ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HENRI JORIS
EMMANUEL PREISSMANN

Pseudo-immersions

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 2 (1987), p. 195-221
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_195_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 2 (1987), 195-221.

PSEUDO-IMMERSIONS (*)

par H. JORIS et E. PREISSMANN

1. Définitions et résultats.

Si M et N sont des $\mathscr{C}^r$-variétés (sans bord) avec $1 \leqslant r \leqslant \infty$, une $\mathscr{C}^r$-application f: $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est appelée *immersion* si l'application tangente $\mathrm{T}_x f : \mathrm{T}_x\mathrm{M} \to \mathrm{T}_{f(x)}\mathrm{N}$ est injective pour tout $x \in \mathrm{M}$. Cette condition est équivalente à la suivante ([1], p. 18, th. 1.3.14) : Pour tout $x \in \mathrm{M}$, on peut trouver des coordonnées locales $(u_1, \ldots, u_m)$ autour de x et $(v_1, \ldots, v_n)$ autour de $f(x)$ telles que f s'écrit comme $(u_1, \ldots, u_m) \mapsto (u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)$. Il en résulte qu'une $\mathscr{C}^r$-immersion $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ possède la propriété suivante :

(I_r) Si P est une $\mathscr{C}^r$-variété et si g: $\mathrm{P} \to \mathrm{M}$ est une application continue telle que $f \circ g \in \mathscr{C}^r$, alors $g \in \mathscr{C}^r$.

La continuité de g est nécessaire pour la réduction à des coordonnées locales et elle est indispensable, comme le montre l'exemple suivant qui est la représentation d'un « huit » dans le plan :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \qquad t \mapsto (te^{-t^2}, t^3e^{-t^2}).$$

f est une immersion, car $f'(t) \neq (0,0)$ pour tout t. On définit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par $g(0) = 0$, $g(s) = 1/s$ pour $s \neq 0$. g n'est pas continue, mais $f \circ g \in \mathscr{C}^\infty$.

Si $r < \infty$, on montre facilement (voir [2]) que la condition (I_r) implique que f est une immersion. Par contre, si $r = \infty$, cela n'est plus le cas comme le montre l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$, qui

(*) Ce travail a bénéficié d'une aide substantielle du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique, que les auteurs tiennent à remercier ici.

Mots-clés : Immersions - Conditions de différentiabilité - Singularités d'applications lisses.

vérifie (I_∞) sans être une immersion. En effet, on a le théorème plus général [2] que voici :

THÉORÈME A. — *Soit* P *une* $\mathscr{C}^\infty$*-variété et soit* $g : P \to \mathbf{R}$ *une fonction telle que* g^r *et* g^s *sont dans* $\mathscr{C}^\infty$ *pour deux entiers naturels* r *et* s *sans diviseur commun, alors* g *est dans* $\mathscr{C}^\infty$. *En particulier,* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto (t^r, t^s)$ *vérifie* (I_∞) *si* pgcd $(r,s) = 1$.

Dans ce résultat, la continuité de g ne doit pas être supposée d'avance, essentiellement parce que f définit un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur l'image $f(\mathbf{R})$ munie de la topologie induite par $\mathbf{R}^2$.

DÉFINITION 1. — *Soit* M, N *des* $\mathscr{C}^\infty$*-variétés (sans bord), et* $f : M \to N$ *une* $\mathscr{C}^\infty$*-application. Si* f *obéit à la condition* (I_∞) *elle est appelée une pseudo-immersion.*

Remarquons tout de suite que, selon un résultat remarquable de J. Boman [3], il suffit de vérifier la condition (I_∞) pour $P = \mathbf{R}$ (voir [2]), ce que nous ferons dorénavant.

La propriété (I_∞) est locale. Il suffit donc d'étudier des applications $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, voire des *germes d'applications.* On appellera « germe » une famille Φ de $\mathscr{C}^\infty$-applications $f : U \to \mathbf{R}^n$, U un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^m$, vérifiant les conditions suivantes : (1) $f(0) = 0$; (2) si $f \in \Phi$, $f : U \to \mathbf{R}^n$, et si V est un voisinage de 0 contenu dans U, alors $f|_V \in \Phi$; (3) si $f_1, f_2 \in \Phi$, il existe un voisinage V de 0 tel que f_1 et f_2 coïncident sur V. Les $f \in \Phi$ sont appelés *représentants* de Φ. Par abus de langage on notera souvent le germe et son représentant par le même terme. Par exemple, on dira « le germe t^r »,ou encore « le germe φf » quand f sera un germe et φ une fonction, etc.

L'ensemble des germes que l'on vient de décrire sera noté Γ_{nm}.

DÉFINITION 2. — *Un germe* $f \in \Gamma_{nm}$ *est appelé germe pseudo-immersif s'il est représenté par une pseudo-immersion. L'ensemble des germes pseudo-immersifs dans* Γ_{nm} *sera noté* Ψ_{nm}.

Le théorème qui suit est une conséquence immédiate des définitions.

THÉORÈME 1. — *La composée de deux pseudo-immersions est une pseudo-immersion. La même chose vaut pour les germes :*

$$\Psi_{pn} \circ \Psi_{nm} \subset \Psi_{pm}.$$

Un germe $u \in \Gamma_{nn}$ représenté par un difféomorphisme est appelé *germe de difféomorphismes* ; on écrira $u \in \mathcal{D}iff_n$. Deux germes, f, $h \in \Gamma_{nm}$ sont dits *équivalents* s'il existe $u \in \mathcal{D}iff_n$ et $v \in \mathcal{D}iff_m$ tels que $h = u \circ f \circ v$. Il est évident que deux germes équivalents sont ou bien les deux pseudo-immersifs ou bien les deux non-pseudo-immersifs :

$$\mathcal{D}iff_n \circ \Psi_{nm} \circ \mathcal{D}iff_m = \Psi_{nm}.$$

Nous allons déterminer, à des équivalences près, tous les $f \in \Psi_{n,1}$. La condition à vérifier portera uniquement sur la série de Taylor de f (théorème 3). On montrera qu'une condition analogue s'applique à des germes $f \in \Gamma_{2n,2}$ qui admettent une série de Taylor complexe (théorème 3'). Les démonstrations, essentiellement algébriques, ramènent tous les cas aux cas simples $t \mapsto (t^r, t^s)$, pgcd $(r,s) = 1$. Ces résultats ont aussi été obtenus, du moins en partie, dans [4] avec des démonstrations fort différentes des nôtres, mais avec une réduction aux mêmes cas simples. Nous discuterons cela brièvement à la fin de la section 3.

En ce qui concerne le théorème 3' (série de Taylor complexe), la réduction passera par le germe $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^2$, $z \mapsto (z^2, z^3)$, considéré comme $f \in \Gamma_{4,2}$. A l'aide du théorème A on montre que si $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est telle que g^2, $g^3 \in \mathbf{C}^\infty$; alors $g \in \mathbf{C}^\infty$ (théorème A'). L'espoir que cela soit encore vrai si l'on remplace $\mathbf{C}$ par le corps (gauche) $\mathbf{H}$ des quaternions hamiltoniens, s'avèrera injustifié. En fait, l'application $f : \mathbf{H} \to \mathbf{H}^2$, $h \to (h^2, h^3)$, n'est pas une pseudo-immersion, comme le montrera un contre-exemple.

On voit facilement que $\Psi_{1,1} = \mathcal{D}iff_1$ (c'est un cas particulier du théorème 3). Des raisonnements d'ordre extra-mathématique suggèrent qu'en général on ait $\Psi_{n,n} = \mathcal{D}iff_n$. On va démontrer cela pour le cas $n = 2$ (théorème 4). Précisons que la preuve n'a rien à voir avec les raisonnements mentionnés plus haut, mais qu'elle est basée d'une façon essentielle sur le théorème 3.

2. Détermination de $\Psi_{n,1}$.

Pour tout $f \in \Gamma_{n,m}$ nous noterons

$$f(x) \sim \sum_{k>0} c_k x^k,$$

le fait que la série dans le membre droit est la *série de Taylor* (centrée en 0) de f, avec

$$c_k \in \mathbf{R}^n, \quad k \in \mathbf{N}^m, \quad x \in \mathbf{R}^m, \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}, \; k > 0$$

signifiant que $k_i > 0$ pour au moins un i. Si

$$f(x) \sim 0,$$

on dira que f est un *germe plat*.

LEMME 1 (lemme de E. Borel). — *Toute série entière*

$$\sum_{k>0} c_k x^k$$

en m *indéterminées* $x = (x_1, \dots, x_m)$ *avec des coefficients* $c_k \in \mathbf{R}^n$ *est la série de Taylor d'un germe* $f \in \Gamma_{n,m}$.

Pour une démonstration, voir [1], p. 30, ou [5], p. 228. Le lemme permettra de travailler dans les séries et de revenir aux applications le moment opportun.

THÉORÈME 2. — *Soit* $f \in \Gamma_{n,1}$ *et soit* ρ *un entier*, $\rho \geqslant 2$, *tel que*

$$f(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m t^{\rho m},$$

alors f *n'est pas pseudo-immersif.*

En particulier, un germe plat $f \in \Gamma_{n,1}$ *n'est pas pseudo-immersif.*

Démonstration. — Suivant le lemme 1 on choisit

$$\tilde{f} \in \Gamma_{n,1}$$

tel que

$$\tilde{f}(y) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m y^m,$$

alors,

$$f(t) = \tilde{f}(t^\rho) + p(t),$$

où p est un germe plat. On pose $g(u) = |u|$ si ρ est pair, et $g(u) = \sqrt[\rho]{u}$ si ρ est impair, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Alors, ainsi qu'il est facile de le vérifier, $\tilde{f} \circ (g^p)$ et $p \circ g$ sont dans $\mathbf{C}^\infty$, donc aussi $f \circ g$. Mais $g \notin \mathbf{C}^\infty$ et g est continue. Donc $f \notin \Psi_{n,1}$.

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple :

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2+2t^3+t^4,\ t^4+4t^5+6t^6+4t^7+t^8) \\ &= ((t+t^2)^2,\ (t+t^2)^4), \end{aligned}$$

qui est équivalent au germe $f_1(t) = (t^2, t^4)$.

Mais la réciproque est vraie si une condition supplémentaire est vérifiée, à savoir que l'une des composantes du germe est une puissance de t. Observons d'abord que si $f \in \Gamma_{n,1}$, f non plat, alors f est équivalent à un $\mathrm{F} \in \Gamma_{n,1}$, $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n)$ tel que $\mathrm{F}_1(t) = t^r$.

Pour un germe $\mathrm{F} \in \Gamma_{n,1}$, nous utilisons la notation suivante :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{F}(t) \sim \displaystyle\sum_{1 \leqslant \nu < \mathrm{M}} c_\nu t^{m_\nu} \\ c_\nu \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \quad 1 \leqslant \nu < \mathrm{M} \\ 1 \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < \ldots \end{array} \right.$$

Ici $1 \leqslant \mathrm{M} \leqslant \infty$. Si $\mathrm{M} = 1$, $\mathrm{F}(t) \sim 0$. L'ensemble $\{m_1, m_2, \ldots\}$ est ce que Abhyankar [6] appellerait le « support » de la série.

Voici maintenant la « réciproque » du théorème 2 :

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathrm{F} \in \Gamma_{n,1}$, $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n)$, $\mathrm{F}_1(t) = t^r$. *Supposons que la série de Taylor de* F *soit notée comme dans* (1). *Alors* F *est pseudo-immersif si et seulement si*

$$(2) \qquad \operatorname{pgcd}(m_1, m_2, \ldots) = 1.$$

Démonstration. — La nécessité de la condition (2) découle du théorème 2. Pour montrer que (2) est suffisant, supposons d'abord $n = 2$. En changeant un peu les notations, on suppose que le germe est de la forme $(t^r, \mathrm{F}(t))$, $\mathrm{F} \in \Gamma_{1,1}$ étant noté comme dans (1), avec $c_\nu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. La condition (2) devient

$$(3) \qquad \operatorname{pgcd}(r, m_1, m_2, \ldots) = 1.$$

Si $r = 1$, le germe est immersif. On peut donc supposer $r \geqslant 2$. Alors (3) implique $\mathrm{F}(t) \not\sim 0$. On définit ensuite deux *corps de séries de* *puissances* formelles :

$$L = \mathbf{R}((z)), \qquad K = \mathbf{R}((z^r)),$$

z étant une indéterminée.

Soit donc

$$F(t) \sim \Sigma\, c_\nu t^{m_\nu}, \qquad c_\nu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

On pose :

$$(4) \qquad T(z) = \Sigma\, c_\nu z^{m_\nu} \in \mathbf{R}[[z]].$$

$T(z)$ est la série de Taylor de $F(t)$, avec la variable réelle remplacée par la transcendante z. On peut écrire :

$$T(z) = T_0(z^r) + zT_1(z^r) + \ldots + z^{r-1}T_{r-1}(z^r),$$

où

$$T_j(z^r) \in \mathbf{R}[[z^r]], \qquad j = 0, \ldots, r-1.$$

Il s'avère utile d'*introduire une autre transcendante* x, algébriquement indépendante de z. On pose :

$$(5) \qquad S(x) = T_0(z^r) + xT_1(z^r) + \cdots + x^{r-1}T_{r-1}(z^r);$$

$S(x)$ est dans $\mathbf{R}[[z^r]][x] \subset K[x]$, et

$$(6) \qquad S(z) = T(z).$$

Posons

$$G_{kj}(x) = S^j(x)x^{kr}, \qquad j = 0, 1, \ldots, r-1$$
$$k = 0, 1, \ldots, (r-1)^2.$$

On a

$$\deg G_{kj} = \deg_x G_{kj} \leqslant (r+1)(r-1)^2.$$

On cherche des $a_{kj} \in K = \mathbf{R}((z^r))$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{(r-1)^2} a_{kj}G_{kj}(x) = xH(x^r),$$

avec $H(x^r) \in K[x^r]$. Il faut donc annuler les coefficients de toutes les puissances x^m; $m \not\equiv 1 \pmod r$. Cela revient à chercher des solutions non-triviales à un système linéaire homogène d'au plus

$$(r-1)\left(\left[\frac{(r+1)(r-1)^2}{r}\right]+1\right) = r(r-1)^2$$

équations pour les $r((r-1)^2+1)$ inconnues a_{kj}, [ ] signifiant « partie entière ». Le nombre des équations est inférieur au nombre des inconnues, donc des solutions non-triviales existent. En conséquence, il existe un $q \geqslant 0$ et des $a_{kj} \in \mathrm{K}$, $0 \leqslant j \leqslant r-1$, $0 \leqslant k \leqslant q$, non tous nuls, et un $\mathrm{H}(x^r) \in \mathrm{K}[[x^r]]$, tels que

$$\sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{q} a_{kj} \mathrm{G}_{kj}(x) = x\mathrm{H}(x^r).$$

En prenant q aussi petit que possible et en regroupant les termes du membre à gauche, on obtient :

Il existe $\mathrm{A}_j(x^r) \in \mathrm{K}[[x^r]]$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, non tous nuls, et un $\mathrm{H}(x^r) \in \mathrm{K}[[x^r]]$, tels que

$$\sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{A}_j(x^r)\mathrm{S}^j(x) = x\mathrm{H}(x^r), \tag{7}$$

et tels que $q = \max\limits_{j=0,\ldots,r-1} \deg \mathrm{A}_j$ est minimal.

Dans ce qui suit A_j, H et q obéissent à ces conditions. La minimalité de q implique qu'au moins une des séries $\mathrm{H}(z^r)$, $\mathrm{A}_0(z^r), \ldots, \mathrm{A}_{r-1}(z^r)$, obtenues en remplaçant l'indéterminée x^r par $z^r \in \mathrm{K}$, soit non-nulle, car, autrement, on aurait :

$$\mathrm{H}(x^r) = (z^r - x^r)\tilde{\mathrm{H}}(x^r),$$

$$\mathrm{A}_j(x^r) = (z^r - x^r)\tilde{\mathrm{A}}_j(x^r), \quad j = 0, 1, \ldots, r-1,$$

$$\sum_{j=0}^{r-1} \tilde{\mathrm{A}}_j(x^r)\mathrm{S}^j(x) = x\tilde{\mathrm{H}}(x^r),$$

avec $\deg \tilde{\mathrm{A}}_j \leqslant q-1$ et $\tilde{\mathrm{A}}_j \neq 0$ pour au moins un j, ce qui est incompatible avec la minimalité de q.

On prétend que

$$\mathrm{H}(z^r) \neq 0. \tag{8}$$

Supposons le contraire.

Il suit de ce que nous venons de voir qu'au moins un des $A_j(z^r)$ est non-nul et qu'en substituant z à x dans (7), on obtient l'*équation algébrique* (non-triviale)

$$\sum_{j=0}^{r-1} A_j(z^r)S^j(z) = 0.$$

De (6) il découle que $T(z)$ *est algébrique sur* K de degré ne dépassant pas $r - 1$. A plus forte raison, $T(z)$, vu comme élément de $\mathbf{C}((z))$, est algébrique sur $\mathbf{C}((z^r))$, de degré inférieur à r.

Or l'application σ :

$$\mathbf{C}((z)) \to \mathbf{C}((z)), \; z \mapsto \xi z = \exp\left(\frac{2\pi i}{r}\right)z, \; \Sigma a_m z^m \mapsto \Sigma a_m \xi^m z^m,$$

qui remplace la transcendante z par la transcendante ξz est un automorphisme de $\mathbf{C}((z))$, trivial sur $\mathbf{C}((z^r)).\sigma$ engendre un *groupe cyclique d'automorphismes*

$$\langle\sigma\rangle = \{\mathrm{Id},\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^{r-1}\}.$$

$\langle\sigma\rangle$ est en fait le groupe de Galois de $\mathbf{C}((z))$ sur $\mathbf{C}((z^r))$, mais on n'a pas besoin de ce fait. Comme

$$\deg_{\mathbf{C}((z^r))} T(z) \leqslant r - 1,$$

$T(z)$ est invariant pour un sous-groupe non-trivial de $\langle\sigma\rangle$, disons par $\langle\sigma^d\rangle$, $1 \leqslant d \leqslant r - 1$, $d|r$. On a donc

$$\Sigma c_\nu z^m = T(z) = \sigma^d T(z) = \Sigma c_\nu \xi^{m_\nu d} z^{m_\nu},$$

d'où

$$c_\nu = c_\nu \xi^{m_\nu d}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Or, d'après les hypothèses du théorème, $c_\nu \neq 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ce qui donne

$$\xi^{m_\nu d} = 1, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Cela implique que r/d divise tous les m_ν, donc

$$\frac{r}{d} \text{ divise pgcd } (r, m_1, m_2, \ldots).$$

Mais $r/d > 1$, ce qui contredit (3). Cela achève la démonstration de (8). Dans (7) on peut supposer que les coefficients des A_j et de H sont dans $z^r\mathbf{R}[[z^r]]$. Avec la substitution $x = z$, (7) devient donc

$$\sum_{j=0}^{r-1} A_j(z^r)T^j(z) = zH(z^r) \neq 0$$

avec $A_j(z^r)$ et $H(z^r)$ dans $z^r\mathbf{R}[[z^r]]$. On pose

$$H(z^r) = z^{rs}(c + z^rH_1(z^r)),$$

$s > 0$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, $H_1(z^r) \in \mathbf{R}[[z^r]]$. Le lemme de Borel nous fournit $\varphi, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1} \in \Gamma_{1,1}$ tels que

$$(9) \qquad \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j(t^r)F^j(t) = t^{1+rs}(c + \varphi(t^r)) + p(t),$$

où $p \in \Gamma_{1,1}$, p est plat.

Lemme 2. — *Soit $r, s \in \mathbf{N}$, $s, r \geqslant 1$, et soit $p \in \Gamma_{1,1}$ un germe plat. Alors il existe des germes plats $p_1, p_2 \in \Gamma_{1,1}$ tels que*

$$p(t) = p_1(t^r) + t^{1+rs}p_2(t^r).$$

Démonstration. — 1^er^ cas : r impair. On pose $p_2 = 0$, $p_1(t) = p(\sqrt[r]{t})$. 2^e^ cas : r pair. On pose

$$h_1(t) = \frac{1}{2}(p(t)+p(-t))$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{2}t^{-1-rs}(p(t)-p(-t)) & \text{si } t \neq 0. \end{cases}$$

h_1 et h_2 sont plats et pairs, et

$$p(t) = h_1(t) + t^{1+rs}h_2(t).$$

On termine la démonstration en choisissant

$$p_k(t) = h_k(|t|^{1/r}), \quad k = 1, 2.$$

En utilisant le lemme dans (9), on obtient :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j(t^r)F^j(t) - p_1(t^r) \\
&\qquad = t^{1+rs}(c+\varphi(t^r) + p_2(t^r)) \\
&t^{1+rs} = \left\{\sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j(t^r)F^j(t) - p_1(t^r)\right\}(c+\varphi(t^r)+p_2(t^r))^{-1}, \\
&t^{1+rs} = \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{\varphi}_j(t^r)F^j(t),
\end{aligned}
\right.
$$

où $\tilde{\varphi}_j \in \Gamma_{1,1}$. On en déduit l'existence d'un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}$ tel que si $g : \mathbf{R} \to U$, g^r, $F \circ g \in \mathscr{C}^\infty$, alors $g^{rs+1} \in \mathscr{C}^\infty$ et donc $g \in \mathscr{C}^\infty$, par le théorème A.

Le théorème 3 est ainsi démontré pour $n = 2$. Si $n > 2$, on voit facilement que l'on peut trouver des constantes réelles $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles que le germe

$$(t^r, \alpha_2 F_2(t) + \cdots + \alpha_n F_n(t))$$

satisfait les conditions du théorème pour $n = 2$, et le théorème suit alors du cas $n = 2$.

3. Les germes dans $\Psi_{2n,2}$ qui possèdent une série de Taylor complexe.

Pour $n \geqslant 1$ on considère l'application canonique

$$
\begin{aligned}
\rho_n : \mathbf{C}^n &\to \mathbf{R}^{2n} \\
(z_1, \ldots, z_n) &\mapsto (\mathrm{Ré}(z_1), \mathrm{Im}(z_1), \ldots, \mathrm{Ré}(z_n), \mathrm{Im}(z_n)).
\end{aligned}
$$

Cette application se prolonge de façon évidente à des séries de Taylor complexes. On dit que le germe $f \in \Gamma_{2n,2m}$ *possède* (ou *admet*) *une série de Taylor complexe* s'il existe une série de puissances complexe

$$\sum_{k>0} c_k z^k, \; z \in \mathbf{C}^m, \; c_k \in \mathbf{C}^n$$

telle que

$$(11) \qquad f(x) \sim \rho_n\left[\sum_{k>0} c_k(\rho_m^{-1}(x))^k\right],$$

donc si, considéré comme germe $f\colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$, f admet une série de Taylor complexe. Si f est équivalent à un tel germe, il aura – par définition – la même propriété. (11) sera noté plus simplement par

$$f(z) \sim \sum_{k>0} c_k z^k .$$

L'analogue du théorème 2 reste vrai pour les germes $f \in \Gamma_{2n,2}$ admettant une série de Taylor complexe, avec exactement la même démonstration. Pour l'analogue du théorème 3 qui est également vrai, la démonstration nécessite quelques adaptations. En premier lieu, il faut généraliser le théorème A à des fonctions complexes :

THÉORÈME A′ (Duncan, Krantz, Parks [4]). — *Si r et s sont des entiers naturels sans diviseur commun et $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est telle que g^r, $g^s \in \mathscr{C}^\infty$, alors $g \in \mathscr{C}^\infty$.*

La démonstration que nous donnons ici est légèrement différente de celle donnée en [4].

Démonstration. – On suppose d'abord $r = 2$, $s = 3$.

On pose $g = u + iv$, u, v réelles. g^2, $g^3 \in \mathscr{C}^\infty$, donc $\bar{g}^2$, $\bar{g}^3 \in \mathscr{C}^\infty$, donc $|g|^4$, $|g|^6 \in \mathscr{C}^\infty$, et donc $|g|^2 = u^2 + v^2 \in \mathscr{C}^\infty$, par le théorème A. Puisque $\mathrm{Ré}(g^2) = u^2 - v^2 \in \mathscr{C}^\infty$, il suit que u^2, $v^2 \in \mathscr{C}^\infty$ On va montrer qu'on a aussi $u^9 \in \mathscr{C}^\infty$, ce qui impliquera $u \in \mathscr{C}^\infty$, et, similairement $v \in \mathscr{C}^\infty$. En considérant les parties réelles et imaginaires de g^2 et g^3, on voit que les fonctions uv, $u^3 - 3uv^2$, $v^3 - 3vu^2$ sont $\mathscr{C}^\infty$, donc $8u^9 = (u^3 - 3uv^2)(9u^4(u^2 + 2v^2) - (u^3 - 3uv^2)^2) - 27(uv)^3(v^3 - 3u^2v)$ l'est aussi.

Ainsi que cela a été montré dans [2], le Théorème A′ est vrai si, pour tout $\mathrm{R} \in \mathbf{N}$, on a l'implication

$$(\mathrm{P_R}) \quad g^r \in \mathscr{C}^\infty \quad \text{pour tout } r \geqslant \mathrm{R} \text{ implique } \quad g \in \mathscr{C}^\infty .$$

On vient de montrer (P_2). Supposons que $(\mathrm{P_R})$ est vrai pour $\mathrm{R} \geqslant 2$. On montre que $(\mathrm{P_{R+1}})$ est vrai. Soit $g^r \in \mathscr{C}^\infty$ pour tout $r \geqslant \mathrm{R} + 1$. Alors $(g^2)^s$ et $(g^3)^s$ sont $\mathscr{C}^\infty$ pour tout $s \geqslant \mathrm{R}$, donc g^2, $g^3 \in \mathscr{C}^\infty$, et donc $g \in \mathscr{C}^\infty$.

En deuxième lieu, il faut adapter le lemme 2 à des germes complexes d'une variable complexe :

LEMME 3. — *Soit $p \in \Gamma_{2,2}$ un germe plat, considéré comme $p : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Soit $r \geqslant 1$ et soit $k_0, k_1, \dots, k_{r-1} \in \mathbf{Z}$. Alors il y a des germes plats $p_0, p_1, \dots, p_{r-1} \in \Gamma_{2,2}$ tels que*

$$p(w) = w^{rk_0} p_0(w^r) + w^{1+rk_1} p_1(w^r) + \cdots + w^{r-1+rk_{r-1}} p_{r-1}(w^r).$$

Démonstration. — Soit $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{r}\right)$. Pour $w \neq 0$, $j = 0, 1, \dots, r-1$, on pose

$$h_j(w) = w^{-j} \sum_{m=0}^{r-1} \zeta^{-jm} p(\zeta^m w).$$

On définit $h_j(0) = 0$. Les h_j sont plats et

$$\sum_{j=0}^{r-1} w^j h_j(w) = rp(w).$$

De plus, comme $h_j(\zeta w) = h_j(w)$, on peut trouver des $\tilde{h}_j$ également plats, tels que $h_j(w) = \tilde{h}_j(w^r)$. Le lemme est prouvé si l'on pose $p_j(0) = 0$,

$$p_j(w) = \frac{1}{r} \tilde{h}_j(w) w^{-k_j}, \qquad w \neq 0.$$

On peut maintenant démontrer l'analogue du théorème 3 que voici :

THÉORÈME 3'. — *Soit $\mathrm{F} \in \Gamma_{2n,2}$ un germe possédant une série de Taylor complexe, satisfaisant les mêmes conditions que la série de Taylor dans le théorème 3. Alors $\mathrm{F} \in \Psi_{2n,2}$.*

La démonstration est parfaitement identique à celle du théorème 3 jusqu'à la formule (9) qui devient

$$\sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j(w^r) \mathrm{F}^j(w) = w^{1+rs}(c + \varphi(w^r)) + p(w). \tag{12}$$

Ici, w dénote une variable complexe, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, φ_j, F, φ, $p \in \Gamma_{2,2}$, p plat. On applique le lemme 3 à p, avec $k_0 = 0$, $k_1 = s$, $k_2 = 2s, \dots, k_{r-1} = (r-1)s$. On amalgame $p_0(w^r)$ à $\varphi_0(w^r)$ et on divise (12) par $c + \varphi(w^r) + p_1(w^r)$, obtenant

$$\sum_{j=0}^{r-1} \tilde{\varphi}_j(w^r) \mathrm{F}^j(w) + w^{1+rs} + w^{2(1+rs)} \tilde{p}_2(w^r) + \cdots + w^{(r-1)(1+rs)} \tilde{p}_{r-1}(w^r) = 0.$$

Si w est assez petit, alors les $\tilde{\varphi}_j(w^r)$, $F^j(w)$, $\tilde{p}_k(w^r)$ sont assez petits. Posant $y = w^{1+rs}$, l'égalité devient

$$(13) \qquad a_0 + y + a_2 y^2 + \cdots + a_{r-1} y^{r-1} = 0.$$

Si $a_0, a_2, \ldots, a_{r-1}$ sont assez petits et si $|y| < 1$, alors cette égalité implique que y est une fonction analytique de $a_0, a_2, \ldots, a_{r-1}$. Cela suit du *théorème des fonctions implicites* ou alors de la théorie des fonctions analytiques de la façon suivante. Si $|a_0| < 1/r$, $|a_2| < 1/r, \ldots, |a_{r-1}| < 1/r$, alors le *théorème de Rouché* [9] montre que le polynôme

$$P(y) = a_0 + y + a_2 y^2 + \cdots + a_{r-1} y^{r-1}$$

possède, dans le disque $|y| < 1$, le même nombre de zéros que le polynôme $\tilde{P}(y) = y$, c'est-à-dire exactement un, disons y_0. Le théorème des résidus [9] donne

$$y_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|y|=1} y \frac{P'(y)}{P(y)} dy.$$

La démonstration du théorème 3′ se termine ensuite comme celle du théorème 3.

Duncan, Krantz et Parks, dans [4], démontrent les théorèmes 3 et 3′ pour des *germes polynomiaux*. Pour la démonstration ils démontrent d'abord d'autres cas particuliers des théorèmes 3 et 3′, que voici : si les *ordres des composantes* du germe $F : (\mathbf{R},0) \to (\mathbf{R}^n,0)$, resp. $(\mathbf{C},0) \to (\mathbf{C}^n,0)$, n'ont pas de diviseur commun, alors F est pseudo-immersif ; dans le cas complexe ils doivent supposer que F est analytique. La preuve de ce résultat-ci se fait par une réduction au théorème A, resp. A′, de notre papier. Il nous semble qu'une légère adaptation des arguments dans [4] devrait permettre de démontrer nos théorèmes 3 et 3′ entièrement, avec l'exception possible du cas complexe non analytique. Cela dit nous pensons que notre démonstration est plus simple et plus courte que la leur, en plus du fait de fournir un résultat plus complet.

Signalons encore que dans le même papier [4] les auteurs considèrent aussi des applications $\mathscr{A} \to \mathscr{A}^2$, $a \mapsto (a^r, a^s)$, $\operatorname{pgcd}(r,s) = 1$, où $\mathscr{A}$ est une *algèbre de fonctions*, c'est-à-dire une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(X,\mathbf{C})$, contenant les constantes et séparant les points de X, X étant un espace compact ; ils montrent que cette application possède également la propriété (I_∞). Du point de vue algébrique cela n'est pas surprenant, car algébriquement $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre du produit Cartésien $\mathbf{C}^{\mathrm{X}}$ (voir notre remarque (e) à la fin de l'article).

4. L'application $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $h \to (h^2, h^3)$.

Le corps $\mathbf{H}$ des *quaternions de Hamilton* peut être décrit comme algèbre de matrices :

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \middle| \, z, w \in \mathbf{C} \right\}.$$

Soit

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{H}, \qquad t \to \begin{pmatrix} x(t)+iy(t) & u(t)+iv(t) \\ iv(t)-u(t) & x(t)-iy(t) \end{pmatrix}$$

une application telle que g^2, $g^3 \in \mathscr{C}^\infty$. Alors on peut montrer que $x \in \mathscr{C}^\infty$, avec une preuve similaire à celle du théorème A'. Mais la démonstration ne s'applique pas à y, u, v, et en effet l'implication est fausse en général, comme le montre l'exemple que l'on va construire.

Observons que si $h = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -\bar{w} & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$h^2 = -|w|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h^3 = |w|^2 \begin{pmatrix} 0 & -w \\ \bar{w} & 0 \end{pmatrix}.$$

On va *construire une fonction* $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *telle que* $|w|^2$ *et* $w|w|^2$ *sont dans* $\mathscr{C}^\infty$, *tandis que* w *est dans* $\mathscr{C}^1 \setminus \mathscr{C}^2$.

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= 1, \qquad s \leqslant 0; \\ \varphi(s) &= 0, \qquad s \geqslant 1. \end{aligned}$$

Pour d, $\mathrm{D} > 0$, on définit $\varphi_{d,\mathrm{D}} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ par

$$\begin{aligned} \varphi_{d,\mathrm{D}}(s) &= 1 && \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant d; \\ \varphi_{d,\mathrm{D}}(s) &= \varphi\left(\frac{s-d}{\mathrm{D}}\right), && \text{si} \quad d \leqslant s; \\ \varphi_{d,\mathrm{D}}(-s) &= \varphi_{d,\mathrm{D}}(s) && \text{pour tous les } s. \end{aligned}$$

Pour m, $k \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 1$, on a

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^k (\varphi_{d,\mathrm{D}}(s))^m = o_{m,k}(\mathrm{D}^{-k}). \tag{14}$$

On pose, pour s réel,

$$(15) \qquad W(s) = \frac{(s+i)^3}{s^2+1} = s + 3i - \frac{4}{s-i}.$$

Alors

$$(16) \qquad |W(s)|^2 = s^2 + 1,$$

$$(17) \qquad W(s)|W(s)|^2 = (s+i)^3.$$

Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite réelle avec $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$, $a_n \to 0$ pour $n \to \infty$. On pose

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

c_n est le centre de l'intervalle $[a_{n+1}, a_n]$. On choisit deux suites strictement positives $d_1, d_2, \ldots$ et $D_1, D_2 \ldots$, avec les propriétés

$$(18) \qquad D_n + d_n < \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}),$$

$$(19) \qquad d_n \leqslant \exp(-1/D_n),$$

et on définit $\varphi_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ par

$$\varphi_n(t) = \varphi_{d_n, D_n}(t - c_n).$$

A cause de (18) le support de φ_n se trouve dans l'intérieur de $[a_{n+1}, a_n]$.

Après ces préparatifs, on est en mesure de définir $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ par

$$w(t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad t \geqslant a_1 \; ;$$

$$w(t) = \varphi_n(t) \;\; d_n^2 \, W\left(\frac{t - c_n}{d_n}\right) \qquad \text{pour} \qquad a_{n+1} \leqslant t \leqslant a_n .$$

On vérifie facilement que $w \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathbf{C})$. De plus, les estimations (14) donnent

$$\left.\begin{aligned} w(t) &= o(d_n D_n) \\ w'(t) &= o(d_n) \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour} \qquad t \in [a_{n+1}, a_n].$$

Cela implique que $w \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, car $d_n \to 0$ et $D_n \to 0$. D'autre part, on a

$$w''(d_n + c_n) = W''(1) = 2 - 2i \, ; \qquad w''(a_n) = 0,$$

d'où $w \notin \mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, puisque $a_n \to 0$, $d_n + c_n \to 0$.

Par contre, on a

$$|w(t)|^2 = \varphi_n^2(t)\, d_n^4\left(1+\left(\frac{t-c_n}{d_n}\right)^2\right) \quad \text{pour} \quad t \in [a_{n+1}, a_n].$$

Si on utilise le fait que $d_n < \mathrm{D}_n$, conséquence immédiate de (19), et le fait que $\varphi_n(t) = 0$ pour $|t-c_n| \geqslant d_n + \mathrm{D}_n$ ainsi que les estimations (14), on trouve

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k |w(t)|^2 = o_k(d_n^2\,\mathrm{D}_n^{2-k}) \quad \text{pour} \quad t \in [a_{n+1}, a_n], \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Cela montre que $|w|^2 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, car (19) implique $d_n^2\,\mathrm{D}_n^{2-k} \to 0$ pour $n \to \infty$. Similairement, $w|w|^2 \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Notons qu'un point essentiel de la démonstration est le fait que $|\mathrm{W}|^2$ et $\mathrm{W}|\mathrm{W}|^2$ sont des polynômes tandis que W n'en est pas un.

5. Détermination de $\Psi_{2,2}$.

Le but principal de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — $\Psi_{2,2} = \mathscr{D}\mathit{iff}_2$.

Énonçons deux corollaires :

COROLLAIRE 1. — *Si* $\dim \mathrm{M} = \dim \mathrm{N} = 2$ *et* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *est une pseudo-immersion, alors* f *est localement un difféomorphisme.*

COROLLAIRE 2. — $\Psi_{1,2}$ *est vide, tout comme* $\Psi_{2,n}$ *pour* $n \geqslant 3$.

Démonstrations. — Le corollaire 1 découle immédiatement du théorème 4. Si $f \in \Psi_{1,2}$, alors $\tilde{f} := (f,0)$ est dans $\Psi_{2,2}$, donc $\tilde{f}$ est un germe difféomorphique, ce qui n'est pas possible. (On peut démontrer cette partie d'une manière directe, sans le détour par le théorème 4.) Si $f \in \Gamma_{2,n}$, $n \geqslant 3$, on pose $g(s,t) = (s,t^2,t^3,\ldots,t^n) \in \Gamma_{n,2}$. A l'aide du théorème A on montre que $g \in \Psi_{n,2}$. Mais le rang de g étant 1 (à l'origine), il s'ensuit que $f \circ g \notin \mathscr{D}\mathit{iff}_2 = \Psi_{2,2}$, et donc que $f \notin \Psi_{2,n}$.

La démonstration du théorème 4 nécessite deux lemmes :

LEMME 4. — *Soient* P, Q *des polynômes réels homogènes non-nuls en* x *et* y, $\deg \mathrm{P} = m$, $\deg \mathrm{Q} = n$. *Si*

(20) $$\partial_x\mathrm{P}\cdot\partial_y\mathrm{Q} - \partial_y\mathrm{P}\cdot\partial_x\mathrm{Q} \equiv 0,$$

alors il existe une constante c telle que

$$P^n = cQ^m.$$

Démonstration. — On multiplie (20) par x

$$x\partial_x P \cdot \partial_y Q - x\partial_x Q \cdot \partial_y P \equiv 0.$$

On transforme ensuite cette identité à l'aide de l'identité d'Euler pour les fonctions homogènes et l'on obtient :

$$mP \cdot \partial_y Q - nQ \cdot \partial_y P \equiv 0,$$

et donc, dans $N := \{(x,y) \mid P(x,y) \neq 0\}$,

$$\partial_y\left(\frac{Q^m}{P^n}\right) = 0.$$

De même

$$\partial_x\left(\frac{Q^m}{P^n}\right) = 0 \quad \text{dans } N.$$

Comme N est ouvert et non-vide, le lemme est ainsi démontré.

Une série entière réelle ou complexe, en une ou plusieurs variables, sera notée :

$$(21) \qquad F = f_m + f_{m+1} + \cdots,$$

où les f_k sont des polynômes homogènes de degré k. Si $f_m \neq 0$, m sera *l'ordre de* F. On utilisera aussi F(0) pour désigner le terme constant de F.

LEMME 5. — *Soit* $F \in \mathbf{R}[[x,y]]$, *non nul, d'ordre impair* m. *Alors il existe un* r *naturel impair,* $1 \leqslant r \leqslant m$, *et une série*

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{M} a_\nu t^{m_\nu} \in \mathbf{R}[[t]]$$

avec $r \leqslant m_1 < m_2 < m_3 < \ldots.$ $M \in \{0,1,2,\ldots\infty\}$, $a_\nu \neq 0$ *pour* $\nu = 1, 2, \ldots,$ *et*

$$\operatorname{pgcd}(r,m_1,m_2,\ldots) = 1,$$

telle que

$$F(\varphi(t),t^r) = 0, \qquad ou \qquad F(t^r,\varphi(t)) = 0.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que f_m contient le terme x^m. Alors le théorème de Préparation de Weierstrass, dans sa version pour les séries formelles (voir [7], p. 139 ; [8], p. 27), fournit l'existence d'une série $U(x,y) \in \mathbf{R}[[x,y]]$ et de séries $h_j(y) \in \mathbf{R}[[y]]$, $\operatorname{ord}(h_j) \geqslant j$, telles que

$$F(x,y) = (x^m + h_1(y)x^{m-1} + \cdots + h_m(y))U(x,y).$$

On peut donc supposer que $F(x,y)$ est un « pseudopolynôme » :

$$F(x,y) = x^m + h_1(y)x^{m-1} + \cdots + h_m(y)$$

avec $\operatorname{ord}(h_j) \geqslant j$.

Si $F(x,y)$ se décompose dans $\mathbf{C}((y))[x]$ comme

$$x^m + h_1 x^{m-1} + \cdots + h_m = (x^e + g_1 x^{e-1} + \cdots + g_e)(x^d + k_1 x^{d-1} + \cdots + k_d),$$

avec g_j, $k_i \in \mathbf{C}((y))$, alors on peut montrer, par des arguments de routine, que

$$g_j,\ k_i \in \mathbf{C}[[y]] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ord}(g_j) \geqslant j, \quad \operatorname{ord}(k_i) \geqslant i.$$

Il s'ensuit que si l'on décompose $F(x,y)$ en facteurs moniques et irréductibles sur $\mathbf{C}((y))$, alors ces facteurs sont de la même forme que F, et comme les facteurs non réels apparaissent en paires conjuguées complexes, au moins un des facteurs est réel et de degré impair (en x). On supposera donc dans ce qui suit que

$$F(x,y) = x^r + h_1(y)x^{r-1} + \cdots + h_r(y),$$

$\operatorname{ord}(h_j) \geqslant j$, r impair, F irréductible en tant que polynôme sur $\mathbf{C}((y))$.

On utilisera le lemme suivant ([6], th. 5.14).

LEMME 6. — *Soit $F(x,y) \in \mathbf{C}((y))[x]$ monique et irréductible, de x-degré $r \geqslant 1$. Alors il existe une série $\varphi(t) \in \mathbf{C}((t))$ telle que*

$$F(\varphi(t), t^r) = 0$$

et telle que

$$\varphi(t) = \Sigma c_\nu t^{m_\nu}, \ c_\nu \neq 0, \quad m_1 < m_2 < \ldots, \quad \textit{et} \quad \operatorname{pgcd}(r, m_1, m_2, \ldots) = 1.$$

De plus,

$$F(x,t^r) = \prod_{k=0}^{r-1} \left(x - \varphi\left(\exp\left(\frac{2\pi i k}{r}\right)t\right)\right). \tag{22}$$

Dans notre cas, F est réel et de degré r impair. On pose

$$\varphi_k(t) = \varphi(\exp(2\pi ik/r)t).$$

Les φ_k non réels apparaissent en couples, il y a donc au moins un φ_k réel. On a, d'après (22),

$$\varphi_0(t)\varphi_1(t)\ldots\varphi_{r-1}(t) = -h_r(t^r).$$

Il s'ensuit que les $\varphi_k(t)$ sont entiers et d'ordre

$$\operatorname{ord}_t(h_r(t^r))/r = \operatorname{ord}_t(h_r(t)),$$

qui est au moins r. (22) implique aussi

$$F(\varphi_k(t), t^r) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots r-1.$$

Cela démontre le lemme 5, avec la restriction que F contient le terme x^m. Pour lever cette restriction, on pose

$$\tilde{F}(x,y) = F(ax+by, cx+dy),$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ont été choisis de sorte que $ad - bc \neq 0$ et $f_m(a,c) = 1$ (avec les notations de (21)). Alors $\tilde{F}$ contient le terme x^m et l'on trouve donc r et $\varphi(t)$ comme ci-dessus avec

$$F(a\varphi(t) + bt^r, c\varphi(t)+dt^r) = 0.$$

Les termes $a\varphi(t) + bt^r$ et $c\varphi(t) + dt^r$ ont un ordre $\geqslant r$, et l'un d'eux a l'ordre r, disons que ce soit $c\varphi(t) + dt^r$. On peut trouver $\tau(u) \in \mathbf{R}[[u]]$, avec $\operatorname{ord}(\tau) = 1$ (c'est-à-dire τ admet une réciproque), tel que $c\varphi(\tau(u)) + d\tau(u)^r = u^r$. Mais alors la série $\tilde{\varphi}(u) = a\varphi(\tau(u)) + b\tau(u)^r$ possède toutes les propriétés qu'on demande à $\varphi(t)$ dans les conclusions du lemme 5. Cela se démontre directement ou alors à l'aide du théorème 3, car $(t^r, \varphi(t))$ et $(u^r, \tilde{\varphi}(u))$ sont les séries de Taylor de germes équivalents.

COROLLAIRE. — *Si* $f \in \Gamma_{1,2}$, $f \sim F(x,y) \in \mathbf{R}[[x,y]]$ *et* $\operatorname{ord}(F)$ *est impair, alors il existe* $\psi \in \Psi_{2,1}$ *tel que* $f \circ \psi$ *est plat.*

Pour démontrer le théorème 4, soit

$$h = (f,g) \in \Gamma_{2,2},$$

et

$$f(x,y) \sim F(x,y) \in \mathbf{R}[[x,y]], \qquad g(x,y) \sim G(x,y) \in \mathbf{R}[[x,y]].$$

Si $F = G = 0$, alors h est plat et sa composition avec l'immersion $i : t \to (t,0)$ est plate, donc $h \circ i \notin \Psi_{2,1}$ par le théorème 2, et $h \notin \Psi_{2,2}$ par le théorème 1. Si $\operatorname{ord}(F) = 1$, il existe, d'après le corollaire du lemme 6, un $\psi \in \Psi_{2,1}$ tel que $f \circ \psi$ est plat. Si $h \in \Psi_{2,2}$, alors la série de Taylor de $g \circ \psi$ est d'ordre 1, donc $\operatorname{ord}(G) = 1$ et le terme linéaire de G est indépendant de celui de F, et par conséquent $h \in \mathscr{D}\!\mathit{iff}_2$. On peut donc supposer que $G \neq 0$ avec $\operatorname{ord}(G) \geqslant 2$ et que $F = 0$ ou $\operatorname{ord}(F) \geqslant 2$.

Si $F \neq 0$ avec $\operatorname{ord}(F) = m$, on pose comme dans (21)

$$F = f_m + f_{m+1} + \dots,$$

et similairement

$$G = g_n + g_{n+1} + \dots,$$

avec $n = \operatorname{ord}(G)$.

On distinguera quatre cas :

Cas (1) : $F \neq 0$, n, m pairs et $J := \partial_x f_m \partial_y g_n - \partial_y f_m \partial_x g_n \not\equiv 0$. Alors, on choisit a, $b \in \mathbf{R}$ tels que $J(a,b) \neq 0$, $g_n(a,b) = B \neq 0$, en particulier $(a,b) \neq (0,0)$. On pose

$$\varphi_1(t) = at + a_2t^2 + \cdots \in \mathbf{R}[[t]],$$
$$\varphi_1(t) = at + a_2t^2 + \cdots \in \mathbf{R}[[t]],$$

avec des coefficients $a_2, a_3, \dots, b_2, b_3, \dots$ à déterminer. On a

$$F(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = At^m + A_{m+1}t^{m+1} + \cdots,$$
$$G(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = Bt^n + B_{n+1}t^{n+1} + \cdots,$$

où, pour $j \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} A_{j+m} &= a_{j+1}\, \partial_x f_m(a,b) + b_{j+1}\, \partial_y f_m(a,b) \\ &\quad + \text{polynôme en } a, b, a_2, b_2, \dots, a_j, b_j. \\ B_{j+n} &= a_{j+1}\, \partial_x g_n(a,b) + b_{j+1}\, \partial_y g_n(a,b) \\ &\quad + \text{polynôme en } a, b, a_2, b_2, \dots, a_j, b_j. \end{aligned}$$

Puisque $J(a,b) \neq 0$, on peut déterminer $a_{,2}, b_2, a_3, b_3, \dots$ récursivement, tels que

$$A_{m+1} = A_{m+2} = \cdots = 0, \ B_{n+1} = B_{n+2} = \cdots = 0.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& F(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = At^m, \\
(23) \qquad & G(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = Bt^n \neq 0, \\
& \inf(\operatorname{ord}(\varphi_1), \operatorname{ord}(\varphi_2)) = 1.
\end{aligned}
$$

Cas (2) : $F = 0$, n est pair.

Comme dans le cas (1), mais plus simplement, on obtient φ_1 et φ_2 ayant les propriétés (23), la première devenant cependant $F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Cas (3) : n ou m impair, disons m impair.

Alors r et φ sont comme dans le lemme 5, avec

$$F(\varphi(t), t^r) = 0 \quad \text{ou} \quad F(t^r, \varphi(t)) = 0.$$

Cas (4) : n, m pairs, $\partial_x f_m \, \partial_y g_n - \partial_x g_n \, \partial_y f_m \equiv 0$.

Alors, d'après le lemme 4, on a $c \in \mathbf{R}$ tel que

$$f_m^n = c g_n^m.$$

Dans les trois premiers cas, on trouve qu'on peut composer h avec un germe pseudo-immersif pour obtenir un germe non-pseudo-immersif, ce qui prouve $h \notin \Psi_{2,2}$. Pour le troisième cas, on utilise le fait que $(\varphi(t), t^r)$ est la série de Taylor d'un $\psi \in \Psi_{2,1}$ (théorème 3).

Supposons maintenant que F, G relèvent du cas (4). On pose

$$
\begin{aligned}
& F_0 = F, \qquad m_0 = m, \qquad c_0 = c; \\
& F_1 = F^n - cG^m = F_0^n - c_0 G^{m_0},
\end{aligned}
$$

et on recommence toute la procédure, mais avec F_0 et G remplacés par F_1 et G. Si on retombe sur le cas (4) on pose

$$F_2 = F_1^n - c_1 G^{m_1},$$

où

$$
\begin{aligned}
& F_1 = f_{1,m_1} + f_{1,m_1+1} + f_{1,m_1+2} + \cdots, \\
& f_{1,m_1}^n = c_1 g_n^{m_1}, \qquad c_1 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Ensuite on recommence le tout avec le couple F_2, G.

Il est pensable que l'on puisse continuer de cette façon *ad infinitum*, en retombant toujours dans le cas (4). On va montrer que cela n'est pas possible sauf si $h \notin \Psi_{2,2}$.

Supposons le contraire.

On a une suite de conditions :

$$(24)\quad \begin{cases} F_0 = F, & \operatorname{ord}(F_0) = m_0 \text{ pair.} \\ F_1 = F_0^n - c_0 G^{m_0}, \ c_0 \neq 0, & \\ \vdots & \operatorname{ord}(F_1) = m_1 \geqslant nm_0 + 2, \ m_1 \text{ pair.} \\ F_{k+1} = F_k^n - c_k G^{m_k}, \ c_k \neq 0, & \\ \vdots & \operatorname{ord}(F_{k+1}) = m_{k+1} \geqslant nm_k + 2, \ m_{k+1} \text{ pair.} \end{cases}$$

On compose h avec un germe immersif $i \in \Psi_{2,1}$, $i \sim \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, tel que $G(\varphi(t)) = Bt^n$. Alors

$$h \circ i \sim (F(\varphi(t)), Bt^n).$$

Comme $h \circ i \in \Psi_{2,1}$ et $\operatorname{ord}(F) \geqslant 2$, on doit avoir $B \neq 0$; de plus, $F(\varphi(t))$ doit contenir au moins un terme ct^ν, $c \neq 0$, ν impair, par le théorème 2.

Posons

$$F(\varphi(t)) = t^{\nu_0} h_0(t^2) + t^{m_0} s_0(t^2)$$

avec $h_0(0) \neq 0$, ν_0 impair, $\nu_0 > m_0$. La formule (24) implique que l'ordre de

$$F(\varphi(t))^n - c_0 G(\varphi(t))^{m_0}$$

est supérieur à nm_0, et puisque $G(\varphi(t)) = Bt^n \neq 0$, on obtient

$$F(\varphi(t))^n = c_0 B^{m_0} t^{nm_0} + \cdots,$$

d'où $s_0(0) \neq 0$. Mais alors

$$\begin{aligned} F_1(\varphi(t)) &= F(\varphi(t))^n - c_0 B^{m_0} t^{m_0 n} \\ &= t^{\nu_1} h_1(t^2) + t^{m_1} s_1(t^2), \end{aligned}$$

avec $\nu_1 = \nu_0 + (n-1)m_0$ impair, $\nu_1 > m_1$, $h_1(0) = nh_0(0)s_0^{n-1}(0) \neq 0$, tandis que $s_1(0) \neq 0$ pour la même raison que celle invoquée plus haut concernant $s_0(0)$. On continue de cette façon

$$(25)\quad \left.\begin{aligned} &\mathrm{F}_k(\varphi(t)) = t^{\nu_k}h_k(t^2) + t^{m_k}s_k(t^2), \\ &\nu_k = \nu_{k-1} + (n-1)m_{k-1} \text{ impair}, \quad \nu_k > m_k, \\ &h_k(0) \neq 0, \quad s_k(0) \neq 0. \end{aligned}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

En particulier

$$(26)\qquad \nu_k = \nu_0 + (n-1)(m_{k-1} + \cdots + m_0).$$

D'autre part, $m_k \geqslant nm_{k-1} + 2$ pour $k \geqslant 1$, donc

$$\begin{aligned} m_k &\geqslant (n-1)m_{k-1} + m_{k-1} + 2 \\ &\geqslant (n-1)m_{k-1} + (n-1)m_{k-2} + m_{k-2} + 4 \\ &\vdots \\ &\geqslant (n-1)(m_{k-1} + \cdots + m_0) + m_0 + 2k. \end{aligned}$$

Combinant cela avec (26), on obtient

$$m_k \geqslant \nu_k - \nu_0 + m_0 + 2k,$$

d'où $\nu_k < m_k$ si k est grand, ce qui contredit (25).

On peut donc supposer que la suite dans (24) *ne s'étend pas à l'infini, c'est-à-dire que l'on se retrouve finalement avec un* F_k *tel que* F_k, G *relèvent du cas* (1), (2) *ou* (3).

Dans le cas (1), et d'une façon similaire dans le cas (2), on aura alors, avec $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$

$$\mathrm{F}_k(\varphi(t)) = \mathrm{A}t^{m_k}, \qquad \mathrm{G}(\varphi(t)) = \mathrm{B}t^n \neq 0,$$

d'où, par (24),

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{k-1}(\varphi(t))^n &= \mathrm{F}_k(\varphi(t)) + c_{k-1}\mathrm{G}(\varphi(t))^{m_{k-1}} \\ &= c_{k-1}\mathrm{B}^{m_{k-1}}\, t^{nm_{k-1}}(1 + \text{const.}\, t^{m_k - nm_{k-1}}). \end{aligned}$$

Comme $m_k - nm_{k-1}$ est pair et $\geqslant 2$, il suit que

$$\mathrm{F}_{k-1}(\varphi(t)) \in t^{m_{k-1}}\,\mathbf{R}[[t^2]].$$

Par itération de cet argument, on trouve successivement

$$F_j(\varphi(t)) \in t^{m_j}\mathbf{R}[[t^2]], \qquad j = k-1, k-2, \ldots, 0.$$

Donc finalement $F(\varphi(t)) \in \mathbf{R}[[t^2]]$. Mais aussi $G(\varphi(t)) \in \mathbf{R}[[t^2]]$. Or φ est la série de Taylor d'une immersion $i \in \Psi_{1,2}$, et $h \sim (F,G)$, donc

$$h \circ i(t) \sim (F(\varphi(t)), G(\varphi(t))) \in \mathbf{R}^2[[t^2]].$$

D'après le théorème 2, $h \circ i \notin \Psi_{2,1}$, donc $h \notin \Psi_{2,2}$ selon le théorème 1.

Si F_k, G relèvent du cas (3), alors le théorème 3 nous dit qu'il existe $\psi \in \Psi_{2,1}$ avec

$$\psi(t) \sim \varphi(t) \in \mathbf{R}^2[[t]], \tag{27}$$

$$F_k(\varphi(t)) = 0. \tag{28}$$

Comme pour le cas (1) ou (2), on va remonter la suite (24) jusqu'à F_0 et montrer que $h \circ \psi \notin \Psi_{2,1}$, donc $h \notin \Psi_{2,2}$, ce qui achèvera la preuve du théorème 4.

Si $F(\varphi(t)) = 0$, alors $h \circ \psi \notin \Psi_{2,1}$, vu que $\operatorname{ord}(G(\varphi(t))) \geqslant 2$. Si $G(\varphi(t)) = 0$, on a la même conclusion. On peut donc supposer

$$G(\varphi(t)) \neq 0, \qquad F_0(\varphi(t)) \neq 0.$$

La première de ces inégalités permet de supposer que

$$G(\varphi(t)) = \beta t^{\omega} \tag{29}$$

avec $\beta \neq 0$, $\omega \geqslant n = \operatorname{ord}(G)$. La seconde inégalité en conjonction avec (28), fournit l'existence d'un K, $0 \leqslant K < k$, tel que

$$F_K(\varphi(t)) \neq 0, \qquad F_{K+1}(\varphi(t)) = 0.$$

.Avec (24) et (29), on obtient

$$0 = F_{K+1}(\varphi(t)) = F_K(\varphi(t))^n - c_K G(\varphi(t))^{m_K},$$

$$F_K(\varphi(t))^n = c_K \beta^{m_K} t^{\omega m_K},$$

d'où il suit que $n \mid \omega m_K$ et

$$F_K(\varphi(t)) = d_K t^{\omega m_K / n}.$$

Ensuite, encore par (24) et en se rappelant que $m_K - nm_{K-1} > 0$, on a

$$\begin{aligned} F_{K-1}(\varphi(t))^n &= c_{K-1}\beta^{m_{K-1}}\, t^{\omega m_{K-1}} + d_K t^{\omega m_K/n} \\ &= c_{K-1}\beta^{m_{K-1}}\, t^{\omega m_{K-1}}\left(1+\text{const.}\, t^{\frac{\omega}{n}(m_K - nm_{K-1})}\right). \end{aligned}$$

Il suit que $n \mid \omega m_{K-1}$ et

$$\begin{gathered} F_{K-1}(\varphi(t)) \in \mathbf{R}[[t^{a_{K-1}}]] \\ a_{K-1} = \operatorname{pgcd}\left(\frac{\omega}{n} m_{K-1}, \frac{\omega}{n} m_K\right) \\ \operatorname{ord}(F_{K-1}(\varphi(t))) = \omega m_{K-1}/n. \end{gathered}$$

En itérant ce procédé, on obtient

$$\begin{gathered} F_p(\varphi(t)) \in \mathbf{R}[[t^{a_p}]] \\ a_p = \operatorname{pgcd}\left(\frac{\omega}{n} m_p, a_{p+1}\right) \\ \operatorname{ord}(F_p(\varphi(t))) = \omega m_p/n, \qquad p = K-2, K-3, \ldots, 0. \end{gathered}$$

En particulier, comme $F = F_0$,

$$\begin{gathered} F(\varphi(t)) \in \mathbf{R}[[t^{a_0}]] \\ a_0 = \operatorname{pgcd}\left(\frac{\omega}{n} m_0, \ldots, \frac{\omega}{n} m_K\right) \end{gathered}$$

Posons

$$s = \operatorname{pgcd}(a_0, \omega).$$

On a

$$s = \frac{\omega}{n} \operatorname{pgcd}(m_0, m_1 \ldots m_K, n) \geqslant \frac{\omega}{n} 2,$$

car $m_0, m_1, \ldots, m_K, n$ sont pairs. De plus, $\omega \geqslant n$, donc $s \geqslant 2$. Avec (29), cela nous donne

$$F(\varphi(t)),\ G(\varphi(t)) \in \mathbf{R}[[t^s]], \quad s \geqslant 2.$$

Selon le théorème 2, il s'ensuit que

$$h \circ \psi \notin \Psi_{2,1},$$

ce qui restait à démontrer.

6. Remarques.

Terminons en alignant, pêle-mêle, quelques problèmes, définitions et résultats, sans toutefois démontrer ces derniers.

(*a*) Le théorème 3 donne un critère simple pour décider si $f \in \Gamma_{n,1}$ est pseudo-immersif, pourvu que l'une des composantes soit de la forme t^r. Il semble être beaucoup plus difficile de donner un critère aussi simple dans le cas général.

(*b*) Il semble également être difficile de *classifier* $\psi_{n,1}$ par rapport à l'équivalence de germes. On peut montrer sans trop de peine que (t^r, t^s) et (t^R, t^S), avec $\operatorname{pgcd}(r,s) = \operatorname{pgcd}(R,S) = 1$ et $r < s$, $R < S$, sont équivalents, si et seulement si, $r = R$ et $s = S$. Mais tout $f \in \Psi_{2,1}$ n'est pas équivalent à un germe (t^r, t^s). Le germe $(t^6, t^{10} + t^{15})$ est un exemple simple.

(*c*) Si $f \in \Psi_{n,m}$, $g \in \Psi_{p,q}$, alors le produit (cartésien) $f \times g$ est dans $\Psi_{n+p,\, m+q}$. Un germe qui est équivalent à un tel produit est *réductible*. On peut montrer que le germe (complexe) $f \in \Psi_{4,2}$, $f(z) = (z^2, z^3)$, $z \in \mathbf{C}$, est *irréductible*. On peut facilement construire des $f \in \Psi_{n,m}$, pour tout $n \geqslant m$, par exemple des injections linéaires ou d'autres plus sophistiquées. Y a-t-il des $f \in \Psi_{n,m}$ irréductibles pour tous les $n > m$?

(*d*) Le germe $f : t \to (t^2, t^3, t^4)$ est pseudo-immersif. En fait, on peut omettre la troisième composante, sans que le germe perde cette propriété. On dit que f est *redondant*. Plus généralement, $f \in \Psi_{n,m}$ est dit redondant, s'il existe une application linéaire $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, $p < n$, telle que $g \circ f \in \Psi_{p,m}$. La fin de la démonstration du théorème 3, où l'on ramène le cas $\Psi_{n,1}$ au cas $\Psi_{2,1}$, montre que $f \in \Psi_{n,1}$ est redondant si $n \geqslant 3$.

(*e*) Dans [2], on s'est posé la question de savoir pour quelles algèbres A, réelles, sans nilpotents, l'application $f : A \to A^2$, $a \mapsto (a^2, a^3)$ est une pseudo-immersion. Si l'algèbre est de dimension finie, elle est somme directe d'idéaux isomorphes à $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$. D'après les théorèmes A et A′ et l'exemple de la section 4, f est pseudo-immersion si, et seulement si, $\mathbf{H}$ n'apparaît pas dans cette représentation de A, c'est-à-dire, si, et seulement si, A est commutative.

(f) Si $f \in \Gamma_{m,n}$, il est possible que $f \circ \Psi_{n,1} \subseteq \Psi_{m,1}$, tandis que $f \notin \Psi_{m,n}$. Un exemple est donné par $f \in \Gamma_{3,2}$, $f(u,v) = (u^2+v^2)(1,u,v)$, qui n'est pas pseudo-immersif selon la section 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, Second edition, Masson, Paris, 1973.

[2] H. Joris, Une $\mathscr{C}^\infty$-application non-immersive qui possède la propriété universelle des immersions, *Archiv der Mathematik*, 39 (1982), 269-277.

[3] J. Boman, Differentiability of a function and of its compositions with functions of one variable, *Math. Scand.*, 20 (1967), 249-268.

[4] J. Duncan, S. G. Krantz, H. R. Parks, Non-linear Conditions for Differentiability of Functions, *Journal d'Analyse Math.*, 45 (1985), 46-68.

[5] C. G. Gibson, *Singular Points of Smooth Mappings*, Pitman, London, 1979.

[6] S. S. Abhyankar, *Lectures on Expansion Techniques in Algebraic Geometry*, Tata Institute, Bombay, 1977.

[7] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. II, Van Nostrand, Princeton 1960.

[8] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Chap. 7, Hermann, Paris, 1965.

[9] R. Narasimhan, *Complex Analysis in One Variable*, Birkhäuser, Boston, 1985.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1986.

H. Joris et E. Preissmann,

Université de Lausanne
Collège Propédeutique
1015 Lausanne-Dorigny (Suisse).