T^*_{y_0} M) \subseteq T^*_Y M$$

où on impose que $|a_n - b_n|^r \cdot \|\alpha_n\| \to 0$ dans la définition de $\widehat{+}_r$.

(ii) Une version équivalente de (μ) est

$$(NY \mathbin{\widehat{+}} NX) \cap (TM)|_Y \subseteq NY.$$

(iii) L'opération $\widehat{+}$ apparaît implicitement pour la première fois en 1981 chez Kashiwara-Schapira [4]. Elle est un outil essentiel dans l'analyse microlocale : voir les livres de Kashiwara et Schapira, et les articles de Delort et Lebeau.

(iv) Des travaux récents de Kuo-Trotman et de Trotman-Wilson relient la condition (w) avec d'autres conditions de régularité plus faibles, les (t^s).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-C. DELORT et G. LEBEAU, Majorations de deuxièmes micro-supports, Journées EDP, Saint-Jean-de-Monts, 1986, Exposé 14.

[2] J.-C. DELORT et G. LEBEAU, Microfonctions I-Lagrangiennes, J. Math. Pures et appl., 67 (1988), 39–84.

[3] Z. DENKOWSKA et K. WACHTA, Une construction de la stratification sous-analytique avec la condition (w), Bull. Pol. Acad. Sci. (Math.), 35 (1987), 401–405.

[4] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, Variété caractéristique de la restriction d'un module différentiel, Journées E.D.P., Saint-Jean-de-Monts, 1981, Exposé 17.

[5] M. KASHIWARA and P. SCHAPIRA, Microlocal study of sheaves, Astérisque, 128 (1985).

[6] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, An introduction to microlocal analysis, Univ. Fed. Pernambuco, Recife, 173 pages, 1984.

[7] T.-C. KUO and D. TROTMAN, On (w) and (t^s)–regularity, Inventiones Math., 92 (1988), 633–643.

[8] G. LEBEAU, Equations des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires, Inventiones Math., 95 (1989), 277–323.

[9] S. LOJASIEWICZ, J. STASICA et K. WACHTA, Stratifications sous-analytiques. Condition de Verdier, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 34 (1986), 531–539.

[10] D. TROTMAN et L.-C. WILSON, Travaux en préparation.

[11] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones Math., 36 (1976), 295–312.

Manuscrit reçu le 1er février 1989.

David TROTMAN,
University of Hawaii at Manoa
et
Université de Paris-Sud.