ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE HENRY
MICHEL MERLE

# Conditions de régularité et éclatements

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, nº 3 (1987), p. 159-190
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_159_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 3 (1987), 159-190

# CONDITIONS DE RÉGULARITÉ ET ÉCLATEMENTS

par
J.-P. HENRY et M. MERLE

## I. INTRODUCTION

Soit X un germe d'espace analytique complexe, plongé dans $\mathbf{C}^n$. On cherche à stratifier X, c'est-à-dire à le décomposer en une réunion disjointe et localement finie de sous-variétés lisses ou strates $X_\alpha$, vérifiant la condition de frontière et satisfaisant des conditions de régularité pour les couples de strates adjacentes.

Dans la littérature on trouve au moins trois grands types de condition de régularité :

### 1. Différentielles (à la Thom-Whitney).

1.1. Condition **a** et **b** de Whitney, condition **w** de Verdier, condition de Kuo . . .

1.2. Condition $\mathbf{a}_f$ de Thom pour un morphisme $f$ de X dans S, et ses variantes $\mathbf{w}_f$ . . .

Lorsque une stratification (*) de $f$ vérifie $\mathbf{a}_f$ et induit sur X et S des stratifications de Whitney, $f$ est localement trivial le long de chaque strate ; on obtient un champ de vecteurs trivialisant en étendant un champ V non nul sur $X_\alpha$ à toutes les strates $X_\beta$ adjacentes à $X_\alpha$ ;

(*) Un morphisme $f$ de X dans S est dit stratifié [18] s'il existe une stratification de X et une stratification de S, telles que $f$ envoie submersivement chaque strate de X sur une strate de S.

*Mots-clés* : Stratifications – Modification de Nash – Cycles de Schubert – Dirimants – Variétés polaires – Equisingularité – Conditions de Whitney – Condition de Thom – Equimultiplicité – Espace conormal.

On commence par étendre le champ à l'espace ambiant ce qui définit un champ de vecteurs sur $X_\beta$ que l'on projette sur l'espace tangent à $X_\beta$.

Les conditions à la Thom-Whitney assurent qu'un tel champ est intégrable (contrôlé [14] ou rugueux [19]).

## 2. Algébriques (à la Hironaka).

Au voisinage d'un point de $X_\alpha$, et pour chaque couple de strates adjacentes $X_\alpha$ et $X_\beta$ telles que $X_\alpha$ soit contenue dans l'adhérence Z de $X_\beta$, on construit au-dessus de Z un espace $\Omega(f, X_\alpha)$ dans lequel l'image inverse de $X_\alpha$ est un diviseur D. On dira que $X_\beta$ est $\Omega$-régulière le long de $X_\alpha$ si D est relativement ouvert au-dessus de $X_\alpha$.

2.1. *Remarque*. – Ainsi définie, une condition de régularité est évidemment stratifiante, i.e. pour tout fermé analytique F dans Z, il existe un ouvert analytique U de F, tel que Z soit $\Omega$-régulière le long de U.

2.2. *Exemples.* –

2.2.1. On peut prendre pour $\Omega(Z, W)$ l'éclaté de W dans Z.

2.2.2. Si $f$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$ a W pour lieu critique, on prend pour $\Omega(f, W)$, en suivant Hironaka, l'éclaté du produit de l'idéal jacobien de $f$ par l'idéal de W.

2.2.3. Soit $f$ de Z dans S un morphisme analytique complexe. On peut définir $\Omega(f, W)$ comme l'éclaté de l'idéal de W dans le conormal relatif de $f$ ([6]).

## 3. Numériques.

On impose la constance d'un ou plusieurs invariants numériques locaux de Z (ou de $f$) le long de W lisse.

3.1. *Exemples.* –

3.1.1. La multiplicité de Z en un point $w$ de W.

3.1.2. Dans la situation de 2.2.2 le nombre de Milnor de la restriction de $f$ à une section linéaire transverse à W en $w$.

3.1.3. Si l'on est dans la situation 2.2.3, les multiplicités des variétés polaires relatives de Z le long de W ([17]) ou les multiplicités des dirimants relatifs le long de projections de W.

3.2. *Remarque.* — La traduction entre les conditions de type 2 et 3 relève de la théorie de l'intersection, elle résulte essentiellement de la formule de projection (voir Théorème 6.3).

## 4. Théorèmes de comparaison.

Ils établissent des implications entre des conditions du premier et du second type. Donnons quelques exemples :

4.1. THEOREME (Hironaka, Dade). — *Soit* $X, x$ *un germe d'espace analytique complexe et* $Y, x$ *un espace lisse. L'espace* X *est équimultiple le long de* Y *si et seulement si* X *contient* Y *et si le morphisme*

$$e_Y : C_Y(X) \longrightarrow Y$$

*du cône normal à* Y *dans* X *sur* Y *est ouvert.*

4.2. THEOREME ([17] et [5]). — *Soit* $(X, x)$ *un germe d'espace analytique complexe réduit et* $(Y, x)$ *un sous-espace lisse. On construit l'espace conormal* C (X) *et l'éclaté* $E_Y C(X)$ *de l'idéal de* Y *dans* C (X). *On note* $D_Y$ *l'image inverse de* Y *dans* $E_Y C(X)$. *La partie lisse* $X^0$ *vérifie les conditions de Whitney le long de* Y *si et seulement si le morphisme*

$$\zeta_Y : D_Y \longrightarrow Y$$

*est ouvert. Ces conditions sont équivalentes à l'équimultiplicité des variétés polaires de* X *le long de* Y *(ou des dirimants le long de projections de* Y*).*

*Note.* — L'énoncé initial donné dans [16] utilisait le transformé de Nash de X. Nous avons montré, dans [5], que l'espace conormal fournit d'une part le cadre où les équivalences sont vraies et permet d'autre part des récurrences sur les dirimants de X.

Dans le paragraphe 10 nous traiterons des conditions liées au transformé de Nash.

4.3. THEOREME [6]. – *Soit* $f$ *un germe de morphisme analytique complexe de* $(X, x)$ *dans* $(S, s)$, *lisse sur un ouvert* $X^0$ *de* $X$ *et* $(Y, x)$ *un sous-espace lisse de* $X$ *dont l'image par* $f$ *est égale à* $s$. *On construit l'espace conormal relatif* $C(f)$ *et l'éclaté* $E_Y C(f)$ *de l'idéal de* $Y$ *dans* $C(f)$. *On suppose que* $C(f)$ *est ouvert au-dessus de* $S$. *On note* $D_Y$ *l'image inverse de* $Y$ *dans* $E_Y C(f)$.

*La partie lisse* $X^0$ *vérifie la condition de Thom stricte le long de* $Y$ *relativement à* $f$, *si et seulement si le morphisme*

$$\zeta_Y : D_Y \longrightarrow Y$$

*est ouvert.*

*Ces conditions sont équivalentes à l'équimultiplicité le long de* $Y$, *des variétés polaires relatives de* $f$; *d'autre part à l'équimultiplicité des dirimants relatifs de* $f$ *le long des projections de* $Y$.

4.3.1. *Remarque.* – Contrairement au cas précédent, multiplicités des dirimants et multiplicités des variétés polaires ne sont pas toujours égales ([6]).

Nous allons donner ici un cadre général dans lequel les correspondances entre les diverses conditions de régularité s'exprimeront de façon "naturelle". Ceci nous permettra de donner de nouvelles équivalences ou caractérisations et en même temps de décrire une classe de conditions de régularité permettant de stratifier un morphisme.

En particulier, nous obtenons un théorème de comparaison étendant 4.3 quand $f(Y)$ est de codimension 0 ou 1 dans S (Théorème 9.1.2) et nous donnons une condition différentielle liée au transformé de Nash relatif de $f$ lorsque $f(Y) = S$ (Théorème 10.1.4.).

# II. RAPPELS

## 5. Transversalité.

Nous retranscrivons ici, pour la commodité du lecteur, un résultat de transversalité à la Bertini, démontré dans [10]. Nous en ferons par la suite un usage essentiel.

5.1. LEMME (Bertini-Kleiman). – *Soit* G *un groupe algébrique connexe; on suppose que* G *agit transitivement sur une variété algébrique complexe* A. *On se donne aussi deux morphismes* $b : B \longrightarrow A$ *et* $c : C \longrightarrow A$ *des variétés* B *et* C *dans* A. *Pour chaque élément* $g$ *de* G *on note* $B^g$ *la variété* B *munie du morphisme* $g \circ b : B \longrightarrow A$ *de* B *dans* A. *Sous ces hypothèses,*

1) *il existe un ouvert non vide* $G^0 \subset G$ *tel que pour tout* $g$ *dans* $G^0$, $B^g \times_A C$ *soit ou vide ou de dimension pure*

$$\dim (B) + \dim (C) - \dim (A)$$

2) *si* A *et* B *sont non singuliers, il existe un ouvert non vide* $G^0 \subset G$ *tel que pour tout* $g$ *dans* $G^0$, $B^g \times_A C$ *soit non singulier.*

## 6. Equimultiplicité.

On redonne ici des résultats bien connus sur l'équimultiplicité disséminés dans divers ouvrages ([7], [13], [17], [2], . . . ).

6.1. DEFINITION : **normalement pseudo-plat** (Hironaka). – *Soit* W *un germe, au voisinage d'un point* P, *d'espace analytique complexe de dimension pure* $d$, *et soit* Y *un germe d'espace lisse au voisinage de* P, *de dimension* $t$. *On dit que* W *est normalement pseudo-plat le long de* Y, *au voisinage de* P, *si le morphisme*

$$(C_Y(W))_{red} \longrightarrow Y$$

*du cône normal à* Y *dans* W *vers* Y *a ses fibres vides ou de dimension* $d - t$ *au voisinage de* P.

6.1.1. *Remarque.* – Si W est normalement pseudo-plat le long de Y, il est vide ou il contient Y.

6.2. DEFINITION : **équisécable.** – *Soit* W *et* Y *comme dans la définition précédente; on suppose* W *plongé dans* $\mathbf{C}^n$ *où on a identifié* Y *à* $\mathbf{C}^t$*; nous dirons que* W *est équisécable le long de* Y *au voisinage d'un point* P *si pour* $d - t$ *hyperplans*

$$H_1, H_2, \ldots, H_{d-t},$$

*passant par* Y, *en position générale, l'intersection de* W *avec ces* $d - t$ *hyperplans est réduite à* Y *au voisinage du point* P.

Cette définition est justifiée par le théorème suivant :

6.3. THEOREME. – *Avec les hypothèses et les notations de la définition précédente les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1) W *est normalement pseudo-plat le long de* Y *au voisinage de* O.

2) W *est équisécable le long de* Y *au voisinage de* O.

3) *La multiplicité de* W *est constante le long de* Y *au voisinage de* O.

*Démonstration.* –

6.3.2. *Montrons* $1 \Longrightarrow 2$ :

Dire que le cône normal à Y dans W, $C_Y(W)$, est équidimensionnel(*) au-dessus de Y, au voisinage de O, équivaut à dire que la dimension de la fibre de $\mathbf{P}(C_Y(W))$ au-dessus de O est $d - t - 1$.

Ceci entraîne évidemment que $d - t$ variétés linéaires, en position générale, coupées avec $\mathbf{P}(C_Y(W)_0)$ donnent une intersection vide. Soient donc $h_1, h_2, \ldots, h_{d-t}$, $d - t$ variétés linéaires dans $\mathbf{P}^{n-1-t}$, telles que :

$$h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_{d-t} \cap \mathbf{P}(C_Y(W)_0) = \phi,$$

(*) Nous dirons qu'un morphisme $g : Z \longrightarrow T$ est équidimensionnel ou que Z est équidimensionnel au-dessus de T, si le réduit des fibres de $g$ est de dimension constante.

alors si $H_1, H_2, \ldots, H_{d-t}$, sont des hypersurfaces lisses de $\mathbf{C}^n$ contenant Y et telles que les projectifiés des cônes normaux de Y dans ces hypersurfaces soient $h_1, h_2, \ldots, h_{d-t}$,

$$H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_{d-t} \cap W = Y\,;$$

en effet, si cette intersection n'était pas réduite à Y, elle contiendrait au moins une courbe distincte de Y, et la limite de sécantes suivant cette courbe fournirait un point de $h_1 \cap \ldots \cap h_{d-t} \cap \mathbf{P}(C_Y(W)_0)$.

6.3.3. *Montrons* $2 \Longrightarrow 1$ :

Dans ce sens, la démonstration est moins triviale. Soient $H_1, \ldots, H_{d-t}$ des hyperplans de $\mathbf{C}^n$ contenant Y, et

$$h_i\,,\ 1 \leqslant i \leqslant d-t$$

le projectifié du cône normal de Y dans $H_t$. Il faut montrer que s'il y a des limites de sécantes à Y dans W, au voisinage de O, dans $h_1 \cap \ldots \cap h_{d-t}$, W est nécessairement intersecté par $H_1 \cap \ldots \cap H_{d-t}$ en dehors de Y.

On éclate Y dans W ; on obtient ainsi un morphisme $e_Y : E_Y W \longrightarrow W$, et un diviseur $D_Y = e_Y^{-1}(Y)$ dont la fibre au-dessus de O est notée $D_0$.

On stratifie pour les conditions de Whitney, le triplet $(E_Y W, D_Y, D_0)$. Nous avons besoin d'utiliser le lemme de transversalité de Kleiman (5.1) dans les cas suivants :

A est l'espace $\mathbf{P}^{n-1-t}$, le groupe qui agit est $\mathrm{Gl}(\mathbf{C}^n/Y)$,

B est le sous-espace linéaire de $A : h_1 \cap \ldots \cap h_{d-t}$,

C est une strate de $D_0$.

Le lemme de Kleiman nous dit qu'il existe un ouvert de Zariski dense $G^0$ de G tel que pour $g \in G^0$ :

Le translaté de $h_1 \cap \ldots \cap h_{d-t}$ par $g$ coupe transversalement toute strate de $D_0$ ; donc (comme la stratification est une stratification de Whitney) le translaté de $h_1 \cap \ldots \cap h_{d-t}$ par $g$ coupe transversalement toutes les strates de $E_Y W$ ; en particulier l'intersection de $E_Y W$ et des $h_i^g$ est soit vide soit de dimension :

$$\dim(E_Y W) + \dim(\mathbf{P}^{n-t-1} \cap h_1 \cap \ldots \cap h_{d-t}) - \dim(\mathbf{P}^{n-t-1})$$
$$= \dim(E_Y W) - (d-t) = d - (d-t) = t\,.$$

Si nous supposons maintenant que le cône normal à $Y$ dans $W$, $C_Y(W)$, n'est pas équidimensionnel au-dessus de $Y$, au voisinage de $O$, la dimension de la fibre de $C_Y(W)$ au-dessus de $O$ est au moins $d-t$.

Ceci entraîne que $d-t$ variétés linéaires, en position générale, coupent $\mathbf{P}(C_Y(W)_0)$. Dans ce cas l'intersection de $E_Y W$ avec $h_1^g \cap \ldots \cap h_{d-t}^g$ est non vide, non contenue dans $D_Y$ et de dimension $t$.

Ceci implique que dans l'intersection de $W$ avec

$$H_1^g \cap \ldots \cap H_{d-t}^g,$$

il y a des points en dehors de $Y$.

6.3.4. *Montrons* $2 \Longleftrightarrow 3$ :

On peut d'abord se ramener au cas où $d=t$, c'est-à-dire au cas où $W$ est de la dimension de $Y$.

Il existe en effet $d-t$ hyperplans de $\mathbf{C}^n$, $H_1, H_2, \ldots, H_{d-t}$ contenant $Y = O \times \mathbf{C}^t$, transverses à $W$, ceci par un simple argument de dimension :

Dans $\mathbf{P}^{n-1}$, $\mathbf{P}(C_0(W))$ est de dimension $d-1$, le projectif des droites de $Y$, $\mathbf{P}(Y)$, est de dimension $t-1$ ; si $d>t$, presque tout hyperplan de $\mathbf{P}^{n-t-1}$ contenant $\mathbf{P}(Y)$ ne contient aucune composante de $\mathbf{P}(C_0(W))$ ; on peut donc couper $W$ par des hyperplans transverses, contenant $Y$, jusqu'à obtenir une variété de même dimension que $Y$, et ayant même multiplicité que $W$, au point spécial $O$ et au point générique de $Y$.

On s'est donc ramené à montrer la même équivalence quand $W$ a la dimension de $Y$ : Dire que $W$ est équisécable, c'est dire que $W$ est réduit à $Y$. Si $P$ est un point de $Y$ et si les $W_i$ sont les composantes irréductibles de $W$ au point $P$, on a, en notant $s(P, W)$ la classe de Segre de $P$ dans $W$,

$$s(P, W) = \sum_i m_i \cdot s(P, W_i) \tag{**}$$

avec $m_i$ la multiplicité géométrique de $W_i$ dans $W$, (cf. le lemme 4.2 de [2]). Au point spécial $O$, il y a au moins la composante $Y$, et éventuellement d'autres composantes $W_i$ de $W$ ; en un point générique $M$ de $Y$, il n'y a que la composante $Y$. Notons $m_Y$ la multiplicité géométrique de $W$ en $Y$ (i.e. le nombre de fois qu'il faut compter Y dans W). La multiplicité de W en P, $m_P(W)$, est le coefficient de [P] dans la classe de Segre $s(P, W)$ de P dans W (cf. [2] 4.3).

On a donc, en calculant le coefficient de [O] dans chacun des deux membres de la formule (**) appliquée en O, l'égalité :

$$m_0(W) = m_Y \cdot m_0(Y) + \sum_i m_i \cdot m_0(W_i)$$

d'ou comme Y est lisse et que $m_0(Y)$ vaut 1

$$m_0(W) = m_Y + \sum_i m_i \cdot m_0(W_i).$$

En opérant de même avec le coefficient de [M] dans la classe de Segre de M dans W, on obtient l'égalité :

$$m_M(W) = m_Y .$$

Pour que ces multiplicités soient égales, on voit maintenant qu'il faut et qu'il suffit que Y soit la seule composante de W en O.

## 7. Rappels sur la cohomologie de la grassmannienne.

Nous énonçons ici, sous une forme qui nous sera utile, des résultats classiques (voir [2], [3], [11]).

Soit $\mathcal{D}$ un drapeau de sous-espaces vectoriels dans $\mathbf{C}^n$ :

$$\mathcal{D} : 0 \subset V_1 \subset V_2 \ldots \subset V_n = \mathbf{C}^n, \quad \text{avec} \quad \dim(V_i) = i.$$

Pour toute suite décroissante $n - r \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots a_r \geqslant 0$, on note $\sigma_{a_1 a_2 \ldots a_r}$, le cycle de Schubert de la grassmannienne Grass$(r, n)$ des $r$-plans de $\mathbf{C}^n$, défini par

$$\sigma_{a_1 a_2 \ldots a_r} = \{T \in \text{Grass}(r, n) ;\ \dim T \cap V_{n-r+i-a_i} \geqslant i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}.$$

7.1. Lorsque $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = k$, les classes de ces cycles forment une base du groupe de Chow : $A^k(\text{Grass}(r, n))$.

7.2. *Cycles questeurs.*

Une conséquence de la formule de Pieri est l'égalité suivante :

$$\sigma_1^i \equiv \sum_{|I| = i} \lambda_I \sigma_I$$

où la somme est étendue à tous les diagrammes de Young de poids $i$ et où $\lambda_I$ est le nombre de tableaux standards de forme I.

Retenons simplement que la classe de $\sigma_1^i$ est une somme à coefficients strictement positifs des éléments de la base de $A^k(\text{Grass}(r,n))$ représentés par des cycles de Schubert (il y a toujours au moins un tableau standard de forme I).

7.2.1. DEFINITION. – *Un système de cycles de codimension $k$ dans une variété Z algébrique lisse $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ est dit* **questeur** *s'il vérifie la propriété suivante :*

*Un cycle effectif D est de dimension strictement inférieure à $k$ dès que les nombres d'intersection de D avec les $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ sont tous nuls*

7.2.2. *Remarque.* – Dans la grassmannienne $\text{Grass}(r,n)$ la base de $A^k(\text{Grass}(r,n))$ formée des cycles de Schubert est telle que sa base duale pour la forme intersection est formée des cycles de Schubert de codimension $r(n-r)-k$, la dualité s'exprimant par :

$$\langle \sigma_{a_1,a_2,\ldots,a_r} \cdot \sigma_{b_1,b_2,\ldots,b_r} \rangle = 1$$

si $b_j = n - r - a_{r-j+1}$ pour tout $j$ entre 1 et $r$ et par

$$\langle \sigma_{a_1,a_2,\ldots,a_r} \cdot \sigma_{b_1,b_2,\ldots,b_r} \rangle = 0$$

sinon.

Il s'ensuit, à cause du lemme de Kleiman (5.1), que tout cycle effectif D de dimension $k$ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls des cycles de Schubert de dimension $k$.

De plus, si $\sigma$ est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des cycles de Schubert de codimension $k$ l'intersection $\langle D \cdot \sigma \rangle$ sera nulle si et seulement si D a une classe nulle dans $A^{r(n-r)-k}(\text{Grass}(r,n))$, c'est-à-dire si et seulement si D est de dimension strictement inférieure à $k$.

Un tel cycle $\sigma$ est donc questeur en codimension $k$ (*).

7.3. *Un représentant de* $[\sigma_1^i]$.

Donnons un représentant de $[\sigma_1^i]$ lorsque $i \leqslant r$ : un système de coordonnées adaptées au drapeau $\mathcal{D}$ étant choisi, un élément

(*) Nous remercions le rapporteur de nous avoir signalé une formulation trop optimiste de cette remarque.

T de Grass $(r, n)$ est déterminé par les $(n-r) \times (n-r)$ mineurs d'une matrice $(n-r) \times n$ qui constituent les coordonnées plückeriennes de T ; notons $a_{\mathrm{I}}$ le mineur construit sur les colonnes d'indice $j \in \mathrm{I}$, $(|\mathrm{I}| = n - r)$. L'idéal engendré par :

$$a_{1,2,\ldots,n-r}, a_{2,3,\ldots,n-r+1}, \ldots, a_{i,i+1,\ldots,i+n-r-1}$$

définit dans Grass $(r, n)$ un représentant de $[\sigma_1^i]$ que nous noterons désormais $\sigma_1^i$. Les $\sigma_1^i$ sont questeurs.

## III. CONDITIONS DE REGULARITE

### 8. Application à l'étude d'un morphisme $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{S}$.

Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{S}$ un morphisme entre germes d'espaces analytiques réduits. On supposera dans la suite qu'il existe un ouvert partout dense $\mathrm{X}^0$ de X sur lequel le morphisme $f$ est de corang égal à dim (X) — dim (S) ; nous noterons $d$ ce corang.

Soit Y un germe d'espace lisse sur lequel $f$ est de corang constant $t$. Nous supposerons désormais que S est égal à $\mathbf{C}^s$, que X est plongé dans le produit $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s$, que $f$ est induite par la projection $\pi$ sur $\mathbf{C}^s$ et que Y est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s$. De plus $f(\mathrm{Y})$ est supposé de codimension $c$ dans S.

Soit $r$ un entier.

Considérons un espace $\mathrm{R}^r(f)$ dominant X et défini de la manière suivante :

On dispose sur le complémentaire $\mathrm{X}^0$ du lieu critique de $f$ d'un sous-fibré de $\mathrm{X}^0 \times$ Grass $(r, n)$ donné par :

(si $r \leqslant d$)

$$\{(x, \mathrm{T}) \in (\mathrm{X}^0 \times \mathrm{Grass}\,(r, n))\,;\ \mathrm{T} \subset \mathrm{T}_x f\}$$

et par :

(si $r \geqslant d$)

$$\{(x, \mathrm{T}) \in (\mathrm{X}^0 \times \mathrm{Grass}\,(r, n))\,;\ \mathrm{T} \supset \mathrm{T}_x f\}.$$

On note $\mathrm{N}(r)$ la dimension des fibres ; $\mathrm{N}(r) = r(d-r)$ si $r \leqslant d$, $\mathrm{N}(r) = (n-r)(r-d)$ si $r \geqslant d$.

On appelle $R^r(f)$ l'adhérence de ce sous-fibré dans

$$X \times \mathrm{Grass}(r, n).$$

*Exemples.* –

8.1. *Morphisme associé au transformé de Nash :*

Dans le cas $r = d$, on a construit l'espace des couples d'un point de X et d'une limite de plans tangents relatifs en ce point, $R^d(f)$ est le transformé de Nash relatif de $f$.

8.2. *Morphisme associé à l'espace conormal :*

Dans le cas $r = n - 1$, on a construit l'espace des couples d'un point de X et d'une limite d'hyperplans tangents relatifs en ce point, $R^{n-1}(f)$ est l'espace conormal relatif de $f$.

On effectue alors l'éclatement (*) de Y dans $R^r(f)$ pour obtenir un espace $E_Y(R^r(f))$ et un morphisme

$$\zeta_Y^r : E_Y(R^r(f)) \longrightarrow X.$$

L'image inverse de Y par $\zeta_Y^r$ est un diviseur de $E_Y(R^r(f))$ noté $D_Y^r$.

Le diviseur $D_Y^r$ est contenu dans le produit

$$Y \times \mathbf{P}^{n-t-1+c} \times \mathrm{Grass}(r, n).$$

On considérera dans la suite le groupe G, sous-groupe du groupe linéaire formé des éléments $g$ de $\mathrm{Gl}(n + s, \mathbf{C})$ qui sont compatibles avec la projection $\mathbf{C}^{n+s} \longrightarrow \mathbf{C}^s$ et qui conservent globalement Y.

8.3. *Remarques.* –

8.3.1. Majoration de la dimension de la fibre de $\zeta_Y$.

Pour que $D_Y^r$ soit équidimensionnel au-dessus de Y il faut et il suffit que la fibre $D_0$ au-dessus de O soit de dimension au plus $N(r) + d - t - 1 + c$ ; en effet la dimension des fibres générales de $R^r(f)$ au-dessus de X est $N(r)$, et celle de X est $d + s$.

---

(*) Au lieu de l'éclatement de Y dans X, on pourrait également considérer l'éclatement dual de Y dans X, défini comme suit : on construit sur $X \setminus Y$ le fibré projectif dont la fibre au-dessus d'un point $x$ est l'espace projectif des hyperplans contenant Y et la droite $Ox$. On prend ensuite son adhérence dans $X \times \check{\mathbf{P}}^{n-t-1+c}$.

$E_Y(R^r(f))$ a même dimension que $R^r(f)$, et le diviseur $D_Y^r$ a cette dimension diminuée de 1 soit $N(r) + d + s - 1$ ; l'espace Y est de dimension $t + s - c$.

8.3.2. Minoration de la dimension des fibres de $q$.

$R^r(f)$ peut être obtenu à partir du transformé de Nash relatif de la manière suivante : on projette dans $X \times \mathrm{Grass}(r, n)$ le fibré universel en grassmanniennes au-dessus de $N(f) = R^d(f)$. Cette construction montre que les fibres du morphisme

$$E_Y(R^r(f)) \longrightarrow E_Y(X)$$

sont de dimension au moins $N(r)$.

8.3.3. Pour que le morphisme $D_Y^r \longrightarrow Y$ soit ouvert, il faut donc, d'après la remarque précédente, que la fibre spéciale du morphisme $\mathbf{P}(C_Y(X)) \longrightarrow Y$ soit de dimension strictement inférieure à $d - t + c$.

8.4. *Equimultiplicité des variétés polaires.*

8.4.1. Definition. – *Pour chaque cycle* $\sigma$ *de* $\mathrm{Grass}(r, n)$ *on construit la variété polaire relative locale* $P(\sigma)$ *définie dans* X *comme suit :*

*On projette* $R^r(f) \cap (X^0 \times \sigma)$ *dans* $X^0$ *et on prend l'adhérence dans* X *de cette projection.*

On construit deux drapeaux, le premier $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{C}^n/Y_0$

$$\mathcal{D} : 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-t}$$

le deuxième dans $\mathbf{C}^{n+s}/Y$

$$W_c \subset W_{c+1} \subset \ldots \subset W_{n-t+c}\,.$$

On note $\mathbf{P}W_i$ le sous-espace projectif associé de $\mathbf{P}^{n-t-1+c}$ et on considère l'action du produit $G \times G$ sur $\mathrm{Grass}(r, n) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$.

8.5. Proposition. – *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Le diviseur* $D_Y^r$ *est équidimensionnel au-dessus de* Y.

2) *Le nombre d'intersection dans* $\mathbf{P}^{n-t-1+c} \times \mathrm{Grass}(r, n)$ *de* $D_0$ *avec les cycles :*

$$\sigma_1^{N(r)} \times \mathbf{P}W_{n-d},\ \sigma_1^{N(r)+1} \times \mathbf{P}W_{n-d+1},\ \ldots,\ \sigma_1^{N(r)+d-t+c} \times \mathbf{P}W_{n-t+c}$$

*est nul.*

3) *L'intersection dans* $\mathbf{P}^{n-t-1+c} \times \mathrm{Grass}(r,n)$ *de* $D_0$ *avec un translaté général par* $G \times G$ *des cycles :*

$$\sigma_1^{N(r)} \times \mathbf{P}W_{n-d}, \sigma_1^{N(r)+1} \times \mathbf{P}W_{n-d+1}, \ldots, \sigma_1^{N(r)+d-t+c} \times \mathbf{P}W_{n-t+c}$$

*est vide.*

4) *Les variétés polaires associées à des translatés généraux des cycles(*)*

$$\sigma_1^{N(r)}, \sigma_1^{N(r)+1}, \ldots, \sigma_1^{N(r)+d-t+c}$$

*sont équimultiples le long de* $Y$.

*Démonstration.* – D'après 7.2 les cycles

$$\sigma_1^{N(r)+k} \times \mathbf{P}W_{n-d+k},$$

pour

$$\sup(-N(r), -n+d+1) \leqslant k \leqslant d-t+c$$

forment un système questeur dans $\mathrm{Grass}(r,n) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$ en codimension $N(r)+d-t+c$.

D'après la remarque 8.2.2 il suffit de considérer $k \geqslant 0$. Ceci montre l'équivalence de (1) et (2). L'équivalence de (2) et (3) résulte du lemme de Bertini–Kleiman et du fait que les cycles considérés ont même codimension dans chaque orbite de $G \times G$ dans $\mathrm{Grass}(r,n) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$.

Enfin (3) et (4) sont équivalents à cause du théorème 6.3.

□

8.6. *Equimultiplicité des dirimants.*

Dans ce paragraphe, nous supposerons que $c$ est inférieur ou égal à 1, pour pouvoir appliquer le lemme 8.6.2.

Etant donné un drapeau $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{C}^n/Y_0$

$$\mathcal{D} : 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-t}$$

et un drapeau dans $\mathbf{C}^s/f(Y)$

$$0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_c,$$

(*) On les appellera désormais variétés polaires générales du morphisme $f$.

on construit un drapeau

$$0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-t+c}$$

dans $\mathbf{C}^{n+s}/Y$ de telle sorte que $f(W_i)$ soit $S_i$ si $i \leqslant c$ et pour $i > c$, $W_i \cap (\mathbf{C}^n/Y) = V_{i-c}$. On note $\mathbf{P}W_i$ le sous-espace projectif associé de $\mathbf{P}^{n-t-1+c}$. On considère cette fois l'action diagonale de G sur Grass $(r, n) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$.

8.6.1. Definition. – *Lorsque $r = n - 1$, $R^{n-1}(f)$ est le conormal relatif au morphisme $f$, les variétés polaires associées aux $\mathbf{P}\check{V}_k$, $n - d - 1 \leqslant k$ sont les seules que l'on doit considérer. L'image (une fois réduite) de la polaire $P(\check{V}_k)$ par la projection de noyau $V_k$ est si elle n'est pas vide, une hypersurface de $\mathbf{C}^{n-k+s}$ que nous appelons* ***dirimant*** *associé au cycle $V_k$.*

8.7. Lemme de transversalite (voir [4], [15]). –

*Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme tel que l'image de Y soit de codimension 1 dans S. Supposons de plus que $D_Y^{n-1}$ soit équidimensionnel au-dessus de Y.*

*Alors la variété d'incidence de $\mathbf{P}^{n-t-1} \times \mathbf{P}^{n-t-1}$ ne contient aucune composante de $D_0$.*

*Démonstration.* – Lorsque $f(Y)$ est un point, la démonstration reprend celle de [4] en remarquant que l'équidimensionnalité de $D_Y^{n-1}$ au-dessus de Y entraîne la condition $\mathbf{w}_f$ (cf. [6]).

Pour le cas général on procède comme suit :

Soit $h : \mathbf{C} \longrightarrow S$ un chemin tracé dans S. On peut construire l'image réciproque de $f$ par $h$, que nous noterons $f^h$ ; on construit alors $R^{n-1}(f^h)$ puis son éclaté le long de l'image reciproque $Y^h$ de Y par $h$, on obtient un diviseur exceptionnel ${}^hD_Y$ de fibre ${}^hD_0$.

Comme $c$ est inférieur ou égal à 1, par un calcul facile sur les dimensions, l'équidimensionnalité de $D_Y$ au-dessus de Y entraîne celle de ${}^hD_Y$ au-dessus de $Y^h$, mieux, ${}^hD_0$ est de même dimension que $D_0$, c'est une réunion de composantes de $D_0$.

Pour toute composante Z de $D_0$, il existe un chemin $h$ tel que cette composante soit réalisée comme composante de ${}^hD_0$.

L'image de $Y^h$ par $f_h$ est un point. On est donc ramené au cas précédent, ce qui montre que la composante Z n'est pas incluse dans la variété d'incidence.

8.8. PROPOSITION. – *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Le diviseur* $D^r_Y$ *est équidimensionnel au-dessus de* Y.

2) *Le nombre d'intersection dans* $\mathbf{P}^{n-t-1+c} \times \mathrm{Grass}(r, n)$ *de* $D_0$ *avec les cycles :*

$$\sigma_1^{N(r)} \times \mathbf{PW}_{n-d}, \sigma_1^{N(r)+1} \times \mathbf{PW}_{n-d+1}, \ldots, \sigma_1^{N(r)+d-t+c} \times \mathbf{PW}_{n-t+c}$$

*est nul.*

3) *L'intersection dans* $\mathbf{P}^{n-t-1+c} \times \mathrm{Grass}(r, n)$ *de* $D_0$ *avec un translaté général par* G *des cycles :*

$$\sigma_1^{N(r)} \times \mathbf{PW}_{n-d}, \sigma_1^{N(r)+1} \times \mathbf{PW}_{n-d+1}, \ldots, \sigma_1^{N(r)+d-t+c} \times \mathbf{PW}_{n-t+c}$$

*est vide.*

4) *Pour* $0 \leqslant k \leqslant d - t + c$, *la variété polaire générale associée au cycle* $\sigma_1^{N(r)+k}$ *est équimultiple le long de* Y ; *de plus son image par la projection de noyau* $W_{n-d+k-1}$ *est équimultiple le long de la projection de* Y.

8.8.2. *Démonstration.* – La nouveauté par rapport à la proposition précédente est le fait que les cycles questeurs sont spéciaux. La simple application du lemme de Bertini-Kleiman ne suffit pas.

Il faut donc montrer que (1) entraîne (3). Si $D_Y$ est équidimensionnel au-dessus de Y, la condition $\mathbf{a}_f$ est satisfaite (cf. [6]). Le cycle $D_0$ est donc inclus dans $\mathrm{Grass}(r-t, n-t) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$.

Dans cette variété le groupe G a trois orbites :

– La variété d'incidence I des couples $(T, l)$ tels que $l \subset T$.

– Son complémentaire dans $\mathrm{Grass}(r-t, n-t) \times \mathbf{P}^{n-t-1}$ (ensemble des couples $(T, l)$ tels que $l$ est incluse dans $\mathbf{C}^n/Y_0$).

– L'orbite dense, complémentaire de

$$\mathrm{Grass}(r-t, n-t) \times \mathbf{P}^{n-t-1}$$

dans $\mathrm{Grass}(r-t, n-t) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$.

Dans les deux dernières orbites, les cycles questeurs sont de codimension égale à la dimension de $D_0$ augmentée de 1, mais de codimension égale à $\dim(D_0)$ dans la variété d'incidence I.

Cependant, en utilisant le lemme de transversalité 8.6.2 on voit qu'aucune composante de $D_0$ n'est contenue dans $I$, ce qui prouve que $D_0$ est évité par un translaté général des cycles considérés.

8.8.3. *Remarque.* – On choisit un système de coordonnées sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s$ étendant un système de coordonnées sur $Y$. Il induit des coordonnées homogènes $(\chi_1, \ldots, \chi_{n-t}, \nu_1, \ldots, \nu_c)$ sur $\mathbf{P}^{n-t-1+c}$ et des coordonnées de Plücker $(a_I, |I| = n - r)$ sur $\mathrm{Grass}(r, n)$. Lorsque $r = n - 1$ on parlera plutôt des coordonnées conormales

$$\eta_1, \ldots, \eta_{n-t}, \eta_{y_1}, \ldots, \eta_{y_t}.$$

Deux cas retiendront surtout notre attention : $r = d$ et $r = n - 1$.

8.8.3.1. $r = d$ : $R^d(f)$ est le transformé de Nash relatif de $f$.

L'idéal engendré par les coordonnées de Plücker :

$$a_{j, j+1, \ldots, n-d+j-1} \quad \text{ou} \quad 1 \leqslant j \leqslant k$$

définit (voir 7.3) un représentant de $\sigma_1^k$ dans $\mathrm{Grass}(d, n)$. L'idéal engendré par les produits :

$$\chi_j \, a_{j, j+1, \ldots, n-d+j-1} \quad \text{ou} \quad 1 \leqslant j \leqslant d - t + c$$

définit donc une somme à coefficients strictement positifs des classes des cycles :

$$\mathrm{Grass}(d, n) \times \mathrm{PW}_{n-d}, \ \sigma_1 \times \mathrm{PW}_{n-d+1}, \ldots, \sigma_1^{d-t+c} \times \mathbf{PW}_{n-t+c}\,.$$

8.8.3.2. $r = n - 1$ : $R^{n-1}(f)$ est le conormal relatif de $f$.

L'idéal engendré par les coordonnées conormales $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ définit un représentant de la classe du cycle $\sigma_1^k$ que nous noterons plutôt, dans ce cas, $\mathrm{P\check{V}}_k$. L'idéal engendré par les produits :

$$\chi_1 \eta_1, \chi_2 \eta_2, \ldots, \chi_{n-t-1+c}\, \eta_{n-t-1+c}$$

définit dans le produit $\mathbf{P}^{n-t-1+c} \times \mathrm{Grass}(r, n)$ une somme à coefficients strictement positifs des classes des cycles :

$$\mathbf{P\check{V}}_{n-1-d} \times \mathbf{PW}_{n-d}, \ \mathbf{P\check{V}}_{n-d} \times \mathbf{PW}_{n-d+1}, \ldots, \ \mathbf{P\check{V}}_{n-t-1+c} \times \mathbf{PW}_{n-t+c}\,.$$

## IV. CONDITIONS DIFFERENTIELLES

Nous revenons au programme que nous nous étions fixé dans l'introduction : comment, à partir d'une condition de régularité de type algébrique ou numérique, déterminer une condition de type différentiel qui lui soit équivalente et donner ainsi un modèle pour les théorèmes de comparaison ?

Nous nous placerons désormais dans la situation suivante : Etant donné un germe en O de morphisme analytique $f: X \longrightarrow S$ équidimensionnel et de corang constant $d$ sur un ouvert dense $X^0$ de X et un sous-espace analytique lisse Y dans X sur lequel $f$ est de corang constant $t$, – on choisit un prolongement relatif de X dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$ de telle sorte que $f$ soit induit par la projection sur $\mathbf{C}^p$.

Si S est de dimension $s$ avec $s < p$, on remplace X par une projection linéaire générale sur un espace $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s$ et $f$ par le morphisme induit par la projection $\pi$ sur $\mathbf{C}^s$.

On considère le groupe G des transformations linéaires de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s$ qui sont compatibles avec $\pi$ et qui conservent globalement Y. On choisit un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_{n-t}, v_1, \ldots, v_c$ sur $(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^s)/Y$, tel que l'idéal $(v_1, \ldots, v_c)$ définisse $f(Y)$.

Nous dirons qu'un tel système est général s'il est un translaté général par l'action de G.

Sur le produit $\mathrm{Grass}(r, n) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$, nous considèrerons toujours dans ce paragraphe l'action diagonale de $G \times G$.

### 9. Conditions de régularité liées au conormal.

Nous allons maintenant considérer plusieurs cas :

9.1. *L'image de* Y *par* $f$ *est égale à* S.

On connait les conditions $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{w}_f$ pour un couple $(X^0, Y)$ au voisinage de O. Nous introduisons ici une nouvelle condition notée $\mathbf{b}_f$ relative au morphisme $f$ :

9.1.1. DEFINITION. — *Le couple* $(X^0, Y)$ *satisfait la condition* $\mathbf{b}_f$ *en* O, *si au voisinage de* O, *la fonction* $d(l, T_x f)$ (*où* $l$ *est la normale à* Y *passant par* $x$, *et où* $T_x f$ *est un hyperplan tangent relatif à* $f$ *en* $x$), *tend vers* 0 *quand le point* $x$ *tend vers le point* O *de* Y.

9.1.1.1. *Remarques.* — La démonstration du théorème 9.1.2 montrera que cette condition est indépendante des divers choix effectués pour son expression.

Une fois choisis des systèmes de coordonnées $(y_1, \ldots, y_t)$ sur la fibre $\pi^{-1}(O) \cap Y$, $(y_{t+1}, \ldots, y_s)$ sur $f(Y)$, complétés par $(x_1, \ldots, x_{n-t})$ sur $\pi^{-1}(O)$ la condition $\mathbf{b}_f$ s'exprime par le fait que la quantité :

$$\frac{\sum_i x_i \eta_i}{\sup(|x|, |v|) \sup(|\eta_i|, \ldots, |\eta_{n-t}|, |\eta_{y_1}|, \ldots, |\eta_{y_t}|)}$$

où les coordonnées conormales sont désignées par $\eta$, tend vers 0 lorsque $x$ et $v$ tendent vers 0.

Cette condition, à l'instar de la condition $\mathbf{b}$ , passe aux dirimants généraux *pourvu que la direction de projection soit transverse à* X, (ce qui est le cas, à cause du lemme de transversalité 8.6.2).

On a le résultat suivant :

9.1.2. THEOREME. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le morphisme* $D_Y^{n-1} \longrightarrow Y$ *est équidimensionnel.*

2) *Les variétés polaires générales du morphisme* $f$ *associées aux cycles* $\check{\mathbf{P}}\mathrm{V}_i$, $(n - d - 1 \leqslant i \leqslant n - 1)$, *sont équimultiples le long de* Y.

3) *Les dirimants généraux relatifs du morphisme* $f$ *sont équimultiples le long des projections respectives de* Y.

4) *Si* $x_1, \ldots, x_{n-t}$ *est un système de coordonnées générales dans l'espace quotient* $\mathbf{C}^n / Y_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-t}$ *les coordonnées conormales correspondantes, la quantité :*

$$\frac{\sup(|x_1 \eta_1|, \ldots, |x_{n-t-1} \eta_{n-t-1}|)}{\|x\| \, \|\eta\|}$$

*est bornée inférieurement par une constante strictement positive sur* $X^0$ *au voisinage de* O.

5) *Le couple* $(X^0, Y)$ *vérifie les conditions* $\mathbf{a}_f$ *et* $\mathbf{b}_f$.

6) *Le couple* $(X^0, Y)$ *vérifie les conditions* $\mathbf{w}_f$ *et* $\mathbf{b}_f$.

9.1.3. *Remarques.* – Lorsque S est un point, il est bien connu et facile que (6) est équivalente à la seule condition $\mathbf{w}$.

Lorsque $f$ est un isomorphisme local de Y sur S les conditions $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{w}_f$ sont vides.

Considérons l'exemple suivant : Soient X défini dans $\mathbf{C}^3$ par $x_1^2 - yx_2^2 = 0$ et Y défini par $x_1 = x_2 = 0$.

Si $f$ est le morphisme $(x_1, x_2, y) \longrightarrow y$, il vérifie évidemment $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{b}_f$. Notons que $f$ n'a pas de cycles évanescents et que $(X^0, Y)$ ne satisfait pas la condition $\mathbf{a}$ de Whitney en O.

*Démonstration.* – L'équivalence de (1) et (2) a été montrée dans la proposition 8.7, de même que l'implication de (3) par (1).

Traitons de l'équivalence de (1) et (4) : La fonction $\phi$ :

$$\frac{\sup(|x_1 \eta_1|, \ldots, |x_{n-t-1}\, \eta_{n-t-1}|)}{\sup |x| \sup |\eta|}$$

se remonte sur $E_Y\, R^{n-1}(f)$ en une fonction qui sur $D_0$ coïncide avec la fonction

$$\frac{\sup(|\chi_1 \eta_1|, |\chi_2 \eta_2|, \ldots, |\chi_{n-t-1}\, \eta_{n-t-1}|)}{\sup |\chi_i| \sup |\eta_i|}.$$

Or cette dernière est homogène de degré 0, et ne s'annule que sur un translaté général par G d'un cycle questeur en codimension $n - t - 1$.

Si le morphisme $D_Y^{n-1} \longrightarrow Y$ est équidimensionnel, ce cycle ne rencontre pas $D_0$, la fonction $\phi$ ne s'annule pas sur $D_0$, l'ensemble de ses zéros ne coupe pas $D_0$, donc comme le morphisme de $E_Y\, R^{n-1}(f)$ dans X est propre, elle ne s'annule pas. La fonction $\phi$ est alors bornée inférieurement par une constante strictement positive, ce qui est la condition (4).

Réciproquement, si $\phi$ est minorée par une constante strictement positive, sa remontée sur $D_0$ ne s'annule pas, donc le cycle questeur, lieu de ses zéros, ne rencontre pas $D_0$ qui est donc de dimension au plus $n - t - 1$.

D'autre part (6) entraîne évidemment (5).

9.1.4. Montrons que (1) entraîne (6).

On normalise $E_Y(R^r(f))$ et on se place en un point $p$ d'une composante N de l'image inverse de $D_Y^{n-1}$. Cette composante se surjecte sur Y. On peut choisir $p$ en dehors des transformées strictes des hypersurfaces de X définies par $x_i = 0$ de façon que N, $E_Y(R^r(f))$ et le morphisme $N \longrightarrow Y$ soient lisses en $p$.

On peut donc prendre un système de coordonnées en ce point $p$ :

$$(u, y_1, \ldots, y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+s}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-2-t})$$

qui relève un système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_{t+s})$ sur Y et tel que N soit défini localement par la fonction $u^\alpha$ générateur de l'idéal $(x_1, \ldots, x_{n-t})$ au voisinage de $p$.

Les relations suivantes sont vérifiées localement sur N :

$$\eta_{y_j} + \sum_{i=1}^{n-t} \eta_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n-t} \eta_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0 .$$

Notons que $\partial x_i / \partial y_j$ est dans l'idéal engendré par $u^\alpha$ au voisinage de $p$. Considérons sur le normalisé de $E_Y(R^{n-1}(f))$ les sections du fibré

$$\mathcal{O}_{\check{P}^{n-t-1}}(1) \otimes \mathcal{O}_{P^{n-1}}(1)$$

définies par $\eta_{y_j}/x_e \eta_k$ (resp. $\Sigma_i x_i \eta_i / x_e \eta_k$) dans la carte où $x_e$ engendre l'idéal de Y et où la coordonnée homogène $\eta_k$ ne s'annule pas. Les relations ci-dessus montrent :

– que ces sections méromorphes sont localement bornées en dehors d'un ensemble de codimension 2, donc holomorphes ; leurs valeurs absolues sont des fonctions définies sur X ;

– que la fonction $|\eta_{y_j}| / \sup |x_i| \sup |\eta_i|$ est donc bornée sur X ;

– que la fonction $|\Sigma_i x_i \eta_i| / \sup |x_i| \sup |\eta_i|$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0.

9.1.5. Montrons que (3) entraîne (5).

On procède par récurrence sur la dimension des dirimants du morphisme $f$.

Sur le normalisé N de $E_Y(R^{n-1}(f))$ les fonctions :

$$d(Y, T_x f) \quad \text{et} \quad d(Ox, T_x f)$$

qui servent à définir les conditions $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{b}_f$, se remontent en des sections méromorphes d'un fibré en droites. Si l'une des deux conditions est en défaut, il existe au moins une composante K de $D_Y^{n-1}$ et un ouvert dense U de K sur lequel la section correspondante ne s'annule pas.

De plus, la composante K en question ne peut se surjecter sur Y puisque $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{b}_f$ sont vérifiées au point général de Y.

Supposons que U ne soit pas vide.

Si X est une hypersurface relative, il suffit de trouver un plan $V_1$ tel que $\check{V}_1$ coupe U au-dessus de $\check{\mathbf{P}}^{n-t-1}$ pour avoir une contradiction, l'hypothèse de récurrence, appliquée à $\Delta(V_1)$ montre que la section incriminée s'annule aux points de $U \cap \check{V}_1$.

Si on ne trouve pas de tel $V_1$, c'est que la fibre $K_0$ de K se projette sur $\check{\mathbf{P}}^{n-t-1}$ en dimension 0. Or comme X est équimultiple, $K_0$ est de dimension au plus $n-t-1$ ce qui est impossible puisqu'alors K serait équidimensionnelle au dessus de Y.

Si X n'est pas une hypersurface, U est nécessairement rencontré par un translaté général de $V_{n-d-1}$ et on utilise l'hypothèse de récurrence sur $\Delta(V_{n-d-1})$.

9.1.6. Il reste à montrer que (5) entraîne (1).

La démonstration se fait en deux temps. On remarque d'abord qu'il suffit de montrer ce résultat quand Y est de dimension 1 ; en effet, dans le cadre analytique complexe où nous nous sommes placés, la condition (1) équivaut à l'équimultiplicité des variétés polaires générales le long de Y (voir 8.5) ; mais ceci est une condition qu'il suffit de vérifier le long de toute droite $Y_1$ de Y. On se ramène au cas où Y est de dimension 1 en coupant X par un plan de codimension $\dim(Y) - 1$, contenant $Y_1$ et transverse à toutes les limites de tangents relatifs à $f$.

On montre maintenant que (5) implique (1) quand Y est de dimension 1 ; en fait il est plus simple de montrer (4), dont nous avons déjà montré l'équivalence avec la condition (1). Dans le cas où Y est de dimension 1, la dimension de la fibre au-dessus de O de $D_Y^{n-1}$ est au pire un de trop, i.e. un de plus que la dimension de la fibre générale, soit $n-t$. D'après le lemme de transversalité 8.6.2, aucune composante de $D_0$ n'est dans la variété d'incidence I de $\check{\mathbf{P}}^{n-2} \times \mathbf{P}^{n-2}$.

La condition $\mathbf{a}_f$ impose à $D_0$ d'être dans $\check{\mathbf{P}}^{n-2} \times \mathbf{P}^{n-2}$.

Le cycle défini par l'idéal $(x_1\eta_1, \ldots, x_{n-1}\eta_{n-1})$ ne peut donc couper $D_0$. On a donc majoré

$$\|x\| \; \|\eta\| \quad \text{par} \quad \sup(|x_1\eta_1|, \ldots, |x_{n-1}\eta_{n-1}|).$$

La condition $\mathbf{b}_f$ entraîne évidemment que

$$|x_{n-t}\eta_{n-t}| \leqslant \sup(|x_1\eta_1|, \ldots, |x_{n-t-1}\eta_{n-t-1}|)$$

d'où la condition (4).

□

9.2. *L'image de* Y *par* $f$ *est de codimension* 1 *dans* S.

On dispose d'un système de coordonnées $v, x_1, \ldots, x_{n-t}$ dans $\mathbf{C}^{n+s}/Y$ où $v$ est une équation de $f(Y)$ dans S.

Soient $\eta_1, \ldots, \eta_{n-t}$ les coordonnées conormales correspondantes relatives à $f$.

Dans ce contexte nous avons :

9.2.1. THEOREME. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le morphisme* $D_Y^{n-1} \longrightarrow Y$ *est équidimensionnel.*

2) *Les variétés polaires générales du morphisme* $f$ *associées aux cycles* $\mathbf{P}\check{V}_i$, $(n-d-1 \leqslant i \leqslant n-1)$, *sont équimultiples le long de* Y.

3) *Les dirimants généraux relatifs du morphisme* $f$ *sont équimultiples le long des projections respectives de* Y.

4) *Pour presque tout système de coordonnées la fonction :*

$$\sup\left(\frac{|x_1\eta_1|}{\|x\| \; \|\eta\|}, \ldots, \frac{|x_{n-t}\eta_{n-t}|}{\|x\| \; \|\eta\|}\right)$$

*est bornée inférieurement sur* $X^0$, *au voisinage de* O, *par une constante strictement positive.*

*Démonstration.* – La proposition 8.7 montre d'une part l'équivalence des propriétés (1) et (2), d'autre part l'implication de (3) par (1). En procédant comme dans le théorème 9.1.2, on montre que (1) est équivalente à (4).

Il reste à voir que (3) entraîne (1).

Encore une fois, on procède par récurrence sur la dimension relative du morphisme $f$. Nous supposons donc que les dirimants généraux du morphisme $f$ vérifient la condition (1).

Quitte à couper toute la situation par un plan général passant par une droite donnée de Y nous pouvons supposer que Y est de dimension 1 (la condition $\mathbf{a}_f$ est en effet vérifiée sous l'hypothèse (3)).

Supposons que la condition (3) soit réalisée, sans que (1) le soit.

Il existe alors une composante Z de $D_0$ de dimension $n - t$.

9.2.1.1. X est une hypersurface relative.

Z ne peut se projeter sur $\check{\mathbf{P}}^{n-t-1}$ en dimension 0 ; en effet X est alors une hypersurface relative équimultiple le long de Y (d'après (3)) et la dimension de Z est alors majorée par $n - t - 1$ ;

Soit $j$, $(j < n - t - 1)$ la dimension minimum des fibres de la projection $p$ de Z sur son image dans $\check{\mathbf{P}}^{n-t-1}$.

Soit L un point générique de $p(Z)$ et $V_1$ une droite générale de L. La projection de sommet $\mathbf{P}(V_1)$ restreinte à la fibre $Z_L$ ne peut être finie à cause de l'hypothèse de récurrence utilisée sur $\Delta(V_1)$. Il s'ensuit que $Z_L$ contient $\mathbf{P}$L.

On a donc $j = n - t - 2$ et Z est la restriction de la variété d'incidence I de $\check{\mathbf{P}}^{n-t-1} \times \mathbf{P}^{n-t-1}$ au-dessus de $p(Z)$. La projection de $Z \cap \mathbf{P}(\check{V}_1) \times \mathbf{P}^{n-t}$ depuis $\mathbf{P}(\check{V}_1) \times \mathbf{P}(V_1)$ est de dimension $\dim(Z) - 2$ au moins égale à $n - t - 2$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $\Delta(V_1)$ alliée au lemme de transversalité 8.6.2 montre que cette projection, contenue dans la variété d'incidence de $\check{\mathbf{P}}^{n-t-2} \times \mathbf{P}^{n-t-2}$ est de dimension au plus $n - t - 3$. D'où la contradiction recherchée.

9.2.1.2. La dimension relative $d$ des fibres de $f$ est strictement inférieure à $n-1$.

La dimension de la projection $p(\mathrm{Z})$ de Z sur $\check{\mathbf{P}}^{n-t-1}$ est au moins $n-d-1$. Il existe un ouvert U de la grassmannienne $\mathrm{Grass}(n-d-1, n-t)$ tel que tout élément $\mathrm{V}_{n-d-1}$ de U coupe $p(\mathrm{Z})$.

Soit $\mathrm{Z_L}$ une fibre générique de la projection $p$ restreinte à Z. Notons $j$ sa dimension $(j \leqslant d-t+1)$.

L'équimultiplicité du dirimant $\Delta(\mathrm{V}_{n-d-1})$ le long de la projection de Y entraîne celle de X le long de Y (comme X est équidimensionnel au-dessus de S, l'intersection de X avec $\mathrm{V}_{n-d-1} \times \mathrm{Y}$ est réduite à Y et l'image inverse d'une droite générale de $\mathbf{C}^{d-t+1+c}$ est un plan général de $\mathbf{C}^{n-t+c}$). Le nombre $j$ est donc majoré par $d-t$.

Pour un plan général $\mathrm{V}_{n-d-1}$ contenu dans L, l'hypothèse de récurrence appliquée à $\Delta(\mathrm{V}_{n-d-1})$ montre que la projection de $\mathrm{Z_L}$ depuis $\mathbf{P}\mathrm{V}_{n-d-1}$ est de dimension au plus $d-t-1$.

On en déduit que $\mathrm{Z_L}$ est un cône de sommet $\mathrm{Z_L} \cap \mathbf{P}\mathrm{V}_{n-d-1}$ pour tout $\mathrm{V}_{n-d-1}$ dans L, donc que $\mathrm{Z_L}$ intersecte $\mathbf{P}\mathrm{L}$ le long d'un sous-espace linéaire de dimension au moins $d-t$. Ceci montre que $j = d-t$.

$\mathrm{Z_L}$ est un plan de dimension $d-t$ contenu dans $\mathbf{P}\mathrm{L}$ et son intersection avec $\mathbf{P}\mathrm{V}_{n-d-1}$ est de dimension 0, pour $\mathrm{V}_{n-d-1}$ général dans L. La projection de $\mathrm{Z} \cap (\mathbf{P}\check{\mathrm{V}}_{n-d-1} \times \mathbf{P}^{n-t})$ depuis le sommet $\mathbf{P}\check{\mathrm{V}}_{n-d-1} \times \mathbf{P}\mathrm{V}_{n-d-1}$ est de dimension $d-t$ et contenue dans la variété d'incidence de $\check{\mathbf{P}}^{d-t} \times \mathbf{P}^{d-t}$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence appliquée à $\Delta(\mathrm{V}_{n-d-1})$.

$\square$

9.3. *L'image de* Y *par* $f$ *est de codimension* $c > 1$ *dans* S.

Avec les notations du début du paragraphe 9 nous avons :

9.3.1. THEOREME. – *Si le morphisme* $f$ *est sans éclatement en codimension* 0, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le morphisme* $\mathrm{D}_{\mathrm{Y}}^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *est équidimensionnel.*

2) *Les variétés polaires générales du morphisme* $f$ *associées aux cycles* $\mathbf{P}\check{\mathrm{V}}_i$, $n-d-1 \leqslant i \leqslant n-1$ *sont équimultiples le long de* Y.

3) *Pour presque tout système de coordonnées la fonction :*

$$\sup\left(\frac{|x_1\eta_1|}{\|x\|\ \|\eta\|},\ldots,\frac{|x_{n-t}\eta_{n-t}|}{\|x\|\ \|\eta\|},\frac{|x_{n-t+1}|}{\|x\|},\ldots,\frac{|x_{n-t-1+c}|}{\|x\|}\right)$$

*est bornée inférieurement sur* $X^0$, *au voisinage de* O, *par une constante strictement positive.*

*Démonstration.* – On a prouvé dans la proposition 8.5 que (1) et (2) sont équivalents. En procédant comme dans le théorème 9.2.1 on prouve que (1) équivaut à (3).

□

9.3.2. Le point important, ici, est que la transversalité de la polaire associée à $\mathbf{P}\check{V}_{n-d+k}$ et de $V_{n-d+k}$ n'est pas toujours vérifiée.

Penser par exemple, au morphisme de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^2$ donné par deux fonctions d'ordre au moins 2. Dans $\mathbf{C}^{n+2}$ le cône tangent au graphe est égal à $\mathbf{C}^n \times \{0\}$.

9.3.3. La propriété (1) n'entraîne pas et n'est pas non plus impliquée par l'équimultiplicité des dirimants du morphisme $f$. Considérons les deux exemples suivants :

9.3.3.1. X est défini dans $\mathbf{C}^5$ par les équations :

$$uy = x_1^2 + x_2^2$$
$$v = x_2^2$$

Y est la droite $x_1 = x_2 = u = v = 0$.

Le morphisme $f : X \longrightarrow \mathbf{C}^3$ induit par la projection linéaire $\pi$ de noyau $y = u = v = 0$ est un morphisme fini ; la propriété (1) est donc équivalente à l'équimultiplicité de X le long de Y. Comme X est lisse au voisinage de Y, (1) est satisfaite.

On vérifie facilement que le dirimant de $f$ associé à une droite générale $V_1$ du plan $\pi^{-1}(0)$ n'est pas équimultiple le long de $\pi(Y)$.

9.3.3.2. X est cette fois défini par :

$$u = yx_1 + x_1^2$$
$$v = x_2^2 .$$

La même projection $k$ induit un morphisme $g$ fini sur $\mathbf{C}^3$. Cette fois (1) n'est pas vérifiée puisque X n'est pas équimultiple le long de Y. En revanche le dirimant associé à une droite générale $V_1$ de $\pi^{-1}(0)$ est équimultiple le long de $\pi(Y)$.

9.3.4. La condition (1) n'est pas stable par changement de base, ni même par restriction à un sous-espace lisse contenant $f(Y)$ comme diviseur. Il suffit de reprendre l'exemple (*a*) en restreignant $f$ au-dessus de $v = uy$.

9.3.5. Dans le cas où $f(Y)$ est réduit à un point, on a montré dans [6] que (1) est équivalent à l'équimultiplicité des dirimants de $f$ et à la condition $\mathbf{w}_f$ pour le couple de strates $X^0$, Y.

## 10. Conditions de régularité liées au transformé de Nash.

10.1. *L'image de* Y *par* $f$ *est égale à* S.

On reprend les notations du paragraphe précédent.

10.1.1. DEFINITION. — *Le couple de strates* $X^0$, Y *vérifie la condition* $\boldsymbol{\beta}_f$ *au voisinage de* O *s'il existe un système de coordonnées général tel que pour tout sous-ensemble* I *de cardinal* $n - d - 1$ *la quantité :*

$$\frac{\sum_i x_i a_{I \cup \{i\}}}{\sup(|x_1 a_{1,\dots,n-d}|, \dots, |x_{d-t} a_{d-t,\dots,n-t-1}|)}$$

*tend vers* 0 *quand le point de coordonnées* $(x_i)$ *tend vers* O.

*Remarques.* —

10.1.2. *La condition* $\boldsymbol{\beta}_f$ *entraîne la condition* $\mathbf{b}_f$.

En effet si pour tout ensemble I de cardinal $n - d - 1$

$$\frac{\sum_i x_i a_{I \cup \{i\}}}{\|x\| \ \|a\|}$$

tend vers 0 la limite de sécante est incluse dans la limite de plan tangent.

10.1.3. On suppose la condition $\mathbf{b}_f$ satisfaite par le couple $(X^0, Y)$. Pour tout ensemble I de cardinal $n-d-1$, on note $V_{n-d-1}$ le plan des coordonnées indiciées par I, et on applique la condition $\mathbf{b}_f$ aux hyperplans tangents contenant $V_{n-d-1}$ ; la quantité :

$$\sum_i x_i\, a_{I\cup\{i\}}$$

tend strictement plus vite vers 0 que la quantité

$$\|x\| \sup |a_{I\cup\{i\}}|$$

qui, elle, est évidemment majorée par $\|x\|\ \|a\|$.

On a le théorème suivant :

10.1.4. THEOREME. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le morphisme* $D^d_Y \longrightarrow Y$ *est équidimensionnel.*

2) *Les variétés polaires générales du morphisme* $f$ *sont équimultiples le long de* $Y$.

3) *Sur* $X^0$, *au voisinage de* $O$, *et pour presque tout choix du système de coordonnées la fonction :*

$$\frac{\sup(|x_1 a_{1,\ldots,n-d}|, \ldots, |x_{d-t} a_{d-t,\ldots,n-t-1}|)}{\|x\|\ \|a\|}$$

*est bornée inférieurement par une constante strictement positive.*

4) *Le couple* $(X^0, Y)$ *vérifie les conditions* $\mathbf{a}_f$ *et* $\boldsymbol{\beta}_f$ *au voisinage de* $O$.

*Démonstration.* – La proposition 8.7 montre l'équivalence des propriétés (1) et (2). En procédant comme dans le théorème 9.1.2, on montre l'équivalence de (1) et de (3).

Si la propriété (2) est satisfaite, les variétés polaires associées aux cycles $\sigma_{1,1,\ldots,1}$ sont équimultiples ; en utilisant le théorème 9.1.2 on voit que le couple $(X^0, Y)$ vérifie $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{b}_f$ donc au vu de (3) et de la remarque 10.1.3, les conditions $\mathbf{a}_f$ et $\boldsymbol{\beta}_f$.

Il reste à voir que la propriété (4) entraîne (1). Nous procédons par récurrence sur la dimension de relative de $f$. Remarquons d'abord que si X a même dimension que Y, comme la condition (4) entraîne $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{b}_f$, X est réduit à Y.

D'autre part nous pouvons couper toute la situation par des plans transverses à Y, de façon à nous ramener à Y de dimension 1 ; en effet la condition (2), équivalente à (1) et que nous voulons montrer, peut se tester en coupant par des plans transverses à Y, et les conditions $\mathbf{a}_f$ et $\boldsymbol{\beta}_f$ se restreignent de façon évidente à de telles sections.

Nous avons donc à montrer qu'il n'existe pas de composantes Z de $D_Y^d$ au-dessus de O de dimension excédentaire, donc de dimension $d-t$. Les composantes de $D_0$ sont de deux types :

Soit elles se projettent sur $\mathbf{P}^{n-t-1}$ en dimension au moins 1. On peut alors les couper au-dessus de $\mathbf{P}^{n-t-1}$ par un cycle de codimension 1.

On considère alors une section de X par un hyperplan générique passant par Y. Le lemme de transversalité 8.6.2 peut s'appliquer puisque les conditions $\mathbf{a}_f$ et $\mathbf{b}_f$ sont satisfaites par le couple $(X^0, Y)$ ; il existe donc un ouvert dense d'hyperplans H passant par Y et tels que les limites de plans tangents à X le long de chemins de $X \cap H$ soient transverses à H. Les couples de limites $(l, T)$ avec $l \subset H$ se projettent par un morphisme fini $\mathrm{sec}_H$ sur les couples de limites $(l, T_1)$ où $T_1$ est une limite de plans tangents à $X \cap H$.

Pour un tel hyperplan H, les conditions $\mathbf{a}_f$ et $\boldsymbol{\beta}_f$ se transmettent à $X \cap H$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $X \cap H$, ce qui entraîne que l'image de $Z \cap q^{-1}(\mathbf{P}(H/Y))$ par le morphisme $\mathrm{sec}_H$ est de dimension au plus $d-t-2$ ; donc Z est de dimension au plus $d-t-1$.

Reste le cas des composantes Z qui se projettent sur un point de $\mathbf{P}^{n-t-1}$ c'est-à-dire qui correspondent à une unique limite de sécante, $l_0$. Remarquons que la projection de Z sur $\mathrm{Grass}(d, n)$ est alors de dimension $d-t$. Un translaté général d'un cycle $\sigma_1^{d-t}$ défini par l'idéal $(a_{1,\ldots,n-d}, \ldots, a_{d-t,\ldots,n-t-1})$ coupe Z, donc $E_Y R^d(f)$ au-dessus de $\mathrm{Grass}(d, n)$. Le long de l'intersection, nous avons

$$\sum_i x_i a_{I \cup \{i\}} = 0$$

pour tout ensemble I de cardinal $n-d-1$ ; ce qui montre que le plan tangent en $x$ à X passe par l'origine O lorsque $x$ parcourt une partie dense (pour la topologie de Zariski) de X supposé irréductible.

On montre alors que X est un cône de sommet Y ; comme la condition $\mathbf{a}_f$ est vérifiée, les limites en O de plans tangents relatifs à $f$ s'identifient aux limites des intersections de ces mêmes plans avec l'espace normal à Y en O.

Or, ces intersections sont constantes le long des génératrices de X. Il s'ensuit que Z s'identifie aux limites de tangents relatifs à $\mathbf{P}X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{P}l_0$ qui sont de dimension au plus $d - t - 1$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Z.

□

10.2. *L'image de* Y *par* $f$ *est de codimension* $c \geqslant 1$ *dans* S.

Dans ce contexte, en considérant la proposition 8.7 et la caractérisation des cycles questeurs du produit

$$\mathrm{Grass}\,(d\,,n) \times \mathbf{P}^{n-t-1+c}$$

en codimension $d - t + c$, on a le résultat suivant :

10.2.1. THEOREME. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le morphisme* $D_Y^d \longrightarrow Y$ *est équidimensionnel.*

2) *Les variétés polaires générales du morphisme* $f$ *sont équimultiples le long de* Y.

3) *Au voisinage de* O, *pour presque tout choix du système de coordonnées, la quantité :*

$$\sup\left(\frac{|x_1 a_{1,\dots,n-d}|}{\|x\|\ \|a\|},\dots,\frac{|x_{d-t}a_{d-t,\dots,n-t-1}|}{\|x\|\ \|a\|},\frac{|x_{n-t+1}|}{\|x\|},\dots,\frac{|x_{n-t-1+c}|}{\|x\|}\right)$$

*est bornée inférieurement par une constante strictement positive.*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BRIANÇON & J.-P. SPEDER, Les conditions de Whitney impliquent $\mu^*$ constant, *Ann. Inst. Fourier*, 26-2 (1976), 153-163.

[2] W. FULTON, Intersection Theory, *Ergebnisse der Mathematik*, 3 Folge, Band 2, Springer Verlag, 1984.

[3] P. GRIFFITHS & J. HARRIS, Principles of Algebraic Geometry, *Wiley-interscience*, 1978.

[4] J.-P. HENRY & M. MERLE, Limites d'espaces tangents et transversalités polaires. *Actes de la conférence de la Rabida*, Springer, Lecture Notes, 961.

[5] J.-P. HENRY & M. MERLE, Limites de normales, conditions de Whitney et éclatment d'Hironaka *Proc. A.M.S. Summer Institute on singularities*, Arcata, 1981.

[6] J.-P. HENRY, M. MERLE, C. SABBAH, Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4$^e$ série, 17 (1984).

[7] H. HIRONAKA, Normal cones in Analytic Whitney Stratifications, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 36, *P.U.F.*, 1970.

[8] H. HIRONAKA, Stratifications and Flatness in Real and Complex Singularities *Nordic Summer School*, Oslo, 1976 ; Sijthoff and Noordhoff, 1977.

[9] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, Micro-hyperbolic systems, *Acta Mathematica*, 142 (1979), 1-55.

[10] S. KLEIMAN, The Transversality of a General Translate, *Compositio Math.*, 28 (1984), 287-297.

[11] A. LASCOUX, Polynômes symétriques, foncteurs de Schur, et grassmanniennes, *Thèse*, Paris VII, 1977.

[12] D.T. LÊ & B. TEISSIER, Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, *Annals of Math.*, 114 (1981), 457-491.

[13] J.H. LIPMAN, Reduction, Blowing up and Multiplicities, *Proc. Conf. on Transcendental Methods in Commutative Algebra*, George Mason University, Decker, 1979.

[14] J. MATHER, Stratifications and Mappings, *Dynamical Systems, ed. by M. Peixoto*, Academic Press, 1973.

[15] V. NAVARRO, Conditions de Whitney et sections planes, *Inv. Math.*, 61, 3 (1980), 199-226.

[16] B. TEISSIER, Variétés polaires locales et conditions de Whitney, *C.R. Acad. Sci. Paris.*, Ser. A-B, 290 (1980).

[17] B. TEISSIER, Variétés polaires II, *Actes de la conférence de la Rabida, Lectures Notes*, 961, Springer.

[18] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 240-284.

[19] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, *Inv. Math.*, 36 (1976), 295-312.

[20] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, *Ann. of Math.*, 81 (1964), 496-549.

Manuscrit reçu le 28 juillet 1986.

J.-P. HENRY & M. MERLE,
Centre de Mathématiques
U.A. au CNRS n° 169
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex.