

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

DIDIER ARNAL, MOUNA CHAABOUNI ET MABROUKA HFAIEDH
Formalité linéaire analytique

Tome XXVIII, n° 1 (2019), p. 129-143.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2019_6_28_1_129_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2019, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Formalité linéaire analytique ^(*)

DIDIER ARNAL ⁽¹⁾, MOUNA CHAABOUNI ⁽²⁾ ET MABROUKA HFAIEDH ⁽³⁾

RÉSUMÉ. — Dans ce papier nous étudions la restriction de la formalité de Kontsevich à la sous-algèbre des tenseurs linéaires, dans l’algèbre de Lie des tenseurs sur \mathbb{R}^d . On établit que c’est une formalité analytique.

ABSTRACT. — In this paper, we study the restriction of the Kontsevich formality to the subalgebra of the linear polyvectors in the algebra of polyvector fields on \mathbb{R}^d . We prove that this formality is an analytic map.

1. Introduction

Notons $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ l’algèbre de Lie différentielle graduée des multichamps de vecteurs munie de la différentielle nulle et du crochet de Schouten, et $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ l’algèbre de Lie différentielle graduée des opérateurs polydifférentiels munie de la différentielle de Hochschild et du crochet de Gerstenhaber.

Les éléments de degré n dans $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ sont les $(n + 1)$ -champs de vecteurs, et les éléments de degré m dans $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ sont les opérateurs $(m + 1)$ -différentiels. Dans les espaces gradués décalés $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]$ et $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]$ ce sont les $(n + 2)$ -champs de vecteurs (resp. les opérateurs $(m + 2)$ -différentiels) qui sont de degré n (resp. m).

^(*) Reçu le 8 février 2017, accepté le 15 mars 2017.

Classification Mathématique (2010) : 53D50, 53D55, 05C30.

⁽¹⁾ Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR 5584, Université de Bourgogne-Franche Comté UFR Sciences et Techniques BP 47870, F-21078 DIJON Cedex (France) — Didier.Arnal@u-bourgogne.fr

⁽²⁾ Laboratoire de Mathématiques appliquées et d’Analyse Harmonique, LR/11/ES-52, Université de Sfax, Faculté des sciences de Sfax, route de Soukra, BP 1171, 3000 SFAX (Tunisia) — mounaelloumichaabouni@gmail.com

⁽³⁾ Université de Sfax, Faculté des sciences de Sfax, route de Soukra, BP 1171, 3000 SFAX (Tunisia) — mabrouka_hfaiedh@yahoo.fr

Article proposé par Bertrand Toën.

Toute algèbre de Lie différentielle graduée est une L_∞ -algèbre. Cela signifie en particulier que les structures d'algèbres de Lie différentielles graduées sur $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ et $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ induisent des codérivations Q et Q' de degré 1 sur les cogèbres $S^+(T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1])$ et $S^+(D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1])$, vérifiant toutes deux l'équation maîtresse :

$$[Q, Q] = 0 \quad \text{et} \quad [Q', Q'] = 0.$$

Un L_∞ -morphisme de $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ vers $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ est par définition un morphisme de cogèbres

$$\mathcal{F} : S^+(T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]) \rightarrow S^+(D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1])$$

de degré 0 et commutant aux codérivations, c'est à dire vérifiant l'équation :

$$\mathcal{F} \circ Q = Q' \circ \mathcal{F}.$$

Si la restriction de \mathcal{F} à $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ est un quasi-isomorphisme de complexes de $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ dans $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$, on dira que \mathcal{F} est une formalité.

M. Kontsevich a défini dans son article [7] une formalité qui est uniquement déterminée par ses coefficients de Taylor :

$$\mathcal{F}_n : S^n(T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]) \rightarrow D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1].$$

Si les α_i sont des k_i -champs de vecteurs, alors $\mathcal{F}_n(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ est d'ordre $k_1 + \dots + k_n - 2n$ dans $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)[1]$. C'est à dire un opérateur m -différentiel, avec

$$\sum_{i=1}^n k_i = 2n + m - 2. \tag{1.1}$$

Les \mathcal{F}_n sont construits à l'aide des graphes et des poids associés à ces graphes (pour les définitions voir les parties 2 et 3).

Soit $G_{n,m}$ l'ensemble des graphes admissibles à n sommets aériens (numérotés) et m sommets terrestres. Soit Γ un graphe de $G_{n,m}$, et k_i le nombre de flèches partant du sommet aérien i dans Γ . A tout n -uplet de multi-champs de vecteurs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, tel que chaque α_i soit un k_i -champ de vecteurs, on associe un opérateur m -différentiel $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, où m est donné par la relation 1.1. L'opérateur $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dépend des dérivées des coefficients des tenseurs α_i .

L'application \mathcal{F}_n est alors donnée par la formule :

$$\mathcal{F}_n(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

où le poids w_Γ est un nombre réel dépendant uniquement de Γ .

Notons $A_{n,m}$ l'ensemble des graphes admissibles tels que sur chaque sommet aérien il arrive au plus une flèche. Dans cet article, le nombre d'éléments

de $G_{n,m}$ et de $A_{n,m}$ est d'abord majoré, puis une majoration du poids w_Γ associé à Γ est établie. Ces majorations sont des généralisations des résultats d'Andler, Dvorsky et Sahi dans [2].

Ensuite, on restreint la notion de formalité à l'espace des tenseurs linéaires c'est à dire à l'ensemble $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ des tenseurs α dont les coefficients $\alpha^{i_1 \dots i_k}$ sont des fonctions linéaires. En effet, cet espace est une sous-algèbre de $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$. On a donc une notion de formalité linéaire. La restriction $\mathcal{F}^{(1)}$ de la formalité de Kontsevich à $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ est un exemple de formalité linéaire.

On établit alors que $\mathcal{F}^{(1)}$ est analytique. Plus précisément il existe une suite $R_{n,m}$ de fonctions analytiques en 0 telle que, pour tous tenseurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tous vecteurs a_1, \dots, a_m , et x ,

$$\mathcal{F}_n^{(1)}(\alpha_1 \dots \alpha_n)(e^{a_1 x}, \dots, e^{a_m x}) = R_{n,m}(x, a_j, \alpha_i) e^{(a_1 + \dots + a_m)x}$$

2. Graphes et opérateurs

2.1. Graphes admissibles

On se place sur \mathbb{R}^d , un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ est déterminé par ses coordonnées, si a et x sont des vecteurs, on pose $ax = \sum_i a^i x^i$. Un tenseur complètement antisymétrique, ou multi-champ de vecteurs α est donné par ses coordonnées $\alpha^{r_1, \dots, r_k}(x)$, complètement antisymétriques en les r_s :

$$\alpha = \sum_{r_1, \dots, r_k} \alpha^{r_1, \dots, r_k}(x) \partial_{r_1} \wedge \dots \wedge \partial_{r_k},$$

où $\partial_r = \frac{\partial}{\partial x_r}$.

Dans cette section et la suivante, on rappelle la construction de Kontsevich d'une formalité naturelle sur \mathbb{R}^d .

DÉFINITION 2.1. — *Un graphe orienté est une paire (V_Γ, E_Γ) de deux ensembles finis ordonnés tels que E_Γ est un sous-ensemble de $V_\Gamma \times V_\Gamma$.*

Les éléments de V_Γ sont les sommets de Γ et les éléments de E_Γ sont les flèches de Γ . Si $e = (v_1, v_2) \in E_\Gamma$ est une flèche, on dit que e part de v_1 et arrive sur v_2 et on écrit $e = \overrightarrow{v_1 v_2}$.

On se restreint aux graphes admissibles, c'est à dire aux éléments des ensembles $G_{n,m}$:

DÉFINITION 2.2. — Pour chaque couple de nombres naturels (n, m) , on dit que le graphe orienté Γ appartient à $G_{n,m}$ si :

1. Γ possède $(n + m)$ sommets et $2n + m - 2$ flèches.
2. L'ensemble des sommets V_Γ est $\{1, \dots, n\} \cup \{\bar{1}, \dots, \bar{m}\}$, les sommets $1, \dots, n$ sont dits aériens, les sommets $\bar{1}, \dots, \bar{m}$ terrestres.
3. Les flèches $\overrightarrow{v_1 v_2}$ partent toutes d'un sommet aérien. Leur ordre est compatible : les flèches issues du sommet i précèdent les flèches issues du sommet $i + 1$.
4. Il n'y a pas de petites boucles : Γ n'a pas de flèche de la forme $\overrightarrow{v\bar{v}}$.
5. Il n'y a pas de flèches doubles : si $e = \overrightarrow{v_1 v_2}$ et $e' = \overrightarrow{v_1 v_2}$ sont deux flèches de Γ , alors $v_2 \neq v_2'$.

Soit $\Gamma \in G_{n,m}$ un graphe admissible. De chaque sommet aérien i , il sort k_i flèches notées : $(e_i^1, e_i^2, \dots, e_i^{k_i})$. Notons $star(i)$ l'ensemble de ces flèches. On notera $G_{n,m}(k_1, \dots, k_n)$ le sous-ensemble de $G_{n,m}$ formé des graphes tels que $|star(i)| = k_i$ pour tout i (si X est un ensemble, on note $|X|$ son cardinal).

Exemple 2.3. — L'ensemble $G_{0,2}$ a un seul élément : le graphe possédant les sommets $\bar{1}$ et $\bar{2}$ et aucune flèche.

De même $|G_{1,2}| = 5$: il y a un seul graphe sans flèche, deux avec une seule flèche et, en tenant compte de l'ordre des flèches, deux à deux flèches.

Exemple 2.4. — (voir [2]) Pour $m = 2$, et $k_i = 2$ pour tout i , Γ a n sommets aériens et deux sommets terrestres, de chaque sommet aérien sort deux flèches, pas de flèche sortant de $\bar{1}$ et $\bar{2}$. Comme il n'y a pas de boucles, ni de flèches doubles, pour chaque $star(i)$, il y a $(n + 1)$ choix pour la première flèche e_i^1 et n choix pour la deuxième flèche e_i^2 . Donc il y a $n(n + 1)$ manières de dessiner la paire de flèches partant d'un sommet i et par suite $G_{n,2}(2, \dots, 2)$ est fini de cardinal $(n(n + 1))^n$.

2.2. Majoration de $|G_{n,m}(k_1, \dots, k_n)|$

Les graphes de $G_{n,m}$ ont n sommets aériens et m sommets terrestres. Pour estimer $|G_{n,m}|$, il suffit de compter le nombre des flèches aériennes (aboutissant sur un sommet aérien) et le nombre des flèches terrestres (aboutissant

sur un sommet terrestre) possibles du graphe Γ . Soit i un sommet aérien. D'abord, on ne tient pas compte de l'ordre sur les flèches.

1. Flèches aériennes arrivant sur i

Soit aucune flèche n'arrive sur i (1 choix), soit une seule flèche aérienne arrive sur i ($n - 1 = C_{n-1}^1$ choix), soit deux flèches aériennes arrivent sur i (C_{n-1}^2 choix), ..., soit $n - 1$ flèches aériennes arrivent sur i (C_{n-1}^{n-1} choix). Il y a donc $1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$ choix possibles de flèches arrivant sur i .

2. Flèches terrestres issues du point i

Soit il n'y a aucune flèche terrestre (1 choix), soit il y a une seule flèche terrestre (C_m^1 choix), soit deux flèches terrestres (C_m^2 choix), ..., soit m flèches terrestres (C_m^m choix).

Donc il y a : $1 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m$ choix possibles de flèches terrestres issues du point i .

Donc, sans tenir compte de leur ordre, il y a 2^{n-1+m} possibilités de choix de telles flèches pour chaque sommet i , ($1 \leq i \leq n$) et $(2^{n+m-1})^n$ choix de flèches au total. Il reste à fixer l'ordre compatible, parmi les $\prod_{i=1}^n k_i!$ possibilités, comme il y a une relation entre les $|star(i)|$ et le nombre des flèches énumérées ci-dessus, on n'obtient qu'une majoration :

LEMME 2.5. — *Le nombre total $|G_{n,m}(k_1, \dots, k_n)|$ de graphes admissibles, ayant n sommets aériens, m sommets terrestres et, pour chaque i , k_i flèches issues du sommet i est majoré par :*

$$|G_{n,m}(k_1, \dots, k_n)| \leq (2^{n+m-1})^n \prod_{i=1}^n k_i!$$

Par exemple, si $m = 2$ et $k_i = 2$ pour chaque i , comme dans [2],

$$|G_{n,2}(2, \dots, 2)| \leq 2^{n(n+2)}.$$

2.3. Majoration de $|A_{n,m}(k_1, \dots, k_n)|$

On note $A_{n,m}$ le sous ensemble des graphes admissibles de $G_{n,m}$ tels que sur chaque sommet aérien il arrive au plus une flèche, et $A_{n,m}(k_1, \dots, k_n)$

l'ensemble des graphes de $A_{n,m}$ tels que $|star(i)| = k_i$ pour tout i .

LEMME 2.6. — *On a la majoration :*

$$|A_{n,m}(k_1, \dots, k_n)| \leq (2^m n)^n \prod_{i=1}^n k_i! \leq (2^m e)^n n! \prod_{i=1}^n k_i!.$$

Preuve. — Pour décrire un graphe Γ de $A_{n,m}$, il suffit de regarder les différentes situations pour chaque sommet aérien i .

1. Flèches aériennes arrivant sur i

En comptant le cas où il n'y a aucune flèche aboutissant à i , il y a n choix possibles.

2. Flèches terrestres issues du point i

Comme ci-dessus, le sommet i est relié soit à aucun sommet terrestre, soit 1, etc. . . Il y a $1 + C_m^1 + \dots + C_m^m = 2^m$ cas possibles.

Alors il y a au plus $2^m n$ choix pour chaque sommet i , et en tenant compte de l'orientation de l'ensemble des flèches sortant de chaque sommet, on obtient le résultat

$$|A_{n,m}(k_1, \dots, k_n)| \leq (2^m n)^n \prod_{i=1}^n k_i!$$

D'autre part on sait que : $n^n \leq n!e^n$, d'où

$$|A_{n,m}(k_1, \dots, k_n)| \leq (2^m e)^n n! \prod_{i=1}^n k_i!.$$

□

2.4. L'opérateur $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

A chaque graphe admissible Γ de $G_{n,m}(k_1, \dots, k_n)$, on associe un opérateur multi-différentiel $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nul sauf si chaque α_i est un k_i -tenseur.

Notons $|k| = \sum_i k_i$, et $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{|k|}\}$ l'ensemble des flèches de Γ , rangées dans leur ordre. A la $s^{i\grave{e}me}$ flèche \vec{e}_s , on associe un indice r_s , compris entre 1 et d .

Soit a un sommet aérien ou terrestre de Γ . Si les flèches arrivant sur a sont $\{\vec{e}_{s_1}, \dots, \vec{e}_{s_{\ell_a}}\}$ (l'ordre n'importe pas), on leur associe l'opérateur différentiel :

$$D_a = D_a(r_s) = \partial_{r_{s_1}} \dots \partial_{r_{s_{\ell_a}}}.$$

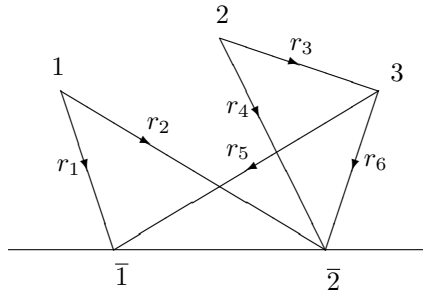
D'autre part, si on pose $K_i = k_1 + \dots + k_{i-1}$ pour tout $i \geq 2$ et $K_1 = 0$, les flèches issues du sommet i sont (dans leur ordre) $\{\overrightarrow{e_{K_i+1}}, \dots, \overrightarrow{e_{K_i+k_i}}\}$.

Dans le cas où chaque α_i est un k_i -tenseur, $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un opérateur m -différentiel sur \mathbb{R}^d dont la valeur sur les fonctions f_1, \dots, f_m est :

$$B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(f_1, \dots, f_m) = \sum_{1 \leq r_s \leq d} \prod_i D_i \alpha_i^{r_{K_i+1}, \dots, r_{K_i+k_i}} \prod_j D_j^- f_j. \quad (2.1)$$

Dans cette formule, les $\alpha_i^{r_{K_i+1}, \dots, r_{K_i+k_i}}$ sont les composantes du tenseur α_i .

Exemple 2.7. — (voir [4]) Prenons $n = 3$, $m = 2$ et $k_i = 2$ pour tout i , et choisissons le graphe Γ de $G_{3,2}(2, 2, 2)$ suivant, où l'ordre des flèches est fixé par celui des indices r_1, \dots, r_6 :



Le graphe Γ

L'opérateur $B_\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ correspondant à ce graphe Γ est :

$$(f_1, f_2) \mapsto \sum_{r_1, \dots, r_6} \alpha_1^{r_1 r_2} \alpha_2^{r_3 r_4} \partial_{r_3} \alpha_3^{r_5 r_6} \partial_{r_1 r_5} f_1 \partial_{r_2 r_4 r_6} f_2.$$

3. Espace de configuration et poids

Pour finir de définir la formalité de Kontsevich, il faut sommer les opérateurs $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ affectés d'un poids w_Γ .

DÉFINITION 3.1. — Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. L'espace de configuration $Conf_{n,m}$ est l'ensemble des nuages de n points p_i dans \mathcal{H} et m points réels q_j :

$$Conf_{n,m} = \{(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m) : p_i \in \mathcal{H}, q_j \in \mathbb{R}, p_i \neq p_{i'}, q_j \neq q_{j'} \text{ si } i \neq i', j \neq j'\}.$$

L'ensemble $Conf_{n,m}$ est une variété différentielle de dimension $2n + m$. Si $2n + m \geq 2$, le groupe G des transformations affines :

$$G = \{z \mapsto az + b : a > 0, b \in \mathbb{R}\}$$

agit librement sur $Conf_{n,m}$. L'espace quotient $C_{n,m} = Conf_{n,m}/G$ est une variété de dimension $2n + m - 2$.

Les espaces $Conf_{n,m}$ et $C_{n,m}$ ont $m!$ composantes connexes, on note $Conf_{n,m}^+$ resp $C_{n,m}^+$ les composantes telles que $q_1 < \dots < q_m$.

On plonge l'espace de configuration $C_{n,m}^+$ dans une variété compacte de la façon suivante. Chaque fois que l'on prend deux points a et b de $\overline{\mathcal{H}}$, on leur associe l'angle $Arg(b - a)$, à chaque triplet de points (a, b, c) de \mathbb{R} , on associe l'élément $[a - b, b - c, c - a]$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ qu'ils définissent. On définit ainsi une application G -invariante :

$$\tilde{\Phi} : Conf_{n,m}^+ \rightarrow K_{n,m} = \mathbb{T}^{(2n+m)(2n+m-1)} \times (\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))^{(2n+m)(2n+m-1)(2n+m-2)}$$

En faisant le quotient par le groupe G , on obtient un plongement Φ de $C_{n,m}^+$ dans une variété compacte :

$$\Phi : C_{n,m}^+ \rightarrow K_{n,m}.$$

On définit le compactifié $\overline{C}_{n,m}^+$ de l'espace $C_{n,m}^+$ comme étant la fermeture dans $K_{n,m}$ de $\Phi(C_{n,m}^+)$. (Pour plus de détails voir [5]).

Exemple 3.2. — Puisqu'on peut par l'action de G , amener p_1 en $\sqrt{-1}$, ou q_1 en 0 et q_2 en ± 1 , on trouve, en petites dimensions :

$$Conf_{1,0} = \mathcal{H}, \quad C_{1,0} \simeq \{\sqrt{-1}\}, \quad C_{0,2} = Conf_{0,2}/G \simeq \{-1, 1\}.$$

De même, en posant $t = q_2q_3$ dans la paramétrisation de $C_{0,3}$,

$$C_{1,1} = Conf_{1,1}/G \simeq \mathbb{R}, \quad C_{0,3} \simeq \{\pm 1\} \times (]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[).$$

De même :

$$C_{2,0} = Conf_{2,0}/G \simeq \mathcal{H} \setminus \{\sqrt{-1}\}, \quad C_{1,2} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

3.1. Définition du poids

Le poids w_Γ associé à $\Gamma \in G_{n,m}$ est défini par l'intégrale d'une forme sur l'espace de configuration $C_{n,m}^+$ (voir [7, 3]).

Si c est un point de $C_{n,m}^+$, on trace le graphe Γ sur un représentant $(p_i, q_j) \in \text{Conf}_{n,m}^+$ de c , en plaçant le sommet i en p_i , le sommet \bar{j} en q_j et la flèche $\vec{i i'}$ (resp. $\vec{i \bar{j}}$) est dessinée comme l'arc du cercle passant par ces deux points et centré sur l'axe réel.

A chacune de ces flèches e , on associe l'angle Φ_e entre e et l'axe vertical issu de p_i vers $+\infty$:

$$\Phi_e(p, q) = \text{Arg} \left(\frac{p_{i'} - p_i}{p_{i'} - \bar{p}_i} \right), \quad \text{ou} \quad \text{Arg} \left(\frac{q_j - p_i}{q_j - \bar{p}_i} \right)$$

Cet angle ne dépend pas du choix du représentant de c , on a donc une application $\Phi_\Gamma : C_{n,m}^+ \rightarrow \mathbb{T}^{|k|}$, $\Phi_\Gamma(c) = (\Phi_{e_1}(c), \dots, \Phi_{e_{|k|}}(c))$, et une $|k|$ -forme sur $C_{n,m}^+$:

$$\omega_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{|k|}} \frac{1}{k!} d\Phi_{e_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{e_{|k|}},$$

où $k! = \prod_{i=1}^n k_i!$. Le poids w_Γ est l'intégrale de cette forme sur la variété $C_{n,m}^+$:

$$w_\Gamma = \int_{C_{n,m}^+} \omega_\Gamma.$$

On a donc $w_\Gamma = 0$ sauf si les k_i satisfont la relation 1.1. Dans ce cas, on montre que w_Γ est fini.

3.2. Majoration du Poids $|w_\Gamma|$

Le poids w_Γ a été majoré par Andler, Dvorsky et Sahi dans [2] si $m = 2$. De même, on a pour les graphes de $A_{n,m}$:

LEMME 3.3. — *Pour tout graphe Γ de $A_{n,m}(k_1, \dots, k_n)$, on a*

$$|w_\Gamma| \leq \frac{2^{2n+m-2}}{k!}.$$

Preuve. — On ne considère que le cas $|k| = 2n + m - 2$, et $n > 0$, le cas $n = 0$ étant trivial. On a vu que ω_Γ est l'image réciproque de la forme volume du tore \mathbb{T}^{2n+m-2} sous l'application $\Phi_\Gamma : C_{n,m}^+ \rightarrow \mathbb{T}^{2n+m-2}$. Un point c de $C_{n,m}^+$ est donné par son représentant (p_i, q_j) tel que $p_1 = \sqrt{-1}$. Si $\phi = (\phi_s) \in \Phi(C_{n,m}^+)$, ses antécédents sont les c tels que pour chaque

s , si $e_s = \overrightarrow{ii'}$ (resp. $e_s = \overrightarrow{ij}$), $(p_i, p_{i'})$ (resp. (p_i, q_j)) sont les solutions des équations quadratiques :

$$(z' - z)(\overline{z'} - \overline{z}) = e^{2\sqrt{-1}\phi_s}(\overline{z'} - \overline{z})(z' - \overline{z}) \quad (3.1)$$

Il y a ainsi $2n + m - 2$ équations quadratiques dans \mathbb{C} de type 3.1 dont les variables sont $p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m$, ou les $2n + m - 2$ variables réelles $(\Re(p_i), \Im(p_i), q_j, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$.

Génériquement, chaque équation 3.1 a deux racines, chaque point ϕ d'un ouvert dense de $\Phi_\Gamma(C_{n,m}^+)$ a donc 2^{2n+m-2} antécédents. Donc si V est le volume du tore \mathbb{T}^{2n+m-2} , on a :

$$|w_\Gamma| \leq \frac{2^{2n+m-2} V}{(2\pi)^{2n+m-2} k!} \leq \frac{2^{2n+m-2}}{k!}.$$

□

4. Formalité

4.1. La formalité de Kontsevich

L'espace $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ possède une structure d'algèbre de Lie graduée différentielle lorsqu'on le munit du degré $\deg(\alpha) = k - 1$ si α est un k -tenseur, de la différentielle nulle et du crochet de Schouten :

$$\begin{aligned} (-1)^{(k-1)(k'-1)}[\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k, \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{k'}] &= \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [\xi_i, \eta_j] \wedge \xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_i} \wedge \dots \wedge \xi_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\eta_j} \wedge \dots \wedge \eta_{k'}. \end{aligned}$$

(La notation $\widehat{\xi_i}$ signifie que le terme ξ_i est omis.)

De même l'espace $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée lorsqu'on le munit du degré $\deg(D) = m - 1$ si D est un opérateur m -différentiel, de la différentielle donnée par l'opérateur de cobord de Hochschild :

$$\begin{aligned} (-1)^{m+1} dD(f_0, \dots, f_m) &= f_0 D(f_1, \dots, f_m) + \\ &+ \sum_{1 \leq \ell \leq m} (-1)^\ell D(f_0, \dots, f_{\ell-1} f_\ell, \dots, f_m) + (-1)^{m+1} D(f_0, \dots, f_{m-1}) f_m, \end{aligned}$$

et du crochet de Gerstenhaber, antisymétrisé de la composition :

$$\begin{aligned} (D \circ D')(f_1, \dots, f_{m+m'-1}) &= \\ &= \sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{\ell(m'-1)} D(f_1, \dots, f_{\ell}, D'(f_{\ell+1}, \dots, f_{\ell+m'}), \dots, f_{m+m'-1}). \end{aligned}$$

Une algèbre de Lie différentielle graduée $(\mathfrak{g}, d, [,])$ est une L_{∞} -algèbre (pour cette construction, voir par exemple [1]). On considère d'abord son décalé $\mathfrak{g}[1]$, muni du degré $|x| = \deg(x) - 1$, puis l'algèbre graduée symétrique $S^+(\mathfrak{g}[1])$ avec :

$$x \cdot x' = (-1)^{|x'| |x|} x' \cdot x = \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x' & x \\ x & x' \end{smallmatrix} \right) x' \cdot x.$$

On munit cette algèbre de la déconcaténation :

$$\Delta(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ n > |I| > 0}} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_n \\ x_I x_J \end{smallmatrix} \right) x_I \otimes x_J.$$

(Si $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $x_I = x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}$, le signe est celui de la permutation $\left(\begin{smallmatrix} x_1, \dots, x_n \\ x_I x_J \end{smallmatrix} \right)$ en tenant compte des degrés des x_i). On pose alors $Q_1(x) = dx$, $Q_2(x, y) = (-1)^{\deg(x)} [x, y]$. Ces applications ont chacune un seul prolongement en des codérivations de Δ :

$$Q_1(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = \sum_i \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_i x_1 \dots x_i \dots x_n \end{smallmatrix} \right) Q_1(x_i) \cdot x_1 \cdot \dots \cdot \widehat{x}_i \cdot \dots \cdot x_n.$$

$$Q_2(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = \sum_{i < j} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_i x_j x_1 \dots \widehat{x}_i \dots \widehat{x}_j \dots x_n \end{smallmatrix} \right) Q_2(x_i, x_j) \cdot x_1 \cdot \dots \cdot \widehat{x}_i \cdot \dots \cdot \widehat{x}_j \cdot \dots \cdot x_n.$$

Alors $Q = Q_1 + Q_2$ est une codérivation de Δ qui satisfait l'équation maîtresse $[Q, Q] = 0$.

Soient $(S^+(\mathfrak{g}[1]), Q)$, $(S^+(\mathfrak{g}'[1]), Q')$ deux L_{∞} -algèbres, un morphisme \mathcal{F} de L_{∞} -algèbres entre elles est donné par une suite d'applications linéaires $\mathcal{F}_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathfrak{g}'[1]$, de degrés 0, prolongée en un morphisme des déconcaténations en posant :

$$\mathcal{F}(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_{I_1} \dots x_{I_j} \end{smallmatrix} \right) \mathcal{F}_{|I_1|}(x_{I_1}) \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_{|I_j|}(x_{I_j}),$$

et telle que $\mathcal{F} \circ Q = Q' \circ \mathcal{F}$.

Dans le cas $\mathfrak{g} = T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathfrak{g}' = D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$, cette relation se réduit à :

$$\begin{aligned} Q'_1(\mathcal{F}_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n)) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon(\alpha_1 \dots \alpha_n) Q'_2(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I) \cdot \mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{k \neq \ell} \varepsilon \left(\alpha_{\{k, \ell\}}, \alpha_{\{1, \dots, k, \ell, \dots, n\}} \right) \mathcal{F}_{n-1}(Q_2(\alpha_k \cdot \alpha_\ell) \cdot \alpha_1 \cdots \widehat{\alpha}_k \cdots \widehat{\alpha}_\ell \cdots \alpha_n). \end{aligned}$$

DÉFINITION 4.1. — Soit $\mathfrak{g} = T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathfrak{g}' = D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$. Une formalité est un L_∞ -morphisme \mathcal{F} de $S^+(\mathfrak{g}[1])$ vers $S^+(\mathfrak{g}'[1])$ dont le terme linéaire \mathcal{F}_1 est l'identification canonique des tenseurs à des opérateurs poly-différentiels d'ordre $1, \dots, 1$:

$$\mathcal{F}_1(\alpha)(f_1, \dots, f_k) = \langle \alpha, df_1 \wedge \dots \wedge df_k \rangle.$$

Cette notion est due à M. Kontsevich qui a montré que l'application \mathcal{F} définie par :

$$\mathcal{F}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_m \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

est une formalité. En particulier, il a montré que la relation de Stokes sur les diverses formes w_Γ définies sur chaque $C_{n,m}^+$ et les faces de son bord implique que \mathcal{F} est un L_∞ -morphisme (voir [7, 3]).

4.2. Formalité linéaire analytique

Dans toute la suite on se restreint à l'espace $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ des tenseurs linéaires, plus précisément les coefficients des tenseurs α sont des fonctions linéaires. Pour tous r_1, \dots, r_k , il existe des vecteurs α^{r_1, \dots, r_k} de \mathbb{R}^d tels que :

$$\alpha(x) = \sum_{r_1, \dots, r_k} (\alpha^{r_1, \dots, r_k} x) \partial_{r_1} \wedge \dots \wedge \partial_{r_k}.$$

Par définition du crochet de Schouten, $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ est une sous algèbre de Lie différentielle graduée de $T_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$. On a donc une notion de L_∞ -morphisme et de formalité linéaire.

DÉFINITION 4.2. — On dira qu'un L_∞ -morphisme $\mathcal{F} = \sum_n \mathcal{F}_n$ de $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ dans $D_{\text{poly}}(\mathbb{R}^d)$ est une formalité linéaire si \mathcal{F}_1 est l'identification canonique d'un tenseur linéaire à un opérateur poly-différentiel d'ordre $1, \dots, 1$.

Bien entendu, la restriction $\mathcal{F}^{(1)}$ de la formalité de Kontsevich à $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ est une formalité linéaire.

Considérons maintenant $\mathcal{F}^{(1)}$ comme une application (non linéaire) sur $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$. Pour étudier l'analyticité de cette fonction, on se restreint à l'espace $T_k^{(1)}$ des tenseurs linéaires d'ordre au plus k . Un tel tenseur s'écrit :

$$\alpha = \sum_i \alpha_i, \quad \text{avec} \quad \text{deg}(\alpha_i) = k_i - 1 \leq k - 1.$$

On écrit alors formellement $e^\alpha - 1 = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{n!}$, et on considère l'application :

$$\alpha \mapsto \mathcal{F}^{(1)}(e^\alpha - 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mathcal{F}_n^{(1)}(\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_n}).$$

Son image $\mathcal{F}^{(1)}(e^\alpha - 1)$ est un opérateur multidifférentiel formel :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)}(e^\alpha - 1) &= \sum_m D_m(\alpha) \\ &= \sum_m \sum_{\beta_1, \dots, \beta_m} E_m(x, \alpha_i)_{\beta_1 \dots \beta_m} \partial^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \partial^{\beta_m}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

On dira que $\mathcal{F}^{(1)}$ est analytique si pour chaque m la fonction symbole $(x, \alpha_i, \xi_j) \mapsto \sum_{\beta_1, \dots, \beta_m} E_m(x, \alpha_i)_{\beta_1 \dots \beta_m} \xi_1^{\beta_1} \dots \xi_m^{\beta_m}$ de $D_m(\alpha)$ est analytique.

De façon équivalente,

DÉFINITION 4.3. — Une formalité linéaire \mathcal{F} , qu'on écrit $\mathcal{F}(e^\alpha - 1) = \sum_m D_m(\alpha)$, est dite analytique si, pour chaque k , il existe une suite de fonctions analytiques en 0 :

$$R_m : \mathbb{R}^d \times T_k^{(1)} \times (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tout $\alpha = \sum_i \alpha_i$ de $T_k^{(1)}$, pour tout (a_1, \dots, a_m) de $(\mathbb{R}^d)^m$,

$$D_m(\alpha)(e^{a_1 x}, \dots, e^{a_m x}) = R_m(x, \alpha_i, a_j) e^{(a_1 + \dots + a_m)x}.$$

Avec cette définition,

THÉORÈME 4.4. — La formalité linéaire de Kontsevich $\mathcal{F}^{(1)}$ est analytique.

Preuve. — Par définition de $A_{n,m}$, si Γ est un graphe de $G_{n,m} \setminus A_{n,m}$, l'opérateur $B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ s'annule sur $(T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d))^n$. La restriction de la formalité de Kontsevich à $T_{\text{poly}}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$ est donc :

$$\mathcal{F}_n^{(1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_m \sum_{\Gamma \in A_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Soit $\Gamma \in A_{n,m}(k_1, \dots, k_n)$, en utilisant la relation 2.1 :

$$B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(f_1, \dots, f_m) = \sum_{1 \leq r_s \leq d} \prod_i D_i \alpha_i^{r_{K_i+1}, \dots, r_{K_i+k_i}} \prod_j D_j f_j,$$

on a avec les notations de 4.1 :

$$\begin{aligned} B_\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(e^{a_1 x}, \dots, e^{a_m x}) &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_m} E_\Gamma(x, \alpha_i)_{\beta_1 \dots \beta_m} \prod_j \partial^{\beta_j} e^{a_j x} \\ &= \left(\sum_{\beta, \gamma} \sum_{s, r} \prod_i \alpha_{i, s_i}^{r_{K_i+1}, \dots, r_{K_i+k_i}} x^\gamma \prod_j a_j^{\beta_j} \right) e^{(a_1 + \dots + a_m)x} \quad (4.2) \\ &= \left(\sum_{\delta, \beta, \gamma} C_{\delta, \gamma, \beta}^\Gamma \prod_{i, r, j} (\alpha_i^r)^{\delta_{i, r}} x^\gamma a_j^{\beta_j} \right) e^{(a_1 + \dots + a_m)x}. \end{aligned}$$

Ici $\alpha_{i, s_i}^{r_{K_i+1}, \dots, r_{K_i+k_i}}$ est la coordonnée s_i du vecteur $\alpha_i^r = \alpha_i^{r_{K_i+1}, \dots, r_{K_i+k_i}}$, $\delta = (\delta_{i, r})$ est un multi-indice tel que $\sum_r \delta_{i, r} = 1$. Comme la somme dans 2.1 contient d^{2n+m-2} termes,

$$|C_{\delta, \gamma, \beta}^\Gamma| \leq d^{2n+m-2}.$$

Mais le nombre de flèches terrestres de Γ est $|\beta| = \sum_j |\beta_j|$, donc celui des flèches aériennes est $A = 2n + m - 2 - |\beta|$. Bien sûr, $|\gamma| = n - A = |\beta| + 2 - m - n$, donc le degré des monômes qui apparaissent dans 4.2 est :

$$n + |\gamma| + \sum_j |\beta_j| = 2n + m - 2 + 2|\gamma| \geq 2n + m - 2.$$

Donc $e^{-x} \sum a_j D_m(\alpha)(e^{a_1 x}, \dots, e^{a_m x})$ est une série entière en les coordonnées des vecteurs α_i^r , x et a_j dont le coefficient du terme

$$\prod_{i, r, j} (\alpha_i^r)^{\delta_{i, r}} x^\gamma a_j^{\beta_j}$$

est, si on pose $n = \sum |\delta_{i, r}|$, et si chaque α_i est un k_i -tenseur,

$$C_{\delta, \gamma, \beta} = \frac{1}{n!} \sum_{\Gamma \in A_{n,m}(k)} w_\Gamma C_{\delta, \gamma, \beta}^\Gamma.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 |C_{\delta,\gamma,\beta}| &\leq \frac{1}{n!} |A_{n,m}(k)| \sup_{\Gamma \in A_{n,m}(k)} |w_\Gamma| |C_{\delta,\gamma,\beta}^\Gamma| \\
 &\leq \frac{1}{n!} (2^m e)^n n! \prod_i k_i! \frac{2^{2n+m-2}}{\prod_i k_i!} d^{2n+m-2} \\
 &\leq (2^{m+1} ed)^{2m+n-2} \leq (2^{m+1} ed)^{\sum |\delta_i, r| + |\gamma| + \sum_j |\beta_j|}.
 \end{aligned}$$

Finalement, $R_m(x, \alpha_i, a_j)$ est la somme de cette série entière. Si on pose $|x| = \sup_s |x_s|$, $|\alpha_i| = \sup_{r_1, \dots, r_{k_i}, s} |\alpha_{i,s}^{r_1, \dots, r_{k_i}}|$, et $\|(x, \alpha_i, a_j)\| = \sup\{|x|, |\alpha_i|, |a_j|\}$,

R_m est analytique sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2^{m+1} ed}$ (voir par exemple [6]).

□

Bibliographie

- [1] W. ALOULOU, D. ARNAL & R. CHATBOURI, « Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologie de Chevalley-Harrison », *Bull. Sci. Math.* **133** (2009), n° 1, p. 1-50.
- [2] M. ANDLER, A. DVORSKY & S. SAHI, « Kontsevich quantization and invariant distributions on Lie groups », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **35** (2002), n° 3, p. 371-390.
- [3] D. ARNAL, D. MANCHON & M. MASMOUDI, « Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich », *Pac. J. Math.* **203** (2002), n° 1, p. 23-66.
- [4] N. BEN AMAR, M. CHAABOUNI & M. HFAIEDH, « Kontsevich deformation quantization on Lie algebras », *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)* **10** (2007), n° 2, p. 365-379.
- [5] W. FULTON & R. MACPHERSON, « A compactification of configuration spaces », *Ann. Math.* **139** (1994), n° 1, p. 183-225.
- [6] R. C. GUNNING & H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [7] M. KONTSEVICH, « Deformation quantization of Poisson manifolds », *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), n° 3, p. 157-216.