ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES REEB

Sur les structures feuilletées de co-dimension un et sur un théorème de M.A. Denjoy

Annales de l'institut Fourier, tome 11 (1961), p. 185-200

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__185_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 185-200.

SUR LES STRUCTURES FEUILLETÉES DE CO-DIMENSION UN ET SUR UN THÉORÈME DE M. A. DENJOY

par **Georges REEB** (Grenoble).

INTRODUCTION

Dans son célèbre mémoire [1] A. Denjoy étudie, sur le tore T^2, les trajectoires de l'équation différentielle

$$(1) \qquad d\varphi - F(\varphi,\ \theta)\, d\theta = 0$$

où $$F(\varphi + 1,\ \theta) = F(\varphi,\ \theta + 1) = F(\varphi,\ \theta).$$

L'auteur rappelle la classification classique des trajectoires en *trajectoires propres*, *trajectoires (localement) partout denses* et *trajectoires exceptionnelles;* à la suite d'autres auteurs il indique des exemples d'équations (1) comportant des trajectoires exceptionnelles. Mais le résultat spectaculaire du mémoire [1] est le

Théorème 1. — *Si la fonction* $F(\varphi, \theta)$ *est de classe* C_2, *l'équation* (1) *n'admet aucune trajectoire exceptionnelle.*

La démonstration de Denjoy reprise par Siegel [2] devient parfaitement concise et limpide, dépouillée de tout accessoire technique.

Si on veut étendre les notions ou les résultats précédents aux dimensions supérieures on est amené naturellement soit à l'étude des trajectoires d'un système ordinaire d'équations différentielles soit à l'étude des variétés intégrales d'une équation de Pfaff complètement intégrable (ou si on préfère, à l'étude d'une structure feuilletée de co-dimension 1). Or il est bien connu que la première généralisation proposée se heurte à des difficultés insurmontables. Par contre, dès que le problème est formulé, il apparaît avec évidence que les démonstrations de Denjoy et Siegel se transposent aux structures feuilletées de co-dimension un. L'objet du présent travail consiste précisément à étendre le théorème 1 à une classe de structures feuilletées de co-dimension un suffisamment générale, à notre avis, pour retenir l'attention.

Les feuilles d'une structure feuilletée de co-dimension un se classent naturellement en *feuilles propres*, *feuilles localement partout denses* et *feuilles exceptionnelles.* D'où la conjecture suivante : *une structure feuilletée de co-dimension un et de classe* C_2 *n'admet pas de trajectoires exceptionnelles.*

Nous sommes évidemment loin d'établir cette conjecture dans toute sa généralité ou de l'infirmer par la donnée d'un exemple approprié. Mais nous pensons qu'il y a quelque espoir de résoudre ce problème.

Pour souligner l'importance de la conjecture nous remarquerons ceci : si la conjecture se trouvait être vérifiée alors la forme suivante du théorème de Poincaré-Bendixon serait valable :

Toute feuille propre γ *d'une structure feuilletée de classe* C_2 *et de co-dimension un, dont l'adhérence* $\bar{\gamma}$ *est compacte, contient une feuille compacte dans son adhérence* [3, p. 109].

Afin d'éviter les détails techniques et pour suivre aussi fidèlement que possible l'exposé de Siegel nous porterons notre attention, dans les cinq premiers paragraphes, uniquement sur les structures feuilletées de type Γ, définies de la façon suivante :

On donne le tore T^2 à deux dimensions (repéré à l'aide des coordonnées habituelles θ, φ définies mod. 1) et l'intervalle $I = [0, 1]$ (repéré par l'abscisse x), on désigne par V_3 la variété à bords $V_3 = T^2 \times I$. La structure feuilletée Γ est définie par une équation de Pfaff complètement intégrable et de classe C_1 :

$$(2) \qquad \omega \equiv dx + A(\theta, \varphi, x)\, d\theta + B(\theta, \varphi, x)\, d\varphi = 0$$

où $A(\theta, \varphi, 0) = A(\theta, \varphi, 1) = B(\theta, \varphi, 0) = B(\theta, \varphi, 1) = 0$

et où A, B sont des fonctions périodiques, de période 1, par rapport à φ et θ.

Les bords $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ sont des feuilles de cette structure.

Les structures de type Γ correspondent à la situation la plus simple qui généralise, aux dimensions supérieures, la situation envisagée par Denjoy. Pour les structures de type Γ nos résultats sont faciles à énoncer et il est possible d'aller tout à fait au fond des choses. Les extensions à des situations plus générales sont immédiates et nous les exposerons à la fin de ce travail aux paragraphes 6 et 7.

Voici finalement une remarque banale, mais qui nous a servi de point de départ :

Considérons dans le produit topologique $V_{n-1} \times T$ d'une variété V_{n-1} compacte, dont le groupe de Poincaré est isomorphe au groupe additif $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels, et du cercle trigonométrique T une structure feuilletée, de classe C_2, transversale aux fibres T. Dans ces conditions les démonstrations de Denjoy-Siegel montrent, *sans autre raisonnement*, que toutes les feuilles sont partout denses, à moins qu'il n'y ait au moins une feuille compacte, auquel cas toutes les feuilles sont propres. D'ailleurs si on supprime l'hypothèse d'après laquelle le groupe de Poincaré de V_{n-1} est isomorphe à Z, mais si on suppose que toutes les feuilles sont homéomorphes au revêtement universel, supposé non compact, de V_{n-1} alors on peut affirmer que toutes les feuilles sont partout denses.

On conviendra probablement que les deux résultats précédents, obtenus sans frais à partir des résultats de Denjoy étaient de nature à encourager les recherches exposées ici.

Un simple coup d'œil sur les formules du paragraphe 7. montre que nos démonstrations sont copiées textuellement sur [2]. Il d'ailleurs est à peu près indispensable de lire [2] avant d'aborder la lecture de nos démonstrations.

Le présent travail met une fois de plus en évidence le rôle privilégié qui revient aux structures feuilletées de co-dimension un dans la classe des structures feuilletées de co-dimension quelconque.

1. — Généralités sur les structures feuilletées de type Γ.

Reprenons l'étude des structures feuilletées de type Γ, définies par l'équation (2) de l'introduction, sur $T^2 \times I$. Appelons α et β deux générateurs du groupe de Poincaré $\mathbf{G}$

de T. On pourra supposer que α admet comme représentant un chemin fermé $\bar{\alpha}$ tracé le long du méridien $\theta = 0$ et que β admet comme représentant un chemin fermé $\bar{\beta}$ tracé le long du parallèle $\varphi = 0$.

La construction suivante est classique :

A l'élément α associons l'homéomorphisme (α) de I sur I, qui laisse fixes $\{0\}$ et $\{1\}$, défini de la façon suivante :

$\{0, 0, t(\alpha)\}$ est l'extrémité du chemin tracé dans la feuille contenant $\{0, 0, t\}$ ayant $\{0, 0, t\}$ pour origine et se projetant selon $\bar{\alpha}$ par l'application canonique de $T^2 \times I$ sur T^2. Ici $t(\alpha)$ désigne le transformé de t par (α).

On associe de même à β un homéomorphisme (β) de I sur I.

Ces homéomorphismes (α) et (β) ne dépendent pas du choix des représentants $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ de α et β. Si à l'élément $\alpha^\lambda\beta^\mu$ de $\mathbf{G}$ nous associons l'homéomorphisme $(\alpha)^\lambda(\beta)^\mu = [\lambda, \mu]$ nous aurons défini $\mathbf{G}$ comme groupe (abélien) de transformations topologiques de I. Les propriétés topologiques des feuilles se reflètent dans les propriétés topologiques des trajectoires de ce groupe $\mathbf{G}$ de transformations.

Les notations suivantes sont commodes et classiques :

$p[\lambda, \mu]$ désigne le transformé du point p de I par

$$[\lambda, \mu] = (\alpha)^\lambda(\beta)^\mu.$$

$p\mathbf{G}$ désigne donc la trajectoire de p.

Si $\alpha \in \mathbf{G}$ alors α' désigne l'inverse de α.

Les trajectoires $p\mathbf{G}$ sont habituellement classées dans les types suivants (cf. Introduction) :

(i) trajectoires propres (ou discrètes),

(ii) trajectoires localement partout denses,

(iii) trajectoires exceptionnelles.

(Rappelons que les *trajectoires exceptionnelles sont celles dont l'adhérence est un ensemble parfait totalement discontinu*).

Les feuilles sont classées en feuilles propres, localement partout denses ou exceptionnelles, selon que les trajectoires correspondantes appartiennent aux classes (i) (ii) ou (iii).

On désignera par $\mathbf{G}p$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ qui laisse invariant le point p de I. La feuille γp contenant $(0, 0, p)$ est un revêtement de T^2, associé à la projection canonique π de $T^2 \times I$ sur T^2. On notera que $\mathbf{G}p$ est le groupe qui caractérise le revêtement $(\gamma p, \pi)$ de T^2.

Une suite $p[n\lambda, n\mu]$ où p, λ, μ sont fixes, tandis que n décrit l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{Z}$, est manifestement constante ou monotone (il s'agit là d'une propriété bien connue des itérés d'un homéomorphisme de I sur I). Il en résulte :

$\mathbf{G}p$ est isomorphe à $\{0\}$, $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}^2$;

et d'une façon plus précise :

$\mathbf{G}p$ est soit le groupe $\{0\}$;
soit le groupe engendré par un seul élément $[\lambda, \mu]$; $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ et (λ, μ) premiers entre eux;
soit le groupe $\mathbf{G}$.

Cette dernière propriété a pour corollaire :

Les feuilles sont homéomorphes :

soit au plan R^2;
soit au cylindre $R \times T$;
soit au tore T^2.

On désignera par pq, où $p, q \in I$ et $p \neq q$, le segment d'extrémités p, q si $p < q$ et le complémentaire de ce segment si $p > q$. L'écriture $p/q/r$ signifie $q \in pr$ et $q \neq p$, $q \neq r$.

2. — Feuilles spéciales. Structures feuilletées sans feuilles spéciales.

Définition 1. — *La trajectoire de $p \in I$ est dite spéciale si pour tout $[\lambda, \mu]$ tel que $p[\lambda, \mu] \neq p$ il existe $[\lambda', \mu']$ tel que :*

$$p/p[\lambda', \mu']/p[\lambda, \mu].$$

Il convient de remarquer que la notion de trajectoire spéciale ne dépend pas du choix particulier du point p sur cette trajectoire.

Une feuille est dite spéciale si elle correspond à une trajectoire spéciale.

Une feuille non propre est spéciale. Une feuille propre peut être une feuille spéciale.

On remarquera que si $\mathbf{G}p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ alors la trajectoire de p n'est pas spéciale.

Définition 2. — *Une trajectoire ou une feuille est dite cyclique, si cette trajectoire ou cette feuille n'est pas spéciale.*

THÉORÈME 2. — *Soit q un point de* I, *dont la trajectoire* qG *est cyclique et tel que* $\overline{\mathrm{G}q} = 0$; *il existe un point p de* I, *contenu dans l'adhérence* $\overline{q\mathrm{G}}$ *de* qG *tel que* Gp *soit isomorphe à* **Z**.

COROLLAIRE 1. — *Une structure feuilletée (de type* Γ) *qui contient une feuille* γ *cyclique homéomorphe à* R^2, *contient une feuille* ε *homéomorphe à* $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$ *et contenue dans l'adhérence de* γ.

COROLLAIRE 2. — *Une structure feuilletée (de type* Γ) *vérifiant la condition* G$p = 0$ *pour tout point p de* I, *autre que* $\{0\}$ *ou* $\{1\}$, *ne contient que des feuilles spéciales.*

La démonstration du théorème est fort simple. Il suffit d'examiner le cas où les bords $\mathrm{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathrm{T}^2 \times \{1\}$ sont les seules feuilles compactes. Soit p un point tel que G$p = \{0\}$. Si pG est cyclique on peut associer à tout point q de pG un point q' de pG ($q \neq q'$) tel qu'il n'y ait aucun autre point q'' appartenant à pG et situé entre q et q'. Il existe $[\lambda, \mu] \in$ G tel que $q' = q[\lambda, \mu]$. La suite $q[n\lambda, n\mu]$, $n \in$ **Z** est strictement monotone. Si cette suite converge vers r, $r \in$ I, ($r \neq 0$ et $r \neq 1$) alors $r[\lambda, \mu] = r$ et par conséquent G$r \neq 0$. Comme rG $\neq r$ la conclusion du théorème en résulte. Si la suite $q[n\lambda, n\mu]$ converge vers 0 ou 1, cette suite épuise pG et par conséquent le groupe quotient G/Gp est engendré par l'élément associé à $[\lambda, \mu]$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse G$p = 0$.

On construit facilement des exemples de structures feuilletées (de type Γ), de classe C_∞, ne contenant que des feuilles cycliques, dont certaines feuilles sont homéomorphes à R^2. Le théorème 5 ci-dessous affirme qu'il n'existe pas de structure feuilletée analytique ayant cette propriété.

Le théorème 3 est une réciproque à peu près évidente du théorème 2. Nous ne démontrerons pas cette réciproque.

THÉORÈME 3. — *Soit une structure feuilletée (de type* Γ) *contenant au moins une feuille homéomorphe au cylindre* $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$, *mais ne contenant pas de feuille compacte (autre que* $\mathrm{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathrm{T}^2 \times \{1\}$). *Toutes les feuilles de cette structure sont cycliques.*

On remarquera que les théorèmes 2 et 3 ont leurs analogues dans la situation étudiée par Denjoy. (Dans ce dernier cas l'existence d'une feuille compacte est équivalente au fait que toutes les feuilles sont cycliques).

3. — Lemme préparatoire.

LEMME 1. — *Considérons un segment pq dont l'extrémité p appartienne à une trajectoire spéciale et tel que $pq \cap p\mathrm{G} = \{p\}$ et $pq \cap q\mathrm{G} = \{q\}$. A tout entier $\mathrm{N}(\mathrm{N} > 0)$ on peut associer un élément $[\lambda, \mu]$ de G tel que* (i) $|\lambda| + |\mu| > \mathrm{N}$ *et* (*ii*) *les segments $p\omega q[\lambda, \mu]\omega$ soient deux à deux disjoints lorsque ω parcourt la suite finie $\{[\eta, 0], \ldots, [-\lambda, 0], [-\lambda, \bar{\eta}], \ldots, [-\lambda, -\mu]\}$ les éléments de cette suite seront notés (sans ambiguïté) :* $[1]$, $[2]$, $\ldots$, $[n]$ *où* $n = |\lambda| + |\mu|$. *(Ici, $|\eta| = |\bar{\eta}| = 1$ et η, $\bar{\eta}$ ont respectivement le même signe que $-\lambda$ et $-\mu$).*

Pour établir ce lemme considérons les segments $pp[\alpha, \beta]$ où $|\alpha| + |\beta| \leqslant \mathrm{N}$ et choisissons parmi ces segments le plus court (il n'y a aucune ambuiguïté); soit pps ce segment ($s \in \mathrm{G}$). Comme la trajectoire de p est spéciale il existe des éléments $[\sigma, \theta]$ tels que :

$$p/p[\sigma, \theta]/ps.$$

On désignera par $[\lambda, \mu]$ celui de ces éléments $[\sigma, \theta]$ pour lequel $|\sigma| + |\theta|$ est le plus petit (il peut y avoir ambiguïté, mais dans ce cas $[\lambda, \mu]$ sera l'un de ces éléments). L'élément $[\lambda, \mu]$ a bien les propriétés énoncées au lemme 1; en effet $|\lambda| + |\mu| = n > \mathrm{N}$ d'après la définition de ps. Si les segments $p[k]q[\lambda, \mu][k]$ ($k = 1, \ldots, n$) n'étaient pas disjoints deux à deux, il existerait $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ tels que :

$$p[i]/p[j]/q[\lambda, \mu][i]. \tag{1}$$

Désignons par $[i]'$ l'inverse de $[i]$, la relation (1) implique

$$p/p[j][i]'/q[\lambda, \mu] \tag{2}$$

et (2) implique à son tour

$$p/p[j][i]'/p[\lambda, \mu] \tag{3}$$

car les segments $p\sigma q\sigma$, ($\sigma \in \mathrm{G}$) sont disjoints (à moins qu'ils ne soient confondus). Or la relation (3) est en contradiction avec la définition de $[\lambda, \mu]$ puisque $[j][i]' = [\alpha, \beta]$ où

$$|\alpha| + |\beta| < n.$$

Ceci établit le lemme.

4. — Le lemme fondamental.

Lemme fondamental. — *L'existence d'un segment pq dont l'extrémité p appartienne à une trajectoire spéciale et tel que $pq \cap p\mathrm{G} = \{p\}$ et $pq \cap q\mathrm{G} = \{q\}$ est incompatible avec l'hypothèse suivante*: (H) *la structure feuilletée étudiée est de classe* C_2.

Pour démontrer ce lemme on remarquera d'abord que l'hypothèse (H) implique: les homéomorphismes (α) et (β) sont de classe C_2. On désignera par $D(\varphi, p)$ la dérivée de la fonction φ en p; la fonction réciproque de φ est notée φ'. Soit δ_0 la longueur du segment pq et $\delta\omega (\omega \in \mathrm{G})$ la longueur du segment $p\omega q\omega$. Les deux segments $p\omega q\omega$ et $p\bar{\omega}q\bar{\omega}$ sont disjoints si $p\omega \neq p\bar{\omega}$ ou $q\omega \neq q\bar{\omega}$. Les segments $p\alpha q\alpha$, $\alpha \in \mathrm{G}$ forment une famille infinie de segments deux à deux disjoints. La somme des longueurs de ces segments est inférieure à 1. On peut donc trouver une suite d'éléments $[\lambda_1, \mu_1], \ldots, [\lambda_r, \mu_r] \ldots$ ou λ_r et μ_r sont positifs, telle que ces éléments $\omega_r = [\lambda_r, \mu_r]$ vérifient les conclusions du lemme 1 de 3, c'est-à-dire telle que les segments $p\omega q[\lambda_r, \mu_r]\omega$ soient disjoints si ω parcourt la suite $[-1, 0], \ldots, [-\lambda_r, 0], [-\lambda_r, -1], \ldots, [-\lambda_r, -\mu_r]$ (suite notée $[1], \ldots, [n_r]$ où $n_r = |\lambda_r| + |\mu_r|$).

Or d'après le théorème des accroissements finis :

$$\mathrm{Log}\, \delta_0/\delta[\lambda_r, \mu_r] = -\sum_1^{n_r} \mathrm{Log}\, D(\varphi_k, \varepsilon[k-1]') + \mathrm{Log}\, \delta_0,$$

où $\varphi_k = (\alpha)$ si $[k]$ est de la forme $[\sigma, 0]$ et $\varphi_k = (\beta)$ si $[k]$ est de la forme $[\sigma, \bar{\sigma}]$ $(|\bar{\sigma}| > 0)$, et où $\varepsilon \in pq$; de plus $[0]$ désigne l'élément neutre de G.

De même :

$$\mathrm{Log}\, \delta_0/\delta\,[-\lambda_r, -\mu_r] = -\sum_0^{n_r-1} \mathrm{Log}\, D(\varphi'_{n_r-k}, \bar{\varepsilon}[k]) + \mathrm{Log}\, \delta_0$$

où $\bar{\varepsilon} \in pq$.

Compte tenu de la relation

$$D(h', \eta) \, . \, D(h, h'(\eta)) = 1$$

on en déduit

$$(1) \quad \mathrm{Log}\, \delta_0^2/\delta[\lambda_r, \mu_r] \, . \, \delta[-\lambda_r, -\mu_r]$$
$$= \sum_0^{n_r-1} [\mathrm{Log}\, D(\varphi_{n_r-k}, \bar{\varepsilon}[k+1]) - \mathrm{Log}\, D(\varphi_{n_r-k}, \varepsilon[\lambda_r, \mu_r][n_r-(k+1)])].$$

Il résulte du lemme 1 que le second membre de (1) est borné, en module; par la somme de variations totales des dérivées logarithmiques de (α) et (β). Le premier membre de (1) est susceptible de prendre des valeurs arbitrairement grandes: cette incompatibilité établit le lemme 1.

5. — Applications du lemme fondamental.

THÉORÈME 4. — *Une structure feuilletée* (de type Γ) *de classe* C_2 *n'admet aucune feuille exceptionnelle.*

Il est clair qu'il existe des structures feuilletées (de type Γ) de classe C_0 admettant des feuilles exceptionnelles.

COROLLAIRE. — *Une structure feuilletée (de type* Γ*) de classe* C_2 *dont toutes les feuilles autres que les bords* $T_2 \times \{0\}$ *et* $T^2 \times \{1\}$, *sont homéomorphes à* R^2 *ne comporte que des feuilles partout denses (à l'exception des deux bords).*

Le théorème 4 résulte du lemme fondamental. En effet si la structure feuilletée admettait une trajectoire exceptionnelle il existerait un point r de I tel que l'adhérence $\overline{rG}$ de la trajectoire rG soit un ensemble parfait totalement discontinu. Il existerait un segment pq (dont les extrémités p et q soient distinctes de 0 et 1) tel que $\overline{pq} \cap \overline{rG} = \{p, q\}$. De plus on peut supposer que la trajectoire de p est spéciale; (en effet d'après le théorème 3 l'ensemble des points de I admettant une trajectoire spéciale est un ouvert). Il suffit d'appliquer le lemme fondamental pour établir le théorème 4.

Les résultats précédents peuvent être précisés de bien des manières, en voici quelques exemples. Soit une structure feuilletée (de type Γ) possédant une feuille homéomorphe à $R \times T$; il y a donc un point p de I tel que Gp soit engendré par un seul élément $[\lambda, \mu] \neq 0$; on peut d'ailleurs se ramener au cas où $[\lambda, \mu]$ est précisément $[1, 0]$ par un choix convenable des générateurs de G. La suite des points $p[0, n]$ tend vers un point limite p'. Le groupe $Gp[0, n]$ est également engendré par $[1, 0]$. Si on suppose maintenant que la structure feuilletée est analytique, les homéomorphismes (α) et (β) sont également analytiques. La transformation $p \rightarrow p[0, 1]$ est l'identité au voisinage de p', car elle a une infinité de points fixes au voisinage de p'. On en déduit le

THÉORÈME 5. — *Une structure feuilletée (de type* Γ*) analytique admettant des feuilles homéomorphes à* R^2 *possède des feuilles localement partout denses.*

En particulier une structure feuilletée (de type Γ) analytique, n'admettant pas d'autres feuilles compactes que les bords $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$, admet uniquement des feuilles partout denses (à l'exception des bords) à moins que toutes les feuilles ne soient homéomorphes à $R \times T$.

6. — Extension des résultats précédents. (Groupe fondamental abélien).

Il va sans dire que *tous* les résultats précédents restent valables moyennant quelques légères modifications, d'ailleurs évidentes, des énoncés mais sans qu'il y ait lieu d'apporter une modification quelconque aux démonstrations si on remplace T par une variété compacte V_n ayant le même groupe de Poincaré que T^2 et si on étudie dans $V_{n+1} = V_n \times I$ une structure feuilletée de co-dimension un vérifiant la propriété suivante Δ :

(Δ)$V_n \times \{0\}$ et $V_n \times \{1\}$ sont deux feuilles de la structure. Les feuilles sont transversales aux fibres $\{x\} \times I$.

D'ailleurs au prix de légères modifications on peut abandonner l'hypothèse d'après laquelle V_n est compacte.

Il est clair comment il convient de procéder pour étendre les résultats précédents à des structures feuilletées de type Δ sur $V_n \times I$ dans le cas où le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ de V_n est abélien (et admet un nombre fini de générateurs). Faisant opérer $\pi(V_n)$ sur I conformément à la construction expliquée en 1. le sous-groupe de torsion $\pi''(V_n)$ de $\pi(V_n)$ opère trivialement sur I. On est donc ramené au cas où le groupe qui opère sur I est un groupe abélien libre (ayant un nombre fini de générateurs) ; ce groupe sera désigné maintenant par G.

On définira, comme ci-dessus, Gp comme étant le sous-groupe de G laissant invariant p et on démontre le résultat suivant, par un raisonnement analogue à celui qui établit le théorème 2 :

Si toutes les feuilles sont cycliques il existe une suite de points $p_1 \ldots p_r$ tels que les sous-groupes $Gp_1, \ldots, Gp_r$ aient respectivement 1, 2, ..., r générateurs; où r est le maximum du rang des groupes Gp; de plus $Gp_1 \subset Gp_2 \subset \ldots \subset Gp_r$. Le théorème 4 (et sa démonstration) s'étendent au cas envisagé. Le théorème 5 se généralise également.

Par contre lorsque le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ n'est pas abélien, les démonstrations précédentes sont compromises. Cependant on peut étendre à cette situation quelques-uns des résultats antérieurs. Nous en donnerons des exemples au prochain paragraphe en nous bornant à quelques cas essentiels.

7. — Extension au cas où G n'est pas un groupe abélien.

On étudie ici dans $V_n \times I$ une structure feuilletée de type Δ envisagé en 6; mais on ne supposee plus que le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ de V_n soit abélien. Le groupe $\pi(V_n)$ opère sur I. On désignera par $\pi'(V_n)$ le sous-groupe invariant de $\pi(V_n)$ qui laisse fixes tous les points de I. Le groupe quotient $\pi(V_n)/(\pi'(V_n)$ sera désigné par G (cette notation diffère légèrement de la notation adoptée antérieurement). Nous remarquerons que G opère dans I et qu'il ne contient aucun élément d'ordre fini; le groupe G a un nombre fini de générateurs si $\pi(V_n)$ a un nombre fini de générateurs, donc en particulier si V_n est compacte.

Théorème 6. — *Supposons que la structure feuilletée étudiée soit de classe* C_2 *et que* $Gp = 0$ *pour tout point* p *de* I ($p \neq 0$ *et* $p \neq 1$). *Si* G *n'est pas un groupe cyclique alors toutes les feuilles (autres que* $V_n \times \{0\}$ *et* $V_n \times \{1\}$) *sont partout denses.*

Le groupe G opère sur I et les opérations de G sont de classe C_2. Pour établir le théorème 6, on reprendra pas à pas les démonstrations des paragraphes 3 et 4 en y apportant les modifications nécessitées par la non commutativité de G.

On introduira d'abord un système fini de générateurs Σ de G. (Le système Σ n'est pas nécessairement minimal.) Les éléments de Σ sont supposés rangés dans un ordre alphabétique.

Un élément σ de $\mathbf{G}$ peut se mettre sous la forme :

$$\sigma = a_1 \ldots a_n \qquad a_i \in \Sigma \quad \text{ou} \quad a_i' \in \Sigma \tag{1}$$

et cette décomposition (1) est unique si on convient de choisir parmi toutes les décompositions possibles celles pour lesquelles l'entier r est le plus petit possible et en sélectionnant parmi ces dernières la première dans l'ordre lexicographique.

La suite des éléments a_i qui figure au second membre de (1) est désignée par $\mathbf{L}(\sigma)$ tandis que l'entier n est désigné par $n(\sigma)$.

Étant donné un élément σ de $\mathbf{G}$ on pose les définitions suivantes, un peu différentes de celles qui ont été utilisées plus haut :

$$[i] = a_1 \ldots a_i \qquad [-i] = a_n'.a_{n-1}' \ldots a_{n-i+1}'$$

où $n(\sigma) = n$ et $\mathbf{L}(\sigma) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Les hypothèses du théorème 1 impliquent : toutes les feuilles $p\mathbf{G}$, $p \neq 0$ et $p \neq 1$, sont spéciales. (La démonstration est analogue à la démonstration du corollaire 2 du théorème 2).

Voici un lemme analogue au lemme 1 :

Lemme 1'. — *Soit pq un segment tel que $0 < p < q < 1$ et $pq \cap p\mathbf{G} = \{p\}$ et $pq \cap p\mathbf{G} = \{q\}$ A tout entier $\mathrm{N}(\mathrm{N} > 0)$ on peut associer un élément σ de $\mathbf{G}$ tel que $n(\sigma) = n > \mathrm{N}$ et tel que les segments $p[-i]q[n-i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ soient deux à deux disjoints.*

On considère les segments $pp\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{G}$ *et* $n(\alpha) \leqslant \mathrm{N}$), ces segments sont en nombre fini; on choisit le plus court de ces segments, soit pps ($s \in \mathbf{G}$). Comme la trajectoire de p est spéciale il existe des éléments λ de $\mathbf{G}$ tels que

$$p/p\lambda/ps.$$

On désignera par σ celui de ces éléments λ pour lequel l'entier $n(\lambda)$ est le plus petit possible. L'élément σ a les propriétés énoncées au lemme 1'. En effet $n(\sigma) > \mathrm{N}$ d'après la définition de ps. Si les segments $p[-i]q[n-i]$ n'étaient pas deux à deux disjoints il existerait $i, j (i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$ tels que

$$p[-i]/p[-j]/q[n-i]. \tag{1}$$

La relation (1) implique :

(2) $$p/p[-j][-i]'/q[n],$$

car $[n-i][i]' = [n] = \sigma$.

La relation (2) implique à son tour :

(3) $$p/p[-j][-i]'/p[n]$$

car les segments $p\alpha q\alpha$ sont distincts.

Le parallélisme avec la démonstration du lemme 1 cesse ici, en effet s'il est clair que $n([-i]'[-j]) < n$, il n'est pas du tout sûr que

(4) $$n([-j][-i]') \leqslant n.$$

En tout cas si (4) est vérifié, la relation (3) est en contradiction avec la définition de $p[n]$ et la conclusion du lemme 1′ est établie. Or (4) est vérifié si $i + j \leqslant n$.

Supposons maintenant $i + j > n$. Dans ce cas :

$$[-j][-i]' = a'_n \ldots a'_{n-j+1} a_{n-i+1} \ldots a_n = \sigma' \mu \sigma$$

où :

$$\mu = a_1 \ldots a_{n-j} a'_{n-i} \ldots a'_1.$$

Par conséquent :

(5) $$n(\mu) \leqslant n - i + n - j = 2n - (i + j) < n.$$

Or

$$p/p\sigma'\mu\sigma/p\sigma$$

implique :

(6) $$p\sigma'/p\sigma'\mu/p\sigma'\sigma$$

et (6) implique

(7) $$p/p\mu/p\sigma$$

en vertu de l'hypothèse $\mathfrak{G}t = 0$ si $0 < t < 1$.

Mais (7) est en contradiction avec la définition de $p\sigma$, ce qui achève la démonstration du lemme 1′.

La démonstration du théorème 6 s'achève en remarquant qu'elle se ramène à la démonstration du lemme fondamental énoncé au paragraphe 4. La démonstration de ce lemme fondamental, dans le cas présent est analogue à la démonstration donnée au paragraphe 4. On pourra trouver une suite

$\sigma_1 \ldots \sigma_n \ldots$ d'éléments de G, telle qu'avec des notations évidentes calquées sur les notations du paragraphe 4, on ait les propriétés suivantes :

$$\delta(\sigma_n) \to 0 \quad \text{et} \quad \delta(\sigma'_n) \to 0 \quad \text{si} \quad n \to +\infty$$

chaque σ_n vérifie les conclusions du lemme 1'.

Le théorème des accroissements finis implique les égalités :

$$\operatorname{Log} \delta_0/\delta\sigma_r = -\sum_{1}^{n_r} \operatorname{Log} D((a_k)\varepsilon[k-1]) + \operatorname{Log} \delta_0$$

$$\operatorname{Log} \delta_0/\delta\sigma'_r = -\sum_{0}^{n_r-1} \operatorname{Log} D((a'_{n-k}),\ \bar{\varepsilon}[-k]) + \operatorname{Log} \delta_0.$$

Il en résulte :

$$\operatorname{Log} \delta_0^2/\delta\sigma_r . \delta\sigma'_r = -\sum_{0}^{n_r-1} \{\operatorname{Log} D((a'_k),\ \bar{\varepsilon}[n-k]) - \operatorname{Log} D((a'_k), \varepsilon[-k])\}.$$

On déduit de cette égalité, tout comme au paragraphe 4, une contradiction qui établit le théorème 6.

8. — Exemples.

Nous indiquons ici quelques exemples illustrant les résultats précédents.

Exemple 1. — On considère dans $V_n \times I$ une structure feuilletée de type Γ définie par l'équation :

$$r(r-1)\omega + dr = 0,$$

où ω est une forme fermée du type

$$\omega = df + \sum_{i=1}^{m} a_i \omega_i \qquad m \geqslant 2,$$

où les ω_i constituent une base du groupe de cohomologie de dimension 1 de V_n à coefficients entiers et où les a_i sont des coefficients réels rationnellement indépendants. (On pourra par exemple considérer le cas où $V_n = T^2$ et où $\omega = \alpha\, d\varphi + \beta\, d\theta$ où les nombres réels α et β sont incommensensurables.)

Dans cet exemple toutes les feuilles, autres que $V_n \times \{0\}$ et $V_n \times \{1\}$ sont partout denses.

Exemple 2. — Dans $T^2 \times I$ nous considérons la structure feuilletée de type Γ définie par l'équation :

$$\omega \equiv \pi\, dr + (\sin \pi r)^2 \left[\sin(\theta + \cot \pi r)\, d\varphi - d\theta\right] = 0.$$

(On constate que ω est effectivement complètement intégrable car : $\dfrac{\omega}{(\sin \pi r)^2} \equiv -(d\mathrm{R} + d\theta) + \sin(\mathrm{R} + \theta)\, d\varphi$ où $\mathrm{R} = \cot \pi r\Big)$.

Toutes les feuilles de cette structure sont cycliques, et certaines de ces feuilles sont homéomorphes à R^2. (Il y a donc, comme on le vérifie facilement, des feuilles homéomorphes à $R \times T$). On vérifie, conformément aux remarques antérieures, que la forme ω n'est pas analytique.

Exemple 3. — On part de l'exemple classique des trajectoires exceptionnelles sur le tore T^2. Ces trajectoires admettent une représentation paramétrique globale :

$$\varphi = \Phi(\theta, \varphi_0)$$

où Φ est une fonction continue définie, par exemple, dans le carré $0 \leqslant \dfrac{\varphi}{\theta_0} \leqslant 1$ et où $\Phi(0, \varphi_0) = \varphi_0$. Les surfaces définies dans $T^2 \times I$ par l'équation paramétrique :

$$\cot \pi r = \varphi - \Phi(\theta, \varphi_0)$$

sont les feuilles d'une structure de type Γ_1 admettant des feuilles exceptionnelles.

Exemple 4. — Les développements antérieurs suggèrent la question suivante :

On donne la variété $V_n \times I$ et dans le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ de V_n un sous-groupe invariant G' contenant en particulier les éléments d'ordre fini de $\pi(V_n)$. Existe-t-il une structure feuilletée de type Γ dans $V_n \times I$ telle que $Gp = G'$ pour tout p, $0 < p < 1$?

L'exemple 1 convenablement modifié montre que la réponse à cette question est affirmative si $G = \pi(V_n)/G'$ est abélien.

Mais la réponse à cette question est beaucoup plus difficile dans le cas général. Cependant il serait utile d'avoir par exemple une structure feuilletée de type Γ sur $V_2 \times I$ (où V_2 est une surface compacte orientable, de genre $k \geqslant 2$) dont toute les feuilles, à l'exception des bords, soient homéomorphes au revètement universel R^2 de V_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. pures appl.* (9), 11, (1933), 333-375.

[2] C. L. Siegel, Note on differential equations on the torus. *Ann. of Math*, 46, 423-428.

[3] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Thèse Strasbourg* (1948). *Actualités scientifiques et industrielles*, 1183. Hermann, Paris (1952).