ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHAO-JIANG XU

Régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires associées à un système de champs de vecteurs

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 2 (1987), p. 105-113
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_105_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 2 (1987), 105-113.

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES ASSOCIÉES A UN SYSTÈME DE CHAMPS DE VECTEURS

par Chao-Jiang XU

1. Introduction.

Depuis le travail de L. Hörmander [8], de très nombreux articles ([3], [4], [6], [7]) ont été consacrés à l'étude des opérateurs différentiels qui s'expriment de manière polynomiale par rapport à un système de champs de vecteurs. En utilisant le rapport entre ces opérateurs et des opérateurs différentiels sur un groupe de Lie nilpotent, la solution fondamentale de ces opérateurs, leur hypoellipticité, et la structure géométrique associée au système de champs de vecteurs, ont été bien étudiées. On s'intéresse dans ce travail aux problèmes non linéaires. En utilisant le calcul paradifférentiel de J.-M. Bony [1], on obtient un théorème de régularité des solutions d'une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Rappelons que, pour les équations non linéaires d'ordre 2, nous avons montré [9], [10] la régularité des solutions sous des hypothèses du type Oleinik-Radkevitch sur l'opérateur linéarisé.

Je tiens à remercier J.-M. Bony pour les fructueuses conversations que j'ai eues avec lui.

2. Notations et résultats.

Soient $X_1, \ldots, X_p$ des champs de vecteurs réels, C^∞, sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$. On se propose de donner des conditions suffisantes de régularité pour les solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires de la forme suivante :

$$(1) \qquad F(x, X^\alpha u, |\alpha| \leqslant m) = 0$$

Mot-clés : Opérateur paradifférentiel - Groupe de Lie nilpotent - Représentation unitaire.

où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $1 \leqslant \alpha_j \leqslant p$, $|\alpha| = k$. $X^\alpha = X_{\alpha_1}\ldots X_{\alpha_k}$, $F(x,p_\alpha) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^N)$.

On désigne $[X_{\alpha_1},\ldots,[X_{\alpha_{k-1}},X_{\alpha_k}]\ldots]$ par X_α et on définit

$$V_j = \text{l'espace engendré par } \{X_\alpha, |\alpha| \leqslant j\}.$$

On suppose que $X_1,\ldots,X_p$ satisfont aux deux conditions suivantes :

(i) Il existe un entier $r \geqslant 1$, tel que V_r est égal à $T_x\Omega$ à chaque point $x \in \Omega$.

(ii) dim V_j est constant pour $x \in \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Sous ces conditions, à un voisinage de chaque point, on peut trouver une base $\{X_{j,k}; j=1,\ldots,r\}$ de V_r, où $X_{j,k}$ est un crochet d'ordre j, et $\{X_{j,k}, j \leqslant q\}$ forme une base de V_q. On suppose que $\{X_{1k}\} = \{X_1,\ldots,X_p\}$ forme une base de V_1, c'est-à-dire que $X_1,\ldots,X_p$ sont linéairement indépendants (sinon, selon la condition (ii) on peut les remplacer par un autre système linéairement indépendant qui vérifie encore les hypothèses (i) et (ii)).

Pour un point $x \in \Omega$ fixé, un choix de $\{X_{jk}\}$ définit un système de coordonnées locales près de x, par l'application Q_x :

$$(2)\quad Q_x(y) = u = (u_{jk}) = Q(x,y) \qquad \text{si} \qquad y = \exp(\Sigma u_{jk}X_{jk})\,x$$

où exp désigne l'application exponentielle définie dans un voisinage de x. On identifie donc un voisinage de x dans Ω avec un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, on définit

$$(3)\qquad X_{jk,x} = Q_x^*(X_{jk})$$

où Q_x^* est le différentiel de Q_x. $X_{jk,x}$ est donc une nouvelle écriture de X_{jk} sous les coordonnées (u_{jk}).

Sur $\mathbf{R}^n$, avec les coordonnées $u = (u_{j,k})$, on introduit une dilatation $\delta_t(u_{jk}) = (t^j u_{jk})$ pour $t > 0$, une fonction $f(u)$ est dite homogène de degré s si $f(\delta_t u) = t^s f(u)$. Un opérateur différentiel de la forme $f(u)\dfrac{\partial}{\partial u_{jk}}$ est dit homogène de degré s si $f(u)$ est homogène de degré $j - s$. Un opérateur différentiel D sur $\mathbf{R}^n$ est dit de degré local $\leqslant j$ si son développement de Taylor à 0 est une somme des opérateurs différentiels homogènes de degré $\leqslant j$. Métivier a démontré dans [5] le lemme suivant :

LEMME 1. — *Pour tout* $x \in \Omega$, *le degré local de* $X_{j,x}$ *est* $\leqslant 1$, *on peut donc écrire*

(4) $$X_{j,x} = \hat{X}_{j,x} + R_{j,x}, \qquad j = 1, \ldots, p$$

où $\hat{X}_{j,x}$ *est homogène de degré* 1, *et* R_{jx} *est de degré local* $\leqslant 0$. $\{\hat{X}_{j,x}\}$ *engendre une algèbre de Lie nilpotente* g_x *de dimension n et de rang r ; l'application* $x \to \hat{X}_{j,x}$ *est lisse.*

Pour $x \in \Omega$, on désigne par G_x le groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe correspondant à g_x.

Avec les hypothèses (i) et (ii), g_x et G_x possèdent les propriétés suivantes :

(5) $$g_x = \sum_{j=1}^{r} g_x^j; \quad [g_x^j, g_x^k] \subset g_x^{j+k}, \quad \text{si} \quad j + k \leqslant r$$

$\dim g_x^j = n_j$ indépendant de x, et δ_t définit un automorphisme de g_x par $\delta_t | g_x^j = t^j g_x^j$ pour $t > 0$. Une algèbre satisfaisant (5) est dite graduée. $\{G_x, x \in \Omega\}$ est dit une famille lisse de groupe de Lie nilpotent. La dimension homogène de G_x est définie comme $q = \sum_{j=1}^{r} j n_j$, la norme homogène de G_x est définie par

$$\|u\| = \left\{ \sum_{j=1}^{r} \sum_{k} \left| u_{jk} \right|^{\frac{2r!}{j}} \right\}^{\frac{1}{2r!}}.$$

Maintenant, on revient à l'équation que l'on va étudier. On suppose éventuellement que F est linéaire par rapport à certaines variables de p_α, auquel cas on peut la mettre sous la forme suivante :

(6) $$F(x, X^\alpha u) = \sum_{k_0 < k \leqslant m} \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(x, X^\beta u)_{|\beta| \leqslant p(k)} X^\alpha u + A_{k_0}(x, X^\beta u]_{|\beta| \leqslant k_0}$$

où on peut supposer $p(k) < k$, on pose alors

$$d = \max\left(k_0, \frac{k + p(k)}{2} \right).$$

On suppose que u est une fonction réelle dans $C^{2d+1}(\Omega)$, et on désigne par L l'opérateur linéarisé de l'équation (1) associé à u

(7) $$L = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} F(x, X^\alpha u(x)) X^\alpha = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) X^\alpha \text{ sur } \Omega.$$

D'après la définition du nombre d, on a alors $a_\alpha \in C^{|\alpha|+1}(\Omega)$ réels. Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons que u est une solution réelle de l'équation* (1) *et appartient à $C^{2d+1}(\Omega)$ et que $\{X_j\}$ satisfait les hypothèses (i) et (ii). Soit $\hat{L}_{x_0} = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\hat{X}^\alpha_{x_0}$ l'opérateur différentiel invariant à gauche sur le groupe de Lie G_{x_0} pour un point fixé $x_0 \in \Omega$. Si pour toute représentation Π unitaire, irréductible, non triviale de G_{x_0}, l'opérateur $\Pi(\hat{L}_{x_0})$ est injectif dans φ_Π (où φ_Π désigne l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation), on a alors que u est C^∞ dans un voisinage de x_0.*

B. Helffer et J. Nourrigat [4] ont démontré l'équivalence entre l'injectivité de $\Pi(\hat{L}_{x_0})$ et l'hypoellipticité de $\hat{L}_{x_0}$ sur G_{x_0}. Notre démonstration est donc faite à partir de l'hypothèse d'hypoellipticité de l'opérateur $\hat{L}_{x_0}$ sur G_{x_0}.

Dans le paragraphe suivant, on démontre le théorème 2 à partir de l'estimation *a priori* (8) pour l'opérateur linéarisé (7). En vérifiant, l'irrégularité des cœfficients n'affecte pas le résultat, cette estimation est une conséquence de l'hypoellipticité de $\hat{L}_{x_0}$.

3. Démonstration du théorème 2.

Nous allons démontrer le théorème 2. Comme [9] on obtient l'hypoellipticité de l'opérateur paradifférentiel de Bony, associé à l'équation (1). Pour le détail de la théorie des opérateurs paradifférentiels on renvoie à J.-M. Bony [1]. On rappelle seulement les résultats dont on va se servir.

Soit $\tilde{L}$ l'opérateur paradifférentiel associé à l'équation (1), il est de la forme $\tilde{L} = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha X^\alpha$, où A_α d'ordre 0 associé au symbole a_α définis dans (7).

LEMME 3. — *Soit u une solution réelle de l'équation* (1) *comme dans le théorème* 2, L *l'opérateur* (7), *on a alors*

1) *l'opérateur* $(L-\tilde{L})$ *applique continûment* $L^2(\Omega)$ *dans* $L^2(\Omega)$;

2) *quel que soit* $s \in \mathbf{R}$, *si* $u \in C^{2d+1}(\Omega) \cap H^s_{loc}(\Omega)$, *on a* $\tilde{L}u \in H^s_{loc}(\Omega)$.

Le théorème 2 résultera du théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit* $L = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) X^\alpha$ *l'opérateur* (7). *Supposons que les hypothèses du théorème* 2 *soient satisfaites. Il existe alors un voisinage* U *de* x_0, *tel que quel que soit* K *compact de* U, *on ait une constante* C *tel que*

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|X^\alpha \varphi\|_0^2 \leqslant C\{\|L\varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\} \tag{8}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$.

C'est un théorème de L. P. Rotschild [6], mais les coefficients sont ici non C^∞. On montre maintenant que le théorème 4 implique le théorème 2.

En utilisant le lemme 3, avec une autre constante, l'estimation (8) implique l'estimation suivante :

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|X^\alpha \varphi\|_0^2 \leqslant C\{\|\tilde{L}\varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\} \tag{9}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$. On a encore une estimation pour le système des champs de vecteurs.

LEMME 5 *(voir* § 1.6 *dans* [7]*)*. — *Supposons que* $X_1, \ldots, X_p$ *satisfait l'hypothèse (i) pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe alors une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{r}}^2 \leqslant C\left\{\sum_{j=1}^{p} \|X_j \varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\right\} \tag{10}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$.

Des estimations (9) et (10) résultent donc l'estimation suivante :

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|X^\alpha \varphi\|_{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}^2 \leqslant C\{\|\tilde{L}\varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\} \tag{11}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$. En fait, cette estimation est encore vraie pour tout $\varphi \in H_{\text{comp}}^m(K)$.

THÉORÈME 6. — *Si l'opérateur* $\tilde{L}$ *satisfait l'estimation* (11), *on a l'implication suivante,* $\forall s \in \mathbf{R}^1$,

$$\left.\begin{matrix} u \in H_{\text{loc}}^s(U) \\ \tilde{L}u \in H_{\text{loc}}^s(U) \end{matrix}\right\} \Rightarrow X^\alpha u \in H_{\text{loc}}^{s+\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)\,; \qquad |\alpha| \leqslant m. \tag{12}$$

Ce théorème implique évidemment le théorème 2, parce que si u est une solution de l'équation (1) dans $C^{2d+1}(\Omega) = C^{2d+1}(\Omega) \cap H^{2d+1}_{loc}(\Omega)$, en vertu du lemme 3, $\tilde{L}u \in H^{2d+1}_{loc}(\Omega)$. Le théorème 6 résulte de $u \in H^{2d+\frac{m}{r}+1}_{loc}(U)$, on refait cela et on en déduit enfin que $u \in C^{\infty}(U)$.

Démonstration du théorème 6. – On la fait en plusieurs étapes.

a) On montre d'abord l'implication suivante où K est un compact de U

$$(13)\quad \left.\begin{array}{l} v \in H^0_{comp}(K) \\ X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(\mathbf{R}^n)\,; |\alpha| \leqslant m \\ \tilde{L}v \in H^0(\mathbf{R}^n) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K). \\ |\alpha| \leqslant m \end{array}$$

On définit un opérateur

$$T_\varepsilon = a(x)(1-\varepsilon\Delta_x)^{-\frac{m}{2}} b(x)$$

où $a, b \in C^\infty_0(U)$, $a \equiv 1$ sur K, $b \equiv 1$ sur supp $a = K'$, on a alors $T_\varepsilon : H^0_{loc}(U) \to H^m_{comp}(K')$. T_ε est borné dans H^0 pour $0 < \varepsilon \leqslant 1$, de plus

$$(14)\qquad \begin{aligned} [X^\alpha, T_\varepsilon] &= \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|-1} T_{\beta\alpha\varepsilon} X^\beta \\ [\tilde{L}, T_\varepsilon] &= \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} T_{\alpha\varepsilon} X^\alpha \end{aligned}$$

où $T_{\alpha\varepsilon}$, $T_{\beta\alpha\varepsilon}$ sont bornés dans H^0, et à support compact. Comme $T_\varepsilon v \in H^m_{comp}(K')$, on peut utiliser (11) pour obtenir

$$(15)\quad \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|X^\alpha T_\varepsilon v\|_{\frac{(m-|\alpha|)}{r}} \leqslant C\{\|\tilde{L}T_\varepsilon v\|_0^2 + \|T_\varepsilon v\|_0^2\}.$$

En utilisant (14), avec une autre constante on a

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|T_\varepsilon X^\alpha v\|_{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)} \leqslant\ & C\Big\{\|T_\varepsilon \tilde{L}v\|_0^2 + \|v\|_0^2 \\ & + \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \|X^\alpha v\|_0^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|-1} \|X^\beta v\|_{\frac{1}{r}(m-|\beta|)}\Big\} \\ & \leqslant C\Big\{\|\tilde{L}v\|_0^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \|X^\alpha v\|_{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)} + \|v\|_0^2\Big\} \\ & \leqslant C\Big\{\|\tilde{L}v|_0^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|X^\alpha v\|_{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}\Big\} \end{aligned}$$

Il en résulte que $a(x)X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-\alpha)}$, $|\alpha| \leqslant m$, comme a est quelconque, $X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K)$.

b) On montre maintenant l'implication suivante :

$$(16)\quad \left.\begin{array}{l} v \in H^o_{loc}(U) \\ X^\alpha v \in H_{loc}^{\frac{1}{r}(m-1-\alpha)}(U);\ |\alpha| \leqslant m \\ \tilde{L}\ v \in H^o_{loc}(U) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X^\alpha v \in H_{loc}^{\frac{1}{r}(m-\alpha)}(U) \\ |\alpha| \leqslant m \end{array}$$

quel que soit $\varphi_1 \in C_0^\infty(U)$, $K = \operatorname{supp} \varphi_1$ un compact de U, on pose

$$(17)\quad \begin{array}{l} u = \varphi_1 v, \qquad u \in H^o_{comp}(K) \\ X^\alpha u = \varphi_1 X^\alpha v + [X^\alpha, \varphi_1] v \end{array}$$

où $[X^\alpha, \varphi_1] = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha| - 1} a_{\alpha\beta} X^\beta$, $a_{\alpha\beta}$ à support compact et borné sur H^o, on a donc $[X^\alpha, \varphi_1] v \in H_{comp}^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}$, $|\alpha| \leqslant m$ et d'après l'hypothèse $\varphi_1 X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(\mathbf{R}^n)$; $|\alpha| \leqslant m$. On déduit donc $X^\alpha u \in H^{\frac{1}{r}(m-1-\alpha)}(\mathbf{R}^n)$, par la même méthode, on peut obtenir $\tilde{L} u \in H^o(\mathbf{R}^n)$. En appliquant *a*), on a $X^\alpha u \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K)$, $|\alpha| \leqslant m$. Regardons (17), on obtient $\varphi_1 X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K)$ donc $X^\alpha v \in H_{loc}^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)$, $|\alpha| \leqslant m$.

c) On montre maintenant l'implication dans la chaîne de l'espace de Sobolev, $\forall t \in \mathbf{R}^1$,

$$(18)\quad \left.\begin{array}{l} v \in H^t_{loc}(U) \\ X^\alpha v \in H_{loc}^{t+\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U);\ |\alpha| \leqslant m \\ \tilde{L}\ v \in H^t_{loc}(U) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X^\alpha v \in H_{loc}^{t+\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U) \\ |\alpha| \leqslant m. \end{array}$$

Soit $\Lambda \in L^t_{c\ell}(U)$ un opérateur pseudo-différentiel elliptique à support propre

$$[X^\alpha, \Lambda] = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha| - 1} a_{\alpha\beta} X^\beta$$

$$[L, \Lambda] = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} a_\alpha X^\alpha$$

où a_α, $a_{\alpha\beta}$ sont des opérateurs bornés d'ordre t et à support propre. On pose

$$(19)\quad \begin{array}{l} u = \Lambda v, \qquad u \in H^o_{loc}(U) \\ X^\alpha u = X^\alpha \Lambda v = \Lambda X^\alpha v + [X^\alpha, \Lambda] v. \end{array}$$

On a donc $X^\alpha u \in H_{\text{loc}}^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U)$, $|\alpha| \leqslant m$, de la même façon $\tilde{L}u \in H^{o}_{\text{loc}}(U)$ en appliquant *b*), on obtient $X^\alpha u \in H_{\text{loc}}^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)$, $|\alpha| \leqslant m$ vérifie (19), on a $\Lambda X^\alpha v \in H_{\text{loc}}^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)$. Enfin

$$X^\alpha v \in H_{\text{loc}}^{t+\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U).$$

d) Dans le théorème, $u \in H^s_{\text{loc}}(U)$ on a donc pour $|\alpha| \leqslant m$, $X^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}_{\text{loc}}(U)$. On pose $s - m = t$ comme

$$s - |\alpha| \geqslant s - m + \frac{1}{r}(m-1-|\alpha|),$$

on a

$$X^\alpha u \in H_{\text{loc}}^{t+\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U).$$

En utilisant *c*), on déduit

$$X^\alpha u \in H_{\text{loc}}^{t+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U).$$

On refait cela, il existe un entier N, tel que $t + \dfrac{N-1}{r} \geqslant s$, ce qui termine la démonstration du théorème 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony, Calcul symbolique et propagations des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Scient. Ec. Sup.*, 4^e série (1981), 209-246.

[2] G. B. Folland, Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, *Arkiv. f. Mat.*, 13 (1975), 161-207.

[3] G. B. Folland and E. M. Stein, Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, *Comm. P. A. Math.*, 27 (1974), 429-522.

[4] B. Helffer et J. Nourrigat, Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué, *Comm. in P.D.E.*, 4 (8), (1979), 899-958.

[5] G. Metivier, Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non-elliptiques, *Comm. in P.D.E.*, 1 (5), (1976), 467-519.

[6] L. P. Rotschild, A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields, *Comm. in P.D.E.*, 4 (6), (1979), 645-699.

[7] L. P. Rotschild and E. M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.*, 137 (1976), 247-320.

[8] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second-order differential equations, *Acta Math.*, 119 (1967), 147-171.

[9] C. J. XU, Régularité des solutions des e.d.p. non linéaires, *C.R. Acad. Sciences,* t. 300 (1985), 267-270.

[10] C. J. XU, Hypoellipticité d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Journées « Équations aux dérivées partielles », 3-7 juin 1985, Saint-Jean-de-Monts.

[11] C. J. XU, Opérateurs sous-elliptiques et régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre en deux variables, *Comm. in P.D.E.,* 11 (1986), 1575-1603.

Manuscrit reçu le 27 février 1986
révisé le 1er décembre 1986.

Chao-Jiang XU,
Université de Wuhan
Département de Mathématiques
Wuhan (Rép. Pop. Chine).