Annales de l'institut Fourier

Rachida Aboughazi

Homologie restreinte des p-algèbres de Lie en degré deux

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 3 (1989), p. 641-649

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_641_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 641-649

HOMOLOGIE RESTREINTE DES p-ALGÈBRES DE LIE EN DEGRÉ DEUX

par Rachida ABOUGHAZI

Introduction.

Soit g une $p-$algèbre de Lie sur un corps K (de caractéristique $p \neq 0$). On désigne par $H_2^{[p]}(g,K)$(resp. $H_2(g,K)$) le groupe d'homologie restreinte (resp. le groupe d'homologie d'algèbre de Lie) de g en degré deux. On établit le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si g est une $p-$algèbre de Lie parfaite au sens des algèbres de Lie (i.e. $g/[g,g] = 0$), le groupe d'homologie $H_2^{[p]}(g,K)$ est isomorphe à la somme directe $H_2(g,K) \oplus (\mathcal{K} \otimes_K g)$ où $\mathcal{K}$ est le corps K muni de la structure de $K-$espace vectoriel via le frobenius.*

On considère en particulier la $p-$algèbre de Lie $\mathrm{sl}_n(A)$ des matrices de trace nulle sur une algèbre commutative. Bloch a montré que (pour $n \geq 5$ et $1/2 \in K$) son groupe d'homologie d'algèbre de Lie $H_2(\mathrm{sl}_n(A),K)$ est isomorphe à $\Omega^1_{A/K}/dA$ (formes différentielles modulo les formes exactes). La généralisation au cas non commutatif a été faite dans [KL] où on montre que $H_2(\mathrm{sl}_n(A),K)$ est isomorphe au groupe d'homologie cyclique $HC_1(A)$. Nous montrons ici que pour A commutative, le groupe d'homologie restreinte $H_2^{[p]}(\mathrm{sl}_n(A),K)$ ne se stabilise pas et qu'il est isomorphe à $\Omega^1_{A/K}/dA \oplus (\mathcal{K} \otimes_K \mathrm{sl}_n(A))$.

Mots-clés : Homologie – $p-$algèbres de Lie.
Classification A.M.S. : 17B50 – 17B56.

Dans ce qui suit, toutes les $p-$algèbres de Lie auront pour corps de base le même corps K. On notera $[x, y]$ le crochet de Lie et $x^{[p]}$ la puissance symbolique. Pour ces notions se référer à [H], [J], [S] ou [SGA].

1. Foncteurs Tor et Ext.

Soit g une $p-$alèbre de Lie et M un $K-$espace vectoriel.

DÉFINITION 1.1. — *Une représentation gauche (resp. droite) de g dans M est la donnée d'un $K-$homomorphisme $x \otimes m \to xm$ (resp. $m \otimes x \to mx$) de $g \otimes_K M$ (resp. $M \otimes_K g$) dans M tel que : pour tout $x, y \in g$ et $m \in M$ on a :*

(i) $x(ym) - y(xm) = [x, y]m$ (*resp.* $(mx)y - (my)x = m[x, y]$)

(ii) $x(x \ldots (xm) \ldots) = x^{[p]}m$ (*resp.* $(\ldots (mx) \ldots x)x = mx^{[p]}$)

où x est itéré p fois dans (ii).

Soit $U_p(g)$ l'algèbre enveloppante restreinte de g, rappelons que c'est le quotient T/I où T est l'algèbre tensorielle de g et I est l'idéal bilatère de T engendré par les éléments $[x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)$ et $x^{[p]} - x \otimes \cdots \otimes x$ où x est itéré p fois (x et y étant dans g). Le théorème de Jacobson, analogue à celui de Poincaré-Birkhoff-Witt, assure l'injection de g dans $U_p(g)$.

La donnée d'une représentation gauche (resp. droite) de g dans M, est équivalente à celle d'une structure de $U_p(g)-$module à gauche (resp. à droite) sur M. On désignera indifféremment par *$g-$module* à gauche (resp. à droite) ces deux notions.

Remarquons qu'un $g-$module trivial est simplement un $K-$espace vectoriel. Le corps de base K est muni d'une structure de $g-$module trivial via la surjection canonique

$$\varepsilon : U_p(g) \to K.$$

Celle-ci étant induite par la projection

$$T = \oplus_{n \geq 0}\, g^{\otimes n} \to K$$

qui envoie K sur lui-même et $\oplus_{n>0}(g^{\otimes n})$ sur 0.

DÉFINITION 1.2. — *Soit M (resp. N) un $g-$module à droite (resp. à gauche), les groupes d'homologie (resp. de cohomologie) de g à coefficients* *dans M (resp. N) sont définis par :*

$$H_n^{[p]}(g,M) = \operatorname{Tor}_n^{U_p(g)}(M,K)$$
$$(\text{resp. } H^n_{[p]}(g,N) = \operatorname{Ext}^n_{U_p(g)}(K,N)) \quad n \geq 0.$$

Notons que ces groupes sont en fait des $K-$espaces vectoriels.

L'algèbre associative $U_p(g)$ est une algèbre augmentée, d'augmentation le morphisme canonique $\varepsilon : U_p(g) \to K$. On désignera par $U_p^+(g)$ (ou U_p^+ , s'il n'y a pas d'ambiguité) l'idéal de cette augmentation. Les groupes $H_n^{[p]}(g,M)$ (resp. $H^n_{[p]}(g,N)$), sont donc les groupes d'homologie (resp. cohomologie) d'une algèbre augmentée. En basses dimensions, on a (*cf.* [CE])

$$\operatorname{Tor}_0^{U_p(g)}(M,K) = M \otimes_{U_p(g)} K \approx M/MU_p^+(g).$$

Comme ce dernier est isomorphe à M/Mg, on a

$$H_0^{[p]}(g,M) \approx M/Mg.$$

De même si M est un $g-$module trivial

$$\operatorname{Tor}_1^{U_p(g)}(M,K) \approx M \otimes U_p^+(g)/(U_p^+(g))^2$$

où $(U_p^+(g))^2$ est l'idéal bilatère de $U_p^+(g)$ engendré par les éléments uv (u et $v \in U_p^+(g)$). En particulier pour $M = K$, on a

$$H_1^{[p]}(g,K) \approx U_p^+(g)/(U_p^+(g))^2.$$

Nous allons calculer $H_1^{[p]}(g,K)$ et par analogie avec les algèbres de Lie, on introduit la terminologie suivante : *L'idéal dérivé* de la $p-$algèbre de Lie g est le $p-$idéal $\langle [g,g], g^{[p]}\rangle$ de g, engendré par les éléments $[x,y]$ et $x^{[p]}$ $(x,y \in g)$, et *l'abélianisé* de g est le quotient $g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle$. On dira que g est *parfaite* (resp. *fortement abélienne*), si ce quotient est nul (resp. égal à g).

Remarquons qu'une $p-$algèbre de Lie parfaite au sens des algèbres de Lie (*i.e.* $g/[g,g] = 0$) l'est aussi au sens des $p-$algèbres de Lie.

PROPOSITION 1.3. — *Le groupe d'homologie $H_1^{[p]}(g,K)$ est isomorphe à l'abélianisé de g : $g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle$.*

Preuve de la proposition. — En effet, il existe un morphisme canonique de groupes abéliens, de $U_p^+(g)/(U_p^+(g))^2$ dans $g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle$ construit de la manière suivante : si T est l'algèbre tensorielle (graduée) de g , alors la surjection canonique

$$T \to g$$

$$x \to \begin{cases} x & \text{si } \deg(x) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

suivie de la projection $g \to g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle$, induit un homomorphisme de groupes de $U_p(g) = T/\langle x \otimes y - y \otimes x - [x,y]; x \otimes x \otimes \cdots \otimes x - x^{[p]}\rangle$ dans $g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle$. La restriction de ce dernier à $U_p^+(g)$ s'annule sur $(U_p^+(g))^2$. Elle se factorise donc par un homomorphisme de groupes abéliens

$$h : U_p^+(g)/(U_p^+(g))^2 \to g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle.$$

Inversement, le morphisme canonique

$$g \to U_p^+(g)$$

envoie $g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle$ dans $(U_p^+(g))^2$. Il induit donc un morphisme de groupes

$$h' : g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle \to U_p^+(g)/(U_p^+(g))^2.$$

On vérifie aisément que

$$h'h = \mathrm{id}(U_p^+(g)/(U_p^+(g))^2)$$

et que

$$hh' = \mathrm{id}(g/\langle [g,g], g^{[p]}\rangle).$$

□

Il existe une longue suite exacte de comparaison de la cohomologie des $p-$algèbres de Lie et de celle des algèbres de Lie ([H]). Nous allons donner la version homologique de ce résultat dont on se servira par la suite pour calculer le groupe d'homologie $H_2^{[p]}(g, K)$.

Soit g une $p-$algèbre de Lie, notons par U_p (resp. U) son algèbre enveloppante restreinte (resp. son algèbre enveloppante pour sa structure d'algèbre de Lie sous-jacente). Le morphisme canonique $U \to U_p$, permet de voir tout U_p-module comme aussi un $U-$module. Tout U_p-complexe acyclique peut donc être considéré comme un $U-$complexe acyclique. Il existe alors une flèche de toute $U-$résolution de K dans toute U_p-résolution de K. Si M est un U_p-module à droite, cette flèche induit un morphisme de $H_*(g, M)$ dans $H_*^{[p]}(g, M)$. Plus explicitement, si on considère les deux résolutions de K (*cf.* [H])

$$\begin{array}{cccccccccc}
\cdots & U_p \otimes (U_p^+)^{\otimes n} & \to \cdots \to & U_p \otimes U_p^+ & \to & U_p & \to K \to 0 & (1) \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & U \otimes (U^+)^{\otimes n} & \to \cdots \to & U \otimes U^+ & \to & U & \to K \to 0 & (2)
\end{array}$$

la première étant sur U_p et la seconde sur U, avec les différentielles en degré n respectivement :

$$d'(u'\otimes s'_1\otimes\cdots\otimes s'_n) = u's'_1\otimes\cdots\otimes s'_n + \sum_{1\leq i\leq n-1} (-1)^i u'\otimes s'_1\otimes\cdots s'_i s'_{i+1}\cdots\otimes s'_n$$

$$d(u\otimes s_1\otimes\cdots\otimes s_n) = us_1\otimes\cdots\otimes s_n + \sum_{1\leq i\leq n-1} (-1)^i u\otimes s_1\otimes\cdots s_i s_{i+1}\cdots\otimes s_n$$

où $u \in U$ (resp. $u' \in U_p$) et $s_1, s_2, \ldots, s_n \in U^+$ (resp. $s'_1, s'_2, \ldots, s'_n \in U_p^+$), on a un morphisme de complexes de (2) dans (1), qui est la surjection canonique.

Si M est un U_p-module à droite, c'est aussi un $U-$module à droite, en tensorisant (1) (resp. (2)) par M au-dessus de U_p (resp. U), on obtient la suite exacte de complexes,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M\otimes(U_p^+)^{\otimes 2} & \longrightarrow & M\otimes U_p^+ & \longrightarrow & M & (1') \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\cdots & \longrightarrow & M\otimes(U^+)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\partial_2} & M\otimes U^+ & \xrightarrow{\partial_1} & M & (2') \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\cdots & \longrightarrow & J_2 & \longrightarrow & J_1 & \longrightarrow & 0 &
\end{array}$$

où J_* est le complexe noyau de (2') dans (1'). D'où la longue suite exacte associée

$$\cdots \to H_1(J) \to H_1(g,M) \to H_1^{[p]}(g,M) \to H_0(J) \to H_0(g,M) \\ \to H_0^{[p]}(g,M) \to 0$$

reliant l'homologie des $p-$algèbres de Lie à celles des algèbres de Lie.

Comme $J_0 = 0$, il en résulte l'isomorphisme

$$H_0(g,M) \approx H_0^{[p]}(g,M)$$

et la surjection

$$H_1(g,M) \to H_1^{[p]}(g,M).$$

2. Groupe d'homologie restreinte de dimension deux.

Dans ce qui suit, nous déterminons le groupe d'homologie $H_2^{[p]}(g,K)$ en fonction de $H_2(g,K)$, dans le cas où g est parfaite au sens des algèbres de Lie *i.e.* $g/[g,g] = 0$. Nous appliquons ensuite ce résultat à la $p-$algèbre de Lie $\mathrm{sl}_n(A)$, des matrices de trace nulle sur une algèbre commutative, munie du crochet usuel et de la puissance $p^{\text{ième}}$. Nous montrons que pour $n \geq 5$ et $p \neq 2$, $H_2^{[p]}(\mathrm{sl}_n(A), K)$ ne se stabilise pas contrairement au groupe d'homologie d'algèbres de Lie $H_2(\mathrm{sl}_n(A), K)$.

THÉORÈME 2.1. — *Si g est une $p-$algèbre de Lie parfaite au sens des algèbres de Lie (i.e. $g/[g,g] = 0$), le groupe d'homologie $H_2^{[p]}(g, K)$ est isomorphe à la somme directe $H_2(g, K) \oplus (\mathcal{K} \otimes_K g)$ où $\mathcal{K}$ est le corps K muni de la structure de $K-$espace vectoriel via le frobenius.*

Preuve. — La preuve se fait en plusieurs étapes. Considérons la suite exacte, (*cf.* précédemment)

$$\cdots \to H_2(J) \to H_2(g) \to H_2^{[p]}(g) \to H_1(J) \to H_1(g) \to H_1^{[p]}(g) \to H_0(J) \\ \to H_0(g) \to H_0^{[p]}(g) \to 0$$

associée à la suite de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & U_p^+ \otimes U_p^+ & \longrightarrow & U_p^+ & \longrightarrow & K \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & U^+ \otimes U^+ & \xrightarrow{\partial_2} & U^+ & \xrightarrow{\partial_1} & K \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & J_2 & \longrightarrow & J_1 & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (*)$$

Comme g est parfait, on a

$$H_1(g) = H_1^{[p]}(g) = 0.$$

D'où l'isomorphisme : $H_2^{[p]}(g) \approx H_1(J) \oplus (\mathrm{Im}(H_2(g) \to H_2^{[p]}(g)))$.

Nous allons d'abord calculer $H_1(J)$, ensuite nous montrerons que $H_2(J) = 0$, ce qui entraînera que

$$H_2^{[p]}(g) \approx H_1(J) \oplus H_2(g).$$

Commençons par quelques conventions d'écriture. Si x est un élément de g, on note $x^{[p]}$ la puissance symbolique de x dans g et x^p la puissance $p^{\text{ième}}$ de x dans U (U étant l'algèbre enveloppante de g au sens des algèbres de Lie). Notons que les éléments $x^p - x^{[p]}$ sont dans le centre de U. L'outil principal utilisé ici est le résultat suivant dû à Jacobson : si $\{b_i\}_{i \in I}$ est une $K-$base de g ordonnée par I, alors une $K-$base de U est l'ensemble (*cf.* [J] pp. 189–190) :

$$B = \{b_{i1}^{k_1} \dots b_{ir}^{k_r} (b_{i1}^p - b_{i1}^{[p]})^{h_1} \dots (b_{ir}^p - b_{ir}^{[p]})^{h_r} \ ; \ i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \ h_j \geq 0 \\ \text{et } 0 \leq k_j \leq p-1\}.$$

Calcul de $H_1(J)$:

D'après la suite exacte de complexes $(*)$ précédente $H_1(J) = J_1/\partial_2(J_2)$ avec :

$$J_1 = \operatorname{Ker}(U^+ \to U_p^+)$$
$$= \Big\{ \sum_i \alpha_i(x_i^p - x_i^{[p]}) \;;\; \alpha_i \in U \text{ et } x_i \in g \Big\} \quad \text{(car les éléments}$$
$$x_i^p - x_i^{[p]} \text{ sont dans le centre de } U)$$

et

$$J_2 = U^+ \otimes J_1 + J_1 \otimes U^+$$
$$= \Big\{ \sum_i u_i \otimes v_i \;;\; u_i \text{ et } v_i \in U^+ \text{ avec } u_i \text{ ou } v_i \in J_1 \Big\}.$$

Comme $\partial_2(u_i \otimes v_i) = -u_i v_i$, on a :

$$\partial_2(J_2) = \Big\{ \sum_i \alpha_i(x_i^p - x_i^{[p]}) \;;\; \alpha_i \in U^+ \text{ et } x_i \in g \Big\},$$

et par suite $H_1(J) = \Big\{ \sum_i \lambda_i \mathrm{cl}(x_i^p - x_i^{[p]}) \;;\; \lambda_i \in K \text{ et } x_i \in g \Big\}$.

Si $\{b_i\}_{i \in I}$ est une $K-$base de g ordonnée par I, alors

$$\partial_2(J_2) = \Big\{ \sum_{ij} \gamma_{ij}\beta_j(b_i^p - b_i^{[p]}) \text{ où } \gamma_{ij} \in K \text{ et } \beta_j \in B \cap U^+ \Big\}$$

et

$$H_1(J) = \Big\{ \sum_i \lambda_i \mathrm{cl}(b_i^p - b_i^{[p]}) \;;\; \lambda_i \in K \Big\}.$$

LEMME 2.2. — *Les éléments* $\mathrm{cl}(b_i^p - b_i^{[p]})_{i \in I}$, *forment une* $K-$*base de* $H_1(J)$, *de plus* $H_1(J)$ *est isomorphe à* $\mathcal{K} \otimes_K g$ *où* $\mathcal{K}$ *est le corps* K *muni de la structure de* $K-$*espace vectoriel via le frobenius.*

Preuve. — Le problème est celui de l'indépendance. Supposons que

$$\sum_i \lambda_i \mathrm{cl}(b_i^p - b_i^{[p]}) = 0 \text{ dans } H_1(J) \qquad (\lambda_i \in K).$$

Cela signifie que $\sum_i \lambda_i(b_i^p - b_i^{[p]}) \in \partial_2(J_2)$. Ce qui revient à dire qu'on a l'égalité dans U : $\sum_i \lambda_i(b_i^p - b_i^{[p]}) = \sum_{ij} \gamma_{ij}\beta_j(b_i^p - b_i^{[p]})$ ($\lambda_i, \gamma_{ij} \in K$ et $\beta_j \in B \cap U^+$). Les éléments $b_i^p - b_i^{[p]}$ et $\beta_j(b_i^p - b_i^{[p]})$ étant dans B et tous distincts, on a : $\lambda_i = \gamma_{ij} = 0$. Pour la deuxième partie du lemme, on a un isomorphisme (ne dépendant pas de la base choisie)

$$H_1(J) \to \mathcal{K} \otimes_K g$$

$$\sum_i \lambda_i(b_i^p - b_i^{[p]}) \to \sum_i \lambda_i \otimes b_i.$$

□

Pour terminer la démonstration du théorème, il nous reste à montrer que $H_2(J) = 0$. Rappelons ici que $\partial_3(x \otimes y \otimes z) = -xy \otimes z + x \otimes yz$ pour x, y, z éléments de U^+. Un représentant d'un élément $\mathrm{cl}(x)$ de $H_2(J)$, est de la forme :

$$z = \sum u_i \otimes v_i' + \sum u_i' \otimes v_i$$

où $u_i, v_i \in U^+$, $u_i', v_i' \in J_1$ et $\sum u_i v_i' + \sum u_i' v_i = 0$.

En exprimant u_i, v_i, u_i' et v_i' dans la base de U considérée précédemment et en utilisant le fait que $xy \otimes z = x \otimes yz$ modulo l'image de ∂_3, la première somme dans l'expression de z, se met sous la forme : $\sum \lambda_{ij} Y_j \otimes (b_i^p - b_i^{[p]})$ où $\lambda_{ij} \in K$ et $Y_j \in B \cap U^+$. Pour la deuxième somme, on utilise de plus la centralité des éléments $b_i^p - b_i^{[p]}$ et le fait que g est parfait pour obtenir une forme finale : $z = \sum \gamma_{ij} Y_j \otimes (b_i^p - b_i^{[p]})$ où $\gamma_{ij} \in K$ et $Y_j(b_i^p - b_i^{[p]})$ sont des éléments de $B \cap U^+$ tous distincts.

Comme $\partial_2(z) = \sum \gamma_{ij} Y_j (b_i^p - b_i^{[p]}) = 0$, on a $\gamma_{ij} = 0$. Ce qui prouve que z est nul. □

3. Calcul de $\mathbf{H_2^{[p]}(sl_n(A), K)}$.

Soit A une $K-$algèbre commutative et unifère, considérons la $p-$algèbre de Lie $\mathrm{sl}_n(A)$ des matrices de trace nulle à coefficients dans A, munie du crochet usuel et de la puissance $p^{\text{ième}}$. Comme elle est parfaite au sens des algèbres de Lie, d'après le théorème 2.1 $H_2^{[p]}(\mathrm{sl}_n(A), K)$ est isomorphe à $H_2(\mathrm{sl}_n(A), K) \oplus (\mathcal{K} \otimes_K \mathrm{sl}_n(A))$. Or, pour $n \geq 5$ et $p \neq 2$, $H_2(\mathrm{sl}_n(A), K)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des $1-$formes différentielles modulo les formes exactes $\Omega^1_{A/K}/dA$ (*cf.* [B]). Il s'ensuit le

COROLLAIRE 3.1. — *Pour $n \geq 5$ et $p \neq 2$, le groupe d'homologie $H_2^{[p]}(\mathrm{sl}_n(A), K)$ est isomorphe à $\Omega^1_{A/K}/dA \oplus (\mathcal{K} \otimes_K \mathrm{sl}_n(A))$.*

Ce résultat montre qu'on n'a pas de stabilité de $H_2^{[p]}(\mathrm{sl}_n(A), K)$ contrairement au groupe $H_2(\mathrm{sl}_n(A), K)$.

BIBLIOGRAPHIE

[B] S. BLOCH, The dilogarithm and extensions of Lie algebras, Alg. $K-$theory, Evanston 1980, Springer Lecture Notes in Math., N°854 (1981), 1–23.

[CE] H. CARTAN & S. EILENBERG, Homological algebra, Princeton University Press, 1956.

[H] G. HOCHSCHILD, Cohomology of restricted Lie algebras, American Journal of Mathematics, vol. 76 (1954), 555–580.

[J] N. JACOBSON, Lie algebras, Dover publications Inc., New York, 1962.

[S] G.B. SELIGMAN, Modular Lie algebra, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[SGA] SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DU BOIS MARIE, 1962–1964 (SGA3). Schémas en groupes I, pp. 444–459, par P. Gabriel.

Manuscrit reçu le 17 juin 1988.

Rachida ABOUGHAZI,
Université de Genève
Section de Mathématiques
2–4 rue du Lièvre
Case Postale 240
1211 Genève 24 (Suisse).