

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

FRANÇOIS DELGOVE, NICOLAS RETAILLEAU

*Sur la classification des hexagones hyperboliques à angles droits en dimension 5*

Tome XXIII, n° 5 (2014), p. 1049-1061.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2014\\_6\\_23\\_5\\_1049\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2014_6_23_5_1049_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## Sur la classification des hexagones hyperboliques à angles droits en dimension 5

FRANÇOIS DELGOVE<sup>(1)</sup>, NICOLAS RETAILLEAU<sup>(2)</sup>

---

**ABSTRACT.** — The aim of this paper is to give a classification of the right-angled hyperbolic hexagons in the real hyperbolic space  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5$ , by using a quaternionic distance between geodesics in  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5$ .

**RÉSUMÉ.** — Le but de cet article est d'énoncer un théorème de classification des hexagones hyperboliques à angles droits dans l'espace hyperbolique réel de dimension 5, en utilisant une distance quaternionique entre les géodésiques.

---

### Introduction

Un *hexagone à angles droits* (orienté) de l'espace hyperbolique réel  $\mathcal{H}^n$  est un sextuplet  $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$  de géodésiques orientées de  $\mathcal{H}^n$  de dimension  $n \geq 2$  telles que  $S_{i-1} \neq S_{i+1}$  et que  $S_i$  et  $S_{i+1}$  soient orthogonales pour  $i$  modulo 6. Le groupe des isométries préservant l'orientation de  $\mathcal{H}^n$  agit diagonalement sur l'ensemble des hexagones à angles droits de  $\mathcal{H}^n$ . Si  $n = 2, 3$ , la classification des hexagones à angles droits modulo isométrie préservant l'orientation est bien connue, voir par exemple [5] et [6]. Le but de cet article est de donner une telle classification pour  $n = 5$  à l'aide des quaternions.

Soit  $\mathbb{H}$  le corps des quaternions de Hamilton, muni de sa structure euclidienne usuelle. Son groupe multiplicatif  $\mathbb{H}^\times$  agit par conjugaisons simultanées sur  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ , par  $x \cdot (a, b, c) = (xax^{-1}, xbx^{-1}, xcx^{-1})$ . Le *birapport*

---

<sup>(1)</sup> 73, rue de Versailles, 91400, Orsay, France  
francois.delgove@u-psud.fr

<sup>(2)</sup> 46, rue Aristide Briand, 90300, Offemont, France  
nicolas.retailleau@u-psud.fr

de quatre éléments  $a, b, c, d$  deux à deux distincts de  $\mathbb{H}$  est  $[a, b, c, d] = (c - b)^{-1}(c - a)(d - a)^{-1}(d - b)$ .

Dans le modèle du demi-espace supérieur  $\mathcal{H}^5 = \{(z, t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R} : t > 0\}$  muni de la métrique riemannienne  $ds^2 = \frac{ds_{\mathbb{H}}^2 + dt^2}{t^2}$ , considérons trois géodésiques orientées  $\alpha, \beta, \gamma$  d'extrémités deux à deux distinctes  $\alpha^-, \alpha^+, \beta^-, \beta^+, \gamma^+, \gamma^-$ , telles que  $\gamma$  soit orthogonale à  $\alpha$  et  $\beta$  et orientée de  $\alpha$  vers  $\beta$  si  $\gamma \cap \alpha \neq \gamma \cap \beta$ . On peut alors définir la *distance quaternionique* entre les deux géodésiques orientées  $\alpha$  et  $\beta$  par  $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = [\alpha^+, \beta^+, \gamma^+, \gamma^-]$ . La norme de ce quaternion décrit la longueur du segment perpendiculaire commun à  $\alpha, \beta$  et son quotient par sa norme la rotation nécessaire pour passer de  $\alpha$  à  $\beta$  après translation parallèle le long de ce segment, par les liens bien connus entre le groupe des quaternions de norme 1 et  $\text{SO}(4)$  (voir par exemple le chapitre 8 de [13]).

Le but de cet article est de démontrer le théorème de classification suivant, disant que les hexagones hyperboliques à angles droits en dimension 5 sont déterminés par les longueurs quaternioniques de trois côtés consécutifs, comme c'est le cas en dimension 3 avec les longueurs complexes dans [6].

**THÉORÈME.** — *L'application qui au sextuplet de géodésiques  $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$  associe  $(\Delta(S_6, S_2, S_1), \Delta(S_1, S_3, S_2), \Delta(S_2, S_4, S_3))$  induit une bijection de l'ensemble des hexagones à angles droits non dégénérés de  $\mathcal{H}^5$ , modulo isométries préservant l'orientation, sur l'ensemble des triplets de quaternions non dégénérés, modulo conjugaisons simultanées.*

Nous définirons les termes “non dégénérés” plus tard (dans le cas des hexagones, il s'agit de demander que les points d'intersection avec  $S_i$  de  $S_{i-1}$  et  $S_{i+1}$  soient distincts pour tout  $i$  modulo 6 et que  $S_i$  soit orientée de  $S_{i-1}$  vers  $S_{i+1}$ ). Dans une première partie, nous commencerons par rappeler et définir les outils algébriques et géométriques nécessaires à notre étude et dans une seconde partie, nous démontrerons le théorème de classification énoncé plus haut.

Avant de commencer, nous tenons à remercier Frédéric Paulin pour ses conseils et les améliorations qu'il a apportées à cet article. Nous remercions aussi le rapporteur pour ses corrections fort utiles.

## 1. Outils algébriques et géométriques

### 1.1. Quaternions et homographies quaternioniques

Dans cet article, nous noterons  $\mathbb{H}$  le corps des quaternions de Hamilton. Si  $q \in \mathbb{H}$ , nous noterons  $\bar{q}$  son conjugué,  $\mathbf{n}(q) = q\bar{q}$  sa norme et  $\text{tr}(q) = q + \bar{q}$  sa trace. Soit  $\widehat{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$  le compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{H}$ , les actions par translations à gauche et à droite de  $\mathbb{H}$  sur lui-même s'étendent continûment de manière unique à  $\widehat{\mathbb{H}}$ . Notons  $M_2(\mathbb{H})$  l'anneau des matrices 2-2 à coefficients dans  $\mathbb{H}$  et  $\text{GL}_2(\mathbb{H})$  le sous-groupe des matrices inversibles de  $M_2(\mathbb{H})$ .

Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H})$ , on définit le déterminant de Dieudonné de A par

$$\Delta(A) = (\mathbf{n}(a)\mathbf{n}(d) + \mathbf{n}(b)\mathbf{n}(c) - \text{tr}(a\bar{c}\bar{d}b))^{1/2},$$

et on a les deux propriétés suivantes :

- (1)  $\Delta(A) \neq 0$  si et seulement si A inversible,
- (2)  $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ .

Concernant la théorie du déterminant de Dieudonné, on pourra consulter [4] et [2]. On peut alors définir le sous-groupe fermé  $\text{SL}_2(\mathbb{H})$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{H})$  comme le noyau du morphisme continu  $\Delta : \text{GL}_2(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , c'est-à-dire le groupe topologique des matrices de déterminant de Dieudonné égal à 1. Par la suite, nous aurons besoin du lemme suivant (nous renvoyons au lemme 17 de [12] pour une démonstration) :

LEMME 1.1. — *Le groupe  $\text{SL}_2(\mathbb{H})$  est engendré par les matrices de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $\theta \in \mathbb{H}$  vérifie  $\mathbf{n}(\theta) \leq 1$ .

Pour terminer avec les notations, dans cet article, nous utiliserons le modèle du demi-espace supérieur  $\mathcal{H}^5 = \{(z, t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R} : t > 0\}$  muni de la métrique riemannienne  $ds^2 = \frac{ds_{\mathbb{H}}^2 + dt^2}{t^2}$ , dont le bord à l'infini est  $\widehat{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ .

L'action par homographies de  $\text{SL}_2(\mathbb{H})$  sur  $\widehat{\mathbb{H}}$  est définie en posant, pour tous les  $z \in \widehat{\mathbb{H}}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{H})$ ,

$$A \cdot z = \begin{cases} ac^{-1} & \text{si } z = \infty \\ \infty & \text{si } z = -c^{-1}d \\ (az + b)(cz + d)^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est bien connu que l'application  $(A, z) \mapsto A \cdot z$  est une action, et que cette action est transitive sur les triplets de points deux à deux distincts de  $\widehat{\mathbb{H}}$  (voir par exemple [8] et [10]). Pour toute matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$  et tout élément  $(z, t) \in \mathcal{H}^5$ , posons

$$A \cdot (z, t) = \left( \frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2}{\mathfrak{n}(cz + d) + \mathfrak{n}(c)t^2}, \frac{t}{\mathfrak{n}(cz + d) + \mathfrak{n}(c)t^2} \right).$$

Par exemple par le lemme 6.6 de [11], l'application  $(A, (z, t)) \mapsto A \cdot (z, t)$ , dite extension de Poincaré, est une action isométrique du groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$  sur  $\mathcal{H}^5$ , qui s'étend continûment à  $\widehat{\mathbb{H}}$  par l'action par homographies. De plus, cette action induit un isomorphisme de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{H})/\{\pm Id\}$  sur le groupe des isométries préservant l'orientation de  $\mathcal{H}^5$ .

## 1.2. Le birapport quaternionique

DÉFINITION 1.2. — *Le birapport de quatre points  $a, b, c, d \in \mathbb{H}$  deux à deux distincts est*

$$[a, b, c, d] = (c - b)^{-1}(c - a)(d - a)^{-1}(d - b).$$

Il s'étend continûment, de manière unique, aux quadruplets  $(a, b, c, d)$  de points deux à deux distincts de  $\widehat{\mathbb{H}}$  tels que  $b \neq \infty$ , en posant

$$[\infty, b, c, d] = (c - b)^{-1}(d - b),$$

$$[a, b, \infty, d] = (d - a)^{-1}(d - b),$$

$$[a, b, c, \infty] = (c - b)^{-1}(c - a).$$

Mais par contre (contrairement à ce qui est affirmé en fin de page 1045 de [7]), le birapport  $[a, b, c, d]$  pour  $a, c, d$  fixés deux à deux distincts dans  $\widehat{\mathbb{H}}$  n'a pas de limite quand  $b$  tend vers  $\infty$ , car l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $[a, b, c, d]$  est alors exactement l'ensemble des conjugués  $u^{-1}(c - a)(d - a)^{-1}u$  de  $(c - a)(d - a)^{-1}$ , où  $u \in \mathbb{H}^\times$ . Nous poserons alors

$$[a, \infty, c, d] = (c - a)(d - a)^{-1}.$$

Sur la classification des hexagones hyperboliques à angles droits en dimension 5

*Remarque.* — On remarque que le birapport est à valeur dans  $\mathbb{H}^*$ .

On pourra consulter [7] au sujet du birapport quaternionique où l'on peut trouver une autre démonstration de la proposition suivante.

PROPOSITION 1.3. — Soit  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ , pour  $a, b, c, d$  deux à deux distincts dans  $\widehat{\mathbb{H}}$ , nous avons

$$[A \cdot a, A \cdot b, A \cdot c, A \cdot d] = \begin{cases} (\gamma b + \delta)[a, b, c, d](\gamma b + \delta)^{-1} & \text{si } \gamma b + \delta \neq 0 \\ [a, b, c, d] & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* — Commençons par montrer le résultat pour les matrices qui engendrent  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$  données par le lemme 1.1 :

- (1) Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $a, b, c, d \in \mathbb{H}$  deux deux à deux distincts, on a alors, pour tous les  $u, v \in \mathbb{H}^*$  distincts,

$$A \cdot u - A \cdot v = v^{-1} - u^{-1} = u^{-1}(u - v)v^{-1},$$

On obtient alors en étudiant les cas suivants : si les 4 points sont dans  $\mathbb{H}^*$ , si l'un est nul, si l'un est égal à l'infini et si deux points sont égaux respectivement à l'infini et zéro.

$$[A \cdot a, A \cdot b, A \cdot c, A \cdot d] = \begin{cases} b[a, b, c, d]b^{-1} & \text{si } b \neq 0 \\ [a, b, c, d] & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui est la propriété demandée.

- (2) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on a alors, pour tous les  $u, v \in \mathbb{H}$  distincts

$$A \cdot u - A \cdot v = u - v,$$

et on obtient bien pour  $a, b, c, d \in \mathbb{H}$  deux à deux distincts

$$[A \cdot a, A \cdot b, A \cdot c, A \cdot d] = [a, b, c, d].$$

Le résultat général s'en déduit par récurrence sur la longueur de l'écriture d'un élément de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$  comme produit des matrices qui engendrent  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$ .  $\square$

COROLLAIRE 1.4. — Le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H})$  préserve les birapports réels et la norme des birapports.

*Démonstration.* — Il suffit de se souvenir que  $\mathbf{n}(xy) = \mathbf{n}(x)\mathbf{n}(y)$  et que le centre de  $\mathbb{H}$  est  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### 1.3. Racine carrée d'un quaternion

Nous rappelons un résultat sur les racines carrées d'un quaternion, qui servira par la suite (voir par exemple [9]).

PROPOSITION 1.5. — *Soit  $q \in \mathbb{H}$ , il existe  $z \in \mathbb{H}$  tel que  $z^2 = q$  et tout tel élément  $z$  est appelé une racine carrée de  $q$ . De plus, si on a  $q \notin ]-\infty, 0]$ , il y a exactement deux racines carrées de  $q$ , qui sont opposées. Si  $q \in \mathbb{R}_- = ]-\infty, 0[$ , il existe une infinité non dénombrable de racines carrées.*

### 1.4. Propriétés des géodésiques dans $\mathcal{H}^5$

Par géodésique de  $\mathcal{H}^5$ , nous entendons une application isométrique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{H}^5$ . Nous appellerons arc géodésique la restriction d'une géodésique à un sous-intervalle compact de  $\mathbb{R}$ .

Rappelons (voir par exemple [1] et [3]) que les géodésiques de  $\mathcal{H}^5$  sont les demi-cercles, contenus dans le demi-espace supérieur, orthogonaux à  $\mathbb{H} \times \{0\}$ , dont le centre est sur  $\mathbb{H} \times \{0\}$ , et les demi-droites verticales. Nous noterons  $]a, b[$  un tel demi-cercle, où  $a$  et  $b$  sont les points d'intersection du demi-cercle avec  $\mathbb{H} \times \{0\}$  et  $]a, \infty[$  les demi-droites verticales où  $a$  est le point d'intersection de la demi-droite verticale avec  $\mathbb{H} \times \{0\}$ . Rappelons que l'intersection entre deux géodésiques d'images distinctes est soit vide soit réduite à un point, et que pour toute géodésique  $]a, b[$  de  $\mathcal{H}^5$ , il existe une isométrie préservant l'orientation  $\omega$  de  $\mathcal{H}^5$  telle que  $\omega(]a, b[) = ]0, \infty[$ . Le résultat suivant étend le cas bien connu des dimensions 2 et 3.

LEMME 1.6. — *Soient  $a, b, c, d \in \widehat{\mathbb{H}}$  deux à deux distincts, alors les deux géodésiques  $]a, b[$  et  $]c, d[$  sont orthogonales si et seulement si  $[a, b, c, d] = -1$ .*

*Démonstration.* — Considérons deux géodésiques  $]a, b[$  et  $]c, d[$  d'extrémités deux à deux distinctes, nous pouvons toujours supposer à isométries près que  $]a, b[ = ]0, \infty[$  et  $]c, d[ = ]1, x[$ , avec  $x \neq 1, 0, \infty$ . Dans ce cas, nous avons

$$]0, \infty, 1, x[ = x^{-1}.$$

Il s'agit donc de montrer que  $]0, \infty[$  et  $]1, x[$  sont orthogonales si et seulement si  $x = -1$ . Il est immédiat que  $]1, -1[$  et  $]0, \infty[$  sont bien orthogonales. Il reste à montrer que c'est la seule possibilité. Déjà, comme les tangentes à une demi-droite verticale sont des droites verticales, il faut que la tangente au demi-cercle soit une tangente horizontale, or la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon, ce qui impose que le centre soit l'origine, et le point d'intersection des géodésiques sera alors le point  $(0, 1)$ , ce qui nous impose maintenant  $x = -1$ .  $\square$

DÉFINITION 1.7. — Soient trois géodésiques orientées  $L$ ,  $M$  et  $N$  distinctes deux à deux, on dit que  $N$  est une perpendiculaire commune à  $L$  et  $M$  si elle est orthogonale à la fois à  $L$  et à  $M$ , et, lorsque  $L \cap N \neq M \cap N$ , si  $N$  est orientée de  $L$  vers  $M$ . On dit alors que le triplet  $(L, M, N)$  est un double pont.

Rappelons aussi que pour tout  $n \geq 3$ , étant donné quatre points  $a, b, c, d$  deux à deux distincts de  $\partial_\infty \mathcal{H}^n$ , il existe au moins une géodésique dans  $\mathcal{H}^5$  qui est une perpendiculaire commune aux géodésiques d'extrémité  $a, b$  et  $c, d$  et qu'une telle perpendiculaire commune est unique si et seulement si ces géodésiques sont disjointes. Dans le cas où  $n = 5$  et  $(a, b, c) = (0, \infty, 1)$ , nous pouvons avoir les précisions suivantes :

THÉORÈME 1.8. — Soit  $q \in \mathbb{H} - \{0, 1\}$ , les perpendiculaires communes aux géodésiques  $]0, \infty[$  et  $]1, q[$  sont de la forme  $]-\sqrt{q}, \sqrt{q}[$  où  $\sqrt{q}$  est une racine carrée de  $q$ . De plus, il y a unicité de la perpendiculaire commune si et seulement si  $q \notin \mathbb{R}_-$ .

Démonstration. — Notons  $]x, y[$  la géodésique recherchée, nous devons donc avoir  $]0, \infty, x, y[ = -1$ , ce qui donne  $x = -y$ . Ensuite, on doit aussi avoir  $]1, q, x, y[ = -1$ , ce qui nous donne

$$(x - 1)^{-1}(x - q)(x + q)^{-1}(x + 1) = -1.$$

Ceci implique que  $x$  est une fraction rationnelle en  $q$ , donc  $x$  et  $q$  commutent, ainsi les quatre termes du produit commutent. D'où

$$(x + 1)(x - q) = -(x + q)(x + 1),$$

c'est-à-dire, après développement,

$$x^2 = q.$$

Le résultat en découle, à l'aide de la proposition 1.5 pour le cas d'unicité.  $\square$

La définition suivante prolonge la notion de distance complexe définie, par exemple dans [6], pour étudier et classer les hexagones à angles droits en dimension 3.

DÉFINITION 1.9. — Soient  $L = ]a, b[$ ,  $M = ]c, d[$  et  $N = ]e, f[$  trois géodésiques orientées, telles que  $(L, M, N)$  soit un double pont. On pose alors  $\Delta(L, M, N) = [b, d, f, e]$  et on appelle  $\Delta(L, M, N)$  la distance quaternionique de  $L$  à  $M$ .



*Remarque.* — En gardant les notations de la définition précédente, on peut remarquer que ce birapport est toujours bien défini (donc à valeur dans  $\mathbb{H}^*$ ); en effet, si  $L$  et  $M$  admettent un double pont alors  $a, b, c, d$  sont deux à deux distincts et comme  $N$  est perpendiculaire à  $M$  et  $N$ , on a  $e, f$  distincts de  $a, b, c, d$ .

PROPOSITION 1.10. — *Soit  $(L, M, N)$  un double pont constitué des trois géodésiques orientées  $L = ]a, b[$ ,  $M = ]c, d[$  et  $N = ]e, f[$ . Alors on a  $\mathfrak{n}(\Delta(L, M, N)) \neq 1$  si et seulement si  $L$  et  $M$  ne se coupent pas ou de manière équivalente si et seulement si  $L \cap N \neq M \cap N$ .*

*Démonstration.* — Nous pouvons supposer que  $N = ]0, \infty[$ ,  $M = ]-1, 1[$ . Comme  $L$  doit être orthogonale à  $N$ ,  $L$  est de la forme  $]-a, a[$  avec  $a \neq 0$ , on a alors  $\Delta(L, M, N) = [a, 1, \infty, 0] = a^{-1}$ .

Supposons  $\mathfrak{n}(\Delta(L, M, N)) = \mathfrak{n}(a^{-1}) \neq 1$ . Alors  $L$  est un demi-cercle de rayon différent de 1 de centre 0, ce qui permet de conclure. Supposons, maintenant, que  $\mathfrak{n}(\Delta(L, M, N)) = \mathfrak{n}(a^{-1}) = 1$  alors  $L$  est un cercle de rayon 1 de centre 0 et on aura  $L \cap N = M \cap N = \{(0, 1)\}$ .  $\square$

DÉFINITION 1.11. — *Soit  $(L, M, N)$  un double pont, on dit qu'il est non dégénéré si  $\mathfrak{n}(\Delta(L, M, N)) \neq 1$  et dégénéré sinon.*

*Remarque.* — On remarque que  $(L, M, N)$  est non dégénéré si et seulement si on a  $L \cap M = \emptyset$ , donc si et seulement si  $N$  est l'unique perpendiculaire commune à  $L$  et à  $M$ .

On termine par un théorème qui nous sera utile pour classer les hexagones dans la partie suivante :

THÉORÈME 1.12. — *Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{H}$  distincts deux à deux, et considérons les géodésiques  $L = ]a, b[$  et  $M = ]c, d[$ , il existe alors une perpendiculaire commune  $N$  telle que le double pont  $(L, M, N)$  soit non dégénéré si et seulement si*

$$(c - b)(c - a)^{-1}(d - a)(d - b)^{-1} \notin \mathbb{R}_-.$$

*Démonstration.* — On commence par le cas où  $(a, b, c, d) = (0, \infty, 1, q)$ . Par un résultat classique de géométrie euclidienne sur l'intersection entre droites et cercles, nous avons  $q \notin \mathbb{R}_-$  si et seulement si  $L \cap M = \emptyset$ , donc par les rappels sur les géodésiques hyperboliques, si et seulement s'il existe une et une seule perpendiculaire commune  $N$  à  $L$  et à  $M$ , et donc si et seulement si  $(L, M, N)$  est un double pont non dégénéré. Pour le cas général, on se ramène au cas précédent grâce à l'action de la matrice

Sur la classification des hexagones hyperboliques à angles droits en dimension 5

$\left( \begin{array}{cc} (c-b)(c-a)^{-1} & -(c-b)(c-a)^{-1}a \\ 1 & -b \end{array} \right)$  qui envoie  $a$  sur  $0$ ,  $b$  sur  $\infty$ ,  $c$  sur  $1$  et  $d$  sur  $(c-b)(c-a)^{-1}(d-a)(d-b)^{-1}$ .  $\square$

## 2. Classification des hexagones à angles droits dans $\mathcal{H}^5$

### 2.1. Définition d'un hexagone à angles droits

DÉFINITION 2.1. — On appelle hexagone à angles droits dans  $\mathcal{H}^5$  tout sextuplet de géodésiques orientées  $\mathcal{S}=(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$  dans  $\mathcal{H}^5$  vérifiant :

- (1) pour tout  $i \pmod 6$ ,  $S_i$  est orthogonal à  $S_{i+1}$ ,
- (2) pour tout  $i \pmod 6$ ,  $S_i$  est distinct de  $S_{i+2}$ ,

et on note, pour tout  $i \pmod 6$ ,  $H_i = S_i \cap S_{i+1}$ . Le point  $H_i$  est appelé le  $i^{\text{ème}}$  sommet de l'hexagone et l'arc géodésique  $[H_i, H_{i+1}]$  est le  $i^{\text{ème}}$  côté. Nous dirons que  $\mathcal{S}$  est non-dégénéré si  $H_i \neq H_{i+1}$ , et si  $S_i$  est orienté de  $H_{i-1}$  vers  $H_i$  pour tout  $i \pmod 6$ . Par la suite, lorsque nous parlerons d'hexagones à angles droits, nous supposerons qu'ils sont toujours non dégénérés. De plus,  $(S_{i-1}, S_{i+1}, S_i)$  est un double pont et on écrira alors  $\Delta_i = \Delta(S_{i-1}, S_{i+1}, S_i)$  et  $\Delta_i = \Delta_i(\mathcal{S})$  lorsqu'il est utile de le préciser.

Par la proposition 1.10, la condition (2) est automatiquement vérifiée.

### 2.2. Théorème de classification

Pour tout triplet  $(q_1, q_2, q_3)$  de quaternions, posons

$$\begin{aligned} a &= (1 + q_1)^{-1} (1 - q_1), \\ b &= (1 - q_1)^{-1} (1 + q_1), \\ c &= q_2 (q_3 - 1) (1 + q_3)^{-1}, \\ d &= q_2 (1 + q_3) (q_3 - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

DÉFINITION 2.2 On dit que le triplet  $(q_1, q_2, q_3)$  de quaternions est non dégénéré s'il vérifie les conditions suivantes :

$$q_1, q_2, q_3 \neq 0 \tag{2.1}$$

$$\mathbf{n}(q_1), \mathbf{n}(q_2), \mathbf{n}(q_3) \neq 1 \tag{2.2}$$

$$a \neq c, a \neq d, b \neq c, b \neq d. \tag{2.3}$$

$$(c-b)(c-a)^{-1}(d-a)(d-b)^{-1} \notin \mathbb{R}_- \tag{2.4}$$

Par la suite, on notera  $\tilde{\Omega}_{\mathbb{H}}$  l'ensemble des triplets d'éléments de  $\mathbb{H}$  non dégénérés.

*Remarque.* — Les expressions de  $a, b, c, d$  sont bien définies dans  $\mathbb{H}$  si et seulement si respectivement  $q_1 \neq -1, q_1 \neq 1, q_3 \neq -1, q_3 \neq 1$ . Ces conditions sont vérifiées sous les hypothèses (1) et (2), et donc les conditions (3) et (4) sont bien définies.

**THÉORÈME 2.3.** — *Soit  $(q_1, q_2, q_3)$  un triplet non dégénéré de quaternions, alors il existe un unique hexagone  $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$  tel que*

$$S_1 = ]-1, 1[, \quad S_2 = ]0, \infty[, \quad \Delta_1 = q_1, \quad \Delta_2 = q_2, \quad \Delta_3 = q_3.$$

*Démonstration.* — Lorsque nous écrivons  $]a, b[$ , la géodésique sera orientée de  $a$  vers  $b$ . De plus, comme nous cherchons des hexagones non dégénérés, nous n'aurons pas à nous occuper de la condition (2) de la définition 2.1, elle sera automatiquement vérifiée d'après la remarque qui suit la définition 2.1.

Fixons  $S_1 = ]-1, 1[$  et  $S_2 = ]0, \infty[$ . On notera  $S_i = ]s_i^-, s_i^+[$ . À cause des relations d'orthogonalité et de double pont, on peut remarquer que pour  $i = 1, 3, 4, 6$ , on a  $s_i^\pm \neq \infty$ .

Déjà la condition (1) est nécessaire d'après la remarque qui suit la définition 1.9.

- (1) Commençons par déterminer  $S_3$ .

La géodésique  $S_3$  est orthogonale à  $S_2$  si et seulement s'il existe  $x \in \mathbb{H}^*$  tel que  $S_3 = ]-x, x[$ . Or  $\Delta_2 = [1, x, \infty, 0] = x$ . D'où  $\Delta_2 \neq 0$  et

$$S_3 = ]-\Delta_2, \Delta_2[.$$

Réciproquement  $S_3 = ]-q_2, q_2[$  est une géodésique bien définie si et seulement si  $q_2 \neq 0$ , ce qui est assuré par la condition (1). De plus  $H_1 \neq H_2$  si et seulement si  $\mathfrak{n}(q_2) \neq 1$  (voir la proposition 1.10), ce qui est assuré par la condition (2).

- (2) Déterminons  $S_6$ .

Si un tel hexagone existe, alors nous devons avoir  $\mathfrak{n}(\Delta_1) \neq 1$ , en particulier  $\Delta_1 \neq -1, 1$  (par la proposition 1.10) et  $\Delta_1 \neq 0$  (par la remarque qui suit la définition 1.9). De plus, nous devons aussi avoir  $\Delta_1 = [s_6^+, \infty, 1, -1]$ , ce qui donne après calcul en utilisant que  $\Delta_1 \neq 1$

$$s_6^+ = (1 - \Delta_1)^{-1} (1 + \Delta_1).$$

De plus, par le lemme 1.6, les géodésiques  $S_6$  et  $S_1$  sont orthogonales si et seulement si  $[s_6^-, s_6^+, -1, 1] = -1$ , ce qui donne après calcul en utilisant  $\Delta_1 \neq 0$ , si et seulement si

$$s_6^- = (1 + \Delta_1)^{-1} (1 - \Delta_1).$$

Réciproquement, étant donné  $(q_1, q_2, q_3)$  vérifiant les conditions (1) à (4), posons

$$a = (1 + q_1)^{-1} (1 - q_1),$$

$$b = (1 - q_1)^{-1} (1 + q_1).$$

La géodésique  $S_6 = ]a, b[$  est bien définie si  $a$  et  $b$  le sont, c'est-à-dire si on a  $q_1 \neq -1, 1$  et si  $a \neq b$ , c'est-à-dire, après calcul, si  $q_1 \neq 0$ . De plus  $H_6 \neq H_1$  si et seulement si  $\mathfrak{n}(q_1) \neq 1$  (par la proposition 1.10), ce qui est assuré par la condition (2).

(3) Déterminons  $S_4$ .

De même que précédemment, si un tel hexagone existe, nous devons avoir  $\Delta_3 \neq -1, 1, 0$  et que  $\Delta_3 = [\infty, s_4^+, \Delta_2, -\Delta_2]$ , ce qui donne par équivalence

$$s_4^+ = \Delta_2 (1 + \Delta_3) (\Delta_3 - 1)^{-1}.$$

De plus,  $S_3$  et  $S_4$  sont orthogonales si et seulement si  $[-\Delta_2, \Delta_2, s_4^-, s_4^+] = -1$ , c'est-à-dire si et seulement si (en utilisant le fait que  $\Delta_2, \Delta_3 \neq 0$ )

$$s_4^- = \Delta_2 (\Delta_3 - 1) (1 + \Delta_3)^{-1}.$$

Réciproquement, posons

$$c = q_2 (q_3 - 1) (1 + q_3)^{-1},$$

$$d = q_2 (1 + q_3) (q_3 - 1)^{-1}.$$

La géodésique  $S_4 = ]c, d[$  est bien définie si  $c$  et  $d$  le sont, c'est-à-dire si  $q_3 \neq -1, 1$  et si  $c \neq d$ , c'est-à-dire, après calcul,  $q_2 \neq 0$  et si  $q_3 \neq 0$ , ce qui est assuré par les conditions (1) et (2). De plus  $H_2 \neq H_3$  si et seulement si  $\mathfrak{n}(q_3) \neq 1$  (par la proposition 1.10), ce qui est assuré par la condition (2).

(4) Il ne reste plus qu'à déterminer  $S_5$ .

Pour commencer, il faut  $S_4 \neq S_6$  ce qui nous donne  $a \neq c$ ,  $a \neq d$ ,  $b \neq c$  et  $b \neq d$ , ce qui est assuré par la condition (3). Réciproquement si  $a \neq c$ ,  $a \neq d$ ,  $b \neq c$  et  $b \neq d$  alors  $S_4 \neq S_6$ . Maintenant, par le

théorème 1.12, la géodésique  $S_5$  orthogonale à  $S_4$  et  $S_6$  existe, est unique et forme un double pont avec  $S_4$  et  $S_5$  si et seulement si

$$(s_4^- - s_6^+)(s_4^- - s_6^-)^{-1}(s_4^+ - s_6^-)(s_4^+ - s_6^+)^{-1} \notin \mathbb{R}_-.$$

ce qui est exactement la condition (4), étant donné ce qui précède.

En conclusion, nous avons donc bien construit un hexagone à angles droits. De plus, le raisonnement précédent a été fait par équivalence, donc tout hexagone vérifie bien ces conditions.

Pour l'unicité, il suffit de remarquer que dans la démonstration de l'existence, à chaque étape, les solutions des équations sont uniques et on notera alors  $S(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  cet hexagone.  $\square$

Notons  $Hex_5^\pm$  l'ensemble des hexagones à angles droits orientés à isométrie conservant l'orientation près. Le groupe multiplicatif  $\mathbb{H}^\times$  agit par conjugaisons simultanées sur  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ , par  $x \cdot (a, b, c) = (xax^{-1}, xbx^{-1}, xcx^{-1})$ . Notons  $\Omega_{\mathbb{H}}$  le quotient de  $\tilde{\Omega}_{\mathbb{H}}$  par cette action. On a alors le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.4.** — *L'application suivante est une bijection entre  $\Omega_{\mathbb{H}}$  et  $Hex_5^\pm$  :*

$$f : \begin{cases} \Omega_{\mathbb{H}} & \longrightarrow & Hex_5^\pm \\ (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) & \longmapsto & S(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \end{cases}$$

*Démonstration.* — Le fait que cette application est bien définie provient du théorème précédent. La surjectivité est évidente, en effet dès qu'on a un double pont, la distance quaternionique est définie. L'injectivité est une conséquence de la proposition 1.3 et du fait que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{H})$  est isomorphe au groupe des isométries de  $\mathcal{H}^5$  préservant l'orientation.  $\square$

## Bibliographie

- [1] BEARDON (A. F.). — The geometry of discrete groups, Springer (1983).
- [2] BISI (C.) and GENTILI (G.). — Möbius transformations and the Poincaré distance in the quaternionic setting, Indiana Univ. Math. J., 350, p. 2729-2764 (2009).
- [3] BONAHON (F.). — Low-dimensional geometry : from Euclidean surfaces to hyperbolic knots, Amer. Math. Soc. (2009).
- [4] DIEUDONNÉ (J.). — Les déterminants sur un corps non commutatif, Bull. Soc. Math. France, 71, p. 27-45(1943).
- [5] FATHI (A.), LAUDENBACH (F.), and POENARU (V.). — Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque, vol. 66-67, Soc. Math. France. (1979).
- [6] FENCHEL (W.). — Elementary geometry in hyperbolic space, de Gruyter (1989).

- [7] GWYNNE (E.) and LIBINE (M.). — On a quaternionic analogue of the cross-ratio, *Adv. App. Clifford Algebra*, 22, p. 1041-1053 (2012).
- [8] HELLEGOUARCH (Y.). — Quaternionic homographies : Application to Ford hyperspheres, *Comptes-Rendus Acad. Science Canada*, 11, p. 171-176 (1989).
- [9] PARIZET (J.). — Quaternions et géométrie. Notes de cours sur Internet, [http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/parizet/Quaternions\\_A.pdf](http://www.math.unicaen.fr/lmno/semana/documents/parizet/Quaternions_A.pdf).
- [10] PARKER (J. R.). — Hyperbolic spaces, *Jyväskylä Lect. in Math.*, 2 (2008).
- [11] PAULIN (F.) and PARKKONEN (J.). — Prescribing the behaviour of geodesics in negative curvature, *Geom. & Topo.*, 14, p. 277-392 (2010).
- [12] PAULIN (F.) and PARKKONEN (J.). — On the arithmetic and geometry of binary Hamiltonian forms, *Alg. Numb. Theo.*, 7, p. 75-115 (2013).
- [13] PERRIN (D.). — *Cours d'algèbre, Ellipses* (1996).