

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARTINE QUEFFELEC

## **Une nouvelle propriété des suites de Rudin-Shapiro**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 2 (1987), p. 115-138

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_2\\_115\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_115_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE NOUVELLE PROPRIÉTÉ DES SUITES DE RUDIN-SHAPIRO

par Martine QUEFFELEC

---

### Introduction.

L'existence d'une transformation ergodique à spectre de Lebesgue, de multiplicité finie, était un problème ouvert, il y a peu de temps encore, alors que l'on savait construire de telles transformations à spectre singulier, de multiplicité  $m$  donnée à l'avance. J. Mathew et M. G. Nadkarni [11] construisirent alors, à l'aide d'un produit croisé, une transformation ergodique, dont la partie continue du spectre est de Lebesgue, de multiplicité 2.

La suite de Rudin-Shapiro est une suite à coefficients valant 1 ou  $-1$ , dont la mesure de corrélation se trouve être la mesure de Lebesgue du cercle. A la suite de l'étude spectrale des systèmes dynamiques définis par substitution ou automate, nous avons pu établir cette nouvelle propriété de la suite de Rudin-Shapiro :

**THÉORÈME 2.** — *La partie continue du spectre de la suite de Rudin-Shapiro est de type Lebesgue de multiplicité 2,*

en désignant plus brièvement par spectre de la suite de Rudin-Shapiro, le spectre du shift, dans le système dynamique uniquement ergodique associé à la suite. En généralisant leur procédé, J. Mathew et M. G. Nadkarni, obtiennent toute multiplicité de la forme  $N\varphi(N)$ , où  $\varphi$  est l'indicateur d'Euler. Dans le même temps, nous avons étudié le spectre de suites de Rudin-Shapiro généralisées, et obtenu la même multiplicité, pour la

*Mots-clés :* Suites de Rudin-Shapiro - Suite automatique - Substitution - Système dynamique - Spectre - Multiplicité spectrale - Fonction multiplicité - Mesure de Lebesgue - Produits de Riesz.

composante de Lebesgue. Plus précisément nous décrivons complètement le spectre de ces suites, c'est-à-dire chaque composante continue du spectre, avec sa multiplicité :

**THÉORÈME 3.** — *Soit  $q > 1$  fixé. La partie continue du spectre de la suite de Rudin-Shapiro généralisée à l'ordre  $q$ , a une composante de Lebesgue de multiplicité  $q\varphi(q)$ , et pour chaque diviseur  $d$  non trivial de  $q$ , un produit de Riesz généralisé, de multiplicité  $d\varphi(d)$ .*

Les techniques utilisées sont celles développées dans [15], et auxquelles on fait référence. L'article se compose de quatre parties. Dans un premier paragraphe, on rappelle certaines propriétés, classiques, de la suite de Rudin-Shapiro, puis dans le second, les premières propriétés du système dynamique qu'elle engendre. On rappelle, ou redémontre, dans le troisième, les propriétés spectrales d'un système dynamique engendré par un automate, (sous certaines conditions), que l'on applique à la suite de Rudin-Shapiro, pour obtenir le théorème 2. Le dernier paragraphe est consacré aux suites de Rudin-Shapiro généralisées. Nous établissons quelques propriétés d'une telle suite, avant de démontrer le théorème 3.

*Notations.* — On désigne par  $\mathbf{T}$ , le groupe compact  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ , c'est-à-dire le cercle. Son groupe dual, isomorphe à  $\mathbf{Z}$ , sera muni tantôt de l'addition, tantôt de la multiplication; les éléments, dans ce dernier cas, sont alors notés  $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$ , à la place de  $n$ .  $\mathbf{M}(\mathbf{T})$  est l'algèbre des mesures bornées, boréliennes, sur  $\mathbf{T}$ , munie de la convolution  $*$ . Si  $\sigma \in \mathbf{M}(\mathbf{T})$ ,  $\hat{\sigma}(k) = \int e^{ikt} d\sigma(t)$ .  $\mathbf{M}_d(\mathbf{T})$  est la sous-algèbre des mesures discrètes, et  $\mathbf{M}_c(\mathbf{T})$ , l'idéal des mesures continues.

Pour les autres notions d'analyse harmonique, telles que la convergence vague des mesures, les produits de Riesz, etc... nous renvoyons à [13] et [15]. Signalons simplement, pour une suite  $(f_n)$  de  $L^1(\mathbf{T})$ , l'abus de langage suivant : «  $f_n$  converge vaguement vers la mesure  $\sigma$  », signifie que la suite de mesures  $f_n dt$  converge vaguement vers  $\sigma$ .

Pour les notions propres à la théorie spectrale des systèmes dynamiques, nous renvoyons à [5].

Je tiens à remercier tout particulièrement Bernard Host, pour les suggestions et simplifications qu'il a apportées à cet article.

### 1. Propriétés de la suite de Rudin-Shapiro.

La suite  $(r_n)$  de Rudin-Shapiro est une suite à coefficients valant 1 ou  $-1$ , construite indépendamment par W. Rudin [17] et R. S. Shapiro [18] possédant la propriété suivante :

$$(1) \quad \left| \sum_{n=0}^{N-1} r_n e^{int} \right| \leq (2 + \sqrt{2}) \sqrt{N} \quad \text{pour } N \geq 1 \quad \text{et } t \in \mathbf{R}.$$

Les nombres  $r_n$  pour  $n < 2^k$  sont les coefficients du polynôme trigonométrique  $P_k$  de degré  $2^k - 1$ , construit à l'aide des formules de récurrence

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= P_k(t) + e^{i2^k t} Q_k(t) \\ Q_{k+1}(t) &= P_k(t) - e^{i2^k t} Q_k(t) \quad \text{si } k \geq 1 \end{aligned}$$

et

$$P_0(t) = Q_0(t) = 1.$$

Il résulte de la règle du parallélogramme que  $|P_k(t)|^2 \leq 2^{k+1}$  pour chaque  $k \geq 1$  et (1) s'ensuit.

J. Brillhart et L. Carlitz remarquent dans [2] que si  $n$  admet la décomposition binaire  $n = n_0 + 2n_1 + \dots + 2^j n_j$ ,

$$(2) \quad r_n = (-1)^{n_0 n_1 + \dots + n_{j-1} n_j},$$

autrement dit, si  $f(n)$  désigne le nombre de 11 dans l'écriture binaire de  $n$ ,  $r_n$  est aussi le nombre  $(-1)^{f(n)}$ .

En utilisant cette propriété, T. Kamae [10] établit alors que la mesure de corrélation  $\sigma$ , de la suite de Rudin-Shapiro est la mesure de Lebesgue, où  $\sigma$ , on le rappelle, est la mesure  $\geq 0$  de  $M(\mathbf{T})$  de coefficients de Fourier

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}(k) &= \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n+k < N} r_{n+k} r_n \quad \text{si } k \geq 0 \\ \widehat{\sigma}(-k) &= \overline{\widehat{\sigma}(k)}. \end{aligned}$$

Pour le voir différemment, considérons la suite de polynômes trigonométriques  $\geq 0$ ,  $R_N$ , définis par

$$R_N(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N r_n e^{int} \right|^2.$$

Par définition de la mesure  $\sigma$ , la suite de mesures  $R_N(t) dt$  converge étroitement vers  $\sigma$  et par la propriété (1) de la suite  $(r_n)$ ,

$$R_N(t) \leq (2 + \sqrt{2})^2 = C \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R} \text{ et tout } N \geq 1.$$

Si  $K_L$  désigne le noyau de Féjer d'ordre  $L$ ,

$$R_N * K_L(t) = \sum_{|k| < L} \left(1 - \frac{|k|}{L}\right) R_N(k) e^{ikt}$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|R_N * K_L\|_{\infty} = \|\sigma * K_L\|_{\infty} \leq C.$$

Soit alors  $f \in L^{\infty}$  une valeur d'adhérence de la suite  $(\sigma * K_L)_L$ , pour la topologie  $\sigma(L^{\infty}, L^1)$ ; on doit avoir  $\hat{f} = \hat{\sigma}$  et  $\sigma = f dt$  avec  $f \geq 0$  dans  $L^{\infty}$ .

Posons  $T_{2^k} = \frac{1}{2^k} |Q_k|^2$ . Avec les notations précédentes, on a

$$T_{2^{k+1}} = R_{2^{k+1}} - W_k$$

où  $W_k = \frac{1}{2^k} (\gamma_k Q_k \overline{P_k} + \overline{\gamma_k P_k} Q_k)$  converge vaguement vers 0, comme on peut le voir facilement en comparant  $W_{k+1}$  à  $W_k$ . On en déduit que la suite  $(R_{2^k} + T_{2^k})$  converge vaguement vers la mesure  $2f dt$ ; comme chaque polynôme vaut identiquement 2,  $f = 1$  et  $\sigma = m$ , la mesure de Lebesgue de  $T$ . On retrouvera la précédente propriété de la suite de Rudin-Shapiro dans un prochain paragraphe, en utilisant une autre propriété de cette suite, établie par G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy [4].

La suite de Rudin-Shapiro est 2-automatique. Considérons pour le voir, la substitution  $\zeta$  de longueur 2, ou le 2-automate  $(\varphi_0, \varphi_1)$ , définis sur l'alphabet  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  par

$$\zeta(0) = 02, \quad \zeta(1) = 32, \quad \zeta(2) = 01, \quad \zeta(3) = 31$$

ou par les instructions

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(1) = 3, \quad \varphi_0(2) = 0, \quad \varphi_0(3) = 3$$

et

$$\varphi_1(0) = 2, \quad \varphi_1(1) = 2, \quad \varphi_1(2) = 1, \quad \varphi_1(3) = 1.$$

En itérant la substitution  $\zeta$  sur la lettre 0, on obtient une suite  $u = (u_n)$  à valeurs dans  $A$ , vérifiant la relation  $\zeta(u) = u$ , dont les premières

composantes sont

0 2 0 1 0 2 3 2 0 2 0 1 3 1 0 1 0 2 0 1 0 2 3 2 3 1 3 2 ...

La suite de Rudin-Shapiro se déduit de la suite  $u$  en projetant 0 et 2 sur 1 d'une part, et 1 et 3 sur  $-1$  d'autre part. Il est intéressant de noter que la suite de Rudin-Shapiro simule en un certain sens le hasard, alors que par construction, elle est déterministe [7]. Dans [2] J. Brillhart et P. Morton précisent l'inégalité (1) en établissant, avec les constantes les meilleures possibles

$$\sqrt{3/5} < S(N)/\sqrt{N} < \sqrt{6}$$

et

$$0 < T(N)/\sqrt{N} < \sqrt{3}$$

où

$$S(N) = \sum_{n < N} r_n \quad \text{et} \quad T(N) = \sum_{n < N} (-1)^n r_n.$$

Signalons le résultat de J. P. Allouche et M. Mendès France [1]

$$\sum_{n < N} \exp(2\pi i x f(n)) = O(N^\alpha)$$

où  $f(n)$  désigne encore le nombre de 11 dans le développement binaire de  $n$  et où  $\alpha = \alpha(x)$  est strictement  $< 1$  et vaut  $1/2$  pour  $x = 1/2$ .

Pour achever ce paragraphe, rappelons que les suites de papiers pliés [14] possèdent la propriété (1) de la suite de Rudin-Shapiro.

## 2. Premières propriétés du système de Rudin-Shapiro.

On note désormais  $u = (u_n)$  la suite définie par l'automate de Rudin-Shapiro (plus brièvement appelée la suite A.R.S.) et  $r = (r_n)$  la suite classique de Rudin-Shapiro (plus brièvement appelée la suite R.S.) qui se déduit de la précédente, on le rappelle, en projetant les lettres 0, 2 sur 1 et les lettres 1, 3 sur  $-1$ . On désigne par  $T$  le shift unilatéral et par  $X$  l'adhérence dans  $A^N$  de l'orbite  $(T^n u)_{n \geq 0}$  de la suite  $u$ ; de même  $Y$  désigne l'adhérence dans  $\{-1, 1\}^N$  de l'orbite  $(T^n r)_{n \geq 0}$  de la suite  $r$ . L'automate de Rudin-Shapiro est primitif puisque toute lettre de  $A$  apparaît dans  $\zeta^k(\alpha)$  pour toute  $\alpha$  de  $A$ , dès que  $k \geq 3$ . Or pour une substitution primitive  $\theta$  de longueur constante égale à  $q$ , définie sur un alphabet fini  $\mathcal{A}$  et de point fixe

$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta^n(0)$  non-périodique, ( $0 \in \mathcal{A}$ ), les propriétés suivantes sont maintenant classiques ([14] pour une synthèse).

(i) Le système  $(\mathcal{X}, T)$ , où  $\mathcal{X}$  est l'adhérence dans  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  de  $(T^n v)_{n \geq 0}$ , est minimal et uniquement ergodique, d'unique mesure  $T$ -invariante,  $\nu$ , définie par

$$\nu(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(T^n v)$$

pour toute  $f \in C(\mathcal{X})$  [7].

(ii)  $\theta$  est reconnaissable au sens suivant : il existe  $K$  entier  $\geq 1$  tel que tout  $m$  vérifiant  $v_{m+1} = v_{kq+1}$  pour  $0 \leq 1 \leq K$  est nécessairement de la forme  $m = jq$ . [15]. Autrement dit l'examen de  $K$  termes au plus, suivant le terme  $v_m$ , permet de décider si  $v_m$  est la première lettre d'un substitué  $\theta(\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Supposons  $\theta$  injective sur les lettres de  $\mathcal{A}$ ;  $\theta$  est alors un homéomorphisme de  $\mathcal{X}$  sur  $\theta(\mathcal{X})$  et

(iii) les systèmes  $(\mathcal{X}, \nu, T)$  et  $(\theta(\mathcal{X}), \tau, T^q)$ , où  $\tau = q \cdot \nu / \theta(\mathcal{X})$  sont topologiquement isomorphes.

Notons enfin une dernière propriété :

(iv)  $\mathcal{X} = \bigcup_{k=0}^{q-1} T^k \theta(\mathcal{X})$  où la réunion est disjointe  $\nu$ -pp. On établit, à l'aide de la reconnaissabilité, que le second membre est un sous-ensemble de  $\mathcal{X}$ , qui contient l'orbite de  $v$ .

Dans le cas de la suite A.R.S., le système  $(X, T)$  possède donc les propriétés (i)-(iv), la propriété de reconnaissabilité étant ici évidente :  $x \in X$  est dans  $\zeta(X)$  si et seulement si  $x_0 \in \{0, 3\}$ .

Le système  $(Y, T)$  est lui aussi uniquement ergodique et minimal, et on note  $\pi$  la projection  $X \mapsto Y$  qui à  $u$  associe  $r$  et qui commute avec  $T$ .

L'étude spectrale de la suite R.S. se ramène à celle de la suite A.R.S. car on a plus précisément

**PROPOSITION 1.** —  $\pi$  est un isomorphisme topologique des systèmes  $(X, T)$  et  $(Y, T)$ .

*Démonstration.* — Considérons l'application  $\Phi : A^{\mathbb{N}} \mapsto A^{\mathbb{N}}$  qui à  $x$  associe  $\bar{x}$ , où  $\bar{x}$  se déduit de  $x$  en échangeant dans  $x$  les lettres 1 et 3 et les lettres 0 et 2.

Par minimalité du système  $(X, T)$ , tout mot  $\omega$  de la suite A.R.S. doit apparaître dans tout  $x \in X$ . Considérons en particulier le mot  $\omega = \zeta(102) = 320201$ .  $\bar{\omega} = 102023$  n'est pas un mot de la suite  $u$ , puisqu'il contient  $0202 = \zeta(00)$  et que  $00$  n'apparaît pas dans  $u$ .

On a ainsi prouvé le lemme suivant :

LEMME 1. —  $\bar{x}$  n'est dans  $X$  pour aucun  $x$  de  $X$ .

Soit à présent  $y \in Y$ . On va montrer que  $y$  a au plus deux relèvements dans  $X$ .

Pour cela écrivons  $y = y_0 y_1 y_2 \dots$  avec  $y_i \in \{-1, 1\}$ .

Si  $y_0 = 1$ ,  $\pi^{-1}(y)$  est constitué des suites de  $X$  commençant par 0 ou 2. Si  $x \in X$  est un tel relèvement, avec  $x_0 = 0$ ,  $x$  est dans  $\zeta(X)$  par reconnaissabilité et donc  $x_1 = 1$  ou 2 selon que  $y_1 = -1$  ou 1 etc... si par contre  $x_0 = 2$ ,  $x \in T\zeta(X)$  par (iv) et  $x_1 = 3$  ou 0 selon que  $y_1 = -1$  ou 1 etc... On prouve ainsi que, si  $y$  possède deux relèvements dans  $X$ , ils sont nécessairement de la forme  $x$  et  $\bar{x}$ . Par le lemme 1 ceci est exclu et  $\pi$  est un homéomorphisme.

### 3. Propriétés spectrales de l'automate de Rudin-Shapiro.

La plupart des propriétés spectrales de l'automate de Rudin-Shapiro se démontrent sans plus de travail pour des substitutions  $\theta$  possédant les propriétés (i)-(iv). Nous les énoncerons donc dans un cadre général, avec des esquisses de démonstration puisque les détails se trouvent dans [15].

Si  $(\mathcal{X}, \nu, T)$  désigne, comme auparavant, le système dynamique uniquement ergodique associé à la substitution  $\theta$ , on notera  $U$  l'opérateur défini sur  $L^2(\mathcal{X}, \nu)$  par  $Uf = f \circ T$ , qui se trouve être unitaire, bien que les suites de  $\mathcal{X}$  soient définies unilatéralement; on appelle  $\sigma_f$  la mesure spectrale de  $f$ , c'est-à-dire la mesure  $\geq 0$  de  $M(T)$  de coefficients de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_f(k) &= \langle U^k f, f \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} f \circ T^{n+k}(v) \cdot \overline{f \circ T^n(v)} \end{aligned}$$

( $k \in \mathbb{Z}$ ). De même  $\sigma_{f,g}$  est la mesure de  $M(T)$  de coefficients de Fourier

$$|\hat{\sigma}_{f,g}(k) = \langle U^k f, g \rangle$$



$L^2(\mathcal{X}, \nu)$  admet la décomposition  $H_d \oplus H_c$  où

$$\begin{aligned} H_d &= \{f \in L^2(\mathcal{X}, \nu), \sigma_f \in M_d(\mathbf{T})\} \\ H_c &= \{f \in L^2(\mathcal{X}, \nu), \sigma_f \in M_c(\mathbf{T})\}. \end{aligned}$$

Il est bien connu que  $H_d$  est le sous-espace fermé, T-invariant de  $L^2(\mathcal{X}, \nu)$  engendré par les fonctions propres de  $\theta$ , et que, l'on peut choisir celles-ci continues [7]; les valeurs propres de U sont tous les nombres de la forme

$$\lambda = e^{2\pi i k/q^n} \cdot e^{2\pi i j/h} \quad (k, j \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N})$$

où  $q$ , et  $h$  sont respectivement la longueur et la hauteur de  $\theta$ , [7]. Notons  $\mu$  l'unique mesure T-invariante sur X, dans le système de Rudin-Shapiro. La mesure de corrélation de la suite  $r$ ,  $\sigma$ , est une des mesures de la famille spectrale  $(\sigma_f)_{f \in L^2(X, \mu)}$ . Plus précisément  $\sigma$  n'est autre que la mesure  $\sigma_f$  où  $f = \pi_0$  en notant  $\pi_0 : X \mapsto A$ , la projection sur la première composante. On va établir à présent que la partie continue du spectre de la suite  $u$ , et donc de la suite  $r$ , est de type Lebesgue. Notons encore  $H_d \oplus H_c$  la décomposition de  $L^2(X, \mu)$ .

**THÉORÈME 1.** — *Pour toute  $f \in H_c$ ,  $\sigma_f \ll m$ , la mesure de Lebesgue sur T.*

*Démonstration.* — On se place dans le cadre général du système  $(\mathcal{X}, \nu, T)$ .  $\alpha$  étant une lettre de  $\mathcal{A}$ , on désigne par  $[\alpha]$  le cylindre constitué des  $x$  de  $\mathcal{X}$  de première lettre  $\alpha$  et  $1_{[\alpha]}$  la fonction indicatrice de ce cylindre. Il résulte de l'isomorphisme (iii) que la mesure spectrale  $\sigma_{1_{\theta^n([\alpha])}}$  se déduit de la

mesure  $\sigma_{1_{[\alpha]}}$  par l'opération suivante : on la contracte sur l'intervalle  $\left[0, \frac{1}{q^n}\right]$  et on la reproduit de façon invariante sur chaque intervalle  $\left[\frac{k}{q^n}, \frac{k+1}{q^n}\right]$  ( $1 \leq k \leq q^n - 1$ ); ceci à une constante de normalisation près.

**LEMME 2.** — *On a les relations*

$$\hat{\sigma}_{1_{\theta^n([\alpha])}}(k) = \begin{cases} \frac{1}{q^n} \hat{\sigma}_{1_{[\alpha]}}(k/q^n) & \text{si } q^n \text{ divise } k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* — Supposons  $n = 1$  pour simplifier.

Le temps de premier retour à  $\theta(\mathcal{X})$  est  $T^q$ , si bien que  $T^k\theta(x) = \theta(y)$  avec  $y \in \mathcal{X}$  si et seulement si  $q$  divise  $k$  et alors

$$T^{mq}\theta(x) = \theta(T^m x) \quad \text{si } x \in \mathcal{X}.$$

On a ainsi pour  $\alpha \in \mathcal{A}$  et pour  $m \in \mathbf{N}$

$$\theta([\alpha] \cap T^{-m}[\alpha]) = \theta[\alpha] \cap T^{-mq}\theta[\alpha].$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{1_{\theta[\alpha]}}(k) &= v(\theta[\alpha] \cap T^{-k}\theta[\alpha]) \\ &= 0 \text{ si } q \text{ ne divise pas } k, \end{aligned}$$

et si  $k = mq$  cela vaut

$$\begin{aligned} v(\theta[\alpha] \cap T^{-mq}\theta[\alpha]) &= v(\theta([\alpha] \cap T^{-m}[\alpha])) \text{ par la remarque ci-dessus} \\ &= \frac{1}{q} v([\alpha] \cap T^{-m}[\alpha]) \text{ (propriété (iii))} \\ &= \frac{1}{q} \widehat{\sigma}_{1_{[\alpha]}}(m), \end{aligned}$$

ce qui établit le lemme 1.

Notons à présent,  $H_n$ , le sous-espace fermé  $T$ -invariant de  $L^2(\mathcal{X}, v)$ , engendré par les fonctions  $1_{\theta^n([\alpha])}$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $n \geq 0$ . On peut écrire la propriété (iv) sous la forme plus précise [15],

$$[\alpha] = \bigcup_{k, \beta} T^k\theta([\beta]),$$

la réunion étant prise sur les  $k$ ,  $0 \leq k \leq q - 1$  et  $\beta \in \mathcal{A}$  tels que  $\alpha$  soit la  $k$ -ième lettre du mot  $\theta([\beta])$ . Ainsi clairement,  $H_n$  est inclus dans  $H_{n+1}$ , mais on a aussi

$$\text{LEMME 3. — } L^2(\mathcal{X}, v) = \overline{\bigcup_n H_n}.$$

*Démonstration.* — Si  $\omega$  est un mot de la suite  $v = \theta^\infty(0)$ , on note  $[\omega]$  le cylindre constitué des  $x$  de  $\mathcal{X}$ , commençant par  $\omega$ . Soit alors  $\mathcal{B}_n$ , la tribu engendrée par la partition de  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{P}_n = \{T^k\theta^n([\alpha]), \alpha \in \mathcal{A}, 0 \leq k < q^n\}$  [15]. Si  $f \in L^2(\mathcal{X}, v)$ ,  $f_n = E^{\mathcal{P}_n}(f)$  appartient à  $H_n$ , par définition de  $H_n$ . Il reste à prouver que  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ . Il suffit de le prouver lorsque  $f$  est  $1_{[\omega]}$  la fonction indicatrice du cylindre  $[\omega]$  puisque ces fonctions engendrent  $L^2(\mathcal{X}, v)$ . Dans ce cas

$$\|f_n - f\|_2 \leq 2\|f\|_\infty \cdot v\{f_n \neq f\}.$$

Or, si  $\omega = \omega_0 \dots \omega_p$ ,  $f_n$  coïncide avec  $f$  sur tout ensemble  $B$  de  $\mathcal{P}_n$ , de la forme  $T^k \theta^n([\alpha])$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , et  $0 \leq k \leq q^n - p$ , de sorte que

$$v(\{f_n \neq f\}) \leq \sum_{\alpha} |\omega| \cdot v(\theta^n([\alpha])) = \frac{|\omega|}{q^n} \text{ par (iii).}$$

Pour  $f = \mathbf{1}_{[\omega]}$  on a donc  $\|f_n - f\|_2 \leq \frac{2|\omega|}{q^n}$  et le lemme s'ensuit.

*Conséquence des lemmes 2 et 3 :* il résulte du lemme 3, que le type spectral maximal du système  $(\mathcal{X}, v, T)$ ,  $\sigma_m$ , est équivalent à la mesure  $\sigma$  égale à  $\sum_{n, \alpha} 2^{-n} \sigma_{1_{\theta^n([\alpha])}}$ .

En effet, si  $f \in L^2(\mathcal{X}, v)$ ,  $f_n = E^{\mathcal{A}^n}(f)$  a pour mesure spectrale  $\sigma_{f_n} \ll \sigma$ , par définition de  $\sigma$ . Comme  $f_n$  tend vers  $f$  dans  $L^2(\mathcal{X}, v)$ ,  $\sigma_{f_n}$  converge vers  $\sigma_f$  dans  $M(T)$  et  $\sigma_f \ll \sigma$ . La mesure  $\sigma$  étant nécessairement  $\ll \sigma_m$ , on a bien l'équivalence de ces mesures.

Par ailleurs, la mesure  $\sigma_{1_{\theta^n([\alpha])}}$  se déduit, à une homothétie près, de la mesure  $\sigma_{1_{[\alpha]}}$ , par l'opération  $\pi$ , décrite dans le lemme 2, et définie sur toute mesure  $\rho$  de  $M(T)$ , par

$$\begin{aligned} [\pi(\rho)]^{\wedge}(k) &= 0 \quad \text{si } q \text{ ne divise pas } k \\ &= \rho^{\wedge}(m) \quad \text{si } k = mq. \end{aligned}$$

L'opération  $\pi$  laisse invariantes les mesures  $q$ -invariantes, et quasi-invariantes pour les translations du sous-groupe de  $T$ , engendré par  $1/q$ .

Notons cette fois  $\sigma$  la mesure  $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sigma_{1_{[\alpha]}}$ . Il résulte des lemmes 2 et 3 que le type spectral maximal du système  $(\mathcal{X}, v, T)$  est équivalent à la mesure

$$\sum_n 2^{-n} \cdot \pi^n(\sigma).$$

On écrit désormais  $\sigma_{\alpha\beta}$  pour  $\sigma_{1_{[\alpha]} \cdot 1_{[\beta]}}$  et  $\Sigma$  désigne la matrice carrée de coefficients  $\sigma_{\alpha\beta}$  avec  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ .  $\Sigma$  peut se calculer explicitement, car c'est la limite vague d'un produit de Riesz matriciel. Soient  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{q-1}$  les instructions de l'automate associé à la substitution  $\theta$ , définies sur  $\mathcal{A}$ , on le rappelle, par  $\varphi_j(\alpha) = \theta(\alpha)_j$ , la  $j$ -ème lettre du mot  $\theta(\alpha)$ , et  $R_0, R_1, \dots, R_{q-1}$ , les matrices de ces instructions, de coefficients

$$(R_j)_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_j(\alpha) = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose alors

$$R(t) = \sum_{j=0}^{q-1} R_j e^{ijt}$$

et

$$\Pi_n(t) = R(q^{n-1}t) \dots R(t).$$

LEMME 4. — *Le produit de Riesz matriciel  $\frac{1}{q^n} \Pi_n^* \Pi_n$  converge vaguement vers la matrice  $s\Sigma$  où  $s = |\mathcal{A}|$ .*

*Démonstration.* — On commence par remarquer que

$$(3) \quad \Pi_n(t) = \sum_{0 \leq k < q^n} Q_k e^{ikt}$$

où

$$Q_k = R_{k_{n-1}} \cdot R_{k_{n-2}} \cdot \dots \cdot R_{k_0}$$

si la décomposition de l'entier  $k$  en base  $q$  s'écrit  $k = k_0 + k_1q + \dots + k_{n-1}q^{n-1}$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \Pi_n^*(t) \cdot \Pi_n(t) &= \left( \sum_{k < q^n} {}^t Q_k e^{-ikt} \right) \left( \sum_{j < q^n} Q_j e^{ijt} \right) \\ &= \sum_{|r| < q^n} e^{-irt} \left( \sum_{\substack{j+r < q^n \\ 0 \leq j < q^n}} {}^t Q_{j+r} Q_j \right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left( \Pi_n^*(t) \cdot \Pi_n(t) \right)_{\alpha\beta}^{\wedge}(r) = \sum_{j+r < q^n} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} (Q_{j+r})_{\gamma\alpha} (Q_j)_{\gamma\beta}.$$

Si

$$j = j_0 + j_1q + \dots + j_{n-1}q^{n-1},$$

et

$$(Q_j)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}} (R_{j_{n-1}})_{\alpha\gamma_1} (R_{j_{n-2}})_{\gamma_1\gamma_2} \dots (R_{j_0})_{\gamma_{n-1}\beta}$$

on voit que  $(Q_j)_{\alpha\beta} = 1$  si et seulement si il existe  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  dans  $\mathcal{A}$ , telles que

$$\varphi_{j_{n-1}}(\alpha) = \gamma_1, \quad \varphi_{j_{n-2}}(\gamma_1) = \gamma_2, \dots, \quad \varphi_{j_0}(\gamma_{n-1}) = \beta,$$

ou encore

$$\varphi_{j_0} \circ \varphi_{j_1} \circ \dots \circ \varphi_{j_{n-1}}(\alpha) = \beta.$$

Comme on a clairement

$$\theta^n(\gamma)_j = \theta^{n-1}(\theta(\gamma)_{j_{n-1}})_{j-j_{n-1}q^{n-1}}$$

par propriété des automates,  $(Q_j)_{\gamma\beta} = 1$  signifie simplement  $\theta^n(\gamma)_j = \beta$ .

Finalement, il résulte de ces remarques que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n} (\Pi_n^* \Pi_n)_{\alpha\beta}^\wedge(r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n} \sum_{\gamma \in \alpha} \text{Card} \{j+r < q^n / \theta^n(\gamma)_{j+r} = \alpha, \theta^n(\gamma)_j = \beta\} \\ &= \sum_{\gamma \in \alpha} \sigma_{\alpha\beta}^\wedge(r) \end{aligned}$$

par définition des mesures spectrales  $\sigma_{\alpha\beta}$ ; le système étant uniquement ergodique, cette limite est en effet indépendante de  $\gamma$ . La suite de matrices  $\frac{1}{q^n} \Pi_n^* \Pi_n$  converge donc vaguement vers la matrice de mesures  $s\Sigma$ , ce qui établit le lemme 4.

Le même genre de calculs permet d'obtenir des estimations asymptotiques de sommes partielles de suites automatiques, [1] [8].

Revenons à la démonstration du théorème 1.

A l'aide du lemme 4, on peut calculer explicitement la matrice  $\Sigma$ , associée à l'automate de Rudin-Shapiro.

PROPOSITION 2. — *La matrice  $\Sigma$  associée à l'automate de Rudin-Shapiro, est la matrice suivante :*

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} \omega + m & \gamma\omega & \gamma\omega & \omega - m \\ \bar{\gamma}\omega & \omega + m & \omega - m & \bar{\gamma}\omega \\ \bar{\gamma}\omega & \omega - m & \omega + m & \bar{\gamma}\omega \\ \omega - m & \gamma\omega & \gamma\omega & \omega + m \end{pmatrix}$$

où  $\omega$  est la mesure discrète  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_\pi)$  et  $m$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{T}$ .

Démonstration. — Notons  $\gamma$  le caractère  $t \rightarrow e^{it}$ .

On calcule facilement les matrices

$$R(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) & 1 \\ 1 & \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\Pi_1^*(t) \cdot \Pi_1(t) = R^*(t) \cdot R(t) = \begin{pmatrix} 2 & \gamma(t) & \gamma(t) & 0 \\ \bar{\gamma}(t) & 2 & 0 & \bar{\gamma}(t) \\ \bar{\gamma}(t) & 0 & 2 & \bar{\gamma}(t) \\ 0 & \gamma(t) & \gamma(t) & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\Pi_{n+1}^*(t) \cdot \Pi_{n+1}(t) = R^*(t) \cdot \Pi_n^* \Pi_n(2t) \cdot R(t)$ , il est facile d'établir par récurrence sur  $n$ , que la matrice  $\Pi_n^* \Pi_n$  a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} P_n & T_n & T_n & Q_n \\ \bar{T}_n & P_n & Q_n & \bar{T}_n \\ \bar{T}_n & Q_n & P_n & \bar{T}_n \\ Q_n & T_n & T_n & P_n \end{pmatrix}$$

où  $P_n, Q_n, T_n$  sont des polynômes trigonométriques à spectre dans  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  et vérifient les relations suivantes :

$$P_{n+1}(t) = 2P_n(2t) + T_n(2t) + \bar{T}_n(2t)$$

$$(6) \quad Q_{n+1}(t) = 2Q_n(2t) + T_n(2t) + \bar{T}_n(2t)$$

$$(7) \quad T_{n+1}(t) = [2^n + Q_{n+1}(t)]\gamma(t)$$

avec  $P_1 = 2, Q_1 = 0, T_1 = \gamma$ .

Si l'on pose  $U_n(t) = 2^n + Q_{n+1}(t)$ , on voit que

$$P_{n+1}(t) = U_n(t) + 2^n$$

$$Q_{n+1}(t) = U_n(t) - 2^n$$

$$T_{n+1}(t) = U_n(t)\gamma(t)$$

et en combinant (6) et (7), que

$$U_{n+1}(t) = 2(1 + \cos 2t)U_n(2t) \quad (n \geq 0)$$

avec  $U_0(t) = 1$ .

On en déduit que  $\frac{1}{2^{n+1}} U_n(t) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n (1 + \cos 2^j t)$  converge vers  $\frac{1}{2} \omega$  où

$\omega$  est la mesure discrète  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_\pi)$ ; d'où le résultat annoncé.

On retrouve, comme nous l'avons écrit au paragraphe 2, le résultat classique :

**COROLLAIRE 1.** — *La mesure de corrélation de la suite de Rudin-Shapiro est la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* — Comme le terme  $r_n$  peut s'écrire  $\tau(u_n)$  où  $\tau(0) = \tau(2) = 1$  et  $\tau(1) = \tau(3) = -1$ , la mesure de corrélation  $\sigma$  de la suite  $(r_n)$  est égale à

$$\sum_{\alpha, \beta \in A} \tau(\alpha)\tau(\beta)\sigma_{\alpha\beta}$$

ce qui donne  $m$ .

**COROLLAIRE 2.** — *La partie continue du spectre de l'automate de Rudin-Shapiro est de type Lebesgue, de multiplicité  $\geq 2$ .*

*Démonstration.* — Notons  $\sigma_\alpha$  la mesure  $\sigma_{\alpha\alpha}$ . Il résulte de la proposition 2 que pour toute lettre  $\alpha \in A$ ,  $(\sigma_\alpha)_c$ , la partie continue de  $\sigma_\alpha$ , vaut  $\frac{1}{8}m$ , et par le lemme 2,  $(\sigma_{1_{\{c^{n_{[\alpha]}}\}}})_c = \frac{1}{2^{n+3}}m$ . On en déduit que pour toute  $f$  de  $H_c$ ,  $\sigma_f \ll m$ , par les conséquences du lemme 3. Le théorème 1 est ainsi démontré. Par ailleurs considérons les fonctions  $f = \sqrt{2}(\mathbf{1}_{[0]} - \mathbf{1}_{[3]})$ , et  $g = \sqrt{2}(\mathbf{1}_{[2]} - \mathbf{1}_{[1]})$ ;  $\sigma_f = 2(\sigma_0 + \sigma_3 - \sigma_{03} - \sigma_{30}) = m$  et de même  $\sigma_g = m$  alors que  $\sigma_{fg} = 2(\sigma_{02} - \sigma_{01} - \sigma_{32} + \sigma_{31}) = 0$ , ce qui prouve que la multiplicité spectrale de la composante de Lebesgue, est au moins égale à 2, et le corollaire 2.

Pour achever cette étude spectrale, il reste à établir le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — *La partie continue du spectre de l'automate de Rudin-Shapiro est de type Lebesgue de multiplicité égale à 2.*

*Démonstration.* — La démonstration de ce fait, qui est donnée dans [15], est une conséquence immédiate du résultat général suivant :

**LEMME 5.** — *La multiplicité spectrale d'un système défini par substitution, est le sup essentiel du rang de la matrice  $\Sigma$  (la substitution ayant les propriétés requises (i)-(iv)).*

Pour appliquer ce résultat à la matrice  $\Sigma$  de l'automate de Rudin-Shapiro, on remarque que  $\Sigma_c$  (constituée des parties absolument continues

des mesures de  $\Sigma$ ) s'écrit  $m \cdot W$  où  $W$  est un opérateur scalaire de rang 2. Le théorème suit.

Nous allons donner une preuve plus élémentaire de ce théorème, en tirant parti de la connaissance des fonctions  $f$  et  $g$  définies ci-dessus. Il est facile de voir que l'espace  $H_1$ , l'espace  $U$ -stable engendré par les fonctions  $\mathbf{1}_{[\alpha]}$ ,  $\alpha \in A$ , est en fait l'espace  $[U, f, g]$  c'est-à-dire l'espace  $U$ -stable engendré par  $f$  et  $g$ . En effet, soit  $h \in H_1$ ,  $U$ -orthogonale à  $f$  et  $g$ .  $h$  s'approche dans  $L^2$  par une combinaison linéaire de la forme

$$\sum_{\alpha \in A} P_{\alpha}(U) \mathbf{1}_{[\alpha]}$$

où  $P_{\alpha}$  est un polynôme trigonométrique; par continuité des applications  $h \rightarrow \sigma_{h, h'}$ , on peut supposer que  $h = \sum_{\alpha \in A} P_{\alpha}(U) \mathbf{1}_{[\alpha]}$  vérifie

$$\sigma_{h, f} = \sigma_{h, g} = 0.$$

On traduit ces conditions, en utilisant l'expression de la matrice  $\Sigma$  de l'automate de Rudin-Shapiro (proposition 2). Il vient

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha} \sigma_{\alpha, 0} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \sigma_{\alpha, 3} \quad \text{soit} \quad P_0 + P_3 = 0$$

et

$$\sum_{\alpha} P_{\alpha} \sigma_{\alpha, 1} = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \sigma_{\alpha, 2} \quad \text{soit} \quad P_1 + P_2 = 0.$$

Finalement  $h = P_0(U)f + P_1(U)g$ ; ainsi

$$\sigma_{h, f} = 0 = P_0 \cdot m, \quad \sigma_{h, g} = 0 = P_1 \cdot m \quad \text{et} \quad h = 0.$$

De la même façon,  $H_n$  est l'espace  $[U, f_n, g_n]$  où  $f_n = \mathbf{1}_{\zeta^{n[0]}} - \mathbf{1}_{\zeta^{n[3]}}$  et  $g_n = \mathbf{1}_{\zeta^{n[2]}} - \mathbf{1}_{\zeta^{n[1]}}$ . Par le lemme 3,  $\sigma_{f_n} = \frac{1}{2^{n+1}} m = \sigma_{g_n}$  et  $\sigma_{f_n, g_n} = 0$ . On obtient ainsi que pour tout  $n \geq 1$ , la multiplicité spectrale de  $U$  sur  $H_n$  est 2 et le théorème résulte du lemme 2 et d'un résultat classique sur la multiplicité spectrale [9].

*Remarque.* — Par projection sur le système engendré par la suite  $(r_n)$ , on obtient comme conséquence immédiate de ce qui précède, que les suites  $(r_n)$  et  $((-1)^n r_n)$  sont statistiquement indépendantes, et de mesure de corrélation égale à  $m$ .



#### 4. Suites de Rudin-Shapiro généralisées.

La question en suspens après cette étude spectrale, reste celle-ci : peut-on, à l'aide de substitutions par exemple, trouver un système dynamique ergodique, dont la partie continue du spectre soit de type Lebesgue — ou du moins contienne une composante de type Lebesgue — de multiplicité  $m$  donnée à l'avance ? J. Mathew et M. G. Nadkarni, en généralisant leur procédé, [12], obtiennent toute multiplicité  $m$  de la forme  $N\varphi(N)$ , où  $\varphi$  est l'indicateur d'Euler. Nous retrouvons également ce résultat à l'aide des suites de Rudin-Shapiro généralisées après avoir décrit entièrement la fonction multiplicité [5] de ces suites. Ces suites furent considérées pour la première fois par D. Rider [16]. Voici comment elles généralisent la suite de Rudin-Shapiro classique,  $(r_n)$ . La suite  $(r_n)$  est associée à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et à deux suites de polynômes trigonométriques  $(P_n)$  et  $(Q_n)$  vérifiant

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n \\ \gamma_{2^n} Q_n \end{pmatrix}, \quad P_0 = Q_0 = 1.$$

Soit  $q \in \mathbf{N}$ ,  $q \geq 2$ . On va construire une suite à valeurs dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$  par un procédé identique. Notons  $H$  la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^{q-1} \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & z^{2(q-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z^{q-1} & z^{2(q-1)} & \dots & z^{(q-1)(q-1)} \end{pmatrix}$$

où  $z = \exp(2\pi i/q)$ , et définissons  $q$  suites de polynômes trigonométriques  $(P_n^0), (P_n^1), \dots, (P_n^{q-1})$ , à spectre dans  $\{0, 1, \dots, q^n - 1\}$ , par

$$\begin{pmatrix} P_{n+1}^0 \\ P_{n+1}^1 \\ \vdots \\ P_{n+1}^{q-1} \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} P_n^0 \\ \gamma_{q^n} P_n^1 \\ \vdots \\ \gamma_{q^n}^{q-1} P_n^{q-1} \end{pmatrix}$$

avec  $P_0^j = 1$  pour  $j = 0, \dots, q-1$ .

DÉFINITION. — On appellera suite de Rudin-Shapiro généralisée à l'ordre  $q$ , la suite  $(g_n)$ , dont les  $q^n$  premiers termes sont les coefficients du polynôme trigonométrique  $P_n^0$ , ceci pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , puisque  $P_{n+1}^0$  commence par  $P_n^0$ .

Ces suites ont les mêmes propriétés que la suite  $(r_n)$ , à savoir :

$$(1) \quad \left| \sum_0^{N-1} g_n e^{int} \right| \leq q(1 + \sqrt{q})\sqrt{N} \quad (N \geq 1) \quad (t \in \mathbf{R}).$$

En effet,  $\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot H$  étant une matrice orthogonale, on a pour tout vecteur  $Z = (Z_j)$  dans  $\mathbf{C}^q$ ,

$$\|HZ\|_2 = q\|Z\|_2 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{q-1} |P_{n+1}^j|^2 = q \sum_{j=0}^{q-1} |P_n^j|^2$$

ce qui établit lorsque  $N = q^n$ , l'inégalité plus précise

$$\left| \sum_0^{N-1} g_n e^{int} \right| \leq \sqrt{q}\sqrt{N}.$$

(1) s'en déduit alors comme en [17].

(2) On a noté, rappelons-le,  $z = \exp(2\pi i/q)$ . Alors

$$g_n = g(n) = z^{f(n)} \quad \text{où} \quad f(n) = n_0 n_1 + n_1 n_2 + \cdots + n_{k-1} n_k$$

si  $\sum n_j q^j$  est la décomposition de l'entier  $n$  en base  $q$ .

La démonstration est calquée sur celle de J. Brillhart et L. Carlitz, dans le cas  $q = 2$ . On peut établir par récurrence

$$P_{n+1}^j(e^{it}) = \sum_{k=0}^{q-1} e^{ikt} P_n^j(z^k e^{iqt})$$

si  $n \geq 0$  pour  $j = 0$ , et si  $n \geq 1$  pour tout  $j$ .

On en déduit pour la suite  $g$  la relation

$$g(0) = 1 \\ g(aq + b) = z^{ab} g(a) \quad \text{si} \quad b < q,$$

ce qui donne, en l'itérant,

$$g(a_0 + a_1 q + \cdots + a_k q^k) = z^{a_0 a_1} g(a_1 + \cdots + a_k q^{k-1}) \\ = z^{a_0 a_1 + \cdots + a_{k-1} a_k}.$$

(3) La mesure de corrélation de la suite  $g$  est la mesure de Lebesgue de  $\mathbf{T}$ . Cette fois encore, on peut imiter la démonstration de ce résultat pour  $q = 2$ , donnée en début de paragraphe 1. La mesure de corrélation  $\sigma$  de la suite  $g$  est la limite vague de la suite de mesures  $(R_N dt)$  où

$$R_N(t) = R_N^0(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_0^{N-1} g_n e^{int} \right|^2$$

et il résulte de (1), que  $\sigma \ll m$ . Notons alors, pour  $j = 0, \dots, q-1$

$$R_{q^k}^j = \frac{1}{q^k} |P_k^j|^2.$$

On peut établir, pour chaque  $j$ , que la suite  $(R_{q^k}^j dt)$  converge vaguement vers  $\sigma$  et comme  $\sum_{j=0}^{q-1} R_{q^k}^j = q$ , nécessairement  $\sigma = m$ .

(4) La suite  $g$  est définie par une substitution de longueur  $q$  (ou un  $q$ -automate) sur un alphabet de taille  $q^2$ . Pour cela, identifions un polynôme à la suite de ses coefficients. Par définition de la matrice  $H$ ,  $P_{n+1}^j$  s'identifie à la juxtaposition des polynômes  $P_n^0 \cdot z^j P_n^1 \dots z^{j(q-1)} P_n^{q-1}$ . Prenons alors comme alphabet l'ensemble des couples  $(k, j)$  de  $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ , où  $(k, j)$  représente l'élément  $z^k P^j$ . La substitution  $\zeta$  définie par

$$\zeta((k, j)) = (k, 0)(k+j, 1)(k+2j, 2) \dots (k+(q-1)j, q-1)$$

est telle que le polynôme  $P_n^j$  s'identifie au mot  $\zeta^n(0, j)$ , pour chaque  $j$ .

$\zeta$  est évidemment primitive, et  $\zeta(0, 0)$  commence par  $(0, 0)$ . Si  $w = (w_n) = (u_n, v_n)$  est la suite obtenue en itérant  $\zeta$  sur la lettre  $(0, 0)$ , alors

$$g(n) = z^{u_n}$$

par construction de  $g$  (ce qui se retrouve avec la propriété (2) puisque  $v_n \equiv n \pmod{q}$ ).

Cette dernière propriété va nous permettre d'appliquer les techniques développées dans le paragraphe 3, propres aux substitutions, pour faire l'étude spectrale de la suite  $g$ . Nous allons obtenir pour ces suites, la description de la *fonction multiplicité*, c'est-à-dire la description des composantes continues et étrangères de leur spectre, avec leur multiplicité.

Soit  $q > 1$  fixé. Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *La partie continue du spectre de la suite de Rudin-Shapiro généralisée a une composante de Lebesgue de multiplicité  $q\varphi(q)$ , et pour chaque diviseur  $d$  non trivial de  $q$ , un produit de Riesz généralisé, de multiplicité  $d\varphi(d)$ .*

*Remarque.* — A  $q$  fixé, on doit pouvoir établir un isomorphisme entre le système dynamique engendré par la suite  $g$ , et le système considéré par J. Mathew et M. G. Nadkarni. Mais la démonstration du théorème 3 permet d'expliciter les composantes singulières du spectre avec leur multiplicité, ce qui n'apparaît pas dans [12].

*Démonstration.* — Nous commençons par étudier le système associé à la substitution  $\zeta$ , de point fixe  $w$ . Cette fois encore, le calcul de la matrice de corrélation  $\Sigma$  associée, déterminera à elle seule le spectre de  $\zeta$ .

On notera désormais  $j = (j_2, j_1) \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$  une lettre de l'alphabet.

Ainsi, en reprenant les notations du lemme 4, l'instruction  $\varphi_h$ ,  $h < q$ , vérifie  $\varphi_h(i) = (i_2 + hi_1, h)$  et  $R_{ij}(t) = \sum_{\substack{h < q \\ \varphi_h(i) = j}} e^{iht}$  se réduit donc à  $e^{ij_1 t} \delta(j_2 - i_2 - i_1 j_1)$ , ceci dans la base canonique  $(e_j)$  de  $\mathbf{C}^{q^2}$  ( $\delta$  étant le symbole de Kronecker). Suivant une suggestion de B. Host, nous allons considérer la nouvelle base

$$f_r = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j_1, j_2=0}^{q-1} z^{r_2 j_2} e_j \delta(j_1 - r_1).$$

La matrice de passage  $(A_{r,j})$ , avec  $A_{r,j} = \delta(j_1 - r_1) z^{r_2 j_2} \frac{1}{\sqrt{q}}$  est clairement une matrice orthogonale. La matrice  $S(t) = A^* R(t) A$  devient une matrice par blocs de forme simple. En effet, en omettant  $t$ ,

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{r,s} (A^*)_{ir} R_{rs} A_{sj} \\ &= \frac{1}{q} \sum_{r,s} \delta(s_2 - r_2 - s_1 r_1) \delta(r_1 - i_1) \delta(s_1 - j_1) z^{s_2 j_2 - r_2 i_2} e^{is_1 t} \\ &= \frac{1}{q} \sum_{r_2, s_2} z^{s_2 j_2 - r_2 i_2} e^{ij_1 t} \delta(s_2 - r_2 - i_1 j_1) \\ &= \frac{1}{q} \sum_{r_2} z^{r_2 (j_2 - i_2)} e^{ij_1 t} z^{i_1 j_1 j_2}. \end{aligned}$$

Finalement  $S_{ij} = e^{ij_1 t} z^{i_1 j_1 j_2} \delta(i_2 - j_2)$ . Autrement dit, à  $i_2 = j_2$  fixé =  $\alpha$ ,  $S$  se réduit à un bloc de taille  $q \times q$ , sur la diagonale principale,  $S_\alpha$ , de coefficients

$$(S_\alpha)_{a,b} = z^{\alpha ab} e^{ibt}.$$

Si l'on note  $W_n(t)$  le produit  $\frac{1}{q^n} S^*(t) \dots S^*(q^{n-1}t) S(q^{n-1}t) \dots S(t)$ ,  $W_n(t)$  sera de la même forme que  $S$ , et il en sera de même pour la matrice  $\Sigma'$  limite vague de ce produit (à une constante multiplicative près) qui n'est autre que la matrice  $\Sigma$  dans la base  $(f_r)$ .

On fixe donc  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq q - 1$ , dans tout ce qui suit, et on calcule

$$(S_\alpha^* S_\alpha)_{a,b} = \sum_c z^{\alpha(bc-ac)} e^{i(b-a)t}.$$

On est amené à distinguer les  $\alpha$  et définir

$$\Lambda_\alpha = \text{l'annulateur de } \alpha = \{k \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}, k\alpha \equiv 0(q)\}.$$

- Si  $\alpha$  est racine primitive de l'unité mod  $q$ ,  $\Lambda_\alpha = \{0\}$  et  $S_\alpha^* S_\alpha = qI$ .
- Sinon,  $(S_\alpha^* S_\alpha)_{ab} = qe^{i(b-a)t} \eta(b-a)$  où  $\eta$  est l'indicateur du groupe  $\Lambda_\alpha$ ,  $\eta \equiv 1$  si  $\alpha = 0$ .

LEMME 6. — *Supposons que  $\alpha$  ne soit pas racine primitive de l'unité mod  $q$ . Alors  $(W_{n,\alpha}(t))_{ab}$  vaut exactement*

$$\eta(b-a) e^{i(b-a)t} \prod_{j=1}^{n-1} F_{q/\beta}(\beta q^j t)$$

où  $\beta$  est l'ordre de  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z} = q/\text{pgcd}(\alpha, q)$  si  $\alpha \neq 0$ , et 1 si  $\alpha = 0$ , et  $F_N(t)$  est le noyau de Fejer  $\sum_{|k| < N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ikt}$ .

*Démonstration.* — C'est vrai pour  $n = 1$ . Supposons le résultat à l'ordre  $n$ . Comme  $W_{n+1}(t)$  s'écrit  $\frac{1}{q} S^*(t) W_n(qt) S(t)$ ,  $(W_{n+1,\alpha}(t))_{ab}$  vaut

$$\frac{1}{q} \sum_{c,d} z^{\alpha(bd-ac)} e^{i(b-a)t} \eta(d-c) e^{iq(d-c)t} \prod_{j=1}^{n-1} F_{q/\beta}(\beta q^{j+1} t).$$

Or  $\eta(d-c) = 1$  si et seulement si  $d \equiv c \pmod{\beta}$ , 0 sinon. On décompose donc  $c$  en  $m\beta + n$  et  $d$  en  $p\beta + n$ , où  $m$  et  $p$  sont  $< q/\beta$  et

$n < \beta$ . Ainsi  $(W_{n+1, \alpha}(t))_{ab}$  devient

$$e^{i(b-a)t} \prod_{j=2}^n F_{q/\beta}(\beta q^j t) \sum_{m, p, n} \frac{1}{q} e^{iq(p-m)\beta t} z^{\alpha(b-a)n}$$

puisque  $\beta\alpha \equiv 0 \pmod{q}$ .

En remarquant à présent que  $\sum_{n < \beta} z^{\alpha(b-a)n} = \beta \cdot \eta(b-a)$ , il reste

$$\eta(b-a) e^{i(b-a)t} \prod_{j=2}^n F_{q/\beta}(\beta q^j t) \sum_{m, p} \frac{\beta}{q} e^{iq(p-m)\beta t}$$

ce qui donne le résultat annoncé, la dernière somme n'étant autre que

$$\frac{\beta}{q} \left| \sum_{m=0}^{q/\beta-1} e^{imq\beta t} \right|^2 = F_{q/\beta}(q\beta t).$$

On déduit du lemme, la forme de la matrice de mesures  $\Sigma'$ . Elle est constituée de  $q$  blocs diagonaux  $\Sigma'_\alpha$ , de taille  $q \times q$ , tels que

$$\begin{aligned} \Sigma'_\alpha &= mI \text{ ssi } \alpha \text{ est une racine primitive de l'unité mod } q \\ (\Sigma'_\alpha)_{ab} &= \eta(b-a) e^{i(b-a)t} \cdot \rho_\beta \text{ sinon} \end{aligned}$$

où  $\rho_\beta$  est le produit de Riesz généralisé et singulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N F_{q/\beta}(\beta q^j t)$$

(pour  $\alpha = 0$ ,  $\rho_1$  n'est autre que la mesure de Haar du groupe  $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ ).

Les mesures  $\rho_\beta$  sont  $q$ -invariantes et quasi-invariantes pour les translations du sous-groupe de  $\mathbf{T}$ , engendré par  $1/q$ . Il résulte des lemmes 2 et 3 que les parties continues et étrangères du spectre de la substitution  $\zeta$  sont les mesures  $\rho_\beta$ ,  $\beta \neq 1$ , et la mesure de Lebesgue de  $\mathbf{T}$ . Notons  $\lambda_j$  ces mesures distinctes. Par ailleurs,  $\Sigma_c$  — la partie continue de  $\Sigma$  — se met sous la forme  $\sum_j M_j \lambda_j$  où les  $M_j$  sont des matrices scalaires dont le rang, bien évidemment, ne dépend pas de la base choisie. Or, il est prouvé en [15, lemme 8.4] que la multiplicité de la mesure  $\lambda_j$  dans le spectre, est le rang de la matrice  $M_j$ .

On est donc en mesure de démontrer le théorème.

La matrice  $\Sigma'$  contient autant de blocs  $mI$  de rang  $q$  que de racines primitives de l'unité modulo  $q$ . La multiplicité de la composante de Lebesgue dans le spectre est donc  $q\varphi(q)$ .

Soit  $\alpha$  fixé, non racine primitive de l'unité modulo  $q$ . Quitte à changer l'ordre des vecteurs de base,  $\Sigma'_\alpha$  est constitué de  $\beta$  blocs diagonaux de la forme  $\rho_\beta \cdot W$  où  $W$  est la matrice de taille  $q/\beta \times q/\beta$ , de coefficient  $W_{jk} = e^{i(k-j)t}$ , et donc de rang 1.

Pour  $\alpha$  ainsi fixé  $\Sigma'_\alpha$  est de rang  $\beta$ .

Finalement la multiplicité de  $\rho_\beta$  dans le spectre est  $\beta$ -fois le nombre de  $\alpha$  d'ordre  $\beta$  soit  $\beta\varphi(\beta)$ .

*Exemple.* — Pour illustrer cette suite de calculs, regardons le cas  $q = 2$  étudié en section 3. Ici  $z = -1$ , et la matrice  $S$  (matrice  $R$  dans la nouvelle base) est une matrice de taille  $4 \times 4$ , d'expression

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{it} & 0 & 0 \\ 1 & e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{it} \\ 0 & 0 & 1 & -e^{it} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$S^*S = 2 \begin{pmatrix} 1 & e^{it} & 0 & 0 \\ e^{-it} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit la matrice  $\Sigma'$

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega e^{it} & 0 & 0 \\ \omega e^{-it} & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

où  $\omega$  désigne, comme en section 3, la mesure discrète  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_\pi)$ .

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à remarquer que le système associé à la suite  $g$  est topologiquement isomorphe à celui-ci.

La preuve de ce fait se calque sur la preuve de la proposition 1. En effet l'automate précédemment défini est  $q$ -reconnaisable, puisque le substitué d'un mot commence toujours par  $(k, 0)$ .

Le théorème 3 est ainsi démontré.

*Remarque.* — Notons  $(X, \mu, T)$  le système associé à la suite  $w$ . On a prouvé, au cours de la démonstration du théorème 3, que les fonctions  $(f_{i,\alpha})$  de  $L^2(X, \mu)$  définies par

$$f_{i,\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{k=0}^{q-1} 1_{\{(k,i)\}}(x) z^{\alpha k}, \quad \text{avec } \alpha \text{ racine primitive,}$$

sont U-orthogonales et de mesure spectrale égale à  $m$ .

Si l'on revient à l'espace  $Y$  qui est l'orbite fermée dans  $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$  de la suite  $g$  cette fois, on déduit de ce qui précède que les  $q\varphi(q)$  suites

$$(g_{nq+i}^{\alpha})_{n \geq 0}$$

où  $0 \leq i \leq q-1$  et  $\alpha$  racine primitive de l'unité modulo  $q$ , sont statistiquement indépendantes et de mesure de corrélation égale à  $m$ .

En effet, par définition de la mesure  $\mu$ , la mesure spectrale de  $f_{i,\alpha}$  n'est autre que la mesure de corrélation de la suite

$$(f_{i,\alpha}(T^n w))_{n \geq 0}.$$

On rappelle que  $w_n$  s'écrit  $(u_n, v_n)$  où  $v_n \equiv n(q)$ , et qu'ainsi on a  $g_n = z^{u_n}$ . Donc,  $w_n = (k, i)$  signifie  $u_n = k$  et  $i \equiv n(q)$ , et

$$f_{i,\alpha}(T^n w) = \begin{cases} g_n^{\alpha} & \text{si } n \equiv i(q) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile, en comparant les mesures de corrélation, d'en déduire que les suites  $(g_{nq+i}^{\alpha})_{n \geq 0}$ , ou aussi bien  $(z^{ain} g_n^{\alpha})_{n \geq 0}$ , par la propriété (2), sont indépendantes, et engendrent la partie de Lebesgue du spectre de la suite  $g$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. P. ALLOUCHE et M. MENDÈS FRANCE, Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising, *B.S.M.F.*, vol. 113 (1985), 273.
- [2] J. BRILLHART et L. CARLITZ, Note on the Shapiro polynomials, *Proc. of the A.M.S.*, vol. 25 (1970), 114.
- [3] J. BRILLHART et P. MORTON, On the Rudin-Shapiro polynomials, *Ill. J. Math.*, vol. 22 (1978), 126.
- [4] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, *B.S.M.F.*, 108 (1980), 401.



- [5] I. P. CORNFELD, S. V. FOMIN et Y. G. SINAI, *Ergodic theory*, Springer, 1982.
- [6] E. M. COVEN et M. KEANE, The structure of substitution minimal sets, *T.A.M.S.*, vol. 162 (1971), 89.
- [7] F. M. DEKKING, The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length, *Z. Wahr. Verw. Geb.*, vol. 41 (1978), 221.
- [8] J. M. DUMONT, Discr pance des progressions arithm tiques dans la suite de Morse, *C.R.A.S.*, t. 297 (1983).
- [9] P. R. HALMOS, *Introduction to Hilbert spaces and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea P. C. New-York, 1957.
- [10] T. KAMAE, Spectral properties of automaton-generating sequences, non publi .
- [11] J. MATHEW et M. G. NADKARNI, A measure preserving transformation whose spectrum has Lebesgue component of multiplicity two, preprint.
- [12] J. MATHEW et M. G. NADKARNI, Measure preserving transformations whose spectra have Lebesgue component of finite multiplicity, Preprint.
- [13] J. F. MELA, B. HOST et F. PARREAU, Analyse harmonique des mesures, *Ast risque*, n  135-136 (1986).
- [14] M. MENDÈS FRANCE et G. TENENBAUM, Dimension des courbes planes, papiers pli s et suites de Rudin-Shapiro, *B.S.M.F.*, vol. 109 (1981), 207.
- [15] M. QUEFFELEC, Contribution   l'étude spectrale des suites arithm tiques, Thèse, Villetaneuse, 1984.
- [16] D. RIDER, Transformations of Fourier coefficients, *Pacific J. Math.*, vol. 19 (1966), 347.
- [17] W. RUDIN, Some theorems on Fourier coefficients, *P.A.M.S.*, vol. 10 (1959), 855.
- [18] H. S. SHAPIRO, Extremal problems for polynomials and power series. M.I.T. Master's thesis, Cambridge, Mass (1951).

Manuscrit reçu le 14 janvier 1986  
révisé le 8 octobre 1986.

Martine QUEFFELEC,  
Département de Mathématiques  
C.S.P. de l'Université Paris-Nord  
av. J.-B.-Clément  
93430 Villetaneuse (France).