ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GABRIEL DEBS
JEAN SAINT RAYMOND

Ensembles boréliens d'unicité et d'unicité au sens large

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 3 (1987), p. 217-239
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_217_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 3 (1987), 217-239

ENSEMBLES BORÉLIENS D'UNICITÉ ET D'UNICITÉ AU SENS LARGE

par G. DEBS et J. SAINT RAYMOND

Récemment R. Kaufman et R. Solovay ont démontré, de manière indépendante, que la famille $\mathcal{U}$ des compacts d'unicité du tore constitue une partie co-analytique non borélienne de $\mathcal{K}(\mathbf{T})$ (l'espace de tous les compacts du tore muni de la topologie de Hausdorff). Dans son étude (non publiée) R. Solovay relevait le fait bien connu que $\mathcal{U}$ est un σ-idéal de $\mathcal{K}(\mathbf{T})$, c'est-à-dire qu'il est héréditaire à gauche pour $\subset$ et stable par réunions dénombrables compactes. Introduisant alors la notion de base d'un σ-idéal, il posait la question de savoir si $\mathcal{U}$ possède une base borélienne ; (une base d'un σ-idéal $\mathrm{I} \subset \mathcal{K}(\mathrm{E})$ est une partie $\mathrm{B} \subset \mathrm{I}$ telle que I soit le plus petit σ-idéal contenant B). En effet, une réponse négative à cette question pourrait être considérée comme une mathématisation de la constatation qu'il n'existe pas de famille simple de compacts d'unicité – par exemple définie par des critères arithmétiques précis comme les ensembles de type (H) – à partir de laquelle on puisse engendrer le σ-idéal $\mathcal{U}$. Il est à noter ici que la non-existence de base borélienne pour un σ-idéal I est un Théorème d'existence pour I puisqu'elle signifie que quel que soit la partie B de I définie par un critère borélien, on peut trouver un compact dans I qui ne puisse être recouvert par une famille dénombrable de compacts satisfaisant ce critère.

Dans [5], A. Kechris, A. Louveau et H. Woodin étudient les propriétés descriptives générales des σ-idéaux de compacts.

Ils donnent en particulier des conditions générales pour qu'un σ-idéal de compacts ne possède pas de base borélienne. Poursuivant les méthodes qu'ils ont employées, nous établissons dans la première

Mots-clés : Ensembles d'unicité – Ensembles de Helson – σ-idéaux de compacts – Boréliens et analytiques.

partie de ce travail un critère suffisant pour qu'un σ-idéal de compacts admette une unique extension en un σ-idéal de parties analytiques.

Dans la deuxième partie on applique le résultat précédent au σ-idéal $\mathcal{U}_0$ des compacts d'unicité au sens large du tore $\mathbf{T}$. Cette application repose d'une part sur un résultat récent de A. Kechris et A. Louveau assurant l'existence d'une base borélienne pour $\mathcal{U}_0$, et d'autre part sur le fait que si $M \notin \mathcal{U}_0$ l'ensemble $\{K \in \mathcal{U}_0 : K \subset M\}$ n'est pas borélien, résultat qui peut se déduire d'un travail récent de R. Kaufman. Il en découle qu'une partie analytique X de $\mathbf{T}$ est contenue dans une réunion dénombrable de compacts de $\mathcal{U}_0$ si et seulement si tout sous-compact de X est dans $\mathcal{U}_0$; on caractérise également un tel X par la propriété que toute série trigonométrique de type positif qui converge vers 0 hors de X, est identiquement nulle. Comme conséquence on obtient que si X est un ensemble analytique de $\mathbf{T}$ dont la trace sur tout compact négligeable est d'unicité, alors X est lui-même d'unicité. Une autre conséquence est que tout ensemble d'unicité qui possède la propriété de Baire est nécessairement maigre, ce qui résout un problème de Nina Bari.

Enfin dans la troisième partie on montre l'existence dans $\mathbf{T}$ d'un G_δ dont tout sous-compact est d'unicité mais qui ne peut être recouvert par une suite de compacts d'unicité. Cette construction s'appuie sur l'existence d'un compact de Helson qui est de multiplicité. Ceci nous permet, en utilisant de nouveau le résultat général de la première partie, de montrer que le σ-idéal $\mathcal{U}$ n'a pas de base borélienne. En particulier il en découle l'existence d'un compact d'unicité qui ne peut être recouvert par une suite de compacts satisfaisant le critère de Piateckii-Šapiro.

1. Extension d'un σ-idéal.

Dans toute cette section E désigne un espace compact métrisable. Dans $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E, on s'intéressera plus particulièrement aux sous-classes suivantes : la classe $\mathcal{K}(E)$ des parties compactes, la classe $\mathcal{B}(E)$ des parties boréliennes, la classe $\mathcal{A}(E)$ des parties analytiques : $\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{B}(E) \subset \mathcal{A}(E)$.

Soient Γ une sous-classe de $\mathcal{P}(E)$ et J une partie non vide de

Γ. On dira que J est un *σ-idéal* de Γ si tout élément de Γ qui est contenu dans une réunion dénombrable d'éléments de J, appartient à J. On notera que cette définition n'exige pas que Γ ou J soient stables par réunions dénombrables. Lorsque

$$\Gamma = \mathcal{K}(E), \mathcal{B}(E), \mathcal{A}(E) \ldots$$

on dira plus simplement que J est un σ-idéal de compacts, de boréliens, d'analytiques . . . .

1. *Deux extensions canoniques*

Dans ce qui suit I désigne un σ-idéal de compacts de E. Nous allons définir deux extensions de I, c'est-à-dire des classes $J \subset \mathcal{P}(E)$ telles que $J \cap \mathcal{K}(E) = I$.

– *L'extension intérieure* I_* est définie par :

$(X \in I_*) \Leftrightarrow$ (tout compact de X appartient à I)

– *L'extension extérieure* I^* est définie par :

$(X \in I^*) \Leftrightarrow$ (X est contenu dans la réunion d'une suite d'éléments de I).

Comme I est un σ-idéal, on a évidemment :

(1) $I^* \subset I_*$

(2) I_* est la plus grande extension de I qui soit héréditaire (à gauche pour $\subset$).

(3) I^* est la plus petite extension de I qui soit un σ-idéal.

En général, il n'existe pas de plus grande extension de I qui soit un σ-idéal et I_* n'est pas un σ-idéal. Mais il peut arriver que pour une classe convenable Γ (contenant strictement $\mathcal{K}(E)$) on ait que $I_* \cap \Gamma$ est un σ-idéal de Γ, ou encore mieux encore, que $I_* \cap \Gamma = I^* \cap \Gamma$. Le but de cette section est de montrer que sous certaines hypothèses de nature descriptive sur I, on a que $I_* \cap \mathcal{A}(E) = I^* \cap \mathcal{A}(E)$ dès que $I_* \cap G_\delta(E)$ est un σ-idéal dans les G_δ.

Pour fixer les idées nous donnons d'abord quelques exemples.

2. *Exemples*

(a) I = {compacts rares de E}

$I_* = \{$parties d'intérieur vide dans $E\}$

$I^* = \{$parties maigres dans $E\}$.

Si E est un parfait alors $I_* \cap G_\delta(E)$ n'est pas un σ-idéal (il suffit d'écrire $E = \bigcup_n \{x_n\} \cup (E \setminus D)$ pour un ensemble dénombrable $D = \{x_n\ ; n \in \omega\}$ dense dans E).

(b) $I = \{$compacts négligeables pour une mesure sur $E\}$

$I_* = \{$parties intérieurement négligeables$\}$

$I^* = \{$parties contenues dans un K_σ négligeable$\}$.

Ici $I_* \cap \mathcal{A}(E)$ est un σ-idéal de $\mathcal{A}(E)$, mais si la mesure est diffuse $I \cap G_\delta(E) \neq I^* \cap G_\delta(E)$ (il suffit de considérer un G_δ de mesure nulle qui soit dense dans le support de la mesure).

(c) $I = \{$compacts dénombrables de $E\}$

$I_* = \{$parties ne contenant pas de parfait$\}$

$I^* = \{$parties dénombrables$\}$.

Dans cet exemple on a $I_* \cap \mathcal{A}(E) = I^* \cap \mathcal{A}(E)$ puisque tout analytique non dénombrable contient un parfait.

3. DEFINITION. – *Un σ-idéal I de compacts sera dit calibré si pour tout compact L n'appartenant pas à I et pour toute suite (K_n) d'éléments de I, il existe un compact L' n'appartenant pas à I et contenu dans $L \setminus \bigcup_n K_n$.*

Le σ-idéal I n'est pas calibré dans l'exemple (a); il est calibré dans les exemples (b) et (c).

4. PROPOSITION. – *Pour un σ-idéal de compacts I, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) I *est calibré*

(ii) $I_* \cap G_\delta(E)$ *est un σ-idéal de* G_δ

(iii) $I_* \cap G_{\delta\sigma}(E)$ *est un σ-idéal de* $G_{\delta\sigma}$.

Démonstration. – Les implications (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) sont immédiates.

Pour (i) $\Longrightarrow$ (iii) il suffit de montrer que si (A_n) est une suite de $I_* \cap G_\delta$ alors le $G_{\delta\sigma}$ réunion $A = \bigcup_n A_n$ appartient à I_*. Supposons le contraire, il existe alors dans A un compact $L \notin I$. On en déduit qu'il existe une suite décroissante (L_n) de compacts n'appartenant pas à I avec $L_0 = L$ et $L_{n+1} \cap A_n = \phi$. En effet si L_n est construit alors $L_n \setminus A_n$ est réunion d'une suite de compacts, qui ne peuvent être tous dans I si I est calibré ; donc $L_n \setminus A_n$ contient bien un compact $L_{n+1} \notin I$. Comme $\phi \in I$, tous les L_n sont non vides et par suite $\bigcap_n L_n$ est une partie non vide de $L \setminus \bigcup_n A_n$, ce qui est impossible.

□

Rappelons que l'espace $\mathcal{K}(E)$ est muni d'une topologie compacte métrisable, qui peut être définie à partir de la distance de Hausdorff. Dans les définitions suivantes toutes les notions topologiques dans $\mathcal{K}(E)$ sont relatives à cette topologie.

5. DEFINITION. – *Soit* I *un* σ*-idéal de compacts de* E.

(a) *On dira que* I *est dur si* I *n'est nas un borélien de* $\mathcal{K}(E)$

(b) *On dira que* I *est complètement dur si pour tout* $K \notin I$, *le* σ*-idéal* $I(K) = I \cap \mathcal{K}(K)$ *est dur.*

On notera que pour $K \in I$ le σ-idéal $I(K)$ est compact (puisque $I(K) = \mathcal{K}(K)$) et par conséquent la condition (b) est le maximum de "dureté" qu'on puisse exiger de I.

Rappelons aussi les propriétés descriptives fondamentales sur les σ-idéaux de compacts. Ces résultats sont dûs à Louveau-Kechris-Woodin et établis dans ([5]) auquel nous renvoyons pour plus de détails. D'abord un σ-idéal de compacts qui est borélien ou même analytique est en fait nécessairement G_δ. En particulier un σ-idéal dur I ne peut être mieux que co-analytique. Une classe particulière de σ-idéaux co-analytiques est constituée par ceux à *base borélienne*, c'est-à-dire les σ-idéaux I contenant une partie B qui est borélienne et qui engendre I (ou autrement dit, telle que tout élément de I soit contenu dans la réunion d'une suite d'éléments de B). Si I est à base borélienne on montre alors que I contient en fait une base borélienne qui est de plus héréditaire. Enfin signalons que dans les exemples (a) et (b) le σ-idéal I est G_δ ; par contre le σ-idéal des compacts dénombrables qui est à base compacte (constituée par les singletons de E) est, d'après un résultat classique de Hurewicz, complètement dur.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le Théorème principal de cette section. Notons qu'un cas particulier de ce Théorème peut être obtenu par une application convenable d'un résultat de Louveau-Kechris-Woodin ([5] Lemme 7) et il est possible de montrer que le cas général peut être obtenu par réduction à ce cas particulier. Nous en donnerons cependant une preuve directe qui sans être plus longue que la voie décrite précédemment, nous paraît préférable pour la clarté de l'exposé.

6. THEOREME. – *Soit* I *un* σ*-idéal de compacts de* E *vérifiant* :

a) I *est calibré*

b) I *est complètement dur*

c) I *a une base borélienne.*

Alors $I_* \cap \mathfrak{A}(E) = I^* \cap \mathfrak{A}(E)$.

Démonstration. – On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une partie analytique X de E appartenant à $I_* \setminus I^*$.

Soit alors P un espace polonais et $\varphi : P \longrightarrow X$ une surjection continue. Considérons dans P l'ensemble Ω des points qui possèdent un voisinage V tel que $\varphi(V) \in I^*$; alors Ω est ouvert et $\varphi(\Omega) \in I^*$, en particulier $P_0 = P \setminus \Omega \neq \phi$ puisque $X = \varphi(P) \notin I^*$. De plus pour tout ouvert V non vide de P_0 on a $\overline{\varphi(V)} \notin I$; car sinon $V \cup \Omega$ serait un ouvert strictement plus grand que Ω et à image dans I^*.

Fixons une base borélienne héréditaire B de I, et des distances $\leqslant 1$ sur P_0 et E. On construit pour tout $s \in S$ ensemble des suites finies d'entiers, des compacts K_s et L_s de E et un ouvert non vide V_s de P_0 vérifiant :

(i) $K_s \subset L_s = \overline{\varphi(V_s)}$ et $K_s \in I \setminus B$

(ii) $\operatorname{diam}(L_s) \leqslant 2^{-(n_0+n_1+\ldots+n_{k-1}+k)}$ si $s = \langle n_0, \ldots, n_{k-1} \rangle$

(iii) les $(L_{s\frown n})_{n \in \omega}$ sont deux à deux disjoints et disjoints de K_s et $\overline{K_s \subset \bigcup_n L_{s\frown n}}$.

(iv) $\operatorname{diam}(V_s) \leqslant \dfrac{1}{|s|}$ et $\overline{V_{s\frown n}} \subset V_s$.

Pour $s = \phi$, $V_\phi = P_0$ convient. Supposons déterminé V_s tel que $L_s = \overline{\varphi(V_s)}$ vérifie (ii). Alors $L_s \notin I$ et d'après (b), $I(L_s)$ n'est pas borélien donc $I(L_s) \neq B \cap \mathcal{K}(L_s)$ et on peut trouver $K_s \in I(L_s) \setminus B$. Puisqu'aucun ouvert non vide de L_s n'est contenu dans un élément de I, l'intérieur de K_s dans L_s est vide et on peut alors trouver une suite (x_n) dans $\varphi(V_s) \setminus K_s$, dont la distance à K_s tend vers 0 et tel que $K_s \subset \overline{\{x_n ; n \in \omega\}}$. Si $x_n = \varphi(\alpha_n)$ avec $\alpha_n \in V_s$, on peut alors trouver des voisinages ouverts $V_{s\frown n}$ des α_n satisfaisant (iv) et de sorte que les $L_{s\frown n} = \overline{\varphi(V_{s\frown n})}$ vérifient (ii) et (iii). Ceci achève la construction.

Considérons alors le compact $K = \overline{\bigcup_{s \in S} K_s}$. Si W est un ouvert relatif non vide de K alors il découle de (ii) et (iii) qu'il contient un des K_s, et par suite B étant héréditaire on a que $\overline{W} \notin B$. Il découle alors du Théorème de Baire que si K est recouvert par une suite (L_n) de compacts, l'un des $L_n \notin B$; c'est-à-dire puisque B est une base pour I que $K \notin I$. Donc comme I est calibré et les $K_s \in I$, on peut trouver un compact $M \subset K \setminus \bigcup_{s \in S} K_s$ tel que $M \notin I$.

Or il découle de (ii) et (iii) que pour tout k,

$$F_k = \bigcup_{|s| < k} K_s \cup \bigcup_{|s| = k} L_s$$

est compact ; et comme il contient $\bigcup_{s \in S} K_s$, il contient K. Il s'en suit alors que $M \subset (K \setminus \bigcup_{s \in S} K_s) \subset \bigcap_k \bigcup_{|s| = k} L_s$. Par suite pour tout $x \in M$, on peut trouver une suite infinie d'entiers σ – qui est unique car les $(L_s)_{|s| = k}$ sont deux à deux disjoints – telle que $x \in L_{\sigma | k}$ pour tout k ; et il découle alors de (iv) qu'il existe $\alpha \in P_0$ tel que $\varphi(\alpha) = x$, ce qui montre que $M \subset X$, contredisant l'hypothèse que $X \in I_*$.

□

7. Corollaire. – *Sous les hypothèses du Théorème précédent le σ-idéal* I *admet une unique extension en un σ-idéal de parties analytiques de* E.

On notera que les hypothèses (b) et (c) du Théorème 6 ont servi uniquement à assurer l'existence d'une base héréditaire B de I telle que $I(K) \setminus B$ soit non vide pour tout $K \notin I$.

2. Application au σ-idéal $\mathcal{U}_0$.

Dans cette section l'espace de base E sera le tore $\mathbf{T}$ et on s'intéressera au σ-idéal $\mathcal{U}_0$ des compacts d'unicité au sens large, qui est constitué par tous les compacts de $\mathbf{T}$ ne portant pas de mesure de Rajchman non nulle, c'est-à-dire de mesure non nulle dont les coefficients de Fourier tendent vers 0 à l'infini. En fait, on montre qu'un compact de $\mathcal{U}_0$ est nécessairement négligeable pour toute mesure de Rajchman. Pour toutes ces notions nous renvoyons à ([3]).

Dans cette section nous utiliserons les deux résultats suivants établis dans [4] et [6] :

THEOREME (Kaufman). – $\mathcal{U}_0$ *est complètement dur.*

THEOREME (Kechris-Louveau). – $\mathcal{U}_0$ *a une base borélienne.*

En fait le premier résultat est une conséquence de [4] où R. Kaufman démontre – sous une forme légèrement différente – que pour tout $M \notin \mathcal{U}_0$ il existe une application $\Phi : 2^\omega \longrightarrow \mathcal{K}(M)$ semi-continue supérieurement (s.c.s.) telle que :

$$\begin{cases} \text{(i) si } \alpha \in Q \text{ alors } \Phi(\alpha) \in \mathcal{U}_0 \\ \text{(ii) si } \alpha \notin Q \text{ alors } \Phi(\alpha) \notin \mathcal{U}_0 \end{cases}$$

où $Q = \{\alpha \in 2^\omega : \exists\, n , \forall\, k \geqslant n , \alpha(k) = 0\}$.

Si on prolonge Φ à $\mathcal{K}(2^\omega)$ en posant $\widetilde{\Phi}(A) = \bigcup_{\alpha \in A} \Phi(\alpha)$ pour tout $A \in \mathcal{K}(2^\omega)$ on obtient une application

$$\widetilde{\Phi} : \mathcal{K}(2^\omega) \longrightarrow \mathcal{K}(M)$$

qui est s.c.s. donc borélienne et vérifiant $\widetilde{\Phi}^{-1}(\mathcal{U}_0(M)) = \mathcal{K}(Q)$. Or par un résultat classique de Hurewicz $\mathcal{K}(Q)$ est une partie non borélienne de $\mathcal{K}(2^\omega)$ et par suite $\mathcal{U}_0(M)$ n'est pas borélien, si $M \notin \mathcal{U}_0$.

Nous donnons maintenant un critère d'appartenance à $\mathcal{U}_0$, qui permettra de faire une analyse de $\mathcal{U}_0$ analogue à celle de Piateckii-Šapiro pour $\mathcal{U}$.

Cette analyse fournit en particulier une base borélienne naturelle de $\mathcal{U}_0$, ce qui donne une nouvelle démonstration du Théorème de Louveau-Kechris cité plus haut.

On désigne dans la suite par $A(\mathbf{T})$ l'algèbre du tore, par $A_*(\mathbf{T})$ l'espace des pseudo-fonctions sur $\mathbf{T}$ et par $A^*(\mathbf{T})$ l'espace des pseudo-mesures sur $\mathbf{T}$. On rappelle que $A(\mathbf{T})$ est le dual de $A_*(\mathbf{T})$ et que $A^*(\mathbf{T})$ est le dual de $A(\mathbf{T})$. De manière générale si E' est un espace dual on distinguera les concepts *préfaibles* relatifs à la topologie $\sigma(E', E)$, des concepts *faibles* relatifs à la topologie $\sigma(E', E'')$: c'est ainsi qu'on parlera de convergence, d'adhérence ... faible ou préfaible. On note enfin $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 sur $\mathbf{T}$.

8. PROPOSITION. – *Un compact* K *appartient à* $\mathcal{U}_0$ *si et seulement si* $\mathbf{1}$ *est préfaiblement adhérent au cône*

$$\Gamma(K) = \{f \in A(\mathbf{T}) : f(\mathbf{T}) \subset \mathbf{R} \quad et \quad K \subset \{f < 0\}\}.$$

Démonstration. – Si $\mathbf{1} \in \overline{\Gamma(K)}$ (adhérence préfaible) et μ mesure de Rajchman portée par K alors il en est de même pour $|\mu|$, c'est-à-dire $|\mu| \in A_*(\mathbf{T})$ et on peut trouver une suite $(f_n) \subset \Gamma(K)$ telle que

$$\langle |\mu|, \mathbf{1}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle |\mu|, f_n\rangle \leqslant 0.$$

Donc $\mu = 0$ et $K \in \mathcal{U}_0$.

Si $\mathbf{1} \notin \overline{\Gamma(K)}$ alors, il existe une pseudo-fonction φ telle que :

$$\langle \varphi, \mathbf{1}\rangle > 0$$

et

$$\langle \varphi, f\rangle \leqslant 0, \forall f \in \Gamma(K)$$

ce qui montre que φ est une mesure positive (de Rajchman puisque $\varphi \in A_*(\mathbf{T})$) portée par K, et par suite que $K \notin \mathcal{U}_0$.

□

Pour tout compact K de $\mathbf{T}$ posons : $\Gamma_0(K) = \Gamma(K)$ et pour tout ordinal dénombrable $\xi \geqslant 1$:

$\Gamma_\xi(K) = \{f \in A(\mathbf{T}) : f$ est limite préfaible d'une suite $(f_n) \subset \bigcup_{\eta<\xi} \Gamma_\eta(K)\}$. Comme $A_*(\mathbf{T})$ – et même $A(\mathbf{T})$ – est séparable, il découle du Théorème de Banach-Dieudonné qu'il existe un ordinal dénombrable ξ_0 tel que $\Gamma_{\xi_0}(K) = \Gamma_{\xi_0+1}(K) = \overline{\Gamma(K)}$ adhérence préfaible de $\Gamma(K)$.

Donc :

$$K \in \mathcal{U}_0 \Leftrightarrow \exists\, \xi < \omega_1 : \mathbf{1} \in \Gamma_\xi(K).$$

On définit alors pour tout $\xi < \omega_1$:

$$\mathcal{U}_0^{(\xi)} = \{K \in \mathcal{K}(\mathbf{T}) : \mathbf{1} \in \Gamma_\xi(K)\}$$

de sorte que :

$$\mathcal{U}_0 = \bigcup_{\xi < \omega_1} \mathcal{U}_0^{(\xi)}.$$

Pour $\xi = 0$ on a évidemment $\mathcal{U}_0^{(0)} = \{\emptyset\}$; on notera dans la suite $\mathcal{U}'_0 = \mathcal{U}_0^{(1)}$.

9. THEOREME. – *$\mathcal{U}'_0$ est une base borélienne de $\mathcal{U}_0$.*

Démonstration. – Remarquons que :

$$K \in \mathcal{U}'_0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \exists\, p\,,\ \forall q\,,\ \exists f \in A(\mathbf{T})\,,\ K \subset \{f < 0\}\,, \\ f(\mathbf{T}) \subset \mathbf{R}\ ,\ \|f\| \leqslant p\,, \\ \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \left(|k| \leqslant q \Longrightarrow |\hat{f}(k) - \hat{\mathbf{1}}(k)| < \frac{1}{q}\right) \end{array}\right)$$

ce qui montre que $\mathcal{U}'_0$ est une partie $G_{\delta\sigma}$ de $\mathcal{K}(\mathbf{T})$. Le Théorème découle alors du Lemme suivant, où on pose $\Gamma_\xi = \Gamma_\xi(K)$ pour un compact $K \in \mathcal{U}_0$.

10. LEMME. – *Si $f \in \Gamma_\xi$ alors tout compact $L \subset K \cap \{f > 0\}$ est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}'_0$.*

Démonstration. – Nous démontrons le lemme par récurrence sur l'ordinal dénombrable ξ. Pour $\xi = 0$ seul $L = \phi$ satisfait les hypothèses et $\phi \in \mathcal{U}'_0$.

Supposons la propriété vraie pour tout $\eta < \xi$ et soit $f \in \Gamma_\xi$. Fixons une suite $(f_n) \subset \bigcup_{\eta < \xi} \Gamma_\eta$ qui converge préfaiblement vers f et pour tout compact $L \subset K \cap \{f > 0\}$ posons :

$$L_{n,p} = \left\{x \in L : f_n(x) \geqslant \frac{1}{p}\right\}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, chaque $L_{n,p}$ est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}'_0$; il reste alors à montrer qu'il en est de même pour :

$$L' = L \setminus \bigcup_{n,p} L_{n,p} = \{x \in L : f_n(x) \leqslant 0 \quad \forall n\}.$$

Nous allons montrer en fait que $L' \in \mathfrak{U}'_0$. Remarquons d'abord que l'idéal de $A(\mathbf{T})$ engendré par f et

$$J = \{g \in A(\mathbf{T}) : g = 0 \quad \text{sur} \quad L'\}$$

n'est contenu dans aucun idéal maximal puisque $L' \cap \{f = 0\} = \phi$; on peut donc trouver $u \in A(\mathbf{T})$ et $g \in J$ tels que $\mathbf{1} = uf + g$. Comme $L' \subset \{g = 0\} \cap \{f > 0\}$ la fonction u est > 0 sur L' et si on définit :

$$f'_n = uf_n + g - \frac{1}{n}$$

alors f'_n est < 0 sur L' pour tout $n > 0$ et la suite (f'_n) converge préfaiblement vers $\mathbf{1}$; et par suite $L' \in \mathfrak{U}'_0$, ce qui termine la démonstration du lemme.

□

Nous allons maintenant définir une nouvelle extension de $\mathfrak{U}_0$ à $\mathfrak{P}(\mathbf{T})$.

On dira qu'un ensemble X *de* $\mathbf{T}$ *est d'unicité au sens large si toute série trigonométrique de type positif qui converge vers* 0 *hors de* X *est identiquement nulle.*

Compte tenu du Théorème de Bochner – Weil une série trigonométrique de type positif qui converge sur un ensemble non négligeable définit une pseudo-fonction qui est une mesure positive, c'est-à-dire une mesure de Rajchman positive. En particulier l'ensemble des compacts satisfaisant la définition précédente est exactement $\mathfrak{U}_0$.

11. THEOREME. – *Pour un ensemble analytique* X *de* $\mathbf{T}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est d'unicité au sens large*

(ii) X *est négligeable pour toute mesure de Rajchman*

(iii) *tout compact de* X *appartient à* $\mathfrak{U}_0$

(iv) X *est contenu dans la réunion d'une suite de compacts appartenant à* $\mathfrak{U}_0$.

Démonstration. – Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (iii) pour tout X et que (iii) et (ii) sont équivalents pour tout X universellement mesurable. Il est clair que $\mathfrak{U}_0$ est calibré, donc d'après les Théorèmes précités de Kaufman et Louveau-Kechris les hypothèses du théorème 6 sont satisfaites pour $\mathfrak{U}_0$, et par suite (iii) $\Longrightarrow$ (iv).

Enfin pour (iv) $\Longrightarrow$ (i) il suffit de montrer que la réunion de toute suite de compacts de $\mathfrak{U}_0$ est aussi un ensemble d'unicité au sens large, c'est-à-dire l'analogue pour les ensembles d'unicité au sens large d'un Théorème bien connu de Nina Bari pour les ensembles d'unicité. Comme le produit une mesure de Rajchman positive par une fonction positive de $C^2(\mathbf{T})$ définit encore une mesure de Rajchman positive, une démonstration du résultat – pour laquelle nous ne donnerons pas de détails – peut être obtenue en suivant pas à pas celle du Théorème de Bari (voir par exemple [1] p. 358).

□

Comme nous le verrons dans la section suivante la situation n'est pas aussi simple quand on considère le σ-idéal $\mathfrak{U}$. Cependant le Théorème précédent donne également des informations sur les ensembles d'unicité et nous donnons ci-après deux applications.

12. Theoreme. – *Pour qu'un ensemble analytique* X *de* $\mathbf{T}$ *soit d'unicité il faut et il suffit que* $X \cap K$ *soit d'unicité pour tout compact négligeable* K.

Démonstration. – La condition est évidemment nécessaire. Supposons inversement que $X \cap K$ soit d'unicité pour tout compact négligeable K.

Nous montrons d'abord que X est d'unicité au sens large. En effet sinon on peut trouver dans X un compact $K \notin \mathfrak{U}_0$. Il est bien connu alors que K porte une mesure de Rajchman étrangère à la mesure de Lebesgue (on notera que ceci découle aussi du fait que $\mathfrak{U}_0(K)$, n'étant pas borélien, est strictement contenu dans le G_δ des compacts négligeables) : et ceci contredit l'hypothèse.

Donc X est d'unicité au sens large et d'après le Théorème précédent on peut trouver une suite $(K_n) \subset \mathfrak{U}_0$ telle que $X \subset \bigcup_n K_n$.

Comme les K_n sont alors nécessairement négligeables il découle de l'hypothèse que les $X_n = X \cap K_n$ sont tous d'unicité. Ainsi X est réunion d'une suite (X_n) de fermés relatifs qui sont des ensembles d'unicité ; une adaptation du Théorème de Bari à ce cadre (voir [2]) permet alors de conclure que X est d'unicité.

□

Enfin comme les éléments de $\mathcal{U}_0$ sont rares dans $\mathbf{T}$ il découle du Théorème 11 qu'un ensemble analytique qui est d'unicité au sens large est nécessairement maigre dans $\mathbf{T}$ (et en fait maigre dans le support de toute mesure de Rajchman).

En particulier on a :

13. THEOREME. – *Tout ensemble analytique de* $\mathbf{T}$ *qui est d'unicité est maigre dans* $\mathbf{T}$.

Ce dernier résultat fournit une réponse à un problème posé par Bari ([1] p. 359).

3. Application au σ-idéal $\mathcal{U}$.

Nous allons maintenant appliquer les résultats de la section 1 au σ-idéal $\mathcal{U}$ des compacts d'unicité du tore, c'est-à-dire des compacts ne portant aucune pseudo-fonction non nulle. Comme nous l'avons déjà annoncé la situation est très différente et bien plus compliquée que pour $\mathcal{U}_0$. En fait nous utiliserons le Théorème 6 pour montrer que l'une des hypothèses – l'existence d'une base borélienne – n'est pas vraie pour $\mathcal{U}$.

14. THEOREME. – $\mathcal{U}$ *est calibré.*

Démonstration. – Soient $L \notin \mathcal{U}$ et (K_n) une suite dans $\mathcal{U}$. Fixons sur L une pseudo-fonction φ non nulle. On construit alors par récurrence sur n une suite (φ_n) de pseudo-fonctions vérifiant :

(i) $\varphi_0 = \varphi$

(ii) $\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| < 2^{-n-2}\,\|\varphi\|$

(iii) $(\operatorname{supp}\varphi_{n+1}) \subset (\operatorname{supp}\varphi_n)\setminus \bigcup_{m=0}^{n} K_m$.

Si φ_n est construit on considère le compact $K = \bigcup_{m=0}^{n} K_m$ et le sous-espace vectoriel V de $A_*(\mathbf{T})$ définit par :

$$V = \{h\,\varphi_n : h \in A(\mathbf{T}) \quad \text{et} \quad h = 0 \quad \text{au voisinage de} \quad K\}\ .$$

Alors $\varphi_n \in \overline{V}$, car sinon on peut trouver $f \in A(\mathbf{T})$ tel que $\langle \varphi_n , f \rangle \neq 0$ et $\langle \psi , f \rangle = 0$ pour tout $\psi \in V$. Mais alors pour tout $h \in A(\mathbf{T})$ avec $h = 0$ au voisinage de K on aurait :

$$\langle h\,\varphi_n , f \rangle = \langle f\,\varphi_n , h \rangle = 0$$

c'est-à-dire que $f\varphi_n$ serait une pseudo-fonction non nulle portée par K ce qui est impossible puisque $K \in \mathcal{U}$. Donc $\varphi_n \in \overline{V}$ et on peut trouver $\varphi_{n+1} \in V$ donc vérifiant (iii), tel que

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| < 2^{-n-2}\|\varphi\|\ ;$$

ce qui termine la construction.

D'après (ii) la suite (φ_n) converge en norme vers une pseudo-fonction ψ. Et comme le support des φ_n décroît on a d'après (iii) :

$$L' = \operatorname{supp} \psi \subset \bigcap_n \operatorname{supp} \varphi_n \subset L \setminus \bigcup_n K_n$$

et d'après (i) et (ii) on a :

$$\|\psi\| \geqslant \|\varphi\| - \sum_0^\infty \|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|$$

ce qui montre que $\varphi \neq 0$ et par suite que $L' \notin \mathcal{U}$.

□

15. Theoreme. – *$\mathcal{U}$ est complètement dur.*

La démonstration de ce Théorème se fera par une variante de la méthode de R. Kaufman dans ([4]), et nécessite quelques résultats préliminaires.

16. Lemme. – *Soit $h \in A(\mathbf{T})$, $h \geqslant 0$ sur $\mathbf{T}$ et $\hat{h}(0) = 1$, et pour tout entier n soit h_n défini par $h_n(x) = h(nx)$.*

Alors pour toute pseudo-fonction φ on a :

(a) $\varphi = \lim\limits_{n \to \infty} h_n \varphi$ *faiblement*

(b) $\|\varphi\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|h_n \varphi\|$.

Démonstration. – (a) Posons $\varphi_n = h_n \varphi$; alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$ on a :

$$\hat{\varphi}_n(k) = \sum_{p \in \mathbf{Z}} \hat{h}(p) \hat{\varphi}(k - np) = \hat{\varphi}(k) + \sum_{p \neq 0} \hat{h}(p) \hat{\varphi}(k - np).$$

Or pour $p \neq 0$ on a pour tout $k \in \mathbf{Z}$:

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\varphi}(k - np) = 0 \quad \text{et} \quad |\hat{\varphi}(k - np)| \leqslant \|\varphi\|.$$

Il s'en suit que $\|\varphi_n\| \leqslant \|h\| \cdot \|\varphi\|$ et que $\lim\limits_{n \to \infty} \hat{\varphi}_n(k) = \hat{\varphi}(k)$ ce qui prouve (a).

(b) Soit $\epsilon > 0$ et fixons un entier m tel que :

$$|\hat{\varphi}(k)| < \epsilon \quad \text{pour} \quad |k| \geqslant m.$$

Si $n > 2m$ alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$ il existe au plus un entier p_k tel que $|k - np_k| < m$, et par suite :

$$|\hat{\varphi}_n(k)| \leqslant |\hat{h}(p_k)| \cdot |\hat{\varphi}(k - np_k)| + \sum_{p \neq p_k} |\hat{h}(p)| |\hat{\varphi}(k - np)|$$

$$\leqslant |\hat{h}(p_k)| \|\varphi\| + \epsilon \|h\|$$

et puisque $h \geqslant 0$ on a $|\hat{h}(p)| \leqslant \hat{h}(0) = 1$.

Donc :

$$|\hat{\varphi}_n(k)| \leqslant \|\varphi\| + \epsilon \|h\| \quad \forall n > 2m$$

ce qui prouve que $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi\|$. D'autre part la norme étant une fonction faiblement s.c.i., il découle de (a) que $\|\varphi\| \leqslant \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \|\varphi_n\|$ ce qui prouve (b).

□

La définition suivante sera commode pour la suite :

17. DEFINITION. – *Soient φ et ψ deux pseudo-mesures.*

(a) *On dira que* ψ *est compatible avec* φ *si* ψ *est préfaiblement adhérente à*

$$\{h\varphi\,;h \in A(\mathbf{T})\,,h \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \mathbf{T}\}$$

(b) *On dira que* ψ *est* ρ*-compatible avec* φ *si elle est compatible et vérifie de plus* $\|\psi - \varphi\| < \rho$.

18. LEMME. — *Soit* Y *un compact de* **T** *et* φ *une pseudo-fonction portée par* Y.

Pour tout $\rho > 0$ *il existe un compact d'unicité* X *contenu dans* Y *et portant une pseudo-mesure* ρ*-compatible avec* φ.

Démonstration. — Fixons $h \in A(\mathbf{T})$ vérifiant : $\hat{h}(0) = 1\,, h \geqslant 0$ sur $\mathbf{T}\,, h = 0$ sur $\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$, et pour tout entier n, posons $h_n(x) = h(nx)$; et fixons un entier N tel que $\frac{1}{N}(3 + 2\,\|\varphi\|) < \rho$.

On construit alors une suite (φ_j) de pseudo-fonctions et deux suites strictement croissantes d'entiers (k_j) et (m_j) vérifiant :

(i) $\varphi_n = \varphi \quad \forall\, n < N$

$\varphi_{j+N} = h_{m_j}\,\varphi_j$

(ii) $\|\varphi_{j+N}\| < \|\varphi_j\| + 2^{-j-1}$

(iii) $|\hat{\varphi}_{j+N}(k) - \hat{\varphi}_j(k)| < 2^{-j-1} \quad$ si $\quad |k| \notin\,]k_{j-1}\,, k_j[$.

Supposons φ_j et k_{j-1} déterminés ; alors d'après le lemme précédent on peut trouver un entier $m = m_{j+1} > m_j$ tel que pour $\varphi_{j+1} = h_m\,\varphi_j$ on ait :

$$\|\varphi_{j+1}\| < \|\varphi_j\| + 2^{-j-1}$$

et

$$|\hat{\varphi}_{j+1}(k) - \hat{\varphi}_j(k)| < 2^{-j-1} \quad \text{si} \quad |k| \leqslant k_{j-1}$$

et puisque φ_{j+1} et φ_j sont des pseudo-fonctions, on peut trouver un entier $k_j > k_{j-1}$ tel que :

$$|\hat{\varphi}_{j+1}(k) - \hat{\varphi}_j(k)| < 2^{-j-1} \quad \text{si} \quad |k| \geqslant k_j$$

ce qui termine la construction.

Il découle de (i) et (ii) que $\|\varphi_j\| \leqslant \|\varphi\| + 1$ et la suite (φ_j) est donc bornée. De plus il découle de (iii) que pour tout $n < \mathrm{N}$, la limite $\lim\limits_{p \to \infty} \hat{\varphi}_{n+p\mathrm{N}}(k)$ existe pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Par conséquent pour tout $n < \mathrm{N}$, la suite $(\varphi_{n+p\mathrm{N}})_{p \geqslant 0}$ converge préfaiblement vers une pseudo-mesure θ_n. Comme les θ_n sont par construction compatibles avec φ, il en est de même pour

$\theta = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}=1} \theta_n$. De plus pour tout $k \in \mathbf{Z}$ on a :

$$|\hat{\varphi}(k) - \hat{\theta}(k)| = |\hat{\varphi}(k) - \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{0}^{\mathrm{N}=1} \hat{\theta}_n(k)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{j=0}^{\infty}{}' |\hat{\varphi}_j(k) - \hat{\varphi}_{j+\mathrm{N}}(k)|$$

et dans cette somme seul le terme vérifiant $k_{j-1} \leqslant |k| < k_j$ n'est pas majoré par 2^{-j-1}, mais par $2(\|\varphi\| + 1)$.

D'où d'après le choix de N on obtient :

$$|\hat{\varphi}(k) - \hat{\theta}(k)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} + 2\|\varphi\| + 2 \Big) < \rho$$

ce qui montre que θ est ρ-compatible avec φ.

Enfin pour $\mathrm{X}_n = \operatorname{supp} \theta_n$ on a que

$$\Big(\bigcup_p m_{n+p\mathrm{N}} \mathrm{X}_n \Big) \cap \,]0, \tfrac{1}{2}[\, = \phi ;$$

donc X_n est de type (H) et par suite $\mathrm{X} = \bigcup\limits_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{X}_n$ est un compact d'unicité contenu dans Y et portant θ.

□

19. LEMME. — *Soient* Y *un compact de* $\mathbf{T}$, φ *une pseudo-fonction portée par* Y, *et* X *un fermé de* Y *portant une pseudo-mesure* ψ *qui est* ρ*-compatible avec* φ.

Alors pour tout voisinage W *ouvert de* X *dans* $\mathbf{T}$, *il existe une pseudo-fonction* φ' *portée par* $\overline{\mathrm{W}}$ *et telle que* ψ *soit* ρ*-compatible avec* φ'.

Démonstration. – Considérons dans $A_*(\mathbf{T})$:

$$B = \{\theta \in A_*(\mathbf{T}) : \|\theta - \psi\| < \rho\}$$

et

$$C = \{\theta = h\varphi ;\ h \in A(\mathbf{T}),\ h \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \mathbf{T},\ W = \{h > 0\}\}.$$

Ce sont deux convexes non vides (B contient φ) et de plus B est ouvert. Nous montrons d'abord que $B \cap C \neq \phi$. En effet sinon il existerait $f \in A(\mathbf{T})$ tel que $\sup_B f \leqslant \inf_C f$.

Fixons ρ' telle que $\|\varphi - \psi\| < \rho' < \rho$ et posons

$$B' = \{\theta \in A_*(\mathbf{T}) : \|\theta - \psi\| < \rho'\}.$$

On a alors :

$$\sup_B f > \sup_{B'} f + (\rho - \rho')\|f\|.$$

Comme $\varphi \in A_*$, on a que $\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\psi}(n)| < \rho'$, c'est-à-dire :

$$\exists p_0 > 0 \ ,\ \forall |n| \geqslant p_0 \ ,\ |\hat{\psi}(n)| < \rho'' < \rho'.$$

Considérons alors pour tout p la pseudo-fonction θ_p définie par :

$$\hat{\theta}_p(n) = \begin{cases} \hat{\psi}(n) & \text{si} \quad |n| \leqslant p \\ 0 & \text{si} \quad |n| > p \end{cases}.$$

Il est clair que $\theta_p \in B$, et que ψ est la limite préfaible de la suite (θ_p) ; donc :

$$\sup_B f \geqslant \langle \psi, f\rangle + (\rho - \rho')\|f\| > \langle \psi, f\rangle.$$

D'autre part soit $g \in A(\mathbf{T}), g = 0$ sur $\mathbf{T}\backslash W, g > 0$ sur W, et $g = 1$ au voisinage de X ; alors puisque ψ est compatible avec φ on peut trouver une suite $(h_n) \subset A(\mathbf{T}), h_n \geqslant 0$ sur $\mathbf{T}$ telle que : $\lim_{n\to\infty} \langle h_n\varphi, gf\rangle = \langle \psi, gf\rangle$; et comme $g = 1$ au voisinage de $X \supset \operatorname{supp} \psi$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \langle g h_n \varphi + \frac{1}{n} g\varphi, f\rangle = \langle g\psi, f\rangle = \langle \psi, f\rangle.$$

Or $g\left(h_n + \frac{1}{n}\mathbf{1}\right)\varphi \in \mathrm{C}$ pour tout n et par suite :

$$\operatorname*{Inf}_{\mathrm{C}} f < \langle \psi , f \rangle < \operatorname*{Sup}_{\mathrm{B}} f$$

ce qui est contraire au choix de f, et prouve que $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} \neq \phi$.

Considérons alors une pseudo-fonction

$$\varphi' = h\,\varphi \quad \text{avec} \quad \|\varphi' - \psi\| < \rho \,, h \geqslant 0$$

sur $\mathbf{T}$, et $\mathrm{W} = \{h > 0\}$; alors $\operatorname{supp} \varphi' \subset \operatorname{supp} h \subset \overline{\mathrm{W}}$ et il suffit de vérifier que ψ est compatible avec φ'.

Soit $h' \in \mathrm{A}(\mathbf{T})$ réelle, $h' = 0$ au voisinage de X, $h' = 1$ au voisinage de $\{h = 0\}$; alors l'idéal de $\mathrm{A}(\mathbf{T})$ engendré par h et h' n'est contenu dans aucun idéal maximal, donc contient $\mathbf{1}$. Il existe donc u et $u' \in \mathrm{A}(\mathbf{T})$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= u\,h + u'\,h' \\ &= (u\,h + u'\,h')\,(\overline{u}\,h + \overline{u}'\,h') \\ &= (u\,\overline{u}\,h)\,h + v'\,h' \\ &= v\,h + v'\,h' \end{aligned}$$

avec v et $v' \in \mathrm{A}(\mathbf{T})$ et $v \geqslant 0$; et comme $h' = 0$ au voisinage de $\mathrm{X} \supset \operatorname{supp} \psi$ on a :

$$\psi = v\,(h\,\psi) + v'\,h'\,\psi = v\,(h\,\psi)$$

et si $(f_\alpha\,\varphi)$ converge préfaiblement vers ψ alors $(v\,f_\alpha\,\varphi') = (v\,f_\alpha\,h\,\varphi')$ converge préfaiblement vers $v\,h\,\psi = \psi$ avec $v\,f_\alpha \geqslant 0$ si $f_\alpha \geqslant 0$.

□

Démonstration du Théorème 15. – Soient $\mathrm{M} \notin \mathfrak{U}$ et φ une pseudo-fonction de norme 1 portée par M. On va construire pour toute suite finie s de 0 et de 1, des compacts X_s et Y_s avec $\mathrm{X}_s \in \mathfrak{U}$, une pseudo-fonction φ_s et une pseudo-mesure ψ_s satisfaisant :

(i) $\operatorname{supp} \psi_s \subset \mathrm{X}_s \subset \mathrm{Y}_s = \operatorname{supp} \varphi_s$

et

$$\mathrm{Y}_s \subset \{y : d\,(y\,, \mathrm{X}_s) < 2^{-|s|}\}$$

(ii) ψ_s est $\rho(s)$ — compatible avec φ_s

où
$$\rho(s) = 2^{-(\epsilon_0 + \ldots + \epsilon_{n-1} + 2)} \quad \text{si} \quad s = \langle \epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-1} \rangle$$

(iii) $X_{s\hat{}o} = X_s$ et $Y_{s\hat{}1} = Y_s$

(iv) $\psi_{s\hat{}o} = \psi_s$ et $\varphi_{s\hat{}1} = \varphi_s$.

Pour $s = \phi$ on pose $\varphi_\phi = \varphi$ et $Y_\phi = \operatorname{supp} \varphi$, et on définit X_ϕ et ψ_ϕ en utilisant le lemme 18.

Supposons X_s, Y_s, φ_s et ψ_s déterminés. Pour $s' = s\hat{}o$ on a $X_{s'} = X_s, \psi_{s'} = \psi_s$ et $\rho(s') = \rho(s)$; alors $\psi_{s'}$ est $\rho(s')$ — compatible avec φ_s et, en appliquant le lemme 19 avec
$$W = \{y : d(y, X_s) < 2^{-|s|-1}\}$$
on obtient une pseudo-fonction $\varphi_{s'}$ qui convient et on pose $Y_{s'} = \operatorname{supp} \varphi_{s'}$. Pour $s' = s\hat{}1$ on a $Y_{s\hat{}1} = Y_s, \varphi_{s\hat{}1} = \varphi_s$ et on détermine en appliquant le lemme 18 avec $\rho = \rho(s')$ une pseudo-mesure $\psi_{s\hat{}1}$ dont le support est d'unicité, et on prend alors pour $X_{s\hat{}1}$ la réunion de $\operatorname{supp}(\psi_{s\hat{}1})$ et d'un sous-ensemble fini de $Y_{s'} = Y_s$ de sorte que la dernière condition de (i) soit vérifiée. Ceci achève la construction.

Il découle alors de (ii) et (iii) que pour tout $\epsilon \in 2^\omega$ on a :
$$\Phi(\epsilon) = \limsup_{n \to \infty} X_{\epsilon|n} = \limsup_{n \to \infty} Y_{\epsilon|n}$$

(où $\limsup_{n \to \infty} K_n = \bigcap_n \overline{\bigcup_{m \geqslant n} K_m}$). Alors l'application $\Phi : 2^\omega \longrightarrow \mathcal{K}(M)$ ainsi définie est clairement s.c.s. Si $\epsilon \in \mathbf{P}_f$ avec $\epsilon(k) = 0$ pour $k \geqslant n$, alors il découle de (iii) que $\Phi(\epsilon) = X_{\epsilon|n}$ et par suite $\Phi(\epsilon) \in \mathfrak{U}$. Si $\epsilon \in \mathbf{P}_\infty$ alors il découle de (ii) et (iv) que les suites $(\psi_{\epsilon|n})$ et $(\varphi_{\epsilon|n})$ convergent en norme vers une limite commune φ_ϵ qui est nécessairement une pseudo-fonction avec :
$$\operatorname{supp} \varphi_\epsilon \subset \limsup_{n \to \infty} (\operatorname{supp} \varphi_{\epsilon|n}) = \Phi(\epsilon)$$
et
$$\|\varphi_\epsilon\| \geqslant \|\varphi_\phi\| - \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_{\epsilon|n+1} - \varphi_{\epsilon|n}\| \geqslant \frac{1}{2}$$

donc $\varphi_\epsilon \neq 0$ et par suite $\Phi(\epsilon) \notin \mathfrak{U}$.

Enfin on conclut comme dans le Théorème 8 (b).

□

20. THEOREME. — *Il existe dans* $\mathbf{T}$ *un* G_δ *dont tout sous-compact est d'unicité, mais qui ne peut être recouvert par une suite de compacts d'unicité.*

Démonstration. — En fait nous allons montrer que tout compact $M \notin \mathfrak{U}$ contient un G_δ avec les propriétés annoncées. En effet on sait ([3] Théorème 4.6.3) que M contient un compact de Helson H qui n'est pas d'unicité. Comme $H \in \mathfrak{U}'_1$ ([3] Théorème 4.5.2) il existe une suite (f_n) dans $A(\mathbf{T})$ convergeant préfaiblement vers $\mathbf{1}$ avec $f_n = 0$ sur H ; on peut évidemment supposer que H est le support d'une pseudo-fonction $\varphi \neq 0$, ce qu'on fera.

Fixons une suite (x_k) dense dans H et supposons construits pour tout n et tout k, une fonction $f_{n,k} \in A(\mathbf{T})$ et un voisinage $V_{n,k}$ de x_k vérifiant :

(i) $f_{n,k} = 0$ sur $H \cup \bigcup_{j \leq k} V_{n,j}$

(ii) $\| f_{n,k} - f_{n,k+1} \| < \dfrac{1}{2^{n+k}}$.

Alors pour tout n, la suite $(f_{n,k})_k$ converge en norme vers une fonction h_n nulle sur $\bigcup_{k=0}^{\infty} V_{n,k}$ et telle que $\| f_n - h_n \| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et par conséquent la suite (h_n) converge préfaiblement vers $\mathbf{1}$.

Soit alors $G = \bigcap_n \bigcup_k V_{n,k}$; c'est un G_δ de H, dense puisqu'il contient tous les x_k. Si K est un compact contenu dans G alors chaque h_n est nulle au voisinage de K, donc K vérifie le critère de Piateckii-Šapiro et donc appartient à $\mathfrak{U}$. Néanmoins on ne peut recouvrir G par une suite (K_n) de compacts d'unicité car par le Théorème de Baire l'un de ces K_n serait d'intérieur non vide dans G ; on pourrait donc trouver un ouvert non vide de H et un indice p tel que $V \cap G \subset K_p$, et comme G est dense dans H on aurait alors $\overline{V} = \overline{V \cap G} \subset K_p$ et $\overline{V}$ serait d'unicité, ce qui est impossible puisque V est un ouvert de $H = \operatorname{supp} \varphi$.

Reste alors à construire pour tout $n \geqslant 0$ la suite $(f_{n,k})_{k \geqslant 0}$

vérifiant (i) et (ii). Elle se fera par récurrence sur k, en posant $f_{n,0} = f_n$ puis en cherchant $f_{n,k+1}$ sous la forme $f_{n,k+1} = f_{n,k}\, g$ avec g nulle sur un voisinage $V_{n,k+1}$ de x_{k+1}, ce qui est possible d'après le lemme suivant :

21. LEMME. — *Soient* $f \in A(\mathbf{T}), x \in \mathbf{T}$ *et* $\epsilon > 0$. *Si* $f(x) = 0$ *alors il existe* $g \in A(\mathbf{T})$, *avec* $g = 0$ *sur un voisinage de* x *et* $\|f - fg\| < \epsilon$.

Démonstration. — Sans perdre de généralité on peut supposer $x = 0$. On peut trouver dans A une famille $(h_\delta)_{\delta > 0}$ uniformément bornée et vérifiant :

$$h_\delta = 1 \quad \text{sur} \quad \left\{ |t| < \frac{\delta}{2} \right\} \; ; \; h_\delta = 0 \quad \text{sur} \quad \left\{ |t| > \frac{3\delta}{2} \right\} \; ; \; \|h_\delta\| \leqslant M .$$

Si $f(0) = 0$ alors, puisque $\{0\}$ est un ensemble de synthèse, il existe pour tout $\epsilon > 0$ une fonction $f' \in A(\mathbf{T})$, nulle sur un voisinage V de 0 et telle que $\|f - f'\| < \dfrac{\epsilon}{M}$. Alors si $\left[-\dfrac{3\delta}{2}, \dfrac{3\delta}{2} \right] \subset V$ on a $f' h_\delta = 0$, donc en posant $g_\delta = 1 - h_\delta$ qui est nulle au voisinage de 0 on a :

$$\|f - f g_\delta\| = \|f h_\delta\| \leqslant \|f - f'\| \, \|h_\delta\| + \|f' h_\delta\| \leqslant \frac{\epsilon}{M} . M = \epsilon$$

ce qui achève la construction des $(f_{n,k})$ et termine la démonstration du Théorème.

□

En combinant les Théorèmes 6, 14, 15 et 20 on obtient :

22. COROLLAIRE. — *Le σ-idéal $\mathcal{U}$ n'a pas de base borélienne.*

Ce dernier résultat fournit une réponse à une question de R. Solovay.

En fait on a même que pour tout compact de multiplicité M, le σ-idéal $\mathcal{U}(M)$ n'a pas de base borélienne.

En particulier si on considère l'ensemble PS des compacts K de $\mathbf{T}$ qui satisfont le critère de Piateckii-Šapiro, c'est-à-dire les compacts K pour lesquels il existe une suite (f_n) dans $A(\mathbf{T})$ qui converge préfaiblement vers $\mathbf{1}$, avec $f_n = 0$ au voisinage de K, alors on voit facilement que PS est une partie $G_{\delta\sigma}$ de $\mathcal{U}$, et par suite on a :

23. COROLLAIRE. — *Il existe dans* $\mathbf{T}$ *un compact d'unicité qui ne peut être recouvert par une suite de compacts satisfaisant le critère de Piateckii-Šapiro.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BARI, *A treatise on Trigonometric Series*, Vol. II, New York, Macmillan, (1964).

[2] C. CARLET, G. DEBS, Un résultat sur les ensembles d'unicité du tore, Séminaire d'Initiation à l'analyse – 2^e Année (1984-1985) Communication n° 2.

[3] C. GRAHAM, O.C. McGEHEE, *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Springer Verlag, New York, (1979).

[4] R. KAUFMAN, Absolutely convergent Fourier series and some classes of sets, *Bull. Sc. Math.*, 109 (1985), 363-372.

[5] A. KECHRIS, A. LOUVEAU, H. WOODIN, The structure of σ-ideals of compacts sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 301 (1) (1987), 263-288.

[6] A. KECHRIS, A. LOUVEAU, *Descriptive Set Theory and the structure of sets of uniqueness*, Cambridge University Press, (1987).

Manuscrit reçu le 7 juillet 1986
révisé le 5 décembre 1986.

G. DEBS & J. SAINT RAYMOND,
Université de Paris VI
Equipe d'Analyse
4 place Jussieu
Tour 46 – 4^e étage
75252 Paris Cedex 05.