ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTIAN MAUDUIT

Automates finis et ensembles normaux

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 2 (1986), p. 1-25

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 2 (1986), 1-25.

AUTOMATES FINIS ET ENSEMBLES NORMAUX

par Christian MAUDUIT

---

1. Introduction.

Rappelons que l'on appelle ensemble normal associé à une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ l'ensemble des nombres réels ξ tels que la suite $(u_n . \xi)_{n \in \mathbf{N}}$ soit équirépartie modulo un.

Le but de cette étude est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite d'entiers $u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \cdots$ reconnaissable par un automate fini soit exactement $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (la définition précise de la reconnaissabilité sera rappelée ultérieurement).

D'après le théorème de Weyl (cf [15] ou [20]) le problème revient à étudier le comportement de la somme $\sum_{n<\mathrm{N}} e(u_n . \xi)$ et de déterminer à quelles conditions on a, pour tout ξ irrationnel $\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n<\mathrm{N}} e(u_n . \xi) = 0$ (en posant $e(x) = e^{2i\pi x}$).

Résultats antérieurs. — En 1980, Kamae, dans un article non publié (cf [7]), avait donné une ébauche de démonstration dans le cas particulier où $u_n \in \mathrm{O}(n)$ (par exemple pour la suite de Morse (cf exemple 2)).

— En 1983, Coquet a obtenu un résultat permettant de conclure pour certaines suites telles que $u_n \notin \mathrm{O}(n)$ (cf. [9]). C'est le cas de la suite $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \ldots$ des entiers dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 (cf. exemple 3).

Mais aucune de ces deux méthodes ne s'applique, par exemple, au cas de la suite de Baum-Sweet (cf. exemple 4) qui vérifie $u_n \in \mathrm{O}\,(n^{\log_\theta 2})$ avec $\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et dont on peut montrer par ailleurs que l'ensemble normal est $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Mots-clés : Équirépartition modulo 1 - Automate fini - Ensemble normal - Nombre cyclomatique - Produit infini de matrices

Résultat obtenu. — Le théorème que nous donnons permet de conclure dans le cadre le plus général, en montrant qu'il suffit que la suite u n'ait pas une croissance de type exponentiel. En fait, cette condition s'exprime très aisément sur le graphe associé à l'automate en disant qu'il suffit qu'au moins un des sommets qui reconnaît la suite u soit précédé dans le graphe par un sommet possédant au moins deux circuits fermés distincts.

Ces résultats avaient été annoncés en 1984 dans une note aux C.R.A.S. (cf [17]). Par ailleurs, nous établissons (théorèmes 2 et 3) que ces conditions sont nécessaires.

2. Notations et définitions.

Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $[r]$ l'alphabet $\{0,1,\ldots,r-1\}$ et par $[r]^{\mathrm{K}}$ l'ensemble des mots de longueur $\mathrm{K} \geqslant 1$,

$$[r]^0 = \{\varnothing\},$$

$$[r]^* = \bigcup_{\mathrm{K}=0}^{+\infty} [r]^{\mathrm{K}}.$$

Un r-automate $\mathscr{A}$ est la donnée d'un quintuplet $\mathscr{A} = (\mathrm{A},\Xi,a,\varphi,\tau)$ avec :

i) A alphabet $\mathrm{A} = \{a,b,c,\ldots\}$,

ii) Ξ alphabet,

iii) a point initial de A,

iv) φ application $\varphi : \mathrm{A} \times [r] \to \mathrm{A}$,

v) τ application $\tau : \mathrm{A} \to \Xi$.

Pour tout (x,s) dans $\mathrm{A} \times [r]$ on pose $\varphi(x,s) = s(x)$ ou plus simplement $x.s$. On prolonge alors $\varphi : \mathrm{A} \times [r] \to \mathrm{A}$ en une application, encore notée φ, $\varphi : \mathrm{A} \times [r]^* \to \mathrm{A}$.

Si n est un entier positif dont la représentation en base r est $\varepsilon_g\varepsilon_{g-1} \ldots \varepsilon_0$, on pose pour tout x dans A

$$\begin{aligned}\varphi(x,n) &= x.n \\ &= x.\varepsilon_g\varepsilon_{g-1} \ldots \varepsilon_0\end{aligned}$$

(à $n=0$ on associe le mot vide, avec $\varphi(x,\varnothing)=x$).

Ainsi, lorsque n parcourt $\mathbf{N}$, $a.n$ décrit une suite infinie d'éléments dans A et $\tau(a.n)$ décrit une suite infinie d'éléments dans Ξ.

DÉFINITIONS FONDAMENTALES. — 1) *On dit qu'une suite* $t \in \Xi^{\mathbf{N}}$ *est r-reconnaissable s'il existe un r-automate* $\mathscr{A} = (\mathrm{A}, \Xi, a, \varphi, \tau)$ *tel que :*

$$t = (t_n)_{n \in \mathbf{N}} = (\tau(a.n))_{n \in \mathbf{N}}.$$

2) *On dit qu'une suite d'entiers* $u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \cdots$ *est r-reconnaissable si sa fonction indicatrice* $t \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ *est r-reconnaissable.*

D'autre part, notons G le graphe associé à l'automate $\mathscr{A}$ et M la matrice associée au graphe G :

$$\mathrm{M} = (\mathrm{M}_{ij})_{(i,j) \in \mathrm{A}^2} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M}_{ij} = \operatorname{card}\{s \in [r]; i.s = j\}.$$

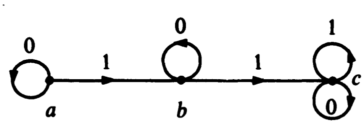
Si S désigne la matrice de l'action $\xrightarrow{s}$ pour s dans $[r]$, on pose pour tout ξ dans $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(\xi) &= \sum_{s=0}^{r-1} e(s\xi).\mathrm{S} \\ &= (\mathrm{M}_{ij}(\xi))_{(i,j) \in \mathrm{A}^2}. \end{aligned}$$

Pour tout n dans $\mathbf{N}$, on note $\mathrm{M}^{(n)}(\xi) = \mathrm{M}(r^{n-1}\xi) \ldots \mathrm{M}(r\xi)\mathrm{M}(\xi)$. On a alors $\mathrm{M}^{(n)}(0) = \mathrm{M}^n(0) = \mathrm{M}^n$.

De plus on remarque que, pour tout entier $g \geqslant 1$ la suite t est r^g-reconnaissable par l'automate $\mathscr{A}_g = (\mathrm{A}, \Xi, a, \varphi_g . \tau)$ où φ_g est l'application associée à la matrice $\mathrm{M}^{(g)}(\xi)$.

Exemple 1. — La suite $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < \ldots$ des puissances de 2 est reconnaissable par l'automate :

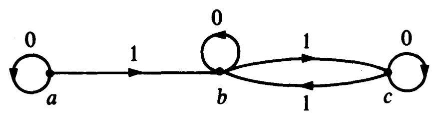


$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \qquad \tau(b) = 1, \qquad t = (0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \ldots)$$

et on a

$$\mathrm{M}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix}$$

Exemple 2. — La suite $1 < 2 < 4 < 7 < 8 < \ldots$ des entiers dont la somme des chiffres en base 2 est impaire (suite de Morse) est reconnaissable par l'automate :

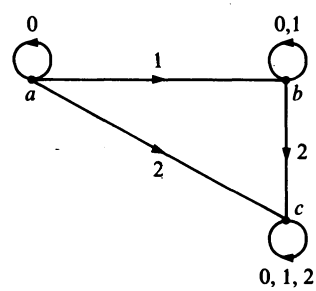


$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \qquad \tau(b) = 1, \qquad t = (0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,\ldots)$$

et on a

$$\mathrm{M}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & e(\xi) & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 3. — La suite $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \cdots$ des entiers non nuls dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 est reconnaissable par l'automate :

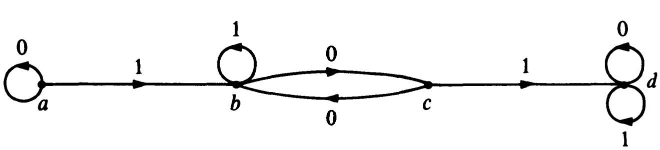


$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \qquad \tau(b) = 1, \qquad t = (0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,\ldots)$$

et on a

$$\mathrm{M}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 1+e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi)+e(2\xi) \end{bmatrix}.$$

Exemple 4. — La suite $1 < 3 < 4 < 7 < 9 < \ldots$ des entiers dont la représentation binaire ne contient aucune plage de 0 de longueur impaire (suite de Baum-Sweet) est reconnaissable par l'automate :



$$\tau(a) = \tau(c) = \tau(d) = 0, \qquad \tau(b) = 1, \qquad t = (0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,\ldots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & e(\xi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix}.$$

Soit ℓ un sommet de G.

$G[\ell]$ est la restriction du graphe G à l'ensemble des sommets k tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}$, $M^n_{k\ell} > 0$ (c'est-à-dire à l'ensemble des états à partir desquels on peut rejoindre l'état ℓ).

On dira que le sommet i de G précède (au sens large) le sommet j de G s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $M^n_{ij} > 0$.

On note $M(G[\ell])$ la matrice associée au graphe $G[\ell]$.

a étant l'état initial de l'automate $\mathscr{A}$, on définit l'application v :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &\to \mathrm{A} \\ n &\mapsto v(n) = \varphi(a,n) = a.n \end{aligned}$$

et on note, pour tout $x > 0$:

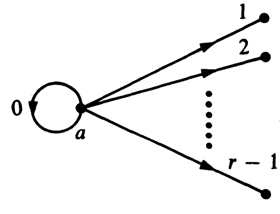
$$V(x,\ell,\xi) = \sum_{\substack{n<x \\ v(n)=\ell}} e(n.\xi)$$

$$V(x,\ell) = V(x,\ell,0) = \sum_{\substack{n<x \\ v(n)=\ell}} 1.$$

On a choisi l'automate de façon à ce que

$$\forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \qquad V(x,a,\xi) = 1$$

ce qui est toujours possible, quitte à rajouter un nouvel état initial à l'alphabet A :



Par ailleurs, si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions définies et positives pour $x > x_0$, la notation $f \approx g$ ou $f(x) \approx g(x)$ signifiera qu'il existe des réels α et α' tels que pour tout x assez grand

$$0 < \alpha \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \alpha' .$$

N.B. : Les définitions spécifiques aux automates se trouvent dans [6] et [12], celles spécifiques aux graphes se trouvent dans [2] et [14].

Rappelons que l'on peut définir sur le graphe G la relation d'équivalence de forte connexité entre les sommets :

$\ell \sim \ell'$ s'il existe dans G un chemin allant de ℓ vers ℓ' et un chemin allant de ℓ' vers ℓ.

On note $G/\sim$ le graphe quotient ainsi obtenu et $\tilde{\ell}$ la classe d'équivalence modulo $\sim$ du sommet ℓ de G.

$G/\sim$ est un graphe sans boucle. On peut donc définir sur $G/\sim$ une numérotation ν des sommets, avec $\nu(\tilde{a}) = 0$:

$$\nu : G/\sim \ \to \mathbf{N} .$$

On peut alors prolonger ν en une application de G dans $\mathbf{N}$, encore notée ν, en posant pour $\ell \in G$:

$$\nu(\ell) = \nu(\tilde{\ell}) .$$

Ceci nous permet de définir un préordre sur G :

$$k \leqslant \ell \quad \text{si} \quad k \text{ précède } \ell \text{ dans G}$$
$$k < \ell \quad \text{si} \quad k \leqslant \ell \quad \text{et} \quad \nu(k) < \nu(\ell) .$$

Si Γ est un sous-graphe de G, on notera $\gamma(\Gamma)$ son nombre cyclomatique (c'est-à-dire le nombre d'arcs de Γ, plus le nombre de composantes connexes de Γ, moins le nombre de sommets de Γ.)

$\tilde{\ell}$ étant considérée comme un sous-graphe de G, on note $M[\tilde{\ell}](\xi)$ la matrice extraite de la matrice $M(\xi)$ obtenue par restriction à $\tilde{\ell}$ du graphe G.

DÉFINITION 1. —

— *$\tilde{\ell}$ est de type* 0 *si* $\gamma(\tilde{\ell}) = 0$,
— *$\tilde{\ell}$ est de type* 1 *si* $\gamma(\tilde{\ell}) = 1$,
— *$\tilde{\ell}$ est de type* 2 *si* $\gamma(\tilde{\ell}) \geqslant 2$,

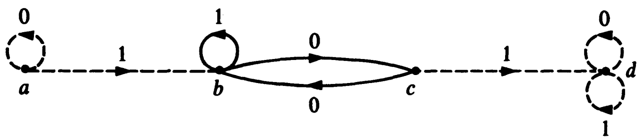
où γ désigne le nombre cyclomatique.

ℓ sera de type i lorsque $\tilde{\ell}$ est de type i $(i \in \{0,1,2\})$.

DÉFINITION 2. — *Le poids de* ℓ *est égal au maximum des types des sommets de* G *précédant le sommet* ℓ. *On le note* $\pi(\ell)$,

$$\begin{aligned} \pi : G &\to \{0,1,2\} \\ \ell &\mapsto \pi(\ell). \end{aligned}$$

Exemple 5. — Dans le cas de la suite de Baum-Sweet, $\tilde{b}$ est représenté en trait plein :



par conséquent $M[\tilde{b}](\xi) = \begin{bmatrix} e(\xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\gamma(\tilde{b}) = 2$, $\pi(\tilde{b}) = 2$.

3. Étude asymptotique des sommes de Weyl.

Préliminaire. — Calcul de $V(x,\ell,\xi)$.

$$\begin{aligned} V(x,\ell,\xi) &= \sum_{\substack{n<x \\ v(n)=\ell}} e(n\xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n<\frac{x-s}{r} \\ v(nr+s)=\ell}} e((nr+s)\xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n<\frac{x}{r} \\ v(nr+s)=\ell}} e((nr+s)\xi) + B(x,\ell,\xi) \end{aligned}$$

avec $|B(x,\ell,\xi)| \leqslant r-1$.

Remarquons maintenant que si l'on pose $S = (S_{ij})_{(i,j)\in A^2}$

$$\sum_{\substack{n<\frac{x}{r} \\ v(nr+s)=\ell}} e(nr\xi) = \sum_{k\in A} S_{k\ell} \sum_{\substack{n<\frac{x}{r} \\ v(n)=k}} e(nr\xi)$$

et par conséquent

$$V(x,\ell,\xi) = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k\in A} e(s\xi) S_{k\ell} \sum_{\substack{n<\frac{x}{r} \\ v(n)=k}} e(nr\xi) + B(x,\ell,\xi)$$

$$V(x,\ell,\xi) = \sum_{k\in A} M_{k\ell}(\xi)V\left(\frac{x}{r},k,r\xi\right) + B(x,\ell,\xi).$$

On en déduit par récurrence, que pour tout entier $N \geqslant 1$, on a :

$$V(x,\ell,\xi) = \sum_{k\in A} M_{k\ell}^{(N)}(\xi)V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right) + B_N(x,\ell,\xi)$$

avec $|B_N(x,\ell,\xi)| \leqslant r^N - 1$.

LEMME 1. — *Pour tout sommet* ℓ *de* G, *il existe* (β,θ) *dans* $\mathbf{N} \times [0,1]$ *tel que* $V(x,\ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta$.

Démonstration. —

Étape 1 : Montrons ce lemme pour la suite $x_n = r^n$. $V(r^n,\ell)$ est égal au nombre de chemins de longueur n joignant le sommet a au sommet ℓ dans le graphe $G[\ell]$, c'est-à-dire au coefficient d'indice (a,ℓ) de la matrice $M(G(\ell])^n$.

Pour estimer ce coefficient, mettons $M(G[\ell])$ sous la forme de Jordan :

$$M(G[\ell]) = P(D+N)P^{-1}$$

avec D diagonale, N nilpotente et où D et N commutent. Ainsi

$$\begin{aligned} V(r^n,\ell) &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}PD^{n-i}N^iP^{-1}\right)_{a\ell} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda i}\lambda^{n-i} \end{aligned}$$

où Λ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(G[\ell])$.

Soit λ_0 une valeur propre de module maximum telle que les coefficients $C_{\lambda_0 i}$ ne soient pas tous nuls.

$|\lambda_0| \geqslant 1$ et les éléments de Λ de module $|\lambda_0|$ sont de la forme $\lambda = \lambda_0 e(v)$ avec $v \in \mathbf{Q}$ (cf [23]).

Si nous notons q le dénominateur commun de tous ces nombres rationnels, nous obtenons (si $\beta \in \mathbf{N}$ désigne l'indice maximum tel que $C_{\lambda_0\beta} \neq 0$) :

$$V(r^n,\ell) = \binom{n}{\beta}\lambda_0^{n-\beta}\sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{nj}{q}\right) + W(r^n,\ell)$$

avec $W(r^n,\ell) \in O(n^\beta|\lambda_0|^n)$ et où les H_j ne sont pas tous nuls. Choisissons maintenant d, $d \in \{0,1,\ldots,q-1\}$ tel que $\sum_{j=0}^{q-1} \mathrm{H}_j e\left(\frac{dj}{q}\right) \neq 0$. Pour un tel d, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(r^{qn+d},\ell) &\approx n^{\beta}|\lambda_0|^n \\ &\approx (\log r^{qn+d})^{\beta} r^{(qn+d)\theta} \end{aligned}$$

où $\theta = \dfrac{\log|\lambda_0|}{\log r} \in [0,1]$ puisque $\mathrm{M}(\mathrm{G}[\ell])$ est extraite de la matrice M, dont le rayon spectral est égal à r.

Étape 2 : Pour tout x assez grand, il existe un entier m tel que (avec les notations de l'étape 1) :

$$r^{mq+d} \leqslant x < r^{(m+1)q+d}.$$

Ainsi pour x assez grand, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(x,\ell) &\geqslant \mathrm{V}(r^{mq+d},\ell) \\ &\geqslant \alpha\,(\log r^{mq+d})^{\beta} r^{(mq+d)\theta} \\ &\geqslant \alpha\,(\log r^{-q}x)^{\beta}(r^{-q}x)^{\theta} \\ &\geqslant \frac{\alpha}{2^{\beta}r^{\theta q}}\,(\log x)^{\beta}x^{\theta} \end{aligned}$$

et il existe $\alpha' > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(x,\ell) &\leqslant \mathrm{V}(r^{(m+1)q+d},\ell) \\ &\leqslant \alpha'\,(\log r^{(m+1)q+d})^{\beta} r^{((m+1)q+d)\theta} \\ &\leqslant \alpha'\,(\log r^{q}x)^{\beta}(r^{q}x)^{\theta} \\ &\leqslant \alpha' 2^{\beta} r^{\theta q}\,(\log x)^{\beta}x^{\theta} \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{V}(x,\ell) \approx (\log x)^{\beta}x^{\theta}$.

C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Si $\rho(\mathcal{T})$ est le rayon spectral de la matrice $\mathrm{M}[\mathcal{T}](0)$, alors $\rho(\mathcal{T}) \leqslant r^{\theta}$. En effet si $\mathrm{N}_n(\ell_1,\ell_2)$ désigne le nombre de chemins de longueur n reliant le sommet $\ell_1 \in \mathcal{T}$ au sommet $\ell_2 \in \mathcal{T}$, on démontrerait comme précédemment que

$$\mathrm{N}_n(\ell_1,\ell_2) \in \mathrm{O}(n^{\beta}r^{\theta n}).$$

Or $\mathrm{N}_n = \sum_{\ell_1 \in \mathcal{T}} \sum_{\ell_2 \in \mathcal{T}} \mathrm{N}_n(\ell_1,\ell_2)$, qui désigne le nombre de chemins de longueur n dans le graphe fortement connexe $\mathcal{T}$, correspond à la valeur d'une norme matricielle en $\mathrm{M}[\mathcal{T}](0)^n$:

$$\mathrm{N}_n = \|\mathrm{M}[\mathcal{T}]\,(0)^n\|.$$

Cette norme étant équivalente à la norme spectrale, on en déduit, en posant $\rho \coloneqq \rho(\ell)$ que
$$\mathrm{N}_n \approx \rho^n$$
(cf [23], p. 65).

Donc $\rho^n \in \mathrm{O}(n^\beta r^{\theta n})$ et par suite $\rho \leqslant r^\theta$.

2) Le lemme 1 donne en particulier des conditions nécessaires pour qu'une suite soit reconnaissable par un automate fini.

En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est reconnaissable, il existe (β,θ) dans $\mathbf{N}\times[0,1]$ tel que
$$\mathrm{V}(x) = \sum_{u_n<x} 1 = \sum_{\tau(\ell)=1} \mathrm{V}(x,\ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta .$$
On retrouve ainsi un résultat de A. Cobham (cf. [83].

Exemple 6. — Les suites $(n\,!)_{n\in\mathbf{N}}$, $(n^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(a^{(n^b)})_{n\in\mathbf{N}}$ avec $(a,b)\in(\mathbf{N}^*\backslash\{1\})^2$, $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ où p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier ne sont pas reconnaissables par un automate fini. (Pour le dernier exemple, rappelons que $\mathrm{V}(x)\approx\dfrac{x}{\log x}$).

LEMME 2 (avec les notations du lemme 1). —

— *Si* ℓ *est de poids* 1, *alors* $\theta = 0$.

— *Si* ℓ *est de poids* 2, *alors* $\theta \in]0,1]$.

Démonstration. —

Premier cas : $\pi(\ell) = 1$; on pose $\nu(\ell) = \nu$.

$\mathrm{G}[\ell]$ est un graphe comprenant au plus $(\nu+1)$ composantes fortement connexes, de type 0 ou 1 (simples sommets ou boucles).

Par conséquent
$$\mathrm{M}(\mathrm{G}[\ell]) = \begin{bmatrix} \mathrm{M}_0 & \times & \cdots\cdots & \times \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \times \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \mathrm{M}_\nu \end{bmatrix}$$
avec pour tout $i\in\{0,\ldots,\nu\}$ M_i matrice associée à une composante fortement connexe de type 0 ou 1.

En particulier, on a soit $\mathrm{M}_i = 0$ soit $\mathrm{M}_i^{g_i} = \mathrm{I}_{g_i}$ ($g_i \neq 0$ désignant la longueur de la $i^{\text{ème}}$ boucle).

Ainsi, si $g = \underset{i=0\ldots v}{\text{p.p.c.m.}}\, g_i$ on a $M(G[\ell])^g = D + N$ avec N nilpotente et D diagonale formée uniquement de 0 et de 1.

Donc $|\lambda_0| = 1$ dans le lemme 1 et $\theta = 0$.

Second cas : $\pi(\ell) = 2$.

Soit k un sommet de type 2 précédant ℓ.

Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $V(r^p,k) \geqslant 1$.

Soit $p' \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$ $V(r^{n+p'},\ell) \geqslant V(r^n,k)$ (par exemple $p' = |$longueur du plus court chemin reliant k à ℓ dans G$)|$. k étant de type 2, il existe au moins 2 chemins distincts (de longueurs f_1 et f_2) joignant k à k.

Posons $f = f_1 f_2$.

On a alors pour tout entier n :

$$V(r^{p+nf},k) \geqslant 2^n V(r^p,k).$$

Or $\forall m \in \mathbf{N}$, $\exists !\, n \in \mathbf{N}$, $p + p' + nf \leqslant m < p + p' + (n+1)f$.

Pour ce couple (m,n) on a $V(r^m,\ell) \geqslant 2^n$ et

$$\frac{\log V(r^m,\ell)}{m} \geqslant \frac{n \log 2}{m} \geqslant \frac{m - p - p' - f}{mf} \log 2$$

d'où

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\log V(r^m,\ell)}{m} \geqslant \frac{\log 2}{f} > 0$$

ce qui implique $\theta > 0$ dans le lemme 1.

C.Q.F.D.

Remarque. — $\frac{1}{r} \cdot$ M étant une matrice stochastique, on en déduit que la CNS pour que $\theta = 1$ est que ℓ soit un état récurrent de l'automate (cf. [13], p. 19). En particulier, si $u_0 < u_1 < \cdots < u_n < \cdots$ est la suite d'entiers que l'on étudie, la CNS pour que $u_n \in O(n)$ est que l'un au moins des états qui reconnaît $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit récurrent.

LEMME 3 (avec les notations du lemme 1). — *Soient ℓ et ℓ' deux sommets de* G. *Si $\ell \sim \ell'$ alors $\beta(\ell) = \beta(\ell')$ et $\theta(\ell) = \theta(\ell')$.*

Démonstration. — Puisque $\ell \sim \ell'$, il existe un chemin de longueur p (resp. p') reliant ℓ à ℓ' (resp. ℓ' à ℓ).

Il existe donc des réels $\alpha(\ell)$, $\alpha'(\ell)$, $\alpha(\ell')$, $\alpha'(\ell')$ tels que pour n assez grand

$$0 \leqslant \alpha(\ell) n^{\beta(\ell)} r^{n\theta(\ell)} \leqslant V(r^n,\ell) \leqslant V(r^{n+p},\ell') \leqslant \alpha'(\ell')(n+p)^{\beta(\ell')} r^{(n+p)\theta(\ell')}$$

$$0 \leqslant \alpha(\ell') n^{\beta(\ell')} r^{n\theta(\ell')} \leqslant V(r^n,\ell') \leqslant V(r^{n+p'},\ell) \leqslant \alpha'(\ell)(n+p)^{\beta(\ell)} r^{(n+p)\theta(\ell)}.$$

D'où en faisant tendre n vers l'infini $\theta(\ell) = \theta(\ell')$ puis $\beta(\ell) = \beta(\ell')$.

C.Q.F.D.

Remarque. — De la même façon on démontre que, si $\ell \leqslant \ell'$ alors $\theta(\ell) \leqslant \theta(\ell')$, et si de plus $\theta(\ell) = \theta(\ell')$, alors $\beta(\ell) \leqslant \beta(\ell')$.

THÉORÈME 1. — *Soit* ℓ *un sommet de* G *de poids* 2.

Alors pour tout ξ *irrationnel, on a :*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{V(x,\ell,\xi)}{V(x,\ell)} = 0.$$

Démonstration. — Nous allons démontrer ce théorème par récurrence sur $\nu(\ell) \in \mathbf{N}^*$.

Étape 1 : $\nu(\ell) = 1$.

D'après le calcul préliminaire, on a pour tout entier N :

$$\begin{aligned} V(x,\ell,\xi) &= \sum_{k \in A} M_{k\ell}^{(N)}(\xi)\, V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right) + B_N(x,\ell,\xi) \\ &= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi)\, V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right) + B'_N(x,\ell,\xi) \end{aligned}$$

avec $|B'_N(x,\ell,\xi)| \leqslant 2(r^N - 1)$.

Considérons maintenant (β,θ) tel que pour tout sommet k de $\bar{\ell}$, $V(x,k) \approx (\log x)^\beta x^\theta$ (cf lemmes 1 et 3) et posons

$$\begin{aligned} W(x,k,\xi) &= \frac{V(x,k,\xi)}{(\log x)^\beta x^\theta} \\ W(x,k) &= W(x,k,0). \end{aligned}$$

On obtient, pour tout entier N :

$$W(x,\ell,\xi) = \left(\frac{\log \frac{x}{r^N}}{\log x}\right)^\beta \sum_{\substack{k\in A\\ k\sim\ell}} \frac{M_{k\ell}^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}} W\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right) + \frac{B'_N(x,\ell,\xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}.$$

Soit α tel que pour x assez grand

$$\sup_{\substack{k\in A\\ k\sim\ell}} W\left(\frac{x}{r^N},k\right) \leqslant \alpha.$$

Alors, pour tout entier N et pour x assez grand :

$$|W(x,\ell,\xi)| \leqslant \alpha \sum_{\substack{k\in A\\ k\sim\ell}} \left|\frac{M_{k\ell}^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}}\right| + \frac{2r^N}{(\log x)^\beta x^\theta}$$

d'où, en posant $W(\ell,\xi) = \overline{\lim_{x\to\infty}}\, |W(x,\ell,\xi)|$,

$$A(\xi) = \frac{{}^t M[\bar{\ell}](\xi)}{r^\theta},$$

et pour tout entier n

$$A^{(n)}(\xi) = A(\xi)A(r\xi)\cdots A(r^{n-1}\xi).$$

Pour tout entier N :

$$\begin{aligned} w(\ell,\xi) &\leqslant \alpha \sum_{\substack{k\in A\\ k\sim\ell}} |A_{\ell k}^{(N)}(\xi)| \\ &\leqslant \alpha \|A^{(N)}(\xi)\|_\infty . \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer que si $\pi(\ell) = 2$ et $\xi \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ $\lim\limits_{N\to\infty} A^{(N)}(\xi) = 0$, ce qui nous permettra d'achever notre démonstration pour le cas $\nu(\ell) = 1$.

Pour tout x réel, posons :

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{(i,j)\in\ell^2}$$
$$A^{(n)}(x) = (a_{ij}^{(n)}(x))_{(i,j)\in\ell^2}$$

avec, comme d'habitude :

$$a_{ij}(0) = a_{ij} \qquad \text{et} \qquad a_{ij}^{(n)}(0) = a_{ij}^{(n)}.$$

Comme $\gamma(\mathcal{l}) \geqslant 2$, il existe au moins deux circuits fermés sur le sommet ℓ. Soit g le p.p.c.m. des longueurs de ces boucles. Quitte à travailler sur le r^g-automate $\mathcal{A}_g$, on peut supposer que $g = 1$.

On a donc

$$M_{\ell\ell}(\xi) = e(p_1\xi) + \cdots + e(p_t\xi)$$

avec $t \geqslant 2$, $\forall i \in \{1,\ldots,t\}$ $p_i \in \mathbf{N}$ et $p_1 \neq p_2$.

ξ étant irrationnel, il existe alors un δ dans $]0,1]$ et une suite $(N_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'entiers tels que :

$$|e(p_1.r^{N_k}.\xi) + \cdots + e(p_t.r^{N_k}.\xi)| \leqslant (1-\delta)t$$

c'est-à-dire tels que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad 0 < |a_{\ell\ell}(r^{N_k}.\xi)| \leqslant (1-\delta)a_{\ell\ell}.$$

Pour tout sommet i de $\mathcal{l}$ il existe un chemin de longueur $\zeta(i)$ allant de ℓ à i et un chemin de longueur $\eta(i)$ allant de i à ℓ.

Ainsi, quitte à rajouter à ces chemins des boucles (de longueur 1) sur le sommet ℓ, il existe (ζ,η) indépendant de i tel qu'il existe :

– un chemin de longueur ζ allant de ℓ à i,
– un chemin de longueur η allant de i à ℓ.

Posons $\kappa = \zeta + \eta + 1$. On a, pour tout entier k et pour tout (i,j) dans $\mathcal{l}^2$:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k-\eta}\xi) &= [A^{(\eta)}(r^{N_k-\eta}\xi)A(r^{N_k}\xi)A^{(\zeta)}(r^{N_k+1}\xi)]_{ij} \\ &= a_{i\ell}^{(\eta)}(r^{N_k-\eta}\xi)a_{\ell\ell}(r^{N_k}\xi)a_{\ell j}^{(\zeta)}(r^{N_k+1}\xi) \\ &\qquad + \sum_{(\lambda,\mu)\neq(\ell,\ell)} a_{i\lambda}^{(\eta)}(r^{N_k-\eta}\xi)a_{\lambda\mu}(r^{N_k}\xi)a_{\mu j}^{(\zeta)}(r^{N_k+1}\xi). \end{aligned}$$

D'où $$|a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k-\eta}\xi)| \leqslant a_{ij}^{(k)} - \delta a_{i\ell}^{(\eta)}a_{\ell\ell}a_{\ell j}^{(\zeta)},$$

or $$r^\theta a_{\ell\ell} \geqslant 1, \qquad r^{\eta\theta}a_{i\ell}^{(\eta)} \geqslant 1, \qquad r^{\zeta\theta}a_{\ell j}^{(\zeta)} \geqslant 1,$$

et par conséquent

$$|a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k-\eta}\xi)| \leqslant a_{ij}^{(\kappa)} - \frac{\delta}{r^{\kappa\theta}} \leqslant C.a_{ij}^{(\kappa)}$$

où $C \in]0,1[$.

On en déduit, par récurrence sur n, qu'il existe un entier strictement positif κ et qu'il existe C dans $]0,1[$ tels que pour tout $n \geqslant \kappa$ et pour tout (i,j) dans $\mathcal{l}^2$, on a :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad |a_{ij}^{(n)}(r^{N_k-\eta}\xi)| \leqslant C.a_{ij}^{(n)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(N_k)_{k\in N}$, on peut supposer que pour tout entier k, on a

$$N_{k+1} - N_k \geqslant \kappa .$$
$$N_0 \geqslant \eta .$$

On a alors pour tout (i,j) dans $\mathcal{I}^2$ et pour tout entier k:

$$|a_{ij}^{(N_k-N_0)}(r^{N_0-\eta}\xi)| \leqslant \sum_{\substack{i_1\in\mathcal{I}\\ \vdots \\ i_{k-1}\in\mathcal{I}}} |a_{ii_1}^{(N_1-N_0)}(r^{N_0-\eta}\xi)| \dots |a_{i_{k-1}j}^{(N_k-N_{k-1})}(r^{N_{k-1}-\eta}\xi)|$$
$$\leqslant C^k . a_{ij}^{(N_k-N_0)} .$$

D'après la remarque 1 du lemme 1, $A(0)$ est une matrice irréductible de rayon spectral inférieur à 1, et par conséquent il existe $a > 0$ tel que pour tout entier n, $\|A^n(0)\|_\infty \leqslant a$.

D'autre part, on vient de voir que

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists k\in N / \|A^{(N_k-N_0)}(r^{N_0-\eta}\xi)\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{a^2} \cdot$$

Donc pour $N \geqslant N_k - \eta$,

$$A^{(N)}(\xi) = A^{(N_0-\eta)}(\xi)A^{(N_k-N_0)}(r^{N_0-\eta}\xi)A(r^{N_k-\eta}\xi) \dots A(r^{N-1}\xi)$$

et

$$\|A^{(N)}(\xi)\|_\infty \leqslant \|A^{(N_0-\eta)}(0)\|_\infty\|A^{(N_k-N_0)}(r^{N_0-\eta}\xi)\|_\infty\|A^{(N-N_k+\eta)}(0)\|_\infty$$
$$\leqslant \varepsilon .$$

Étape 2 : Supposons le théorème démontré pour tout sommet k tel que $\nu(k) < \nu$ et donnons-nous un sommet ℓ tel que $\nu(\ell) = \nu$:

$$V(x,\ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta \quad \text{avec} \quad (\beta,\theta)\in N \times]0,1] .$$

On a pour tout entier N :

$$V(x,\ell,\xi) = \sum_{\substack{k\in A\\ k<\ell\\ \pi(k)=1}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi)V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right)$$
$$+ \sum_{\substack{k\in A\\ k<\ell\\ \pi(k)=2}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi)V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right)$$
$$+ \sum_{\substack{k\in A\\ k\sim\ell}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi)V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right)$$
$$+ B'_N(x,\ell,\xi), \text{ avec } |B'_N(x,\ell,\xi)| \leqslant 2(r^N - 1) .$$

Or, on remarque que :

– si $k < \ell$ et $\pi(k) = 1$

$$\left|V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right)\right| \leqslant V\left(\frac{x}{r^N},k\right) \leqslant V(x,k) \in o\left((\log x)^\beta x^\theta\right)$$

car d'après le lemme 2, $\theta(k) = 0$,

– si $k < \ell$ et $\pi(k) = 2$,

alors, par hypothèse de récurrence,

$$V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right) \in o\left((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}\right).$$

Mais d'après la remarque du lemme 3, on a

$$o\left((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}\right) \subset o\left((\log x)^\beta x^\theta\right).$$

D'où pour tout entier N :

$$V(x,\ell,\xi) = \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N},k,r^N\xi\right) \qquad \bmod o\left((\log x)^\beta x^\theta\right).$$

Si $\gamma(\bar{\ell}) \geqslant 2$, on procède comme pour l'étape 1.

Si $\gamma(\bar{\ell}) = 1$, soit g la longueur de la boucle sur le sommet ℓ

$$V(x,\ell,\xi) = M_{\ell\ell}^{(g)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^g},\ell,r^g\xi\right) \qquad \bmod o\left((\log x)^\beta x^\theta\right).$$

On a donc

$$\left|\frac{V(x,\ell,\xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}\right| \leqslant \frac{\left|V\left(\frac{x}{r^g},r^g\xi\right)\right|}{\left(\log \frac{x}{r^g}\right)^\beta \left(\frac{x}{r^g}\right)^\theta} \left(\frac{\log \frac{x}{r^g}}{\log x}\right)^\beta \frac{1}{r^{\theta g}} \qquad \bmod o(1)$$

et par conséquent, en posant

$$w(\ell,\xi) = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{V(x,\ell,\xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}$$

on obtient $w(\ell,\xi) \leqslant \dfrac{w(\ell,\xi)}{r^{\theta g}}$ d'où $w(\ell,\xi) = 0$ puisque $\theta > 0$.

C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Si $x \in \mathbf{Q}$, la suite $(u_n . x)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est évidemment pas équirépartie modulo un.

2) Si $\operatorname{Card}\{\ell ; \tau(\ell)=1\} > 1$ (c'est-à-dire si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est reconnue par plusieurs états de $\mathscr{A}$) alors l'étude précédente nous montre que si

$$L = \{\ell ; \tau(\ell)=1, \pi(\ell)=2\}, \qquad \theta = \sup_{\ell \in L} \theta(\ell) \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{\substack{\ell \in L \\ \theta(\ell)=\theta}} \beta(\ell)$$

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x,\ell,\xi)}{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x,\ell)} = \varlimsup_{x \to \infty} \frac{\sum_{\ell \in L} V(x,\ell,\xi)}{x^{\theta}(\log x)^{\beta}} = 0 .$$

On en déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Pour que l'ensemble normal associé à la suite* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *reconnaissable par l'automate* $\mathscr{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ *soit exactement* $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$, *il suffit qu'il existe* ℓ *dans* A *tel que* $\tau(\ell) = 1$ *et* $\pi(\ell) = 2$.

Exemple 7. — Les suites de Morse et de Baum-Sweet ont pour ensemble normal $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$.

4. Théorème réciproque.

Nous allons maintenant démontrer que cette condition est en fait nécessaire, ce qui nous permettra d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite* $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *reconnaissable par l'automate* $\mathscr{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ *soit exactement* $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ *est qu'il existe* ℓ *dans* A *tel que* $\tau(\ell) = 1$ *et* $\pi(\ell) = 2$.

Ce théorème va découler des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *Si* $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une suite reconnaissable par un r-automate* $\mathscr{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ *telle que*

$$(\forall \ell \in A), \qquad (\tau(\ell) = 1 \Rightarrow \pi(\ell) < 2)$$

alors u *est réunion d'un nombre fini* P *de suites* u^p $p \in \{1, \ldots, P\}$ de la forme

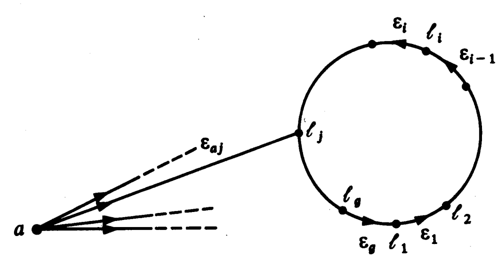
$$\{q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \cdots + N_\nu g_\nu^p + \nu - 1)} + \cdots + q_\nu^p r^{N_\nu g_\nu^p} + q_{\nu+1}, \quad (N_1, \ldots, N_\nu) \in \mathbf{N}^\nu\}$$

où $\nu \in \mathbf{N}^*$, $(g_1^p, \ldots, g_\nu^p) \in \mathbf{N}^\nu$ *et* $(q_1^p, \ldots, q_{\nu+1}^p) \in \mathbf{Q}^{\nu+1}$.

Démonstration. — Nous allons démontrer cette proposition par récurrence sur $\nu = \sup_{\tau(\ell)=1} \nu(\ell)$.

Étape 1 : $\nu = 1$.

On a donc à examiner le cas d'une boucle $(\ell_1,\ldots,\ell_g)$ du type suivant :



Posons

$$I = \{i \in \{1,\ldots,g\}; \tau(\ell_i)=1\}$$

et

$$J = \{j \in \{1,\ldots,g\};\ M_{a\ell_j} \neq 0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des j tels qu'existe une relation du type

$$a \xrightarrow{\varepsilon_{aj}} \ell_j .$$

Les mots qui nous permettent de passer de l'état a à un état ℓ_i, $i \in I$ sont les suivants (les indices étant définis modulo g) :

$$\{\varepsilon_{aj}\varepsilon_j,\ldots,\varepsilon_{i-1}\ \overbrace{\varepsilon_i \ldots \varepsilon_{i-1}}^{N_1 \text{ fois}}, N_1 \in \mathbf{N},\ (i,j) \in I \times J\}.$$

Posons maintenant pour tout $(i,j) \in I \times J$:

$$\begin{aligned} t_i &= r^{g-1}\varepsilon_i + \cdots + \varepsilon_{i-1} \\ d = d(i,j) &= i - j \qquad \text{si } j \leqslant i \\ &= g - (j-i) \quad \text{si } j > i \\ s_{i,j} &= r^d \varepsilon_{aj} + r^{d-1}\varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_{i-1} . \end{aligned}$$

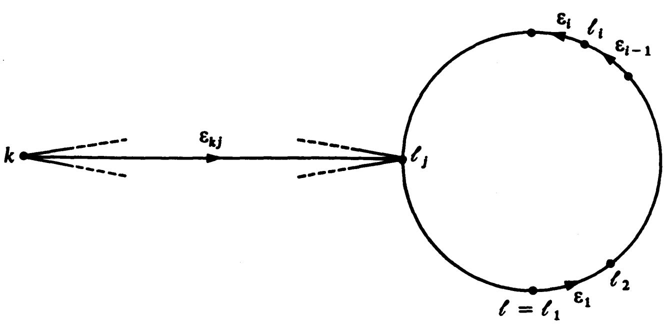
Alors les mots précédents correspondent aux entiers

$$\left\{ r^{N_1 g} s_{ij} + \frac{r^{N_1 g} - 1}{r^g - 1} t_i,\ N_1 \in \mathbf{N},\ (i,j) \in I \times J \right\}.$$

On en déduit, en procédant de même pour les autres boucles éventuelles telles que $\nu(\vec{\ell}) = 1$, que u est réunion d'un nombre fini P de suites u^p $p \in \{1,\ldots,P\}$ de la forme

$$\{q_1^p r^{N_1 g^p} + q_2^p, N_1 \in \mathbf{N}\} \qquad \text{avec} \qquad (q_1^p, q_2^p) \in \mathbf{Q}^2 .$$

Étape 2 : Supposons la proposition démontrée jusqu'à l'ordre $(\nu-1)$ et considérons une boucle $\vec{\ell} = \{\ell_1,\ldots,\ell_g\}$ telle que $\nu(\vec{\ell}) = \nu$.



Posons $I = \{i \in \{1,\ldots,g\},\ \tau(\ell_i)=1\}$.

Soit k un sommet précédant ℓ dans G (c'est-à-dire tel que $k < \ell$).

Notons $J(k) = \{j \in \{1,\ldots,g\},\ M_{k\ell_j} \neq 0\}$ l'ensemble des j tels qu'existe une relation du type

$$k \xrightarrow{\varepsilon_{kj}} \ell_j .$$

L'ensemble E des mots qui permettent de passer à l'état a à un état ℓ_i, $i \in I$, s'exprime en fonction de l'ensemble des mots $m(a,k)$ qui permettent de passer de l'état a à un état k, $k < \ell$, de la façon suivante :

$$E = \bigcup_{k<\ell} \{m(a,k)\varepsilon_{kj}\varepsilon_j\ldots\varepsilon_{i-1}\ \overbrace{\varepsilon_i\ldots\varepsilon_{i-1}}^{N_\nu \text{ fois}},$$
$$N_\nu \in \mathbf{N}, \quad (i,j) \in I \times J(k), \qquad \varphi(a.m(a,k))=k\}.$$

Posons maintenant pour tout $(i,j) \in I \times J(k)$:

$$\begin{aligned} t_i &= r^{g-1}\varepsilon_i + \cdots + \varepsilon_{i-1} \\ d = d(i,j) &= i - j \qquad \text{si } j \leqslant i \\ &= g - (j-1) \quad \text{si } j > i \\ s_{ij}^k &= r^d\varepsilon_{kj} + r^{d-1}\varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_{i-1} . \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, les mots $m(a,k)$ correspondent à la réunion d'un nombre fini P_1 de suites d'entiers v^p, $p \in \{1,\ldots,P_1\}$:

$$\{q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \cdots + N_{\nu-1} g_{\nu-1}^p + \nu - 2)} + \cdots$$
$$+ q_{\nu-1}^p r^{N_{\nu-1} g_{\nu-1}^p} + q_\nu^p, \qquad (N_1,\ldots,N_{\nu-1}) \in \mathbf{N}^{\nu-1}\}.$$

On en déduit que l'ensemble E correspond à la réunion d'un nombre fini P_2 de suites d'entiers u^p, $p \in \{1,\ldots,P_2\}$:

$$\{q_1^p r^d r^{(N_1 g_1^p + \cdots + N_{\nu-1} g_{\nu-1}^p + N_\nu g^p + \nu - 1)} + \cdots$$
$$+ \left(q_\nu^p r^{d+1} + s_{ij}^k + \frac{t_i}{r^{g^p} - 1}\right) r^{N_\nu g^p} - \frac{t_i}{r^{g^p} - 1}, \qquad (N_1,\ldots,N_\nu) \in \mathbf{N}^\nu\}.$$

On procède de même pour les autres boucles telles que $\nu(\ell) = \nu$. Enfin, en complétant les P_3 suites u^p ainsi obtenues par les suites obtenues sur les sommets ℓ tels que $\nu(\ell) < \nu$, on en déduit que u est réunion d'un nombre fini P de suites u^p $p \in \{1,\ldots,P\}$ de la forme

$$\{q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \cdots + N_\nu g_\nu^p + \nu - 1)} + \cdots + q_\nu^p r^{N_\nu q_\nu^p} + q_{\nu+1}^p (N_1,\ldots,N_\nu) \in \mathbf{N}^\nu\}$$

avec $(q_1^p,\ldots,q_{\nu+1}^p) \in \mathbf{Q}^{\nu+1}$, et la proposition 1 est ainsi démontrée par récurrence.

C.Q.F.D.

Proposition 2. — *Si u est de la forme indiquée par la proposition 1, alors l'ensemble des $\xi \in \mathbf{R}$ tels que $(u_n.\xi)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas équirépartie modulo un a la puissance du continu.*

Démonstration. — Quitte à remplacer pour tout $p \in \{1,\ldots,P\}$ et pour tout $i \in \{1,\ldots,\nu\}$ g_i^p par $\dfrac{g_i^p}{\operatorname{pgcd}(g_1^p,\ldots,g_\nu^p)}$ et à poser $r_p = r^{\operatorname{pgcd}(g_1^p,\ldots,g_\nu^p)}$, on peut supposer que u est réunion de P suites u^p de la forme

$$\{q_1^p r^{\nu-1} r_p^{(g_1^p N_1 + \cdots + g_\nu^p N_\nu)} + \cdots + q_\nu^p r_p^{g_\nu^p N_\nu} + q_{\nu+1}^p, (N_1,\ldots,N_\nu) \in \mathbf{N}^\nu\}$$

où $\nu \in \mathbf{N}^*$, $(q_1^p,\ldots,g_\nu^p) \in \mathbf{N}^\nu$ et $(q_1^p,\ldots,q_{\nu+1}^p) \in \mathbf{Q}^{\nu+1}$ avec $q_1^1 \neq 0$ (quitte à modifier la numérotation des suites u^p) et $q_{\nu+1}^1 = 0$ (quitte à opérer une translation sur $\mathbf{R}$) et pour tout $p \in \{1,\ldots,P\}$ $\operatorname{pgcd}(g_1^p,\ldots,g_\nu^p) = 1$.

Posons $q = \nu.\sup\limits_i |q_i^1 r^{\nu-i}|$ et pour tout $h \in \mathbf{N}^*$:

$$H = \{\xi \in \mathbf{R} ; \xi = \sum_{i \geqslant 0} \frac{\varepsilon_i}{r^{ih}}, \varepsilon_i \in \{0,1\}\}.$$

Nous allons montrer que pour h assez grand, l'ensemble H (qui a la puissance du continu) est inclus dans l'ensemble des $\xi \in \mathbf{R}$ tels que $(u_n . \xi)_{n \in \mathrm{N}}$ ne soit pas équirépartie modulo un.

Cela va résulter des quatre remarques suivantes :

1) Si $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x, on a pour tout (h,ξ) dans $\mathbf{N}^* \times \mathrm{H}$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \{r_1^{nh} . \xi\} \leqslant r^{1-h}.$$

On a en effet en posant $d = \dfrac{\log r_1}{\log r}$

$$\begin{aligned}\{r_1^{nh} . \xi\} &= \left\{ r^{dnh} . \sum_{i \geqslant 0} \frac{\varepsilon_i}{r^{ih}} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i > dn} \frac{\varepsilon_i}{r^{(i-dn)h}} \right\} \leqslant \sum_{i \geqslant 1} \frac{1}{r^{ih}} = \frac{1}{r^h - 1}.\end{aligned}$$

On en déduit, en posant $\chi = \mathbf{1}_{[o,q.r^{1-h}]}$ fonction indicatrice de l'intervalle $[o,q.r^{1-h}]$, pour tout (h,ξ) dans $\mathbf{N}^* \times \mathrm{H}$:

$$\forall (\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_\nu) \in \mathbf{N}^\nu,$$

$$\chi(\{(q_1^1 r^{\nu-1} r_1^{(g_1^1 \mathrm{N}_1 + \cdots + g_\nu^1 \mathrm{N}_\nu)h} + \cdots + q_\nu^1 r_1^{g_1^\nu \mathrm{N}_\nu h}) . \xi\}) = 1.$$

2) Pour tout p dans $\{1, \ldots, \mathrm{P}\}$ désignons par $\varphi_p(n)$ le nombre de solutions dans $\mathbf{N}^\nu$ de l'équation $g_1^p \mathrm{N}_1 + \cdots + g_\nu^p \mathrm{N}_\nu = n$.

De même désignons par $\psi_p(n)$ le nombre de solutions dans $\mathbf{N}^\nu$ de l'inéquation $g_1^p \mathrm{N}_1 + \cdots + g_\nu^p \mathrm{N}_\nu < n$.

Le développement en série entière de

$$\sum_{n \geqslant 0} \varphi_p(n) \mathrm{X}^n = (1 - \mathrm{X}^{g_1^p})^{-1} \cdots (1 - \mathrm{X}^{g_\nu^p})^{-1} \quad \text{pour} \quad |\mathrm{X}| < 1$$

nous montre que

$$\varphi_p(n) \sim \frac{n^{\nu-1}}{g_1^p \ldots g_\nu^p (\nu - 1)!},$$

on en déduit que

$$\psi_p(n) \sim \frac{n^\nu}{g_1^p \ldots g_\nu^p . \nu!}.$$

Considérons maintenant l'entier $\mathrm{Q}(n)$ tel que

$$u_{\mathrm{Q}(n)} = q_1^1 r^{\nu-1} r_1^n + q_2^1 r^{\nu-2} + \cdots + q_\nu^1$$

et soit $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ tel que pour tout p dans $\{1,\ldots,\mathrm{P}\}$:

$$u_{\mathrm{Q}(n)} \leqslant q_1^p r^{\nu-1} r_p^{an+b} + q_2^p r^{\nu-2} + \cdots + q_{\nu+1}^p .$$

On a alors $\mathrm{Q}(n) \leqslant \psi(an+b)$ avec $\psi(n) = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} \psi_p(n)$.

D'autre part, soit $c \in \mathbf{N}$ tel que

$$q_1^1 r^{\nu-1} r_1^c \geqslant q_1^1 r^{\nu-1} + \cdots + q_\nu^1 ,$$

alors pour tout h dans $\mathbf{N}^*$

$$u_{\mathrm{Q}(hn+c)} \geqslant q_1^1 r^{\nu-1} r_1^{hn} + \cdots + q_\nu^1 r_1^{hn}$$

et d'après la première remarque

$$\sum_{m<\mathrm{Q}(hn+c)} \chi(\{u_m.\xi\}) \geqslant \sum_{m<n} \varphi_1(m) = \psi_1(n).$$

On en déduit que

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Q}(hn+c)} \sum_{m<\mathrm{Q}(hn+c)} \chi(\{u_m.\xi\}) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\psi_1(n)}{\psi(ahn+ac+b)} = \frac{1}{\mathrm{C}.h^\nu}$$

avec $\mathrm{C} = g_1^1 \ldots g_\nu^1 a^\nu \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} \frac{1}{g_1^p \ldots g_\nu^p} \in \mathbf{R}^{+*}$.

4) Si $(u_n.\xi)$ était équirépartie modulo un, on aurait

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n<\mathrm{N}} \chi(\{u_n.\xi\}) = q.r^{1-h} .$$

et il suffit donc de choisir h assez grand pour que $\frac{1}{\mathrm{C}.h^\nu} > q.r^{1-h}$ de façon à aboutir à une contradiction.

C.Q.F.D.

Pour toute suite u reconnaissable par un automate fini, posons

$$\mathrm{V}(\mathrm{N}) = \mathrm{Card}\,\{n<\mathrm{N};\ n \in u\}.$$

Les lemmes 1 et 2 nous permettent de déduire du théorème 2 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite u soit exactement $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ est que :

$$\mathrm{V}(\mathrm{N}) \approx (\log \mathrm{N})^\beta \mathrm{N}^\theta \quad \text{avec} \quad (\beta,\theta) \in \mathbf{N} \times]0,1].$$

THÉORÈME 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un automate fini soit exactement* $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ *est que cette suite n'ait pas une croissance de type exponentiel.*

Exemple 8. — Soit $m_0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots$ la suite de Morse et soit $b_0 < b_1 < \ldots < b_n < \ldots$ la suite de Baum-Sweet. Alors l'ensemble normal associé à la suite $(m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est exactement $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

En effet soit

$$f(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}^{m_{b_n}} \text{ la série formelle associée à la suite } (m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}};$$

on a

$$f(\mathrm{X}) = \sum_{v(\mathrm{rg}(n))=b} \chi(n)\mathrm{X}^n$$

où χ fonction indicatrice de la suite de Morse vérifie pour tout entier n

$$\begin{aligned} \chi(2n) &= \chi(n) && \text{si } n > 0 \\ \chi(2n+1) &= 1 - \chi(n) && \text{si } n \geqslant 0 \\ \chi(0) &= 0 \end{aligned}$$

et où

$$\mathrm{rg}\,(n) = \sum_{p \leqslant n} \chi(n) - 1$$

en particulier on a $\mathrm{rg}\,(2n) = n + \chi(n) - 1$ et $\mathrm{rg}\,(2n+1) = n$ ce qui nous montre que

$$\begin{aligned} f(\mathrm{X}) &= \sum_{v(n)=b} \chi(n)\,\mathrm{X}^{2n} + \mathrm{X} \sum_{v(n)=b} (1-\chi(n))\mathrm{X}^{2n} \\ &= f_1(\mathrm{X}^2) + \mathrm{X}f_2(\mathrm{X}^2) \end{aligned}$$

où $f_1(\mathrm{X})$ (resp. $f_2(\mathrm{X})$) est la série formelle associée à la suite croissante des entiers qui font partie à la fois de la suite de Baum-Sweet et de la suite de Morse (resp. qui font partie de la suite de Baum-Sweet, mais pas de la suite de Morse).

Ces deux suites étant 2-reconnaissables $f_1(\mathrm{X})$ et $f_2(\mathrm{X})$ sont deux éléments de $\mathbf{F}_2[[\mathrm{X}]]$ algébriques sur $\mathbf{F}_2(\mathrm{X})$ (cf [6]) et par conséquent $f(\mathrm{X}) = (f_1(\mathrm{X}))^2 + \mathrm{X}(f_2(\mathrm{X}))^2$ est algébrique sur $\mathbf{F}_2(\mathrm{X})$.

La suite $(m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est donc 2-reconnaissable et comme de plus $m_{b_n} \in \mathrm{O}(n^{\log_\theta 2})$ avec $\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, son ensemble normal est $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

De la même façon, on a plus généralement :

COROLLAIRE : — *Soit* $m_0 < m_1 < \ldots < m_n < \ldots$ *la suite de Morse et soit* $u_0 < u_1 < \ldots < u_n < \ldots$ *une suite reconnaissable par un 2-automate. Alors l'ensemble normal associé à la suite extraite* $(m_{u_n})_{n \in \mathbf{N}}$ *est exactement* $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ *si et seulement si la suite* u *n'a pas une croissance de type exponentiel.*

D'autre part, le théorème 3 nous montre que les exemples suivants constituent les cas typiques de suites reconnaissables par un automate fini dont l'ensemble normal est strictement inclus dans $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$:

Exemple 9 : La suite croissante des entiers de la forme 3^n ou 2.3^n $(n \in \mathbf{N})$.

Exemple 10 : La suite croissante des entiers de la forme

$$2^{n_1+n_2+1} + 2^{n_2} \quad (n_1,n_2) \in \mathbf{N}^2 .$$

Exemple 11 : La suite croissante des entiers de la forme

$$2.4^{n_1}8^{n_2} + 8^{n_2} \quad (n_1,n_2) \in \mathbf{N}^2 .$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que l'ensemble normal associé à la suite de l'exemple 9 (resp. exemple 10) est l'ensemble des nombres normaux en base 3 (resp. en base 2).

Ceci nous conduit à poser la conjecture suivante :

Conjecture. — L'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un r-automate est soit $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ soit l'ensemble des nombres normaux en base r.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. ALLOUCHE, *Théorie des nombres et automates*, Thèse d'État, 1983, Université de Bordeaux I.
[2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, 1973, Dunod.
[3] J. BERSTEL, Sur les mots sans carré définis par un morphisme, *Springer Lecture Notes in Computer Science*, 71 (1979), 16-25.
[4] J. BERSTEL, *Mots infinis. Théorie des langages et complexité des algorithmes*, Journées d'Avignon, oct. 1983.
[5] G. CHRISTOL, Ensembles presque-périodiques k-reconnaissables, *Theorical Computer Science*, 9 (1979), 141-145.

[6] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France et G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, 108 (1980), 401-418.
[7] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès-France et G. Rauzy, Spectral properties of automaton-generating sequences (communication privée).
[8] A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory*, vol. 6, n° 2 (1972), 164-192.
[9] J. Coquet, Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition, *Journ. of Number Theory*, vol. 16, n° 3 (1983), 363-375.
[10] J. Coquet et P. Liardet, A metric study involving independent sequences (à paraître).
[11] F. M. Dekking, Regularity and irregularity of sequences generated by automata. Séminaire de théorie des nombres, 1979-80, Université de Bordeaux I.
[12] S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, vol. A, 1974, Academic Press.
[13] D. Freedman, *Markov chains*, 1971, Holden-Day.
[14] F. Harary, *Graph theory*, 1969, Addison-Wesley.
[15] L. Kuipers et N. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, 1974, John Wiley and Sons.
[16] J. H. Loxton et A. J. Van Der Poorten, Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations. *J. Reine und Angew. Math.*, t. 330 (1982), 159-172.
[17] C. Mauduit, Automates finis et équirépartition modulo un, *C.R. A. S.*, Paris, t. 299, série I, n° 5 (1984), 121-123.
[18] M. Mendès-France et A. J. Van Der Poorten, Arithmetic and analytic properties of paper folding sequences, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 24 (1981), 123-131.
[19] M. Queffelec, *Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques*, Thèse d'État, 1984, Université de Paris-Nord.
[20] G. Rauzy, *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, 1976, Presses Universitaires de France.
[21] G. Rauzy, *Des mots en arithmétique. Théorie des langages et complexité des algorithmes*, Journées d'Avignon, oct. 1983.
[22] R. C. Read, *Graph theory and computing*. 1972, Academic Press.
[23] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*. 1962, Prentice-Hall.

Manuscrit reçu le 12 février 1985
révisé le 16 avril 1985.

Christian Mauduit,
Université d'Aix-Marseille II
U.E.R. Mathématique-Informatique
70, route Léon-Lachamp, Luminy
13288 Marseille Cedex 2.