ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC PAULIN

Points fixes des automorphismes de groupe hyperbolique

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 3 (1989), p. 651-662

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_651_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 651-662

POINTS FIXES DES AUTOMORPHISMES DE GROUPE HYPERBOLIQUE

par Frédéric PAULIN

Notons Γ un groupe de type fini, muni d'une famille génératrice finie fixée. Nous supposons que la métrique des mots est δ-hyperbolique au sens de M. Gromov [Gr2], avec $\delta \geq 0$. Ceci signifie que dans un triangle géodésique du graphe de Cayley de Γ, tout point d'un côté est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de l'un des deux autres côtés. Remarquons que $\delta = 0$ correspond au cas des groupes libres. Mais il y a "beaucoup" d'autres groupes hyperboliques, par exemple les groupes à petites simplifications (voir [LyS]) et les groupes fondamentaux de variétés riemanniennes compactes à courbure strictement négative (voir [Gr2] §0.2 et [GhH]). Nous allons montrer, avec une approche géométrique, le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit $f : \Gamma \to \Gamma$ un automorphisme. Alors le sous-groupe* Fix(f) *des points fixes de f est de type fini.*

Ce théorème a été démontré dans le cas des groupes libres par S.M. Gersten [Ge] (voir aussi [GoT] et [S]). Nous allons généraliser la preuve qu'en donne D. Cooper [C] aux cas des groupes hyperboliques. Je remercie L. Guillou pour m'avoir raconté la preuve de D. Cooper et E. Ghys pour ses commentaires.

Mots-clés : Groupe de type fini – Métrique des mots – Groupe hyperbolique – Automorphismes de groupe.
Classification A.M.S : 20E36 - 20F32.

Soit $S = \{g_1, \ldots, g_n\}$ la partie génératrice fixée, supposée stable par passage à l'inverse. Nous notons $\|\gamma\|$ la longueur minimale d'un mot en les générateurs représentant l'élément $\gamma \in \Gamma$, i.e.

$$\|\gamma\| = \min\{p \in \mathbb{N} / \gamma = g_{i_1} \ldots g_{i_p} \text{ et } g_{i_p} \in S\} .$$

Construisons alors une distance sur Γ, dite *métrique des mots*, invariante par translation à gauche, en posant $d(\alpha, \beta) = \|\alpha^{-1}\beta\|$ pour $\alpha, \beta \in \Gamma$. Les boules, pour la métrique des mots, de rayon fini sont finies. Notons $C = C(f)$ le maximum des normes des images par f et f^{-1} des éléments de S . Alors nous avons

$$\forall \gamma \in \Gamma, \frac{1}{C}\|\gamma\| \leq \|f(\gamma)\| \leq C\|\gamma\| .$$

Ceci nous dit que l'automorphisme f est une (C-)*quasi-isométrie* au sens de M. Gromov, i.e. $\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \frac{1}{C} d(\alpha, \beta) \leq d(f(\alpha), f(\beta)) \leq C d(\alpha, \beta)$. Notons que si S' est une autre partie génératrice finie de Γ, stable par passage à l'inverse, alors l'identité de Γ est une quasi-isométrie entre les deux métriques des mots, la constante C étant le maximum des normes pour une partie génératrice des éléments de l'autre partie génératrice, et vice-versa.

Une *géodésique* entre deux points x et y de Γ est un plus court chemin entre x et y, i.e. une suite de points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de Γ telle que $x_0 = x$, $x_n = y$, $d(x_{i-1}, x_i) = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $d(x, y) = n$. Entre deux points passe au moins une géodésique, mais celle-ci n'est pas forcément unique. L'une des définitions équivalentes d'un *groupe hyperbolique* est la suivante : pour tous points a, b, c de Γ, pour toutes géodésiques A, B, C entre b et c, c et a, a et b respectivement, alors tout point de A est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de $B \cup C$. Si l'on préfère travailler avec des espaces de longueur [Gr1], il suffit de plonger Γ dans son graphe de Cayley associé à S . Nous appellerons aussi géodésique une suite infinie de points $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ou $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tous $p > q$ entiers, la sous-suite finie $(x_i)_{q \leq i \leq p}$ soit une géodésique au sens précédent. Notons que les géodésiques infinies sont propres (i.e. pour tout compact K de Γ, il existe N tel que si $|n| > N$, alors $x_n \notin K$) . En effet, Γ est discret, donc les compacts sont les parties finies de Γ.

Nous allons rappeler quelques faits élémentaires de [Gr2] sur les groupes hyperboliques (voir [GhH] pour une étude complète). Nous en donnons les démonstrations (par ailleurs assez faciles) en annexe car il faut beaucoup travailler pour les trouver entre les lignes de [Gr2]. On peut avoir en tête le modèle du disque de Poincaré $\mathbb{H}^2$ pour mieux visualiser.

A tout groupe hyperbolique Γ, M. Gromov associe un *espace à l'infini* $\partial\Gamma$ ([Gr2] §1). L' ensemble $\partial\Gamma$ est l'ensemble des classes d'équivalences de géodésiques $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, où nous identifions deux géodésiques $a_1 = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $a_2 = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s'il existe une constante positive $D = D(a_1, a_2)$ telle que $d(x_i, y_i) \leq D$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La *distance de Hausdorff* entre deux parties P_1 et P_2 d'un espace métrique X est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que tout point de P_1 est à distance inférieure ou égale à ε d'un point de P_2, et tout point de P_2 est à distance inférieure ou égale à ε d'un point de P_1 . S'il n'existe pas de tel ε, la distance de Hausdorff entre P_1 et P_2 est dite infinie.

LEMME 1. — *Deux géodésiques $a_1 = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $a_2 = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si et seulement si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sont à distance de Hausdorff finie, et si et seulement si, pour n suffisamment grand, le point x_n de a_1 est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point de a_2 .*

LEMME 2. — *Par deux points de $\Gamma \cup \partial\Gamma$ passe au moins une géodésique (i.e. si $b \in \partial\Gamma$ et $z \in \Gamma$, alors il existe une géodésique $(y_s)_{s\in\mathbb{N}}$ appartenant à b, avec $y_0 = z$; et si a, $b \in \partial\Gamma$ avec a et b distincts, alors il existe une géodésique $(z_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ telle que $(z_s)_{s\in\mathbb{N}}$ appartienne à a et $(z_{-s})_{s\in\mathbb{N}}$ appartienne à b).*

LEMME 3. — *Dans un triangle géodésique de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, tout point d'un côté est à distance inférieure ou égale à $\delta' = 20\delta$ d'un point de l'un des deux autres côtés.*

Si $\lambda \geq 0$, une (λ-)quasi-géodésique est une suite $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ ou $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ou $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tous entiers $p \leq q$ tels que x_p et x_q sont définis, $\sum_{i=p}^{q-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda d(x_p, x_q)$ et $d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda$. L'image d'une géodésique par une (C-)quasi-isométrie est une (C^2-)quasi-géodésique entre les images de ces points.

LEMME 4. — *Une quasi-géodésique est à distance de Hausdorff finie d'une géodésique. Il existe une constante $C' = C'(C, \delta)$ telle que, pour toute C-quasi-isométrie f de Γ et pour tous α, β dans $\Gamma \cup \partial\Gamma$, si $\gamma \in \Gamma$ appartient à une géodésique entre α et β, alors $f(\gamma)$ est à distance inférieure ou égale à C' d'une géodésique entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.*

Remarque 5. — Le lemme précédent permet de montrer que si nous avons une autre partie génératrice S', et si C est le coefficient de la quasi-isométrie entre $(\Gamma, \| \|_{S'})$ et $(\Gamma, \| \|_S)$, alors la métrique des mots définie par S' est $2C(C'(C^2, \delta) + \delta)$-hyperbolique.

La quasi-isométrie f s'étend à l'espace à l'infini $\partial\Gamma$ en définissant l'image d'une géodésique $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme étant la classe d'équivalence d'une géodésique à distance de Hausdorff finie de la quasi-géodésique image. Ceci ne dépend pas de cette géodésique, car deux géodésiques à distance de Hausdorff finie sont équivalentes, ni de la géodésique équivalente à $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ choisie, car une quasi-isométrie transforme deux parties à distance de Hausdorff finie en deux parties à distance de Hausdorff finie.

LEMME 6. — *Il existe une constante $C'' = C''(C, \delta)$ vérifiant la propriété suivante. Soient α, β deux points de $\Gamma \cup \partial\Gamma$ et $\gamma \in \Gamma$. Soit y (resp. y') un point d'une géodésique entre α et β (resp. $f(\alpha)$ et $f(\beta)$), minimisant la distance à γ (resp.$f(\gamma)$) . Alors $d(f(y), y') \leq C''$.*

Démonstration. — Notons $[a, b]$ une géodésique quelconque entre $a, b \in \Gamma \cup \partial\Gamma$. Le choix n'a pas d'importance, à la valeur exacte des constantes près, puisque si deux géodésiques ont mêmes extrémités, un point de l'une est à distance inférieure ou égale à δ' d'un point de l'autre.

Le point y existe bien, car les géodésiques infinies sont propres. En particulier, puisque y réalise le minimum de la distance d'un point donné de $[\gamma, y]$ à la géodésique $[\alpha, \beta]$, un point de $[\gamma, y]$ situé à distance strictement supérieure à δ' du point y est, par le lemme 3 appliqué au triangle $\{\gamma, y, \alpha\}$ (resp. $\{\gamma, y, \beta\}$), à distance inférieure ou égale à δ' d'un point de $[\gamma, \alpha]$ (resp. $[\gamma, \beta]$) . Donc y est à distance inférieure ou égale à $2\delta' + 1$ d'un point de $[\gamma, \alpha]$ (resp. $[\gamma, \beta]$) .

D'après le lemme 4, le point $f(y)$ est à distance inférieure ou égale à C' d'un point $z_{\alpha\beta}$ de $[f(\alpha), f(\beta)]$, et à $(2\delta' + 1)C + C'$ d'un point z_α de $[f(\gamma), f(\alpha)]$ (resp. z_β de $[f(\gamma), f(\beta)]$) . Supposons par exemple $z_{\alpha\beta} \in [f(\alpha), y']$. Puisque $d(y', f(y)) \leq d(y', z_{\alpha\beta}) + d(z_{\alpha\beta}, f(y))$, il suffit de majorer la distance de y' à $z_{\alpha\beta}$. En appliquant le lemme 3 au triangle $\{f(\gamma), y', f(\beta)\}$, le point z_β est à distance inférieure ou égale à δ' d'un point t de $[y', f(\beta)]$ ou d'un point t' de $[y', f(\gamma)]$.

Supposons que nous soyons dans le premier cas. Puisque $y' \in [z_{\alpha\beta}, t]$, nous avons $d(y', z_{\alpha\beta}) \leq d(t, z_{\alpha\beta}) \leq d(t, z_\beta) + d(z_\beta, f(y)) + d(f(y), z_{\alpha\beta}) \leq \delta' + ((2\delta' + 1)C + C') + C'$, ce qui montre le résultat.

Dans le second cas, puisque y' minimise la distance d'un point de la géodésique $[f(\gamma), y']$ à la géodésique $[f(\alpha), f(\beta)]$, nous avons $d(y', t') \leq d(z_{\alpha\beta}, t')$. Donc $d(y', z_{\alpha\beta}) \leq d(y', t') + d(t', z_{\alpha\beta}) \leq 2d(t', z_{\alpha\beta}) \leq 2(d(t', z_\beta) + d(z_\beta, f(y)) + d(f(y), z_{\alpha\beta})) \leq 2(\delta' + ((2\delta' + 1)C + C') + C')$, ce qui montre le résultat. □

M. Gromov ([Gr2]§1) munit l'ensemble $\Gamma \cup \partial\Gamma$ d'une topologie, induisant la topologie originelle sur Γ, et Γ est un ouvert dense dans $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Schématiquement, un point x de $\Gamma \cup \partial\Gamma$ est proche d'un point y de $\partial\Gamma$ si une (et donc toute) géodésique entre x et y est loin d'un point base donné x_0 . En particulier, tout point d'une géodésique entre x et y est aussi proche de y . Notons que si nous avons deux suites de points $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $d(y_i, z_i)$ est bornée, et si $\{y_i\}$ converge vers $y \in \partial\Gamma$, alors $\{z_i\}$ converge aussi vers y . La topologie ne dépend pas du point base choisi.

Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons V_n l'ensemble des couples (x, y) dans $(\Gamma \cup \partial\Gamma)^2$ tels que ou bien $x = y$, ou bien $x \neq y$ et tout point de toute géodésique entre x et y est à distance supérieure ou égale à n du point base x_0 . Alors la famille $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $(\Gamma \cup \partial\Gamma)^2$ forme un système fondamental d'entourages ([B1] chap. 2, §1). Toutes les vérifications sont formelles, sauf celle qui dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que si $(x, y) \in V_m$ et $(y, z) \in V_m$, alors $(x, y) \in V_n$. Mais ceci découle du lemme 3, avec $m \geq n + \delta'$.

Puisque le système fondamental d'entourages est dénombrable, la topologie définie par cette structure uniforme est métrisable ([B2], chap. 9, §4, prop. 2). La topologie induite sur Γ est bien la topologie discrète.

LEMME 7. — *L'espace $\Gamma \cup \partial\Gamma$ est compact.*

La quasi-isométrie f s'étend en un homéomorphisme de $\Gamma \cup \partial\Gamma$. En effet, l'extension au bord de f^{-1} est clairement inverse de l'extension au bord de f . De plus, l'image par f (et f^{-1}) d'une géodésique entre deux points de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, située à une distance au moins R de x_0, est une quasi-géodésique, proche d'une géodésique située à distance au moins $\frac{R}{C} - C''$ de $f(x_0)$, donc au moins $\frac{R}{C} - C'' - d(x_0, f(x_0))$ de x_0, d'après le lemme 6 appliqué avec $\gamma = x_0$.

Ce même résultat nous dit que les espaces à l'infini pour deux systèmes de générateurs sont homéomorphes.

Démonstration du théorème. — Supposons que $\mathrm{Fix}(f)$ ne soit pas de type fini. Alors il existe une partie génératrice infinie $\{x_i / i \in \mathbb{N}\}$ de telle sorte que x_{i+1} n'appartienne pas au groupe G_i engendré par les x_j avec $0 \leq j \leq i$.

Prenons z_i de norme minimale dans $G_{i-1}x_i$. En particulier $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ engendre Fix(f) . Par compacité de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, il existe une sous-suite z_{n_i} convergente vers un élément $z_\infty \in \Gamma \cup \partial\Gamma$. Le point z_∞ est fixé par f, par continuité. Il est en fait dans $\partial\Gamma$, car les boules de rayon fini sont finies, donc les éléments z_{n_i} sont de normes non bornées.

Notons O l'élément neutre du groupe Γ, pris comme point base. Soit y_{n_i} un point d'une géodésique $[O, z_\infty]$ entre O et z_∞ minimisant la distance entre z_{n_i} et cette géodésique. Par définition de la convergence des z_{n_i} vers z_∞, pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $k \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand, alors tout point d'une géodésique $[z_\infty, z_{n_k}]$ est à distance strictement supérieure à $d(O, y_{n_j}) + \delta'$ du point O . En appliquant la caractérisation des groupes hyperboliques au triangle $\{O, z_\infty, z_{n_k}\}$, le point y_{n_j} est donc à distance inférieure ou égale à δ' d'un point d'une géodésique $[O, z_{n_k}]$. D'où, par inégalité triangulaire,

$$|d(z_{n_k}, O) - (d(z_{n_k}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, O))| \leq 2\delta' .$$

Il existe donc $D' \ (= 2\delta' + 1) > 0$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists N(j) \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N(j),\ |\ \|y_{n_j}^{-1} z_{n_k}\| - (\|z_{n_k}\| - \|y_{n_j}\|)| < D' .$$

D'après le lemme 6 appliqué au triangle $\{\alpha = O, \beta = z_\infty, \gamma = z_{n_p}\}$ de points fixes par f, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons $d(f(y_{n_p}), y_{n_p}) \leq C''$. Puisque les boules de rayon fini sont finies, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que, pour une infinité de j dans $\mathbb{N}$, nous avons

$$f(y_{n_i})^{-1} y_{n_i} = f(y_{n_j})^{-1} y_{n_j} .$$

D'après les rappels sur la topologie de $\Gamma \cup \partial\Gamma$, les points y_{n_i} tendent aussi vers z_∞ . En particulier, $d(y_{n_j}, O)$ tend vers $+\infty$ quand j tend vers $+\infty$. Il existe donc des indices $i,\ j \in \mathbb{N}$, que nous fixons, tels que $\|y_{n_j}\| > \|y_{n_i}\| + D'$ et $f(y_{n_i})^{-1} y_{n_i} = f(y_{n_j})^{-1} y_{n_j}$.

Posons $w = y_{n_i} y_{n_j}^{-1}$. Alors $f(w) = w$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $w \in G_{n_k - 1}$ et avec de plus $k \geq N(j)$. En particulier, d'après la construction des z_i, nous avons

$$\|w z_{n_k}\| \geq \|z_{n_k}\| .$$

Or $\|w z_{n_k}\| \leq \|y_{n_i}\| + \|y_{n_j}^{-1} z_{n_k}\| \leq \|y_{n_i}\| - \|y_{n_j}\| + D' + \|z_{n_k}\| < \|z_{n_k}\|$. Ceci est une contradiction. □

Remarquons que dans un groupe hyperbolique, l'intersection de sous-groupes de type fini n'est pas forcément de type fini. Soit M une variété de dimension 3 fibrée sur le cercle S^1, de fibre une surface F compacte, orientée, connexe, sans bord, de genre supérieur ou égal à 2 et d'holonomie pseudo-anosov. D'après W. Thurston [T], la variété M peut être munie d'une métrique à courbure constante -1, et donc $\Pi_1(M)$ est hyperbolique [Gr2]. De plus, W. Jaco [J] a montré que si $T \in \Pi_1(M)$ est envoyé sur le générateur de $\Pi_1(S^1)$ par la fibration, et A est un lacet non homologue à zéro sur F, si H est le sous-groupe de $\Pi_1(M)$ engendré par T et A, alors $H \cap \Pi_1(F)$ n'est pas de type fini. D'autres contre-exemples ont été construits par R. Strebel. Nous avons néanmoins le résultat suivant, la preuve étant similaire à la preuve précédente :

THÉORÈME. — *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des automorphismes de Γ, alors $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fix}(f_i)$ est de type fini.* □

Par des méthodes analogues, nous allons aussi montrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit f un automorphisme de Γ, n'ayant qu'un nombre fini de points fixes dans Γ . Alors f n'a qu'un nombre fini de points fixes dans $\partial\Gamma$.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que f possède un nombre infini de points fixes dans $\partial\Gamma$.

D'après la compacité de $\partial\Gamma$, il existe un point $x_\infty \in \partial\Gamma$ sur lequel s'accumulent des points fixes $x_i \in \partial\Gamma$. L'ensemble des points fixes étant fermé, le point à l'infini x_∞ est fixé par f . D'après le lemme 2, il existe au moins une géodésique entre x_∞ et x_i. Notons y_i l'un des points d'une géodésique entre x_∞ et x_i le plus près de l'élément neutre O . Remarquons que y_i tend vers x_∞ quand i tend vers $+\infty$, et en particulier n'admet pas de sous-suite constante.

D'après le lemme 6, le point y_i est à distance uniformément bornée de son image $f(y_i)$. Puisque les boules de rayon fini sont finies, il existe un entier i tel que, pour une infinité d'entiers i_n avec $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(y_i)^{-1}y_i = f(y_{i_n})^{-1}y_{i_n}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments $y_{i_n}y_i^{-1}$ de Γ, qui ne sont pas en nombre fini, sont fixés par f . Ceci contredit notre hypothèse. □

J. Alonso nous a fait remarquer que le théorème suivant, démontré par J. Stallings [S] dans le cas des groupes libres, a une preuve similaire au théorème principal. Notons qu'une quasi-isométrie est injective, mais pas nécessairement surjective.

THÉORÈME. — *Soient Γ, Γ' deux groupes hyperboliques et $f_1, f_2 : \Gamma \to \Gamma'$ deux homomorphismes quasi-isométriques. Alors le sous-groupe* $\mathrm{Equa}(f_1, f_2) = \{x \in \Gamma / f_1(x) = f_2(x)\}$ *est de type fini. De plus, si* $\mathrm{Equa}(f_1, f_2)$ *est fini, alors f_1 et f_2 ne prennent la même valeur que sur un nombre fini de points de l'espace à l'infini $\partial\Gamma$.* □

Annexe.

Démonstration du lemme 1. — Supposons tout d'abord qu'il existe une constante D telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_{i_n}) < D$. Soit n tel que $d(x_n, x_0) > D + 2\delta$. Soit $N \geq n$ tel que $d(x_n, x_N) > D + 4\delta$. En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{x_0, x_N, y_{i_0}\}$, nous en déduisons que x_n est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point z d'une géodésique entre x_N et y_{i_0} . En effet, si x_n était à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point z d'une géodésique entre x_0 et y_{i_0}, alors x_n serait à distance inférieure ou égale à $D+2\delta$ de x_0 . Maintenant, en appliquant la définition de groupe hyperbolique au triangle $\{y_{i_N}, x_N, y_{i_0}\}$, nous en déduisons que z est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de la géodésique a_2 entre y_{i_N} et y_{i_0} .

Réciproquement, supposons que pour $n \geq N$, tout point x_n de a_1 est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point y_{i_n} de a_2 . Puisque $d(x_0, x_n)$ tend vers $+\infty$, il existe N' dans $\mathbb{N}$ tel que si $n \geq N'$, alors $i_n \geq i_N$. Si $n \geq \sup\{N, N'\}$, nous avons $d(x_n, y_n) \leq d(y_{i_n}, y_n) + 4\delta = |i_n - n| + 4\delta = |\,|i_n - i_N| - (n - i_N)| + 4\delta$, donc $d(x_n, y_n) \leq |d(y_{i_n}, y_{i_N}) - (n - i_N)| + 4\delta \leq |d(x_n, x_N) - (n - i_N)| + 12\delta = |(n - N) - (n - i_N)| + 12\delta = |i_N - N| + 12\delta$. Posons $D = \sup\{|i_N - N| + 12\delta, \sup\{d(x_i, y_i)/i = 1, \ldots, \sup\{N, N'\}\}\}$. Nous avons donc $d(x_n, y_n) \leq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Démonstration du lemme 2. — Tout d'abord, si $z \in \Gamma$ et $B = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une géodésique, alors fixons-nous une géodésique A_i entre z et x_i pour tout i dans $\mathbb{N}$; (dans la suite, quand nous disons "la" géodésique entre deux points, c'est que nous considérons la géodésique entre ces deux points précédemment introduite). Pour $s \in \mathbb{N}$, notons $a_i(s)$ le point de A_i à distance s de z, qui est défini pour i assez grand. Les boules de rayon fini étant finies, quitte à extraire, nous pouvons supposer que la suite $(a_i(s))$ est constante à partir d'un certain rang, et vaut y_s . Par extraction diagonale, nous pouvons supposer que ceci est vrai pour tout s dans $\mathbb{N}$. Mais alors la suite $(y_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est une géodésique, qui est de plus équivalente à $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec $y_0 = z$. En effet, en appliquant la définition de groupe hyperbolique au triangle $\{z, x_0, x_i\}$ pour i grand, le point y_s, pour s suffisamment grand, est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de la géodésique B, et nous appliquons alors le lemme 1.

D'autre part, soient $a, b \in \partial\Gamma$ et $A = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $B = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des géodésiques appartenant à a et b respectivement, avec $x_0 = y_0$. Fixons-nous une géodésique $(w_i)_{0\leq i\leq p}$ entre $w_0 = x_k$ et $w_p = y_k$. Posons $r = \sup\{i \in [0,p]/d(w_i, A) \leq 2\delta\}$. En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{x_0, x_k, y_k\}$, le point $m_k = w_r$ sur $[x_k, y_k]$ est à distance inférieure ou égale à $2\delta + 1$ d'un point u_k de A et d'un point v_k de B . Montrons que, quitte à extraire, la suite m_k est constante, et vaut z_0 . Pour cela, il suffit de montrer que les points m_k restent à distance bornée de x_0 . Sinon, il existe une sous-suite m_{k_i} telle que $d(m_{k_i}, x_0)$ tend vers $+\infty$. Mais alors, $d(u_{k_i}, x_0)$ tend vers $+\infty$ et $d(u_{k_i}, v_{k_i}) \leq 2(2\delta + 1)$. Montrons que ceci implique que tout point de la géodésique A (resp. B) est à distance inférieure ou égale à $2(6\delta + 2)$ d'un point de la géodésique B (resp. A). Ceci contredira, par le lemme 1, le fait que $a \neq b$. En effet, tout point de A est entre u_{k_i} et $u_{k_{i+1}}$ pour un certain i; en appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{u_{k_i}, u_{k_{i+1}}, v_{k_i}\}$, puisque $d(u_{k_i}, v_{k_i}) \leq 2(2\delta+1)$, tout point entre u_{k_i} et $u_{k_{i+1}}$ est à distance inférieure ou égale à $2(2\delta + 1) + 2\delta$ d'un point d'une géodésique entre $u_{k_{i+1}}$ et v_{k_i} ; de même tout point de cette géodésique est à distance inférieure ou égale à $6\delta + 2$ d'un point entre $v_{k_{i+1}}$ et v_{k_i} .

Maintenant, comme dans l'étude précédente, la géodésique entre $m_k = z_0$ et x_k (resp. y_k) contenue dans la géodésique entre x_k et y_k converge quitte à extraire vers une géodésique $(z_s)_{s\in\mathbb{N}}$ (resp. $(z_{-s})_{s\in\mathbb{N}}$) appartenant à a (resp. b). La suite $(z_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ est bien une géodésique, si ces deux extractions ont été simultanées. □

Démonstration du lemme 3. — Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où les trois points sont à l'infini, la constante 20 étant meilleure dans les autres cas. Soient a, b, $c \in \partial\Gamma$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $(z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ des géodésiques entre c et b, a et c, a et b respectivement. D'après le lemme 1, pour N entier positif suffisamment grand, x_N est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point z_{i_N} de la géodésique $(z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, (z_N est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point y_{i_N} de la géodésique $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, et z_{-N} est à distance inférieure ou égale à 4δ d'un point y_{j_N} de la géodésique

$(y_i)_{i\in\mathbf{Z}}$. Nous pouvons supposer $i_N \geq 0$ et $j_N \leq 0$. En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{x_{-N}, x_N, z_{i_N}\}$, tout point de la géodésique entre x_{-N} et x_N est à distance inférieure ou égale à 6δ d'un point d'une géodésique entre x_{-N} et z_{i_N} . Donc tout point de la géodésique entre x_{-N} et x_N est à distance inférieure ou égale à 12δ d'un point d'une géodésique entre y_{i_N} et z_{i_N} . De même, tout point d'une géodésique entre z_{i_N} et z_{-N} est à distance inférieure ou égale à 6δ d'un point d'une géodésique entre z_{i_N} et y_{j_N} . En appliquant la définition d'un groupe hyperbolique au triangle $\{y_{i_N}, y_{j_N}, z_{i_N}\}$, tout point de la géodésique entre y_{i_N} et z_{i_N} est à distance inférieure ou égale à 2δ d'un point de la géodésique entre y_{j_N} et z_{i_N} ou d'un point de la géodésique entre y_{j_N} et y_{i_N} . En récapitulant, tout point de la géodésique entre x_{-N} et x_N est à distance inférieure ou égale à 20δ d'un point de la géodésique $(y_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ ou de $(z_i)_{i\in\mathbf{Z}}$. □

Démonstration du lemme 4. — Toute quasi-géodésique finie entre deux points est à distance de Hausdorff bornée par une constante ne dépendant que de λ et de δ d'une géodésique entre ces deux points ([GhH] et [Gr2] Proposition 7.2.A). Pour passer aux quasi-géodésiques infinies, par exemple $(x_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, il suffit, avec des méthodes déjà utilisées plus haut, de faire converger par extraction les géodésiques entre x_{-N} et x_N, qui restent à distance uniformément bornée de la quasi-géodésique, en commençant par faire converger un point. □

Démonstration de la remarque 5. — En effet, soient a, b, c trois points de Γ, et A', B', E' trois géodésiques, pour la métrique des mots définie par S', entre b et c, a et c, a et b . Soit z un point de A . Alors A', B', E' sont des C^2-quasi-géodésiques pour S, à distance de Hausdorff inférieure ou égale à C' de géodésiques A, B, E pour S, d'après le lemme 4. Donc z est à distance (pour S) inférieure ou égale à C' d'un point de A, qui est à distance (pour S) inférieure ou égale à 2δ d'un point de B ou E, qui est à distance (pour S) inférieure ou égale à C' d'un point de B' ou E' respectivement. Donc z est à distance (pour S') inférieure ou égale à $2C(C' + \delta)$ d'un point de B' ou E' . □

Démonstration du lemme 7. — Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points dans $\Gamma \cup \partial\Gamma$. Notons ω_n une géodésique entre y_n et le point base x_0, et $\omega_n(s)$ le point de cette géodésique à distance s de x_0, avec $s \in \mathbf{N}$. Nous pouvons supposer, quitte à extraire, que la distance $d(y_n, x_0)$ tend en croissant vers $+\infty$. Car sinon, la suite reste dans une boule de rayon finie, qui est finie, et donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une sous-suite convergente. La suite $(\omega_n(s))_{n\in\mathbf{N}}$

est alors définie pour n assez grand. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, la suite $(\omega_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans la boule de centre x_0 et de rayon s possède une sous-suite convergente. Par extraction diagonale, les points $\omega_{n_k}(s)$ vont converger (i.e. être constants à partir d'un certain rang) vers des points $\omega_\infty(s)$ qui appartiennent à une même géodésique par un argument déjà vu. Le point y_∞ de $\partial\Gamma$ défini par cette géodésique infinie est limite de $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. En effet, pour k suffisamment grand, les géodésiques entre y_∞ et x_0, et y_{n_k} et x_0 coïncident le long de la géodésique $[\omega_{n_k}(s), x_0]$ contenue dans ω_{n_k}. En appliquant le lemme 3 au triangle $\{y_\infty, \omega_{n_k}(s), y_{n_k}\}$, et puisque $\omega_{n_k}(s)$ appartient aux géodésiques entre y_∞ et x_0, et y_{n_k} et x_0, nous voyons qu'une géodésique entre y_∞ et y_{n_k} est à distance au moins $s - \delta'$ de x_0. □

BIBLIOGRAPHIE

[B1] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.

[B2] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. 5 à 10, Hermann, Paris, 1971.

[C] D. COOPER, Automorphisms of free group have finitely generated fixed point set, J. of Alg., 111, n°2 (1987), 453-456.

[Ge] S.M. GERSTEN, Fixed points of automorphisms of free groups, Adv. in Math., 64, n°1 (1987), 51-85.

[GhH] E. GHYS et P. DE LA HARPE, Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov, à paraître, Profess in Math., Birkhaüser.

[GoT] R.Z. GOLDSTEIN and E.C. TURNER, Automorphisms of free groups and their fixed points, Inv. Math., 78 (1984), 1-12.

[Gr1] M. GROMOV, Hyperbolic manifolds, groups and actions, Riemann surfaces and related topics, Proc. of the 1978th Stony Brook Conference, Ann. of Math. Studies, 97 (1980), 183-215.

[Gr2] M. GROMOV, Hyperbolic groups, In : Essays in group theory, Ed. S.M. Gersten, M.S.R.I. Springer-Verlag, 8 (1987), 75-263.

[J] W. JACO, Lectures on three-manifold topology, C.B.M.S. Reg. Conf. Series in Math. A.M.S., 43 (1980).

[LyS] R.C. LYNDON and P.E. SCHUPP, Combinatorial group theory, a Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 89 (1977).

[S] J.R. STALLINGS, Graphical theory of automorphisms of free groups, In : Combinatorial group theory and topology, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, 111 (1987).

[T] W. THURSTON, Hyperbolic structures on 3-manifolds II : surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, *à paraître dans Ann. of Math.*.

Manuscrit reçu le 6 septembre 1988,
révisé le 14 novembre 1988.

Frédéric PAULIN,
C.N.R.S. - U.R.A.D.O. 746
Laboratoire de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46 allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).