

ALAIN HÉNAUT

**Cycle exceptionnel de l'éclatement d'un idéal  
définissant l'origine de  $C^n$  et applications**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 3 (1987), p. 143-157

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_3\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_143_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# CYCLE EXCEPTIONNEL DE L'ÉCLATEMENT D'UN IDÉAL DÉFINISSANT L'ORIGINE DE $\mathbf{C}^n$ ET APPLICATIONS

par

Alain HENAUT

## 0. Introduction.

On note  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $\mathbf{C}\{z\} = \mathbf{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

Soit  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire de  $\mathbf{C}\{z\}$ , c'est-à-dire définissant l'origine de  $\mathbf{C}^n$  ( $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ ), alors  $I$  est engendré par  $n + p$  éléments de  $\mathbf{C}\{z\}$  notés  $f_1, f_2, \dots, f_{n+p}$  où  $p \geq 0$  et l'on peut supposer que l'on a un morphisme analytique fini  $f: U \rightarrow \mathbf{C}^{n+p}$  dont les composantes sont des représentants des  $f_i$  pour  $1 \leq i \leq n + p$  où  $U$  est un polydisque ouvert de  $\mathbf{C}^n$  centré en 0.

On désigne par  $\pi: Z \rightarrow U$  l'éclatement de  $U$  relativement à  $I$  et  $E = \text{Proj}(\bigoplus_{\nu \geq 0} I^\nu / I^{\nu+1})$  sa fibre exceptionnelle. On rappelle

que si  $\sigma: \mathbf{C}^{n+p} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^{n+p-1}$  est la surjection canonique,  $Z$  est l'adhérence dans  $U \times \mathbf{P}^{n+p-1}$  du graphe de l'application analytique  $F: U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^{n+p-1}$  définie par  $F(z) = \sigma[f(z)]$  et qu'ensemblément on a  $|E| = |\pi^{-1}(0)|$ ,  $\pi$  étant induit par la première projection.

Dans ce qui suit, on donne de "bonnes" équations de  $|E|$  et plus précisément on indique une méthode explicite, après un choix convenable des générateurs de  $I$ , pour déterminer le cycle  $X$  de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  sous-jacent à  $E$ . Pour cela, on montre (cf. § 4) que si  $C(f_*(U), 0)$  est le cycle tangent de Zariski au germe de cycle  $(f_*(U), 0)$  induit par image directe, alors on a

$$X = \text{Proj}[C(f_*(U), 0)];$$

il suffit alors, grâce aux § 2 et 3 d'utiliser les résultats de [6] pour déterminer  $X$ . On donne également un critère effectif pour

caractériser les éléments entiers sur un idéal  $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  engendré par un système de paramètres de  $\mathbf{C}\{z\}$  (cf. § 3); en particulier, on indique un procédé pour construire pour tout  $h \in \bar{I}$  où  $\bar{I}$  est la clôture intégrale de  $I$  dans  $\mathbf{C}\{z\}$ , une relation intégrale explicite de  $h$  sur  $I$ , de degré la multiplicité  $e(I)$  au sens de Samuel de l'idéal  $I$ . Au § 5, on s'intéresse à l'éclatement d'une famille d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace analytique réduit  $S$  et l'on montre que, sous l'hypothèse d'équimultiplicité relative, le germe d'application  $S \rightarrow \text{Chow}_{n-1}^k(\mathbf{P}^q)$  défini par les cycles exceptionnels des éléments de la famille est analytique.

1. Remarques préliminaires.

Le morphisme fini  $f: U \rightarrow \mathbf{C}^{n+p}$  induit un morphisme fini et surjectif d'espaces analytiques complexes réduits et irréductibles, noté encore  $f: U \rightarrow V$ , où  $V = f(U)_{\text{red}}$ . On note  $\mathfrak{m}_V$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{V,0}$ , alors via  $f$  on a  $\mathfrak{m}_V \cdot \mathbf{C}\{z\} = I$  et d'après la propriété universelle des éclatements on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 U \times \mathbf{P}^{n+p-1} \supset Z & \xrightarrow{f \times \text{id}|_Z} & \tilde{V} \subset V \times \mathbf{P}^{n+p-1} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi_V \\
 U & \xrightarrow{f} & V \subset \mathbf{C}^{n+p}
 \end{array}$$

(\*)

où  $\pi_V: \tilde{V} \rightarrow V$  est l'éclatement de  $V$  relativement à l'idéal  $\mathfrak{m}_V$ . On a  $\pi_V^{-1}(0) = \text{Projan} \left( \bigoplus_{\nu \geq 0} \mathfrak{m}_V^\nu / \mathfrak{m}_V^{\nu+1} \right) = \text{Proj}(\mathbf{C}(V, 0))$  où  $\mathbf{C}(V, 0)$  est le cône tangent de Zariski de  $V$  en  $0$ .

PROPOSITION 1. — On a  $|\pi^{-1}(0)| = |\pi_V^{-1}(0)|$ .

Démonstration. — On a  $|\pi^{-1}(0)| \subset |\pi_V^{-1}(0)|$  car le diagramme

(\*) est commutatif. Inversement, soit  $(0, \sigma(y)) \in \pi_V^{-1}(0)$ , alors  $y \in C(V, 0) \setminus (0)$  et d'après ([10]), p. 210) il existe une suite  $(y_k) \in V \setminus (0)$  et une suite  $(\lambda_k) \in \mathbf{C}^*$  telles que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k y_k = y$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0$ . Pour tout  $k$ , soit  $z_k \in U$  tel que  $f(z_k) = y_k$ ; puisque  $f$  est propre et  $f^{-1}(0) = 0$ , il existe une suite extraite  $(z_{k_s}) \in U \setminus (0)$  telle que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} z_{k_s} = 0$ . On a alors

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma[f(z_{k_s})] = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(\lambda_{k_s} y_{k_s}) = \sigma(y).$$

On a donc  $|\pi_V^{-1}(0)| \subset |\pi^{-1}(0)|$ , ce qui prouve le résultat.

L'espace analytique  $E = (f \circ \pi)^{-1}(0)$  est un diviseur de  $Z$  et les composantes irréductibles  $(X_i)_{1 \leq i \leq q}$  de  $E_{\text{red}}$  sont des sous-variétés projectives de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  (en général non lisses) de dimension  $n - 1$ . En utilisant ce qui précède, on note

$$X = \sum_{i=1}^q \alpha_i X_i \quad (\text{resp. } Y = \sum_{i=1}^q \delta_i X_i)$$

le cycle de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  sous-jacent à  $E$  (resp.  $\pi_V^{-1}(0)$ ), et  $\text{deg } f$  le degré générique du morphisme  $f: U \rightarrow V$ .

DEFINITION 1. — On appelle  $X$  le cycle exceptionnel de l'éclatement de l'idéal  $I$ .

PROPOSITION 2. — En tant que cycles de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$ , on a

$$X = \text{deg } f \cdot Y.$$

Démonstration. — Puisque  $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ , on a  $\mathfrak{m}^s \subset I$  pour  $s$  convenable; on peut donc supposer que  $I \subset \mathbf{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]$  et  $U = \mathbf{C}^n$ , alors  $V$  est une variété algébrique et d'après ([5], p. 166),  $Z$  et  $\tilde{V}$  le sont aussi; de plus, on a  $\text{deg } f = [K(Z) : K(\tilde{V})]$ . Soit  $x_i$  (resp.  $y_i$ ) le point générique de  $X_i$  sur  $E$  (resp.  $\pi_V^{-1}(0)$ ), alors on a  $\mathcal{A}_{E, x_i} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_i}$  (resp.  $\mathcal{A}_{\pi_V^{-1}(0), y_i} = \mathcal{F}_{\mathcal{R}_i}$ ), où  $\mathcal{G} = \bigoplus_{\nu \geq 0} I^\nu / I^{\nu+1}$  (resp.  $\mathcal{F} = \bigoplus_{\nu \geq 0} \mathfrak{m}_V^\nu / \mathfrak{m}_V^{\nu+1}$ ) et  $\mathcal{R}_i$  (resp.  $\mathcal{R}_i$ ) est l'idéal premier minimal de  $\mathcal{G}$  (resp.  $\mathcal{F}$ ) correspondant à  $X_i$ . D'après les propriétés

de  $f$  et la proposition 1, on a un morphisme local, fini et injectif d'anneaux locaux noethériens intègres  $A = \mathcal{O}_{\tilde{V}, y_i} \xrightarrow{\quad} B = \mathcal{O}_{Z, x_i}$ ; de plus d'après la propriété universelle des éclatements on a  $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(0), y_i} = A/\xi A$  et  $\mathcal{O}_{E, x_i} = B/\xi B$ . L'anneau  $A/\xi A$  est artinien donc pour  $\nu \gg 0$ , on a  $(m_A/\xi m_A)^\nu = m_A^\nu/\xi A \cap m_A^\nu = 0$  soit  $m_A^\nu \subset \xi A \subset m_A$ , ce qui montre que  $\xi A$  est un idéal  $m_A$ -primaire de  $A$ . D'après la formule de projection de Samuel ([11], p. 297),  $\xi B$  est un idéal  $m_B$ -primaire de  $B$  et l'on a

$$[B : A] \cdot e(\xi A) = [B/m_B : A/m_A] \cdot e(\xi B).$$

Puisque le corps des fractions de  $A$  (resp.  $B$ ) est  $K(\tilde{V})$  (resp.  $K(Z)$ ) on a  $[B : A] = \deg f$ ; de plus, on a  $B/m_B \simeq K(X_i) \simeq A/m_A$ , d'où  $\deg f \cdot e(\xi A) = e(\xi B)$ . Puisque la dimension de Krull de  $A$  (resp.  $B$ ) est 1, on a pour  $\nu \gg 0$ :

$$e(\xi A) = \varrho_A(\xi^\nu A/\xi^{\nu+1} A) \quad (\text{resp. } e(\xi B) = \varrho_B(\xi^\nu B/\xi^{\nu+1} B)).$$

Par définition, et puisque  $\xi$  n'est pas un diviseur de zéro dans  $A$  (resp.  $B$ ), on a pour  $\nu \geq 0$ :

$$\delta_i = \varrho_{A/\xi A}(A/\xi A) = \varrho_A(A/\xi A) = \varrho_A(\xi^\nu A/\xi^{\nu+1} A)$$

(resp.  $\alpha_i = \varrho_B(\xi^\nu B/\xi^{\nu+1} B)$ ). D'où  $\deg f \cdot \delta_i = \alpha_i$ , ce qui prouve le résultat.

## 2. Préparation de I.

On note  $e(I)$  la multiplicité de  $I$  (i.e. le coefficient normalisé de plus haut degré du polynôme de Hilbert-Samuel de  $I$ ). On dit qu'un élément  $h \in \mathbf{C}\{z\}$  est *entier sur un idéal  $\mathcal{A}$  de  $\mathbf{C}\{z\}$*  s'il existe une relation intégrale

$$h^s + a_1 h^{s-1} + \dots + a_{s-1} h + a_s = 0$$

dans  $\mathbf{C}\{z\}$  où  $a_i \in \mathcal{A}^i$  pour  $1 \leq i \leq s$ ; l'ensemble des éléments de  $\mathbf{C}\{z\}$  entiers sur  $\mathcal{A}$  est un idéal de  $\mathbf{C}\{z\}$  noté  $\bar{\mathcal{A}}$  et appelé *clôture intégrale de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathbf{C}\{z\}$*  (cf. par exemple [8], chap. 0).

LEMME. — *Il existe  $J$  un idéal  $m$ -primaire de  $\mathbf{C}\{z\}$  contenu dans  $I$  tel que :*

- i)  $J$  soit engendré par un système de paramètres de  $\mathbf{C}\{z\}$ , noté  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ ;
- ii)  $e(J) = e(I)$ ;
- iii) il existe  $r \geq 0$  tel que  $J I^r = I^{r+1}$ ;
- iv)  $\bar{J} = \bar{I}$ ;
- v) les images des  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) dans le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $I/\mathfrak{m}I$  soient linéairement indépendantes.

*Démonstration.* — Si l'on se donne  $I = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ , alors d'après ([7], Th. 2, p. 154 et § 7), il existe des  $a_{ij} \in \mathbf{C}$  ( $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq N$ ) "suffisamment généraux" tels que si  $f_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j$  pour  $1 \leq i \leq n$ , alors l'idéal  $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  vérifie les propriétés i) à iv). De plus,  $J$  est une réduction de  $I$  (i.e.  $J$  est contenu dans  $I$  et vérifie iii)) minimale pour l'inclusion et d'après ([7], p. 148) on a  $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$ . D'où le v) d'après i).

**PROPOSITION 3.** — Soit  $n + p = \dim_{\mathbf{C}}(I/\mathfrak{m}I)$ . Il existe un système minimal de générateurs  $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+p})$  de l'idéal  $I$ , un polydisque ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}^n$  centré en 0 et une constante  $c > 0$  tels que :

- a) l'idéal de  $\mathbf{C}\{z\}$ ,  $(f_1, f_2, \dots, f_n) = J$  soit  $\mathfrak{m}$ -primaire et  $e(J) = e(I)$ ;
- b) chaque  $f_{n+j}$  ( $1 \leq j \leq p$ ) soit entier sur  $J$  ou encore pour tout  $z \in U$  on ait :

$$(T) \quad \text{Max}_{1 \leq j \leq p} |f_{n+j}(z)| \leq c \cdot \text{Max}_{1 \leq i \leq n} |f_i(z)|.$$

*Démonstration.* — a) est une conséquence du lemme précédent et du lemme de Nakayama.

b) s'obtient grâce au iv) du lemme précédent (cf. par exemple [8], chap. 0).

On écrira désormais  $I$  sous la forme  $I = (J; \Psi)$  où

$$J = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad \text{et} \quad \Psi = (f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_{n+p})$$

vérifient les propriétés a) et b) de la proposition 3.

### 3. Polynôme caractéristique de $\Psi$ par rapport à $J$ où $I = (J; \Psi)$ et applications.

On utilise les définitions, notations et résultats de Barlet (cf. [1], chap. 0).

Quitte à restreindre  $U$ , il existe un polydisque ouvert  $U_0$  de  $\mathbf{C}^n$  centré en 0 tel que le morphisme  $\varphi: U \rightarrow U_0$  dont les composantes sont les  $f_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ , soit fini, plat et de degré  $k = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{z\}/J = e(J) = e(I)$ ; on désigne par

$$g': U_0 \rightarrow \text{Sym}^k(U)$$

son morphisme associé  $(g'(t) = \langle z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(k)} \rangle = \langle z^{(j)} \rangle)$  sont les points de  $U$  "au dessus" de  $t \in U_0$ , via  $\varphi$ . Soit

$$g = \text{Sym}^k(\Psi) \circ g': U_0 \rightarrow \text{Sym}^k(\mathbf{C}^p) \quad (g(t) = \langle \Psi(z^{(j)}) \rangle),$$

alors  $g$  définit un revêtement ramifié de degré  $k$  de  $U_0$ , contenu dans  $U_0 \times \mathbf{C}^p$  dont on note

$$P(t, x) = x^k - S_1(t) \cdot x^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k(t)$$

le polynôme à valeurs dans  $S_k(\mathbf{C}^p)$  associé; pour  $1 \leq m \leq k$ , les  $S_m(t)$  sont les fonctions symétriques vectorielles élémentaires des points  $\langle \Psi(z^{(j)}) \rangle$  de  $\mathbf{C}^p$ .

Puisque le morphisme fini et surjectif  $f: U \rightarrow V = f(U)_{\text{red}}$  a pour composantes les  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n+p$ ), d'après ce qui précède, on a ensemblistement l'égalité suivante:

$$V = \{(t, x) \in U_0 \times \mathbf{C}^p; P(t, x) = 0\}.$$

De plus, d'après l'inégalité (T) de la proposition 3, le polynôme  $P$  est transverse en 0 (i.e.  $C(V, 0) \cap \{0\} \times \mathbf{C}^p = \{0\}$ , cf. par exemple [6], § 2).

Avant de poursuivre, on donne ci-dessous quelques compléments sur la construction de  $P$ .

Pour  $1 \leq m \leq k$ , on note  $N_m(t)$  les fonctions de Newton des points  $\langle \Psi(z^{(j)}) \rangle$  de  $\mathbf{C}^p$ , alors pour déterminer  $P$  il suffit de connaître

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \sum_{j=1}^k l[\Psi(z^{(j)})]^m,$$

pour tout  $t \in U_0, l \in (\mathbf{C}^p)^*$  et  $1 \leq m \leq k$ . Grâce à la formule de Cauchy, on a

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{l[\Psi(z)]^m J(\varphi)(z)}{\prod_{s=1}^n (f_s(z) - t_s)} \prod_{s=1}^n dz_s,$$

où  $\Gamma_\epsilon$  est le  $n$ -cycle réel défini, pour  $\epsilon > 0$  convenable, par  $\Gamma_\epsilon = \{z \in \mathbf{C}^n; |f_s(z)| = \epsilon \text{ pour } 1 \leq s \leq n\}$  et  $J(\varphi)$  est le jacobien de  $\varphi$ . En fait, d'après le théorème de Stokes, si  $\epsilon$  est suffisamment petit, cette intégrale ne dépend pas de  $\epsilon$  (cf. par exemple [4], chap. 5).

D'après les hypothèses,  $\mathbf{C}\{z\}$  est via  $\varphi$  un  $\mathbf{C}\{t\}$ -module libre de rang  $k$ ; si  $l \in (\mathbf{C}^p)^*$  s'écrit  $l = (l_{n+1}, l_{n+2}, \dots, l_{n+p})$  dans la base canonique, on désigne par  $l(\Psi) = \sum_{i=1}^p l_{n+i} f_{n+i}$  le  $\mathbf{C}\{t\}$ -endomorphisme de  $\mathbf{C}\{z\}$  induit par multiplication, alors d'après ([1], p. 122), on a

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \text{Trace} [l(\Psi)^m](t).$$

De plus, on peut montrer qu'avec les notations précédentes on a :

$$\langle P(t, x), l^k \rangle = \det [l(x) \cdot \text{id}_{\mathbf{C}\{z\}} - l(\Psi)](t)$$

ce qui justifie la définition suivante :

DEFINITION 2. — On appelle  $P$  le polynôme caractéristique de  $\Psi$  par rapport à  $J$  où  $I = (J; \Psi)$ .

Si  $\Psi = f_{n+1}$ , on a alors

$$P(t, x) = \det (x \cdot \text{id}_{\mathbf{C}\{z\}} - f_{n+1})(t)$$

et l'on retrouve le polynôme caractéristique habituel du  $\mathbf{C}\{t\}$ -endomorphisme de  $\mathbf{C}\{z\}$  induit par la multiplication par  $f_{n+1}$ .

*Applications.*

Soit  $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire de  $\mathbf{C}\{z\}$ ; il est engendré par une suite régulière et via  $\varphi = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\mathbf{C}\{z\}$  est un  $\mathbf{C}\{t\}$ -module libre de rang  $k = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{z\}/J$ . Si  $h \in \mathbf{C}\{z\}$ , on désigne par

$$P_h(t, x) = x^k - S_1(t) x^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k(t)$$

le polynôme caractéristique du  $\mathbf{C}\{t\}$ -endomorphisme de  $\mathbf{C}\{z\}$  induit



par la multiplication par  $h$  et l'on note, pour  $1 \leq m \leq k$ ,  $S_m(t)$  (resp.  $N_m(t) = \text{trace}(h^m)(t)$ ) la  $m$ -ième fonction symétrique (resp. de Newton) élémentaire de  $P_h(t, x)$ .

PROPOSITION 4. — Soient  $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire de  $\mathbf{C}\{z\}$  et  $h \in \mathbf{C}\{z\}$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $h \in \bar{J}$ ;
- ii) pour tout  $1 \leq m \leq k$ ,  $S_m(t) \in (t_1, t_2, \dots, t_n)^m$  ;
- iii) pour tout  $1 \leq m \leq k$ ,  $\text{Trace}(h^m)(t) \in (t_1, t_2, \dots, t_n)^m$  .

Démonstration. — ii)  $\Leftrightarrow$  iii). D'après les relations universelles entre les fonctions de Newton et les fonctions symétriques élémentaires.

i)  $\Rightarrow$  ii). Puisque  $h \in \bar{J}$ , il existe un polydisque ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}^n$ , centré en 0 et une constante  $K > 0$  tels que pour tout  $z \in U$  on ait  $|h(z)| \leq K \cdot \text{Max}_{1 \leq i \leq n} |f_i(z)|$ . Ainsi, pour tout

$1 \leq m \leq k$  et tout  $t$  voisin de  $0 \in \mathbf{C}^n$ , on a

$$|S_m(t)| \leq C_k^m \cdot K^m \cdot (\text{Max}_{1 \leq i \leq n} |t_i|)^m,$$

ce qui montre que  $S_m \in (t_1, t_2, \dots, t_n)^m$  .

ii)  $\Rightarrow$  i). D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a

$$h^k - S_1 \circ \varphi \cdot h^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k \circ \varphi = 0$$

dans  $\mathbf{C}\{z\}$ , ce qui montre, puisque pour tout  $1 \leq m \leq k$ ,

$$S_m \circ \varphi \in (f_1, f_2, \dots, f_n)^m,$$

que  $P_h$  détermine une relation intégrale, de degré  $k$ , de  $h$  sur  $J$ .

Soit  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire de  $\mathbf{C}\{z\}$ , on peut écrire  $I = (J; \Psi)$  (cf. § 2) où  $J = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  est engendré par un système de paramètres,  $\bar{I} = \bar{J}$  et  $e(I) = e(J) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{z\}/J$ . Soit  $h \in \bar{I}$ , alors  $h \in \bar{I} = \bar{J}$  et d'après la proposition précédente, le polynôme caractéristique  $P_h$  de  $h$  par rapport à  $J$  détermine une relation intégrale de degré  $e(J) = e(I)$ , de  $h$  sur  $J$  donc a fortiori sur  $I$ ; autrement dit, on a le résultat suivant :

COROLLAIRE. — Soit  $I$  un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire de  $\mathbf{C}\{z\}$ , alors tout  $h \in \bar{I}$  vérifie une relation intégrale explicite, de degré  $e(I)$ , sur  $I$ .

#### 4. Détermination du cycle exceptionnel de l'éclatement de l'idéal $I = (J; \Psi)$ .

Pour tout germe de cycle  $(Z, 0)$  de dimension pure, on note  $C(Z, 0)$  le cycle tangent de Zariski à  $(Z, 0)$ ; on rappelle (cf. [6], p. 158) que si  $\mathcal{A}$  est un idéal de  $\mathbf{C}\{t, x\}$  dont le germe de cycle associé est  $(Z, 0)$ ,  $C(Z, 0)$  est le germe de cycle associé à l'idéal in  $[\mathcal{A}]$  de  $\mathbf{C}\{t, x\}$  engendré par les formes initiales d'éléments de  $\mathcal{A}$ ; le germe de cycle  $C(Z, 0)$  ne dépend que du germe de cycle  $(Z, 0)$ .

THEOREME 1. — Soit  $I = (J; \Psi)$  un idéal  $m$ -primaire de  $\mathbf{C}\{z\}$ . On désigne par  $P$  le polynôme caractéristique de  $\Psi$  par rapport à  $J$ , par in  $(P)$  sa partie homogène de degré  $e(I)$  et par  $X$  le cycle exceptionnel de  $I$ .

1)  $P$  représente le germe de cycle  $(f_*(U), 0)$  induit par image directe;

2) in  $(P)$  représente  $C(f_*(U), 0)$  et en tant que cycles de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  on a  $X = \{\text{in}(P) = 0\}$ .

Démonstration. — 1) Soit  $m(\mathcal{O}_{V,0})$  la multiplicité de l'anneau local  $\mathcal{O}_{V,0}$ , d'après la formule de projection de Samuel ([11], p. 297), on a via  $f$ ,

$$e(I) = e(m_V \cdot \mathbf{C}\{z\}) = \deg f \cdot m(\mathcal{O}_{V,0}).$$

D'après les hypothèses et le § 3, le germe de cycle représenté par  $P$  s'écrit  $m \cdot (V, 0)$ . D'après la transversalité de  $P$  en  $0$  et un résultat de Draper ([2]), on a  $e(I) = m \cdot m(\mathcal{O}_{V,0})$  (cf. par exemple [6]), d'où  $\deg f = m$  d'après ce qui précède, ce qui prouve le résultat puisque par définition  $(f_*(U), 0) = \deg f \cdot (V, 0)$ .

2) D'après 1) et grâce à ([6], Th. 2, p. 157), in  $(P)$  représente  $C(f_*(U), 0)$  puisque  $P$  est transverse en  $0$ . En tant que germes de cycles, on a  $C(f_*(U), 0) = \deg f \cdot C(V, 0)$ , ce qui montre d'après la proposition 2 que l'on a  $X = \text{Proj}[C(f_*(U), 0)]$  en tant que cycles de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$ , d'où le résultat.

Exemple. — Soit  $I = (y^2, xy, x^3)$  dans  $\mathbf{C}^2$ , on peut écrire  $I = (J; x^3)$  où  $J = (y^2 + x^3, xy)$ ; en effet,  $J$  est engendré par un système de paramètres de  $\mathbf{C}\{x, y\}$  et

$$e(I) = e(J) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x, y\}/J = 5$$

puisque  $x^3 \in \bar{J}$  ( $(x^3)^2 - x^3(y^2 + x^3) + x(xy)^2 = 0$ ). Les éléments  $(1, x, x^2, x^3, y)$  forment une base du  $\mathbf{C}\{t_1, t_2\}$ -module libre  $\mathbf{C}\{x, y\}$ , via  $J$ , et l'endomorphisme induit par la multiplication par  $x^3$  a, dans cette base, la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -t_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & -t_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ 1 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & -t_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et pour polynôme caractéristique :

$$P_{x^3}(t_1, t_2, X) = X^2(X - t_1)^3 + t_2^6$$

d'où  $\text{in}(P_{x^3})(t_1, t_2, X) = X^2(X - t_1)^3$ . Ce qui montre que le cycle exceptionnel de  $I$  dans  $\mathbf{P}^2$  est  $\{X^2(X - t_1)^3 = 0\}$ .

**5. Eclatement d'une famille d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace réduit.**

Soient  $(S, 0)$  un germe d'espace analytique complexe réduit et  $(X, 0) \subset (S \times \mathbf{C}^n, (0, 0) = 0)$  un germe de sous-espace analytique tel que  $|X| = S \times \{0\}$ . On suppose que  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n} / \mathcal{I}$  et l'on note  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n} = \mathbf{C}\{z\}$ . Pour tout  $s$  voisin de  $0 \in S, \mathcal{I}_{(s,0)}$ .  $\mathcal{O}$  est un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire de  $\mathcal{O}$  dont on note  $e(s)$  la multiplicité au sens de Samuel.

Pour tout  $s$  voisin de  $0 \in S$ , on a d'une part

$$E_s = \text{Projan} \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathcal{I}^\nu / \mathcal{I}^{\nu+1} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbf{C})$$

qui est la fibre "au-dessus" de  $s$ , du diviseur exceptionnel  $E$  de l'éclatement de  $S \times \mathbf{C}^n$  relativement à  $\mathcal{I}$ , et d'autre part  $D_s = \text{Projan} \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathcal{I}_{(s,0)}^\nu \cdot \mathcal{O} / \mathcal{I}_{(s,0)}^{\nu+1} \cdot \mathcal{O})$  qui est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de  $\{s\} \times \mathbf{C}^n$  relativement à  $\mathcal{I}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}$ . L'inter-

prétation topologique des éclatements montre que l'on a  $|D_s| \subset |E_s|$ , d'où  $\dim E_s \geq \dim D_s = n - 1$ . Plus précisément, puisque  $(S, 0)$  est réduit, le théorème de platitude générique de Frisch ([3]) montre que

$$A = \{s \in S; \bigoplus_{\nu \geq 0} \mathcal{I}^\nu / \mathcal{I}^{\nu+1} \text{ n'est pas } \mathcal{O}_{S,s} \text{-plat}\}$$

est un germe de sous-ensemble analytique fermé de  $(S, 0)$  dont le complémentaire est partout dense; de plus, il existe une immersion fermée canonique  $D_s \rightarrow E_s$  qui est un isomorphisme si  $s \notin A$ .

L'idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$  admet des réductions (i.e. des idéaux  $\bar{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$  tels que  $\bar{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$  dans  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ ) et d'après les hypothèses et un résultat de Northcott et Rees, le nombre minimum d'éléments de  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$  engendrant une réduction de  $\mathcal{I}$  est  $\dim E_0 + 1$  (cf. [7], p. 149 et 151).

PROPOSITION 5. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) au voisinage de  $0 \in S$ , on a  $\dim E_s = n - 1$  ( $= \dim D_s$ );
- ii) au voisinage de  $0 \in S \times \mathbf{C}^n$ , il existe une suite régulière  $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$  de  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$  telle que l'on ait :  $\bar{\mathcal{I}} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \subset \mathcal{I}$  et  $\bar{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$  dans  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ ;
- iii) au voisinage de  $0 \in S$ , la multiplicité  $e(s)$  est constante.

*Démonstration.* — i)  $\Rightarrow$  ii). D'après ce qui précède la proposition 5, il existe  $\bar{\mathcal{I}} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \subset \mathcal{I}$  tel que l'on ait  $\bar{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$  dans  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ ; de plus  $\mathcal{O}$  est un anneau de Cohen-Macaulay et  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$  est  $\mathcal{O}_S$ -plat ce qui montre d'après les hypothèses que  $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$  est une suite régulière de  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ .

ii)  $\Rightarrow$  i) D'après ce qui précède la proposition 5, on a  $\dim E_0 \leq n - 1$  or la fonction  $s \rightsquigarrow \dim E_s$  est semi-continue supérieurement, d'où le résultat puisqu'au voisinage de  $0 \in S$  on a  $\dim E_s \geq \dim D_s = n - 1$ .

iii)  $\Rightarrow$  ii) C'est le "vrai" principe de spécialisation de la dépendance intégrale de Teissier (cf. [9], p. 134).

ii)  $\Rightarrow$  iii) Puisque  $\bar{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$ , on a

$$e(s) = e[\mathcal{J}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}] = e[\mathcal{I}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}] = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}/\mathcal{I}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}$$

puisque un idéal a même multiplicité que sa clôture intégrale et que l'anneau  $\mathcal{O}$  est de Cohen-Macaulay. D'où le résultat puisque l'on a  $\sqrt{\mathcal{J}} = \sqrt{\overline{\mathcal{J}}}$  et que  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}/\mathcal{J}$  et  $\mathcal{O}_S$ -plat.

On suppose désormais que l'une des conditions de la proposition précédente est vérifiée; comme dans le § 2, puisqu'en fait  $\mathcal{J}$  est une réduction minimale de  $\overline{\mathcal{J}}$ , on peut alors écrire  $\mathcal{J} = (\mathcal{J}; \Psi)$  où  $\mathcal{J} = (f_1, \dots, f_n)$  et  $\Psi = (f_{n+1}, \dots, f_{n+p})$  avec

$$n + p = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{J}/\mathfrak{m}_{S \times \mathbf{C}^n} \cdot \mathcal{J}. \text{ Soit } \lambda : S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow S \times \mathbf{C}^n$$

le germe de morphisme défini par

$$\lambda(s, z) = (s; f_1(s, z), \dots, f_n(s, z)),$$

alors d'après les hypothèses  $\lambda$  est fini; de plus, grâce au critère de platitude par fibres,  $\lambda$  est plat et de degré  $e(0) = k$ . Ainsi via  $\lambda$ ,  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$  est un  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ -module libre de rang  $k$  et l'on peut considérer le polynôme caractéristique  $P$  de  $\Psi$  (cf. § 3) dont on note encore  $P : S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \text{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$  le germe de morphisme associé; si

$$P(s, t; x) = x^k - S_1(s, t) \cdot x^{k-1} + \dots + (-1)^k S_k(s, t),$$

alors pour  $1 \leq m \leq k$ , les  $S_m(s, t)$  sont les fonctions symétriques vectorielles élémentaires des points  $\langle \Psi(s, z^{(j)}(s, t)) \rangle$  de  $\mathbf{C}^p$  où  $\lambda(s, z^{(j)}(s, t)) = (s, t)$ . Puisque chaque  $f_{n+i} \in \overline{\mathcal{J}}$  pour  $1 \leq i \leq p$ , il existe un germe de morphisme  $Q : S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \text{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$  tel que pour chaque  $s$  voisin de  $0 \in S$ ,  $Q_s$  soit la partie homogène de degré  $e(s) = k$  de  $P_s$ .

D'après le théorème 1, pour chaque  $s$  voisin de  $0 \in S$ ,  $Q_s$  représente explicitement le cycle de dimension  $n - 1$  de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  sous-jacent à  $D_s$ ; de plus, par construction, le degré de ce cycle dans  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  est égal à  $e(s) = k$  (cf. par exemple [2]).

On désigne par  $\text{Chow}_{n-1}^k(\mathbf{P}^{n+p-1})$  l'espace analytique complexe réduit des cycles de dimension pure  $n - 1$  de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  dont le degré est  $k$ ; c'est une sous-variété projective de  $\mathbf{P}^N$  pour  $N = N(n, p, k)$  convenable. D'après ce qui précède pour  $\mathcal{J} = (\mathcal{J}; \Psi)$  donné, on a un germe d'application  $\beta : S \longrightarrow \text{Chow}_{n-1}^k(\mathbf{P}^{n+p-1})$  où  $\beta(s) = \{\text{cycle de } \mathbf{P}^{n+p-1} \text{ sous-jacent à}$

$$D_s = \text{Projan} \bigoplus_{\nu \geq 0} (\mathcal{J}_{(s,0)}^\nu \cdot \mathcal{O}/\mathcal{I}_{(s,0)}^{\nu+1} \cdot \mathcal{O})\}.$$

THEOREME 2. — Soit  $\mathcal{J} = (\mathcal{J}; \Psi)$ . On suppose qu'au voisinage de  $0 \in S$ , on ait  $e(s) = k$ , alors  $\beta: S \rightarrow \text{Chow}_{n-1}^k(\mathbf{P}^{n+p-1})$  est un germe de morphisme analytique.

Démonstration. — D'après ce qui précède et les résultats de Barlet (cf. [1], chap. IV et II), il suffit de montrer que le germe de morphisme  $Q: S \times \mathbf{C}^n \rightarrow \text{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$  est isotrope. On identifie  $\mathcal{P}(\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^n)$  et  $\mathbf{C}^{np}$  et l'on considère le germe de morphisme  $L: \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n$  défini par

$$L(u, s, z) = (u, s, \varphi(s, z) - u \circ \Psi(s, z))$$

$$\text{où } u = (u_{ij}) \in \mathbf{C}^{np} \quad \text{et } \varphi - u \circ \Psi = \left( f_i - \sum_{j=1}^p u_{ij} f_{n+j} \right)_{1 \leq i \leq n};$$

d'après les hypothèses  $L$  est fini et grâce au critère de platitude par fibres,  $L$  est plat et de degré  $e(0) = k$  ( $L(0, s, z) = \lambda(s, z)$ ). On désigne par  $P_\Psi: \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n \rightarrow \text{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$  le germe de morphisme associé au polynôme caractéristique  $P_\Psi$  de  $\Psi$  par rapport à  $L$  ( $P_\Psi(0, s, t, x) = P(s, t, x)$ ). D'après un résultat de Northcott et Rees ([7], p. 153), il existe un sous-ensemble algébrique strict  $A$  de  $\mathbf{C}^{n(n+p)}$  tel que si  $a = (a_{\alpha\beta}) \notin A$  les idéaux de  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ ,

$$\left( \sum_{\alpha=1}^{(n+p)} a_{\alpha\beta} f_\alpha \right)_{1 \leq \beta \leq n} \quad \text{et } \mathcal{J} = (\varphi, \Psi)$$

aient la même clôture intégrale. D'après l'hypothèse, on a

$$\overline{(f_1, f_2, \dots, f_n)} = \overline{\mathcal{J}} \quad \text{dans } \mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n},$$

ce qui montre qu'en prenant  $u = (u_{ij})$  suffisamment voisin de  $0 \in \mathbf{C}^{np}$ , on a  $\overline{(\varphi - u \circ \Psi)} = \overline{\mathcal{J}}$  dans  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ . Ainsi pour  $u = (u_{ij})$  voisin de  $0 \in \mathbf{C}^{np}$  et fixé, on a  $f_{n+j} \in \overline{(\varphi - u \circ \Psi)}$  dans  $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$  pour  $1 \leq j \leq p$ ; ce qui montre qu'il existe un germe de morphisme  $Q_\Psi: \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n \rightarrow \text{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$  tel que pour chaque  $(u, s)$  voisin de  $(0, 0) \in \mathbf{C}^{np} \times S$ ,  $(Q_\Psi)_{(u, s)}$  soit la partie homogène de degré  $e(s) = k$  de  $(P_\Psi)_{(u, s)}$  ( $Q_\Psi(0, s, t, x) = Q(s, t, x)$ ). Autrement dit  $Q$  est isotrope (cf. [1], p. 56 et 64), d'où le résultat.

COROLLAIRE. — On suppose que  $(S, 0)$  est normal et qu'au voisinage de  $0 \in S$ , on ait  $e(s) = k$ . Alors pour  $s$  voisin de  $0 \in S$ , les cycles de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  sous-jacents à  $D_s$  et  $E_s$  sont égaux.

*Démonstration.* — Pour  $s$  voisin de  $0 \in S$ ,  $E_s$  est de dimension pure  $n - 1$ . En effet, d'après les hypothèses  $(S, 0)$  est irréductible de dimension  $\dim S$  et pour  $x \in E_s$ , on a

$$\dim_x E - \dim_x E_s \leq \dim S,$$

or  $E$  est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de  $(S \times \mathbf{C}^n, 0)$  relativement à  $\mathcal{J}$ , d'où  $\dim_x E = \dim S + n - 1$ . Ce qui montre que pour  $x \in E_s$ , on a  $\dim_x E_s \geq n - 1$ , d'où le résultat puisque  $\dim E_s = n - 1$  d'après la proposition 5. Puisque  $(S, 0)$  est normal, la famille paramétrée par  $(S, 0)$ , des cycles de dimension pure  $n - 1$  de  $\mathbf{P}^{n+p-1}$  sous-jacents à  $E_s$  est analytique (cf. [1], p. 39). D'où le résultat du corollaire d'après le théorème 2 puisque  $D_s$  et  $E_s$  coïncident génériquement sur  $(S, 0)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BARLET, Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. Sémin. F. Norguet II, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 482, 1975.
- [2] R. DRAPER, Intersection theory in analytic geometry, *Math. Ann.*, 180 (1969), 175-204.
- [3] J. FRISCH, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques, *Inventiones Math.*, 4 (1967), 118-138.
- [4] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience, 1978.
- [5] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [6] A. HÉNAUT, Cycles et cône tangent de Zariski. Sémin. F. Norguet IV, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 807, 1980.
- [7] D. NORTHCOTT et D. REES, Reductions of ideals in local rings. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 50 (1954), 145-158.
- [8] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Singularités à Cargèse 1972, *Astérisque*, 7-8, 1973.

- [9] B. TEISSIER, Résolution simultanée I, II. Sémin. Sing. des surfaces. *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 777, 1980.
- [10] H. WHITNEY, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley, 1972.
- [11] O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative algebra.*, vol. II, Van Nostrand, 1960.

Manuscrit reçu le 22 avril 1986

révisé le 2 février 1987.

Alain HENAUT,  
Université Bordeaux I  
U.E.R. de Mathématiques et d'informatique  
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226  
351, cours de la Libération  
33405 Talence (France).