ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES RABY

Invariance des classes de Godbillon-Vey par C^1-difféomorphismes

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 1 (1988), p. 205-213

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_1_205_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 1 (1988), 205-213

INVARIANCE DES CLASSES DE GODBILLON-VEY PAR C¹-DIFFEOMORPHISMES

par Gilles RABY

0. Introduction.

A tout feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^2 et de codimension 1 sur une variété M, on peut associer une classe de cohomologie de $H^3(M, \mathbf{R})$ appelée invariant de Godbillon-Vey de $\mathcal{F}$ (voir [2]) et notée $gv(\mathcal{F})$. Cet invariant ne peut être défini que dans le cas où $\mathcal{F}$ est de classe C^2, cependant on montre ici que si $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ sont deux variétés feuilletées de classe C^2 et de codimension 1 alors on a : $gv(\mathcal{F}_1 = \phi^\star(gv(\mathcal{F}_2))$ pour tout difféomorphisme de classe C^1 envoyant $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$.

La démonstration tout à fait élémentaire de cette invariance par C^1-conjugaison (telle qu'elle a été exposée dans [3]) repose sur la théorie des courants, aussi, pour simplifier les notations, toutes les variétés et les feuilletages considérés seront supposés de classe C^∞.

Dans le cas où les variétés sont compactes, E. Ghys et T. Tsuboi ont retrouvé ce résultat en démontrant, dans l'article publié dans ce même fascicule et intitulé "Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1", le théorème suivant :

Mots-clés : Conjugaison - Courant - Feuilletage - Invariant de Godbillon-Vey.

Soient $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ deux variétés compactes feuilletées, de codimension 1 et de classe $C^r(2 \leq r \leq \omega)$. Si l'holonomie de $\mathcal{F}_1$ est non triviale, alors tout difféomorphisme ϕ de classe C^1, qui envoie $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$, est transversalement de classe C^r en dehors des feuilles compactes de $\mathcal{F}_1$.

1. Cohomologie feuilletée.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^∞ et de codimension 1 sur une variété M de classe C^∞ et de dimension n. On désigne par A^p_M le faisceau des germes de p-formes C^∞ sur M, et par $K^{1,p}_M$ le faisceau des germes des $p+1$-formes C^∞ sur M nulles sur $\mathcal{F}$.

Si $\alpha \in A^p_M$, on note $\alpha \,|\, \mathcal{F}$ son image dans $A^p_{\mathcal{F}} = A^p_M / K^{1,p-1}_M$ (avec $A^0_{\mathcal{F}} = A^0_M$). La différentielle $d : A^p_M \to A^{p+1}_M$ induit les différentielles :

$$d : K^{1,p}_M \to K^{1,p+1}_M \quad \text{et} \quad d_{\mathcal{F}} : A^p_{\mathcal{F}} \to A^{p+1}_{\mathcal{F}}.$$

On pose alors

$$A^0_\pitchfork = \operatorname{Ker}(d_{\mathcal{F}} : A^0_{\mathcal{F}} \to A^0_{\mathcal{F}}) \quad \text{et} \quad A^1_\pitchfork = \operatorname{Ker}(d : K^{1,0}_M \to K^{1,1}_M)$$

ce qui permet de définir $d_\pitchfork : A^0_\pitchfork \to A^1_\pitchfork$ induite par $d : A^0_M \to A^1_M$.

Les faisceaux $A^p_{\mathcal{F}}$ et $K^{1,p}_M$ sont fins donc $\Gamma(M, \cdot)$ acycliques, de plus le théorème de Poincaré à paramètre donne l'exactitude des suites :

$$0 \to A^0_\pitchfork \to A^0_{\mathcal{F}} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} A^1_{\mathcal{F}} \to \ldots \to A^{n-1}_{\mathcal{F}} \to 0$$

$$0 \to \mathbf{R} \to A^0_\pitchfork \xrightarrow{d_\pitchfork} A^1_\pitchfork \to 0$$

et donc aussi de :

$$0 \to A^1_\pitchfork \to K^{1,0}_M \xrightarrow{d} K^{1,1}_M \to \ldots \to K^{1,n-1}_M \to 0.$$

$(*)$ *Ceci montre d'une part que :*

$$H^p(M, A^0_\pitchfork) = H^p(\Gamma(M, A^\star_{\mathcal{F}}), d_{\mathcal{F}})$$

et

$$H^p(M, A^1_\pitchfork) = H^p(\Gamma(M, K^{1,\star}_M), d)$$

et d'autre part que la suite exacte de complexes :

$$0 \to K_M^{1,\star-1} \to A_M^\star \to A_{\mathcal{F}}^\star \to 0$$

induit la suite exacte longue :

$$\ldots \to H^{p-1}(M, A^1_\pitchfork) \to H^p(M, \mathbf{R}) \to H^p(M, A^0_\pitchfork) \xrightarrow{d_\pitchfork} H^p(M, A^1_\pitchfork) \to \ldots$$

associée à la suite exacte courte : $0 \to \mathbf{R} \to A^0_\pitchfork \xrightarrow{d_\pitchfork} A^1_\pitchfork \to 0.$

Remarque. — Le feuilletage $\mathcal{F}$ est de codimension 1, donc si α et β sont dans $K_M^{1,\star}$ alors $\alpha \wedge \beta$ est nulle, par conséquent dès que $\alpha \in \Gamma(M, A_M^p)$ vérifie $d\alpha \in \Gamma(M, K_M^{1,p})$ alors :

$$\alpha \wedge d\alpha \in \Gamma(M, K_M^{1,2p}) \quad \text{et} \quad d(\alpha \wedge d\alpha) = 0$$

d'où les flèches :

$$(**) \qquad H^p(M, A^0_\pitchfork) \to H^{2p}(M, A^1_\pitchfork) \to H^{2p+1}(M, \mathbf{R})$$
$$\text{classe}(\alpha|\mathcal{F}) \to \text{classe}(\alpha \wedge d\alpha).$$

Pour $p = 1$, on déduit de $(*)$ que si la classe de $\alpha|\mathcal{F}$ dans $H^1(M, A^0_\pitchfork)$ est représentée par le 1-cocycle (θ_{ij}), alors la classe de $\alpha \wedge d\alpha$ dans $H^2(M, A^1_\pitchfork)$ est représentée par le 2-cocycle $(\theta_{ij} \cdot d_\pitchfork \theta_{jk})$.

2. L'invariant de Godbillon-Vey.

Avec les notations précédentes, supposons $\mathcal{F}$ transversalement orientable, alors $\mathcal{F}$ est le noyau d'une 1-forme ω de classe C^∞ sur M, ω est intégrable donc $\omega \wedge d\omega = 0$, ce qui montre qu'il existe une 1-forme α de classe C^∞ telle que :

$$d\omega = \omega \wedge \alpha.$$

La forme $\alpha|\mathcal{F}$ est fermée puisque $\omega \wedge d\alpha = 0$, de plus la classe de $\alpha|\mathcal{F}$ dans $H^1(M, A^0_\pitchfork)$, notée $gv^{0,1}(\mathcal{F})$, ne dépend que de $\mathcal{F}$. Cette classe définit d'après $(**)$ deux nouvelles classes notées $gv^{1,2}(\mathcal{F})$ et $gv(\mathcal{F})$ successivement dans $H^2(M, A^1_\pitchfork)$ et dans $H^3(M, \mathbf{R})$, $gv(\mathcal{F})$ est appelé l'invariant de Godbillon-Vey du feuilletage $\mathcal{F}$ (voir [2]), il a pour représentant la forme fermée $\alpha \wedge d\alpha$. Lorsque $\mathcal{F}$ n'est que de classe C^2, alors la 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$ est de classe C^0 et définit un courant fermé de M, ce qui permet encore de définir $gv(\mathcal{F})$ dans $H^3(M, \mathbf{R})$.

On peut remarquer que la nullité de $gv^{0,1}(\mathcal{F})$ traduit le fait que $\mathcal{F}$ est défini par une forme fermée. En effet si $gv^{0,1}(\mathcal{F}) = 0$ alors il existe h une fonction C^∞ sur M telle que $(dh)|\mathcal{F} = \alpha|\mathcal{F}$, ainsi $\alpha - dh$ est nulle sur $\mathcal{F}$ et par suite on obtient :

$$d\omega = \omega \wedge \alpha = \omega \wedge dh,$$

$\exp(h)\omega$ devient alors une forme fermée de noyau $\operatorname{Ker} \omega = \mathcal{F}$.

Les définitions introduites dans le paragraphe 1 permettent l'interprétation des classes $gv^{p,q}(\mathcal{F})$ en termes de cocycles dans $H^q(M, A^p_{\pitchfork})$. Pour cela désignons par Γ_1^∞ le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbf{R}$, et considérons un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de M par des ouverts sur lesquels $\mathcal{F}$ soit défini par une submersion f_i de classe C^∞ de U_i dans $\mathbf{R}$. Alors tout x de $U_i \cap U_j$ possède un voisinage V dans $U_i \cap U_j$ sur lequel on a :

$$f_i = \gamma_{ij} \cdot f_j \quad \text{avec} \quad \gamma_{ij} \quad \text{dans} \quad \Gamma_1^\infty.$$

Avec ces notations on a :

Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est donné par $(U_i, f_i, \gamma_{ij})_{ij}$, alors le cocycle $(\ln \gamma'_{ij})_{ij}$ représente $gv^{o,1}(\mathcal{F})$ dans $H^1(M, A^0_{\pitchfork})$. Ce qui montre d'après (**) *que le cocycle $(\ln \gamma'_{ij} d_{\pitchfork} \ln \gamma'_{jk})_{ijk}$ représente $gv^{1,2}(\mathcal{F})$ dans $H^2(M, A^1_{\pitchfork})$.*

Démonstration. — Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une partition localement finie de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ alors $\mathcal{F}$ est le noyau de $\omega = \sum_i \lambda_i df_i$. $\mathcal{F}$ étant transversalement orienté on peut supposer que $\omega = \exp(h_j)df_j$ sur U_j, avec h_j dans $\Gamma(U_j, A^0_M)$. Ce qui donne :

$$\omega|U_j = \sum_i \lambda_i d(\gamma_{ij} \cdot f_j) = \sum_i \lambda_i \gamma'_{ij} \cdot df_j = \exp(h_j)df_j$$

$$d\omega|U_j = -\omega \wedge dh_j$$

et par suite on obtient :

$$d\omega = \omega \wedge \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = -\sum_k \lambda_k d \ln \left(\sum_i \lambda_i \gamma'_{ik} \right).$$

Pour trouver un cocycle $(\theta_{ij})_{ij}$ représentant $gv^{0,1}(\mathcal{F})$, il faut remarquer que $d(\alpha|\mathcal{F}) = 0$. S'il existe β_j de classe C^∞ sur U_j telle que $d\beta_j|\mathcal{F} = \alpha|\mathcal{F}$ sur U_j, $\theta_{ij} = \beta_i - \beta_j$ est alors un cocycle de $C^1(U_i \cap U_j, A^0_{\mathfrak{h}})$. Or on a :

$$\alpha|U_j = -d\ln\left(\sum_i \lambda_i \gamma'_{ij}\right) - \sum_k \lambda_k d\ln\gamma'_{jk},$$

la nullité de $\sum_k \lambda_k d\ln\gamma'_{kj}$ sur $\mathcal{F}|U_j$ permet donc de prendre le cocycle

$\theta_{ij} = \beta_i - \beta_j$ avec $\beta_j = -\ln\left(\sum_i \lambda_i \gamma'_{ij}\right)$, ce qui donne le résultat puisque $\theta_{ij} = -\ln\gamma'_{ji}$ sur $U_i \cap U_j$.

3. $gv(\mathcal{F})$ est invariant par conjugaison de classe C^1.

On démontre ici le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soient $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ deux variétés feuilletées, de codimension 1 et de classe C^∞. Soit ϕ un difféomorphisme de classe C^1 envoyant $\mathcal{F}_1$ sur $\mathcal{F}_2$, alors on a :*

$$gv(\mathcal{F}_1) = \phi^\star(gv(\mathcal{F}_2)).$$

Les variétés seront supposées orientées, de sorte que toute p-forme β de classe C^0 définit par intégration un courant noté $[\beta]$.

Rappelons (voir [4]) que si T est un courant et si γ est une forme de classe C^∞ alors $T \llcorner \gamma$ et bT désignent les courants définis par :

$$< T \llcorner \gamma, \phi > = < T, \gamma \wedge \phi > \quad \text{et} \quad < bT, \psi > = < T, d\psi >,$$

la formule de Stokes permet alors de prolonger la différentielle des formes en une différentielle définie sur l'espace des courants T de degré p par :

$$dT = (-1)^{p+1} bT.$$

Soient ω_1 et ω_2 deux 1-formes de classe C^∞ définissant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, on a alors :

$$\phi^\star\omega_2 = \exp(h) \cdot \omega_1$$

où h est de classe C^∞.

Si α_1 (resp.α_2) est une 1-forme de classe C^∞ telle que :

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \alpha_1 \quad (\text{resp. } d\omega_2 = \omega_2 \wedge \alpha_2)$$

il s'agit de montrer que la forme $\phi^\star(\alpha_2 \wedge d\alpha_2) - \alpha_1 \wedge d\alpha_1$, de classe C^0, est la différentielle d'un courant de M_1. Ce qui provient du :

LEMME. — *Soient γ une 1-forme de classe C^∞ sur M_2 et θ une 2-forme de classe C^0 sur M_1 telle que $d[\exp h] \llcorner \omega_1 = (\exp h)\theta$. Soit η une 1-forme de classe C^0 sur M_1 telle que le courant $d[\eta]$ soit défini par une forme de classe C^0 et telle que $(\eta + d[h]) \llcorner \omega_1$ soit nul. Alors on a :*

i) $d[\phi^\star\gamma] = [\phi^\star(d\gamma)]$

ii) $d[h] \llcorner \omega_1 = \theta$

iii) $[\eta \wedge d[\eta]] = -d[hd[\eta]]$.

Le théorème se déduit du lemme de la façon suivante : d'après i) on a :

$$d[\phi^\star\omega_2] = [\phi^\star(d\omega_2]$$

ce qui donne :

$$d[\exp(h)] \llcorner \omega_1 + [\exp(h)\omega_1 \wedge \alpha_1] = [\phi^\star\omega_2 \wedge \phi^\star\alpha_2] = [\exp(h)\omega_1 \wedge \phi^\star\alpha_2]$$

la forme $-\omega_1 \wedge \alpha_1 + \omega_1 \wedge \phi^\star\alpha_2$ vérifie donc, d'après ii) :

$$d[h]] \llcorner \omega_1 = -\omega_1 \wedge \alpha_1 + \omega_1 \wedge \phi^\star\alpha_2$$

d'où : $(\phi^\star\alpha_2 - \alpha_1 + d[h]) \llcorner \omega_1 = 0$, ce qui prouve l'existence d'un courant T de degré 0 tel que :

$$\phi^\star\alpha_2 - \alpha_1 + d[h] = T \llcorner \omega_1.$$

La propriété (i) du lemme permet ensuite d'écrire :

$$[\phi^\star d\alpha_2] = d\alpha_1 + d(T \llcorner \omega_1).$$

Remarquons ici que ces deux dernières égalités montrent que les deux courants $T \llcorner \omega_1 - d[h]$ et $d(T \llcorner \omega_1)$ sont définis par des formes de classe C^0 notées respectivement η et $d[\eta]$.

La 1-forme η vérifie bien sûr :

$$(\eta + d[h]) \llcorner \omega_1 = 0,$$

de plus on a :

$$\alpha_1 \wedge d(T \llcorner \omega_1) = -d(dT \llcorner \omega_1) \quad \text{et} \quad T \llcorner (\omega_1 \wedge d\alpha_1) = 0$$

on obtient donc :

$$\phi^\star(\alpha_2 \wedge d\alpha_2) = \alpha_1 \wedge d\alpha_1 - d(dT \llcorner \omega_1) - d[h \cdot d\alpha] + \eta \wedge d[\eta]$$

ce qui, d'après (iii), achève la démonstration du théorème.

Démonstration du Lemme. — L'application $\psi = \phi^{-1}$ est localement lipschitzienne et propre, donc en approchant ψ par des applications de classe C^∞ (voir par exemple [1]) on a :

$$b\psi_\#[\gamma] = \psi_\# b[\gamma],$$

ici ψ conserve les degrés donc :

$$d\psi_\#[\gamma] = \psi_\# d[\gamma];$$

de plus pour toute forme ζ de classe C^∞ on a

$$\phi_\#(\psi_\#[\zeta]) = [\zeta] \quad \text{et} \quad \phi_\#[\phi^\star\zeta] = \varepsilon\zeta \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

d'où :$[\phi^\star\zeta] = \varepsilon\psi_\#[\zeta]$, ce qui montre que :

$$d[\phi^\star\gamma] = \varepsilon d\psi_\#[\gamma] = \varepsilon\psi_\#[d\gamma] = [\phi^\star(d\gamma)].$$

Les points (ii) et (iii) du lemme sont de nature locale (égalité de deux courants), donc on peut supposer que :

$$M_1 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} \quad \text{et} \quad \omega_1 = a(x,y)dx$$
$$\text{avec} \quad z = (x,y) \quad \text{dans} \quad \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1},$$

puis, en divisant par la fonction partout non nulle a, on peut encore supposer que : $\omega_1 = dx$.

On notera dans la suite $d = d_x + d_y$ avec :

$$d_x = \frac{\partial}{\partial x}dx \quad \text{et} \quad d_y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_i}dy_i.$$

Remarquons que si une fonction λ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^0 a des dérivées au sens distributions de classe C^0, alors λ est de classe C^1. En effet, posons $\mu_k(z) = k^n\mu(kz)$ où $k \in \mathbf{N}$ et où μ est une fonction sur $\mathbf{R}^n$ à support compact, de classe C^∞ et d'intégrale 1, alors $\lambda * \mu_k$ converge vers λ au sens C^0, de même

$d(\lambda * \mu_k) = (d[\lambda]) * \mu_k$ converge vers $d[\lambda]$ au sens C^0, λ est donc différentiable et on a $[d\lambda] = d[\lambda]$.

Pour montrer (ii), constatons que l'on a nécessairement :

$$\theta = \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i(x,y)dy_i\right] \wedge dx \quad \text{avec} \quad b_i \quad \text{de classe} \quad C^0$$

d'où au sens distributions :

$$\frac{\partial[\exp h]}{\partial y_i} = (\exp h)b_i \quad \text{pour} \quad i \in \{1,\dots,n-1\}$$

ainsi la fonction $y \to \exp h(x,y)$ est de classe C^0 à dérivées C^0, elle est donc de classe C^1, ce qui montre que

$$b_i = \frac{\partial h}{\partial y_i} \quad \text{et} \quad \theta = d[h] \llcorner \omega_1.$$

La démonstration de (iii) se fait aussi par régularisation, pour cela posons :

$$\eta = f dx - \xi$$

où f est de classe C^0, ξ est de classe C^0 et sans dx, l'hypothèse faite sur η donne alors :

$$\xi = d_y[h]$$

d'où

$$d[\eta] = d_y[f] \llcorner dx - d_x[\xi] = d_y\left([f] + \frac{\partial[h]}{\partial x}\right) \llcorner dx$$

ainsi $d_y\left([f] + \frac{\partial[h]}{\partial x}\right)$ est de classe C^0 puisque $d[\eta]$ est de classe C^0. On a donc :

$$\eta \wedge d[\eta] = -d_y[h] \wedge d_y\left([f] + \frac{\partial[h]}{\partial x}\right) \wedge dx.$$

Le courant $d_x[hd[\eta]]$ est nul car $d[\eta]$ est divisible par dx, d'où :

$$d[hd[\eta]) = d_y[hd[\eta]] = d_y[hd_y\left(\left[f\right] + \frac{\partial[h]}{\partial x}\right)\Big] \llcorner dx.$$

Il reste donc à montrer, en posant $R = [f] + \frac{\partial[h]}{\partial x}$, que :

$$d_y[h] \wedge d_y R = d_y[hd_y R],$$

sachant que h, $d_y[h]$ et d_yR sont de classe C^0. Cette dernière égalité est vérifiée pour h de classe C^∞, donc pour $h_n = h * \mu_n$. Il suffit alors de remarquer que $h_n d_y R$ (resp. $d_y h_n \wedge d_y R$) converge au sens C^0 vers hd_yR (resp. vers $d_y[h] \wedge d_yR$), et donc $d_y(h_n d_y R)$ converge vers $d_y[hd_yR]$ dans l'espace des courants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. FEDERER. — Geometric measure theory, Springer Verlag, 1969.

[2] C. GODBILLON, J. VEY. — Un invariant des feuilletages de codimension 1, C.R. Acad. Sci., Paris, 273 (1971),92–95.

[3] G. RABY. — L'invariant de Godbillon-Vey est stable par C^1 difféomorphisme. Exposé au séminaire de géométrie de Poitiers, Preprint, 1980.

[4] G. DE RHAM. — Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1955.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1987.

Gilles RABY,
Département de Mathématiques
Université de Poitiers
40 avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers (France).