

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

BRICE HALIMI

*Sur une application possible du concept d'homotopie  
à la théorie des modèles*

Tome XXII, n° 5 (2013), p. 1017-1043.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2013\\_6\\_22\\_5\\_1017\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2013_6_22_5_1017_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## Sur une application possible du concept d'homotopie à la théorie des modèles

BRICE HALIMI<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Cet article vise à appliquer certains concepts de la théorie moderne de l'homotopie à la théorie des modèles. En particulier, le concept d'ensemble simplicial est employé pour décrire les formules d'un langage  $L$  du premier ordre, les ensembles définissables d'une structure d'interprétation de  $L$ , et les espaces de types d'une théorie couchée dans  $L$ . On montre qu'à toute structure d'interprétation de  $L$  peut être associé un ensemble simplicial, selon une correspondance fonctorielle qui traduit plongements élémentaires en morphismes d'ensembles simpliciaux. Pour finir, une comparaison est esquissée entre classes élémentaires de modèles (au sens de la théorie des modèles) et catégories de modèles (au sens de la théorie de l'homotopie).

**ABSTRACT.** — This paper endeavors to show the possible application to model theory of concepts coming from modern homotopy theory. In particular, the concept of simplicial set can be brought into play to describe the formulas of a first-order language  $L$ , the definable subsets of an  $L$ -structure, as well as the type spaces of a theory expressed in  $L$ . It is shown that to any  $L$ -structure can be associated a simplicial set, according to a functorial mapping that associates simplicial maps to elementary embeddings. Finally, a comparison is sketched between elementary classes of models (in the model-theoretic sense) and model categories (in the homotopy-theoretic sense).

---

---

<sup>(1)</sup> Université Paris Ouest Nanterre La Défense, Département de Philosophie, 200, avenue de la République 92001 Nanterre cedex  
bhalimi@u-paris10.fr

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>1017</b>
<b>2</b>	<b>Idées simpliciales</b> . . . . .	<b>1020</b>
	<b>2.1. Les formules comme chaînes</b> . . . . .	<b>1020</b>
	<b>2.2. Ensembles simpliciaux</b> . . . . .	<b>1026</b>
<b>3</b>	<b>Théorie des modèles</b> . . . . .	<b>1029</b>
	<b>3.1. Modèles</b> . . . . .	<b>1029</b>
	<b>3.2. Types</b> . . . . .	<b>1033</b>
	<b>3.3. Digression géométrique</b> . . . . .	<b>1036</b>
<b>4</b>	<b>Catégories de modèles (<i>categories of models</i>)</b> <b>et catégories de modèles (<i>model categories</i>)</b> . . . . .	<b>1037</b>
	<b>4.1. Homologie d'André</b> . . . . .	<b>1037</b>
	<b>4.2. La catégorie des modèles d'une théorie comme</b> <b>pré-catégorie de modèles</b> . . . . .	<b>1039</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>1052</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>1042</b>

---

### 1. Introduction

L'une des tâches fondamentales de la logique est historiquement, dès Aristote, de penser les mathématiques, c'est-à-dire à la fois d'en formaliser les raisonnements, et de penser leur homogénéité avec le raisonnement ordinaire (en dépit de leur inscription dans un régime discursif formel). Mais le rapport privilégié de la logique avec les mathématiques explique que la logique, du fait de formaliser les mathématiques, ait pu historiquement devenir elle-même une branche à part entière des mathématiques. Cette mutation, à l'œuvre depuis la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, est allée de pair avec un certain nombre d'interactions de la logique avec les autres branches des mathématiques traditionnelles, ou du moins avec certaines d'entre elles. Ces interactions ne font qu'attester la place pleine et entière acquise par la logique mathématique au sein de l'ensemble des mathématiques. Des exemples clairs et déjà anciens de ce phénomène sont fournis par l'importation, en théorie des modèles, de concepts et de méthodes en provenance directe de l'algèbre universelle (comme l'attestent notamment les travaux de Tarski), d'une part, et, d'autre part, de la topologie générale (comme le montre par exemple la dualité de Stone).

Si la topologie et l'algèbre ont marqué la théorie des modèles, et par cet intermédiaire la logique tout entière, pour autant, la topologie algébrique, discipline phare des mathématiques modernes, a été relativement peu exploitée par la théorie des modèles, discipline phare de la logique mathématique moderne. L'hypothèse de travail qui sera ici suivie est que, si l'immersion de la logique au sein des mathématiques ne s'est pas avérée historiquement uniforme, néanmoins toutes les cases vides du tableau des rapports entre la logique et les autres branches des mathématiques correspondent à autant d'interactions fructueuses en attente d'actualisation. L'objet de cet article est précisément de le vérifier à propos de la théorie des modèles et de la théorie de l'homotopie, en examinant le transfert, à la théorie des modèles, de concepts et de structures provenant spécifiquement de la théorie de l'homotopie. L'enjeu d'un tel transfert est d'établir les premiers éléments d'une forme de dictionnaire de la théorie des modèles vers la théorie de l'homotopie<sup>1</sup>, et de proposer un panorama d'applications possibles de la seconde à la première.

La perspective d'un croisement possible de la théorie des modèles et de la théorie de l'homotopie est également motivée par les récents développements qui ont conduit Vladimir Voevodsky à proposer un programme, intitulé « Univalent Foundations of Mathematics », visant à combiner la théorie des types de Martin-Löf et la théorie de l'homotopie, et à fournir ainsi un nouveau cadre de formulation des mathématiques. Les liens existant entre la théorie de Martin-Löf et les catégories de modèles, dégagés notamment depuis un article fondateur de Hofmann et Streicher<sup>2</sup>, ont éclairé d'un jour nouveau les rapports potentiels entre logique et théorie de l'homotopie, en incitant, pour simplifier, à concevoir deux preuves d'un même théorème (à partir des mêmes axiomes) comme deux chemins homotopes. La théorie de l'homotopie s'avère dès lors virtuellement omniprésente en logique, et ce pour des raisons d'ordre syntaxique (relevant de la théorie de la démonstration).

Le présent article, bien que compatible avec une telle perspective, suit une autre voie, située sur le versant, non des preuves formelles, mais des modèles : on montre que toute structure d'interprétation d'un langage du premier ordre peut être décrite en termes simpliciaux. Ce résultat a en particulier pour conséquence que toute théorie formelle du premier ordre peut être abordée d'un point de vue homotopique, et que tout modèle d'une telle théorie peut être comparé au représentant d'un type d'homotopie. Dès lors, la théorie de l'homotopie s'avère virtuellement omniprésente en logique,

---

<sup>(1)</sup> Pour une présentation des notions centrales de la théorie des modèles, voir par exemple [10].

<sup>(2)</sup> Cf. [6].

pour des raisons relevant cette fois d'un point de vue sémantique. Autre différence avec le programme de Voevodsky, il ne s'agit pas ici de rechercher une nouvelle voie fondationnelle, mais, de façon nettement plus limitée, de contribuer à expliquer en quoi la théorie de l'homotopie constitue une théorie transversale en mathématiques et bénéficie, pour reprendre l'expression de Jean Dieudonné à propos de la géométrie, d'une position de « domination universelle » au sein des mathématiques.

## 2. Idées simpliciales

### 2.1. Les formules comme chaînes

Le point de départ qui motive la recherche d'un dictionnaire homotopologique est que la notion de *bord* peut trouver une illustration dans le contexte de la logique du premier ordre — les formules du langage de cette logique devenant des *chaînes* (au sens d'une somme formelle de faces et, en homologie, au sens d'un complexe de chaînes). C'est ce qui apparaît si l'on pose, dans le cas par exemple d'une formule  $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$  ayant exactement  $v_0, v_1, \dots, v_n$  pour variables libres :

$$\partial\varphi := \bigwedge_{i=0}^{n-1} \neg^i \forall x \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1}).$$

Cet opérateur de bord n'est pas stable pour le renommage des variables : par exemple, les formules  $\phi(v_0, v_1) = (P(v_0) \wedge (P(v_1) \vee \neg P(v_1)))$  et  $\psi(v_0, v_1) = (P(v_1) \wedge (P(v_0) \vee \neg P(v_0)))$  (pour un prédicat  $P$  quelconque du langage) peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par renommage de leurs variables libres. Néanmoins,  $\partial\phi$  et  $\partial\psi$  ne sont pas logiquement équivalentes :  $\partial\phi \equiv (\forall x P(x) \wedge (P(v_0) \vee \neg P(v_0)) \wedge \neg(P(v_0) \wedge \forall x (P(x) \vee \neg P(x)))) \equiv (\forall x P(x) \wedge \neg P(v_0))$ , qui est contradictoire, tandis que  $\partial\psi \equiv (P(v_0) \wedge \forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \wedge \neg(\forall x P(x) \wedge (P(v_0) \vee \neg P(v_0)))) \equiv (P(v_0) \wedge \neg \forall x P(x))$ , qui n'est pas contradictoire.

Pour éviter tout problème de ce type, on se placera dans tout ce qui suit, de façon rigide, dans un langage  $L$  du premier ordre ayant *exactement* ' $v_i$ ',  $i \geq 0$ , pour symboles de variables libres, et ' $x$ ', ' $y$ ', ' $z$ ', etc., pour symboles de variables liées. Les formules seront considérées à renommage près des variables liées, mais non à renommage près des variables libres. Les autres symboles composant l'alphabet de  $L$  sont les symboles usuels : négation (' $\neg$ '), conjonction (' $\wedge$ '), disjonction (' $\vee$ '), quantificateur unaire (' $Q$ ', par exemple ' $\exists$ '), lettres schématiques de relations  $n$ -aires ( $n \geq 1$ ) et symbole d'égalité (' $=$ '). Les formules de  $L$  seront toutes écrites de telle façon que toute formule à  $n$  variables libres a exactement  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  pour variables libres.

Autrement dit, une formule (au sens usuel) de  $L$  telle que  $(P(v_0) \wedge \neg P(v_2))$  ne sera pas considérée comme une formule bien formée de  $L^3$ . Une formule  $\varphi$  de  $L$  (au sens usuel) sera donc dite une formule *bien formée* ssi l'ensemble des indices des variables libres ayant une occurrence dans  $\varphi$  est un segment initial de  $\mathbb{N}$ . En revanche, l'ordre d'occurrence des variables n'importe pas. Dorénavant, par « formule », on entendra toujours une formule bien formée de  $L$ .

Dans les conditions syntaxiques qui viennent d'être décrites, l'application itérée de  $\partial$  à  $\varphi(v_0, v_1, v_2)$  donne :

- tout d'abord, la conjonction de  $\forall x\varphi(x, v_0, v_1)$ ,  $\neg\forall x\varphi(v_0, x, v_1)$  et de  $\forall x\varphi(v_0, v_1, x)$  ;
- ensuite, la conjonction contradictoire des six formules suivantes :  
 $\forall y\forall x\varphi(x, y, v_0)$   
 $\neg\forall y\forall x\varphi(x, v_0, y)$  et  $\forall y\neg\forall x\varphi(y, x, v_0)$   
 $\neg\forall y\neg\forall x\varphi(v_0, x, y)$ ,  $\forall y\forall x\varphi(y, v_0, x)$ ,  $\neg\forall y\forall x\varphi(v_0, y, x)$ .

(Une contradiction s'ensuit parce que la quantification universelle commute avec la conjonction.) On peut ainsi résumer les choses :  $\partial \circ \partial = 0$ , en notant '0' au lieu de ' $\perp$ ' l'absurde logique (c'est-à-dire la classe d'équivalence logique de toutes les formules antilogiques). Cette équivalence, analogue à la condition qui définit un opérateur de bord, justifie d'étudier la possibilité d'adapter au cadre de la logique du premier ordre un certain nombre de concepts provenant de la topologie algébrique.

Il convient de préciser ce point de vue de façon plus formelle. Soit  $F_n$  l'ensemble des formules bien formées de  $L$  ayant *exactement*  $v_0, \dots, v_n$  pour variables libres. L'ensemble  $F_{-1}$  peut être défini comme l'ensemble des énoncés de  $L$ . On définit alors deux applications  $d_i : F_n \rightarrow F_{n-1}$  et  $s_i : F_n \rightarrow F_{n+1}$  par :

$$d_i(\varphi(v_0, \dots, v_n)) = Qx\varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1})$$

$$s_j(\varphi(v_0, \dots, v_n)) = ((v_j = v_{j+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1})).$$

---

(3) Cette restriction n'est guère dommageable. En effet, une formule (au sens usuel) peut toujours, sans perte de moyens expressifs du langage, être remplacée par une formule bien formée de  $L$ . En l'occurrence,  $(P(v_0) \wedge \neg P(v_2))$  peut simplement être remplacée par  $(P(v_0) \wedge \neg P(v_1))$ . En outre, la formule (bien formée)  $P(v_0, v_1) \wedge Q(v_0, v_2)$ , obtenue par conjonction d'une formule bien formée et d'une formule non bien formée, peut être transformée en une formule construite uniquement à partir de formules bien formées, sans que cette transformation fasse sortir de sa classe d'équivalence logique :  $P(v_0, v_1) \wedge Q(v_0, v_2) \equiv P(v_0, v_1) \wedge Q(v_2, v_3) \wedge (v_0 = v_2) \equiv (P(v_0, v_1) \wedge (v_0 = v_2)) \wedge ((v_0 = v_2) \wedge (v_1 = v_1) \wedge Q(v_2, v_3))$ . Toutefois, ce dernier point n'importera pas dans ce qui suit.

Ces deux applications satisfont un certain nombre d'égalités (à équivalence logique près des formules). Pour  $i < j$ , on trouve :

$$\begin{aligned} d_i d_j \varphi &= d_i(Qx\varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, x, v_j, \dots, v_{n-1})) \\ &= QyQx\varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, y, v_i, \dots, v_{j-2}, x, v_{j-1}, \dots, v_{n-2}) \end{aligned}$$

D'autre part, toujours pour  $i < j$  :

$$\begin{aligned} d_{j-1} d_i \varphi &= d_{j-1}(Qx\varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1})) \\ &= QyQx\varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{j-2}, y, v_{j-1}, \dots, v_{n-2}) \end{aligned}$$

Les deux résultats sont logiquement équivalents, dès lors que  $QyQx\varphi(y, x, \vec{u}) \equiv QyQx\varphi(x, y, \vec{u})$  est vrai de n'importe quelle formule  $\varphi$  (condition (a))<sup>4</sup>.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} s_i s_j \varphi &= s_i(((v_j = v_{j+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}))) \\ &= ((v_i = v_{i+1}) \rightarrow ((v_{j+1} = v_{j+2}) \\ &\quad \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+2}, \dots, v_{n+2}))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_{j+1} s_i \varphi &= s_{j+1}(((v_i = v_{i+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}))) \\ &= ((v_{j+1} = v_{j+2}) \rightarrow ((v_i = v_{i+1}) \\ &\quad \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+2}, \dots, v_{n+2}))). \end{aligned}$$

Dans le cas  $i = j$ , on a :

$$\begin{aligned} s_i s_j \varphi &= s_i(((v_i = v_{i+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}))) \\ &= ((v_i = v_{i+1}) \rightarrow ((v_{i+1} = v_{i+2}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+2}, \dots, v_{n+2}))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_{i+1} s_i \varphi &= s_{i+1}(((v_i = v_{i+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}))) \\ &= ((v_{i+1} = v_{i+2}) \rightarrow ((v_i = v_{i+2}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+2}, \dots, v_{n+2}))). \end{aligned}$$

En outre, pour  $i < j$  :

$$\begin{aligned} d_i s_j \varphi &= d_i(((v_j = v_{j+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}))) \\ &= (Qx(v_{j-1} = v_j) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{j-2}, v_j, \dots, v_n)) \\ &= ((v_{j-1} = v_j) \rightarrow Qx\varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{j-2}, v_j, \dots, v_n)) \\ &= s_{j-1}(Qx\varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1})) \\ &= s_{j-1} d_i \varphi. \end{aligned}$$

---

(4) Cette propriété d'« auto-commutativité » a notamment été étudiée dans [11], qui aboutit à une caractérisation des quantificateurs généralisés unaires auto-commutatifs.

De plus, pour  $i > j + 1$  :

$$\begin{aligned}
 d_i s_j \varphi &= d_i((v_j = v_{j+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1})) \\
 &= (Qx(v_j = v_{j+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_n)) \\
 &= ((v_j = v_{j+1}) \rightarrow Qx\varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_n)) \\
 &= s_j(Qx\varphi(v_0, \dots, v_{i-2}, x, v_{i-1}, \dots, v_{n-1})) \\
 &= s_j d_{i-1} \varphi.
 \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 d_i s_i \varphi &= d_i((v_i = v_{i+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1})) \\
 &= Qx((x = v_i) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_n)) \\
 &\equiv \varphi
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 d_{j+1} s_j \varphi &= d_{j+1}((v_j = v_{j+1}) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1})) \\
 &= Qx((v_j = x) \rightarrow \varphi(v_0, \dots, v_{j-1}, x, v_{j+1}, \dots, v_n)) \\
 &\equiv \varphi
 \end{aligned}$$

dès lors que, pour toute formule  $\varphi$ ,  $Qx(x = y \rightarrow \varphi[x/y]) \equiv \varphi(y)$  (condition (b)) — où  $y$  est, et  $x$  n'est pas, l'une des variables libres de  $\varphi$ .

L'équivalence logique entre formules est toujours ici considérée comme une relation d'équivalence restreinte à l'un des ensembles  $F_n$ . C'est à cette condition seulement que les opérateurs  $d_i$ ,  $s_j$  et  $\partial$  peuvent être définis modulo équivalence logique. Par exemple,  $\chi(v_0) = (P(v_0) \vee \neg P(v_0))$  et  $\pi(v_0, v_1) = ((P(v_0) \vee \neg P(v_0)) \wedge (P(v_1) \vee \neg P(v_1)))$  donnent lieu à des formules  $\partial\phi$  et  $\partial\psi$  qui ne sont pas logiquement équivalentes, mais  $\chi \in F_0$ , tandis que  $\pi \in F_1$ , de sorte que ces deux formules ne sont pas logiquement équivalentes au sens donné ici à cette notion. Par ailleurs, les formules  $\phi(v_0, v_1) = (P(v_0) \wedge (P(v_1) \vee \neg P(v_1)))$  et  $\psi(v_0, v_1) = (P(v_1) \wedge (P(v_0) \vee \neg P(v_0)))$  examinées plus haut ont elles aussi des bords qui ne sont pas logiquement équivalents, mais  $\phi$  et  $\psi$ , qui ne sont plus considérées à renommage près des variables libres, ne sont tout simplement pas logiquement équivalentes dans  $F_1$ . En effet, relativement à une même assignation  $\sigma$  de valeurs à ' $v_0$ ' et à ' $v_1$ ', une L-structure  $M$  peut satisfaire  $\phi$  et ne pas satisfaire  $\psi$  : il suffit pour cela que  $M \models P(x)[x = \sigma(v_0)]$  et que  $M \not\models P(x)[x = \sigma(v_1)]$ <sup>5</sup>.

---

(5) Je remercie un rapporteur anonyme pour avoir mis l'accent sur la sensibilité du cadre proposé au changement du nombre de variables libres comme au renommage des variables libres.



Étant données ces précisions, on peut résumer ce qui précède en écrivant, à équivalence logique près, et à supposer que le quantificateur  $Q$  respecte les deux conditions (a) et (b)<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \text{ si } i < j \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \text{ si } i < j \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ \text{id} & \text{si } i = j \text{ or } i = j + 1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ces relations, appelées « identités simpliciales », font de

$$F_*^Q = \langle F_n, (d_i^n)_{0 \leq i \leq n}, (s_j^n)_{0 \leq j \leq n} \rangle_{n \in \mathbb{N}},$$

considéré à équivalence logique près, un *ensemble simplicial*<sup>7</sup>. De manière équivalente, un ensemble simplicial peut être défini comme un foncteur de la catégorie  $\Delta^{\text{op}}$  vers la catégorie *Ens* des ensembles,  $\Delta$  étant la catégorie des ordinaux finis (représentés par tous les segments  $\mathbf{n} := 0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq n$ ) et des homomorphismes d'ordre entre ordinaux finis<sup>8</sup>.

Il est désormais possible de justifier davantage le choix des opérateurs  $d_i$  et  $s_j$ . Ces derniers auraient en effet pu être définis de façon quelque peu différente. Ainsi,  $d_i$  aurait pu être remplacé par :

$$d'_i(\varphi(v_0, \dots, v_n)) = \varphi(v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_i, \dots, v_{n-1}),$$

et  $s_j$  par :

$$s'_j(\phi(v_0, \dots, v_n)) = ((v_j = v_{j+1}) \wedge \phi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1})),$$

avec simplement ' $\wedge$ ' au lieu de ' $\rightarrow$ ' (dans ce dernier cas,  $s'^j$  est moralement le même opérateur que  $s_j$ ). Toutefois, contrairement aux opérateurs  $d'_i$  et  $s'_j$  qui viennent d'être définis, les opérateurs  $d_i$  et  $s_j$ , tels qu'ils ont été définis plus haut, constituent la transposition *directe* des morphismes « canoniques »  $d_n^i : \mathbf{n} - \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{n}$  et  $s_n^j : \mathbf{n} + \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{n}$  de  $\Delta$ . Le morphisme  $d_n^i$  est le morphisme faisant passer de  $0 \leq 1 \leq \dots \leq i \leq \dots \leq n - 1$  à  $0 \leq 1 \leq \dots \leq i - 1 \leq i + 1 \leq \dots \leq n$ , et  $s_n^j$ , le morphisme faisant passer de  $0 \leq 1 \leq \dots \leq j \leq \dots \leq n + 1$  à  $0 \leq 1 \leq \dots \leq j \leq j \leq j + 1 \leq \dots \leq n$ . Or les deux familles  $(d_n^i)_{0 \leq i \leq n, n \geq 0}$  et  $(s_n^j)_{0 \leq j \leq n, n \geq 0}$  sont les deux familles naturelles de

(6) C'est notamment le cas de  $\forall$  et de  $\exists$ .

(7) À proprement parler, seul  $\widetilde{F}_*^Q = \langle \widetilde{F}_n, (\widetilde{d}_i^n)_{0 \leq i \leq n}, (\widetilde{s}_j^n)_{0 \leq j \leq n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  est un ensemble simplicial, où  $\widetilde{F}_n$  est l'ensemble des classes d'équivalence logique de formules de  $F_n$ , et où  $\widetilde{d}_i^n$  et  $\widetilde{s}_j^n$  sont les applications induites par  $d_i^n$  et  $s_j^n$  par passage au quotient.

(8) Cf. [3], p. 3-4.

morphismes qui permettent d'engendrer tous les morphismes de  $\Delta$  : les applications  $d_n^i$  et  $s_n^j$  forment, avec les relations «cosimpliciales» qu'elle vérifient, une présentation canonique de  $\Delta$  par relations et générateurs. Tout ensemble simplicial  $X$ , en tant que «foncteur contravariant»  $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ , transforme  $d_n^i$  en un morphisme  $d_i : X(n) \rightarrow X(n-1)$ , et de même  $s_n^j$  en un morphisme  $s_j : X(n) \rightarrow X(n+1)$ . L'opérateur  $d_i$  reflète ainsi l'opération consistant à supprimer la  $i$ -ème position d'une chaîne de relations de longueur  $n$ . Appliqué aux formules de  $F_n$ , il consiste donc à supprimer la variable libre  $v_i$  de chaque formule  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ , ce qui n'est possible qu'en la liant (car il est syntaxiquement impossible de laisser vide la place occupée par ' $v_i$ ' dans  $\varphi$ ). Ce n'est justement pas ce que fait l'opérateur  $d_i'$ . Ce dernier représente bien une transformation menant de  $F_n$  à  $F_{n-1}$ , mais cette transformation n'est pas la traduction de  $d_n^i$ , puisque la  $i$ -ème variable est répétée au lieu d'être supprimée. De même,  $s_j'$ , bien que très proche de  $s_j$ , ne correspond pas autant que  $s_j$  à l'opération  $s_n^j$ , car l'égalité  $v_j = v_{j+1}$  n'est pas censée être assertée indépendamment de  $\varphi$ , mais seulement utilisée comme condition permettant de remplacer ' $v_j$ ' par ' $v_{j+1}$ ' dans  $\varphi$ .

La naturalité des opérateurs  $d_i$  et  $s_j$  (au regard d'autres variantes envisageables) est également géométrique. Tels que ces opérateurs ont été définis, tout quantificateur unaire  $Q$  peut être comparé à un «opérateur de face» ( $d_i^Q$ ), et la suite ( $s_j$ ) à la suite correspondante des «opérateurs de dégénérescence». Si l'on voit toute formule de  $F_n$  comme la représentation d'un domaine  $n$ -dimensionnel, alors  $d_i^Q$  correspond à une opération de projection (et en particulier, pour  $Q = \exists$ , à l'opération usuelle de projection selon un axe de coordonnées), tandis que  $s_j$  correspond à l'opération inverse de «cylindrification». Ces intuitions appellent une transition à un contexte sémantique qui fera l'objet de la section suivante.

L'exploitation du comportement combinatoire des formules de la logique du premier ordre, qui sous-tend l'approche homotopique en logique adoptée ici, n'est pas sans lien notamment avec les «algèbres cylindriques» étudiées par Henkin, Monk et Tarski. Cependant, contrairement à ces dernières, elle fait signe vers une perspective ancrée dans la topologie algébrique plutôt que dans l'«algèbre universelle».

Outre les variables et la quantification, un traitement des autres composantes de l'alphabet de L, à savoir les connecteurs, peut être proposé dans le cadre qui vient d'être décrit. Il apparaît en effet que la négation peut être identifiée à un morphisme  $\neg$  d'ensembles simpliciaux de  $F_*^{\forall}$  vers  $F_*^{\exists}$ , c'est-à-dire caractérisée par la commutativité (pour tout  $n$ ) du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 F_n & \xrightarrow{\neg} & F_n \\
 \forall \downarrow & & \downarrow \exists \\
 F_{n-1} & \xrightarrow{\neg} & F_{n-1} .
 \end{array}$$

D'autre part, la conjonction peut être caractérisée, parmi tous les connecteurs binaires symétriques, par la condition :  $\forall x (Fx \wedge Gx) \equiv (\forall x Fx \wedge \forall x Gx)$ . Il en va de façon analogue pour  $\vee$ . Ainsi, en introduisant des objets bisimpliciaux, les connecteurs binaires usuels sont-ils identifiables à des bifoncteurs<sup>9</sup>. En effet, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 F_{m,p} & \xrightarrow{c} & F_n \\
 \langle Q, Q' \rangle \downarrow & & \downarrow Q'' \\
 F_{m-1,p-1} & \xrightarrow{c'} & F_{n-1}
 \end{array}$$

exprime que  $Q''x(\phi c \psi) \equiv (Qv_i \phi)c'(Q'v_i \psi)$  pour  $\phi \in F_m$  et  $\psi \in F_p$  (ici  $n = \max(m, p)$ ). En particulier,  $\wedge$  est caractérisé par la commutativité (pour tous  $m, p$ ) de :

$$\begin{array}{ccc}
 F_{m,p} & \xrightarrow{c} & F_n \\
 \langle \forall, \forall \rangle \downarrow & & \downarrow \forall \\
 F_{m-1,p-1} & \xrightarrow{c} & F_{n-1} ,
 \end{array}$$

et  $\vee$  par celle de :

$$\begin{array}{ccc}
 F_{m,p} & \xrightarrow{c} & F_n \\
 \langle \exists, \exists \rangle \downarrow & & \downarrow \exists \\
 F_{m-1,p-1} & \xrightarrow{c'} & F_{n-1} .
 \end{array}$$

## 2.2. Ensembles simpliciaux

Un ensemble simplicial est un foncteur  $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ . Il existe une généralisation immédiate de la notion d'ensemble simplicial à toute catégorie

---

<sup>(9)</sup> On rejoint ici la représentation des opérations logiques dans le langage interne d'un topos sous la forme de morphismes  $\Omega \rightarrow \Omega$  (pour la négation) ou  $\Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  (pour la conjonction et la disjonction). La différence est ici que les connecteurs sont considérés de façon plus fine, comme reliant non seulement des énoncés (identifiés à des valeurs de vérité), mais plus généralement des formules, spécifiées par leurs variables libres. Je remercie un rapporteur anonyme pour l'idée de cette comparaison, tout en regrettant de ne pas pouvoir davantage lui donner suite dans les limites de cet article.

abélienne. On peut en effet définir un *objet simplicial* dans une catégorie abélienne  $C$  autre que  $Ens$  comme un foncteur de  $\Delta^{op}$  vers  $C$ . Si  $C$  est par exemple la catégorie des groupes abéliens, on parle alors de «groupe simplicial». La raison pour considérer un objet simplicial dans une catégorie abélienne, comme un groupe simplicial, est qu'un tel objet donne lieu, de manière canonique, à un *complexe de chaînes* qui lui est associé :

$$\begin{aligned} \dots & F_{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} F_n \xrightarrow{d^n} F_{n-1} \dots \\ d^n &= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n \\ d^n \circ d^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Il est naturel de chercher à enrichir chaque  $F_n$  d'une structure de groupe. Il est bien connu que  $F_n$  possède une structure d'algèbre de Boole (la somme et la multiplication étant la disjonction et la conjonction), et que toute algèbre de Boole peut être convertie en un anneau booléen. En l'occurrence, l'anneau booléen associé à  $F_n$  est  $\langle F_n, \leftrightarrow, \wedge, \perp, \top \rangle$ , où  $\phi \leftrightarrow \psi$  est la différence symétrique  $((\phi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\phi))$ , où  $\perp$  est n'importe quelle antilogie de  $F_n$  (par exemple  $(v_0 \neq v_0 \wedge \dots \wedge v_n \neq v_n)$ ) et où, de même,  $\top$  est n'importe quelle tautologie de  $F_n$  (par exemple  $(v_0 = v_0 \wedge \dots \wedge v_n = v_n)$ ). On en déduit en particulier une structure de groupe  $\langle F_n, \leftrightarrow, \perp \rangle$ . Le problème est que, pour que  $F_*$  possède une structure de groupe simplicial, il ne suffit pas que chacun des  $F_n$  ait une structure de groupe : car les  $d_i^Q$  et les  $s_i$  ne sont pas nécessairement des morphismes de groupes abéliens. En particulier,

$$(Qx\phi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1}) \leftrightarrow Qx\psi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1}))$$

n'est pas, en général, logiquement équivalent à

$$Qx(\phi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1}) \leftrightarrow \psi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1})).$$

Une première solution consiste à passer à des ensembles de formules, en transposant les opérateurs  $d_i^Q$  et  $s_j$ . Pour  $G_n = \wp(F_n)$  et pour  $i$  tel que  $0 \leq i \leq n-1$ , la correspondance  $\Gamma \mapsto \{d_i^Q(\phi) : \phi \in \Gamma\}$  définit une application  $\overline{d}_i^Q : G_n \rightarrow G_{n-1}$ , et de même pour  $\overline{s}_j : G_n \rightarrow G_{n+1}$ . Chaque  $\langle G_n, \Delta, \cap \rangle$  est alors un anneau commutatif, avec  $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$ . De plus, pour tous  $\Gamma, \Gamma' \in G_n$  :  $\overline{d}_i^Q(\Gamma\Delta\Gamma') = \overline{d}_i^Q(\Gamma)\Delta\overline{d}_i^Q(\Gamma')$  et  $\overline{s}_j(\Gamma\Delta\Gamma') = \overline{s}_j(\Gamma)\Delta\overline{s}_j(\Gamma')$ . Par conséquent,  $G_*^Q = \langle G_n, (\overline{d}_i^Q)_{0 \leq i \leq n}, (\overline{s}_j^Q)_{0 \leq j \leq n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  est un anneau simplicial.

Une seconde solution<sup>10</sup> consiste à introduire le groupe abélien libre  $\mathbb{Z}F_n$

<sup>(10)</sup> Cf. [9], p. 122.

engendré par les  $n$ -simplexes non dégénérés (un  $n$ -simplexe dégénéré étant un élément de  $F_n$  de la forme  $s_j(x)$  pour un certain  $x \in F_{n-1}$ ). On peut voir  $\mathbb{Z}F_n$  comme un ensemble de *séquents* composés de formules à  $n$  variables libres. En effet, tout élément de  $\mathbb{Z}F_n$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n n_k \phi_k(v_0, \dots, v_n) &= \sum_{n_k < 0} n_k \phi_k + \sum_{n_l > 0} n_l \phi_l \\ &= \bigwedge_{n_k < 0} \phi_k \vdash \bigvee_{n_l > 0} \phi_l \\ &= \phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_a} \vdash \phi_{l_1}, \dots, \phi_{l_b}. \end{aligned}$$

Les séquents de  $\mathbb{Z}F_n$  sont considérés modulo équivalence logique (au sens qui a été dit plus haut) des formules qui les composent. Tout séquent de  $\mathbb{Z}F_n$  de la forme  $\phi \vdash \phi$  en représente l'élément neutre. On définit alors :

$$\widetilde{Q}_i(\phi_1, \dots, \phi_p \vdash \psi_1, \dots, \psi_q) = d_i^{\widetilde{Q}}(\phi_1), \dots, d_i^{\widetilde{Q}}(\phi_p) \vdash d_i^Q(\psi_1), \dots, d_i^Q(\psi_q),$$

où  $\widetilde{Q}$  désigne le dual de  $Q$ , défini par :  $\widetilde{Q}v\varphi(v) := \neg Qv\neg\varphi(v)$ . On définit ensuite le  $Q$ -opérateur de différenciation suivant :

$$d_n^Q = \sum_{i=0}^n (-1)^i \widetilde{Q}_i.$$

Le fait de tenir les éléments de  $\mathbb{Z}F_n$  pour des séquents au sens usuel (une conjonction d'antécédents impliquant une disjonction de conséquents) impose de prendre  $Q = \exists$ . Pour  $S = (\phi_1(v_0, v_1), \phi_2(v_0, v_1) \vdash \psi_1(v_0, v_1), \psi_2(v_0, v_1), \psi_3(v_0, v_1))$ , on obtient :

$$\begin{aligned} d_1^{\exists}(S) &= \widetilde{\exists}_0(\phi_1(v_0, v_1), \phi_2(v_0, v_1) \vdash \psi_1(v_0, v_1), \psi_2(v_0, v_1), \psi_3(v_0, v_1)) \\ &\quad - \widetilde{\exists}_1(\phi_1(v_0, v_1), \phi_2(v_0, v_1) \vdash \psi_1(v_0, v_1), \psi_2(v_0, v_1), \psi_3(v_0, v_1)) \\ &= (\forall x \phi_1(x, v_0), \forall x \phi_2(x, v_0) \vdash \exists x \psi_1(x, v_0), \exists x \psi_2(x, v_0), \exists x \psi_3(x, v_0)) \\ &\quad - (\forall y \phi_1(v_0, y), \forall y \phi_2(v_0, y) \vdash \exists y \psi_1(v_0, y), \exists y \psi_2(v_0, y), \exists y \psi_3(v_0, y)) \\ &= \forall x \phi_1(x, v_0), \forall x \phi_2(x, v_0), \exists y \psi_1(v_0, y), \exists y \psi_2(v_0, y), \exists y \psi_3(v_0, y) \\ &\quad \vdash \forall y \phi_1(v_0, y), \forall y \phi_2(v_0, y), \exists x \psi_1(x, v_0), \exists x \psi_2(x, v_0), \exists x \psi_3(x, v_0). \end{aligned}$$

On vérifie que  $d_n^{\exists} \circ d_{n-1}^{\exists} = 0$  pour tout  $n \geq 0$ . On peut dès lors introduire les groupes d'homologie correspondants.

Une des notions fondamentales concernant les ensembles simpliciaux est celle d'ensemble simplicial « fibrant ». Quelques préalables sont nécessaires pour l'introduire. Le  $n$ -simplexe standard est l'ensemble simplicial  $\Delta^n = \text{Hom}_{\Delta}(-, n)$ . La  $k$ -ième corne de  $\Delta^n$  est le sous-complexe de  $\Delta^n$  qui est

Sur une application possible du concept d'homotopie à la théorie des modèles

engendré par toutes les faces exceptées la  $k$ -ième. C'est le cône dont le sommet est le  $k$ -ième sommet de  $\Delta^n$ . Par exemple :

$$\Lambda_0^2 = \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 2 \end{array} \subset \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 \end{array} = \Delta^2.$$

Une *fibration* est un morphisme  $p : X \rightarrow Y$  d'ensembles simpliciaux tel que pour tout carré simplicial commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

il existe  $\theta : \Delta^n \rightarrow X$  faisant commuter le diagramme ainsi enrichi. Il s'agit donc d'une condition de relèvement, qui, traduite en termes combinatoires, signifie que si  $x_0, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n$  est un  $n$ -uplet de  $(n-1)$ -simplexes de  $X$  tels que (i)  $d_i x_j = d_{j-1} x_i$  pour tous  $i, j \neq k$  tels que  $i < j$  et (ii) il existe un  $n$ -simplexe  $y$  de  $Y$  tel que  $d_i y = p(x_i)$  pour tout  $i \neq k$ , alors il existe un  $n$ -simplexe  $x$  de  $X$  tel que  $d_i x = x_i$  ( $i \neq k$ ) et  $p(x) = y$ .

Un ensemble simplicial  $X$  est dit *fibrant* si le morphisme canonique  $X \rightarrow \Delta^0$  est une fibration. En d'autres termes, toute application  $\alpha : \Lambda_k^n \rightarrow X$  peut être relevée en une application définie sur  $\Delta^n$  tout entier :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow i & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

On vérifie que, pour tout  $Q$ ,  $F_*^Q$  est fibrant. Ceci est dû au fait que les règles de syntaxe réalisent automatiquement les propriétés combinatoires qui définissent un ensemble fibrant. Cette remarque motive de quitter le plan strictement syntaxique des formules, pour aborder un niveau sémantique.

### 3. Théorie des modèles

#### 3.1. Modèles

On considère tous les modèles d'une théorie  $T$  couchée dans un langage du premier ordre  $L$  dont le quantificateur unaire est  $\exists$ . Pour tout modèle

$M$  de  $T$ , on pose :

$$M_* = F_*^{\exists, M} = \langle D_n(M), (\exists_i^{n, M})_{0 \leq i \leq n}, (s_j^{n, M})_{0 \leq j \leq n} \rangle_{n \in \mathbb{N}},$$

où :

- $D_n(M)$  est l'ensemble des sous-ensembles définissables de  $|M|^{n+1}$  ( $n \geq 0$ ) (et  $D_{-1}(M)$  la théorie  $T(M)$  de  $M$ )
- $\exists_i^{n, M} : D_n(M) \rightarrow D_{n-1}(M)$  est l'opérateur de face défini par  $\exists_i^{n, M}(\{\vec{a} \in |M|^{n+1} : M \models \varphi_A(v_0, \dots, v_n)[\vec{a}]\}) = \{\vec{a}' \in |M|^n : M \models \exists x \varphi_A(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_{n-1})[\vec{a}']\}$
- $s_j^{n, M} : D_n(M) \rightarrow D_{n+1}(M)$  est l'opérateur de dégénérescence défini par  $s_j^{n, M}(A) = \{(a_0, \dots, a_{j-1}, b, a_j, \dots, a_{n-1}) \in |M|^{n+1} : \vec{a} \in A\}$ .

La structure  $M_*$  est un ensemble simplicial pour tout  $M$ .

Étant données deux L-structures  $M$  et  $N$ , on dit que  $N$  est une *extension* de  $M$  (et  $M$  une *sous-structure* de  $N$ ) si  $|M| \subset |N|$  et que l'interprétation dans  $M$  de tout symbole de relation est la restriction à  $|M|$  de l'interprétation de ce même symbole dans  $N$ . Cela signifie que, pour toute formule négatomique  $\varphi(v_1, \dots, v_k)$  et tout  $k$ -uplet  $(a_1, \dots, a_k)$  d'éléments de  $|M|$ ,  $N \models \varphi[a_1, \dots, a_k]$  ssi  $M \models \varphi[a_1, \dots, a_k]$ . On dit que  $N$  est une *extension élémentaire* de  $M$  (et  $M$  une sous-structure élémentaire de  $N$ ) si ce qui précède vaut pour *toute* formule  $\varphi$  de L. Le critère de Tarski-Vaught énonce que,  $M$  étant une sous-structure de  $N$ ,  $M$  sera une sous-structure *élémentaire* de  $N$  ssi, pour toute formule  $\varphi(x)$  à paramètres dans  $N$ ,  $N \models \exists x \varphi(x)$  implique l'existence de  $a \in |M|$  tel que  $N \models \varphi(x)[a]$ .

Soit  $N$  une extension de  $M$ . On peut alors définir une collection d'applications  $r_n : D_n(N) \rightarrow N_n^M$ , où  $N_n^M$  est l'ensemble de tous les  $\phi(M, N) := \{\vec{a} \in |M|^{n+1} : N \models \phi(v_0, \dots, v_n)[\vec{a}]\}$  pour  $\phi \in F_n$ , et où  $r_n$  est la restriction qui envoie tout sous-ensemble définissable  $B \subset |N|^{n+1}$  sur  $r_n(B) = B \cap |M|^{n+1}$ . La suite des  $N_n^M$  ( $n \geq 0$ ) peut être munie d'une structure d'ensemble simplicial  $N_*^M$ , avec  $\exists_i^{N^M} : \{\vec{b} \in |M|^{n+1} : N \models \phi(\vec{v})[\vec{b}]\} \mapsto \{\vec{b}' \in |M|^n : N \models \exists_i(\phi)[\vec{b}']\}$  pour  $\phi \in F_n$ , les opérateurs  $s_j$  étant définis de manière analogue. Le fait que  $M$  soit une sous-structure de  $N$  garantit la correction de toutes ces définitions.

Sur une application possible du concept d'homotopie à la théorie des modèles

Supposons à présent que  $r_* : N_* \rightarrow N_*^M$  soit un morphisme d'ensembles simpliciaux :

$$\begin{array}{ccc} D_n(N) & \xrightarrow{r_n} & N_n^M \\ \Xi_i^{n,N} \downarrow & & \downarrow \Xi_i^{n,N^M} \\ D_{n-1}(N) & \xrightarrow[r_{n-1}]{} & N_{n-1}^M. \end{array}$$

Il s'avère alors que  $N_*^M$  coïncide en fait avec  $M_*$ , et que  $N$  est une extension élémentaire de  $M$ .

Le premier point se démontre par induction sur  $\phi$ . Puisque  $M$  est une sous-structure de  $N$ ,  $\phi(N, M) = \phi^M = \{\vec{a} \in |M|^{n+1} : M \models \phi(v_0, \dots, v_n)[\vec{a}]\}$  pour toute formule négatomique  $\phi \in F_n$ . On a ensuite que  $(\phi \wedge \psi)(N, M) = \phi(N, M) \wedge \psi(N, M) = \phi^M \wedge \psi^M = (\phi \wedge \psi)^M$ . Enfin,

$$\begin{aligned} (\exists x \phi(v_0, \dots, v_{i-1}, x, v_i, \dots, v_n))(N, M) &= r_n(\Xi_i^{n,N}(\phi(v_0, \dots, v_{n+1}))) \\ &= \Xi_i^{n,N^M}(r_{n+1}(\phi(v_0, \dots, v_{n+1}))). \end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction,  $r_{n+1}(\phi) \in D_{n+1}(M)$ , et par conséquent  $\Xi_i^{n,N^M}(r_{n+1}(\phi)) = (\exists x \phi)(N, M) \in D_n(M)$ . Le fait que les restrictions  $r_n$  forment un morphisme d'ensembles simpliciaux  $r_* : N_* \rightarrow M_*$  montre que le test de Tarski-Vaught est vérifié, et par suite  $M \prec N$ .

Réciproquement, supposons que  $M \prec N$ . On vérifie alors facilement que  $r_* : N_* \rightarrow M_*$  constitue un morphisme d'ensembles simpliciaux (la commutativité élément par élément du diagramme faisant intervenir  $r_n$  et  $r_{n-1}$  découle du test de Tarski-Vaught). Ainsi :

**THÉORÈME 3.1.** — *Une sous-structure  $M$  d'une  $L$ -structure  $N$  est une sous-structure élémentaire de  $N$  ssi la restriction correspondante  $r_* : N_* \rightarrow M_*$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux.*

**COROLLAIRE 3.2.** — *La correspondance  $(-)_*$  est un foncteur contravariant de la catégorie des  $L$ -structures et des plongements élémentaires vers la catégorie des ensembles simpliciaux et des morphismes d'ensembles simpliciaux.*

*Démonstration.* — Tout plongement élémentaire  $f : M \rightarrow N$  donne lieu à  $r_*^f : N_* \rightarrow M_*$  de manière fonctorielle, avec  $r_n^f : \phi^N \mapsto \{\vec{a} \in |M|^{n+1} : N \models \phi[f(\vec{a})]\} = \phi^M$ .  $\square$

Soit  $M$  une sous-structure élémentaire de  $N$ , et supposons que  $|M|$  soit définissable dans  $N$  par une formule  $\underline{M}(x)$ . Pour tout  $\phi \in F_n$ ,  $\phi^{\underline{M}}$  est la



formule  $(\underline{M}(v_0) \wedge \dots \wedge \underline{M}(v_n) \wedge \phi^{(\underline{M})})$ , où  $\phi^{(\underline{M})}$  désigne la relativisation des quantificateurs de  $\phi$  à  $\underline{M}$ . Cette relativisation permet de définir des extensions  $e_n : \phi^M \in D_n(M) \mapsto (\phi^{\underline{M}})^N \in D_n(N)$ , et par suite un morphisme  $e_* : M_* \rightarrow N_*$ .

**DÉFINITION 3.3.** — *Étant donnés deux ensembles simpliciaux  $X$  et  $Y$ , une rétraction de  $Y$  sur  $X$  consiste en une paire  $\langle f, g \rangle$  de morphismes d'ensembles simpliciaux  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  tels que  $g \circ f = id_X$  (ce qui implique que  $f$  soit un monomorphisme).*

**THÉORÈME 3.4.** — *Soit  $M$  une sous-structure élémentaire de  $N$ . Alors  $|M|$  est définissable dans  $N$  ssi la paire  $\langle e_*, r_* \rangle$  définit une rétraction de  $N_*$  sur  $M_*$ .*

*Démonstration.* — Comme, pour tout  $\phi \in F_n$ ,  $N \models \phi[\vec{b}]$  ssi  $\vec{b} \in M^{n+1}$  et  $M \models \phi[\vec{b}]$ ,

$$\begin{array}{ccc} \phi^M \in D_n(M) & \xrightarrow{e_n} & (\phi^{\underline{M}})^N \\ \exists_i^{n,M} \downarrow & & \downarrow \exists_i^{n,N} \\ \{\vec{a}' \in M^n : M \models \exists_i(\phi)[\vec{a}']\} & \xrightarrow{e_{n-1}} & \{\vec{b}' \in N^n : N \models (\exists_i(\phi))^{\underline{M}}[\vec{b}']\} \end{array}$$

commute. En effet, par le test de Tarski-Vaught, on a :

$$\begin{aligned} N \models \exists_i(\phi^{\underline{M}})[\vec{b}'] & \text{ ssi } N \models \phi^{\underline{M}}[b'_0, \dots, b'_{i-1}, c_i, b'_i, \dots, b'_{n-1}] \text{ pour un certain } c_i \in |N| \\ & \text{ ssi } N \models \phi^{\underline{M}}[b'_0, \dots, b'_{i-1}, d_i, b'_i, \dots, b'_{n-1}] \text{ pour un certain } d_i \in |M| \\ & \text{ ssi } N \models \exists v_i(\underline{M}(v_i) \wedge \phi^{\underline{M}})[\vec{b}'] \\ & \text{ ssi } N \models (\exists_i(\phi))^{\underline{M}}[\vec{b}']. \end{aligned}$$

En d'autres termes, la collection des applications  $e_n$  définit un morphisme d'ensembles simpliciaux :

$$\begin{array}{ccc} D_n(M) & \xrightarrow{e_n} & D_n(N) \\ \exists_i^{n,M} \downarrow & & \downarrow \exists_i^{n,N} \\ D_{n-1}(M) & \xrightarrow{e_{n-1}} & D_{n-1}(N). \end{array}$$

À présent, on vérifie que  $(e_n r_n)(\phi^N) = \phi^M$  et que  $(r_n e_n)(\phi^M) = \phi^M$  pour tout  $\phi \in F_n$ :

$$(r_n e_n)(\phi^M) = r_n((\phi^{\underline{M}})^N) = \{\vec{a} \in M^{n+1} : N \models \phi^{\underline{M}}[\vec{a}]\} = \phi^M,$$

Sur une application possible du concept d'homotopie à la théorie des modèles

$$(e_n r_n)(\phi^N) = e_n(\{\vec{a} \in |M|^{n+1} : N \vDash \phi[\vec{a}]\}) = e_n(\phi^M) = (\phi^M)^N = \{\vec{b} \in |N|^{n+1} : N \vDash \phi^M[\vec{b}]\} = \{\vec{a} \in M^{n+1} : N \vDash \phi^M[\vec{a}]\} = \phi^M.$$

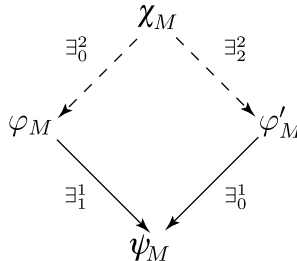
Par conséquent,  $r_* : N_* \rightarrow M_*$  et  $r_* e_* = \text{id}_{M_*}$ . Par conséquent  $\langle r_*, e_* \rangle$  est une rétraction, ce qui implique en particulier que  $M_*$  et  $N_*$  ont même type d'homotopie.

Réciproquement, la condition  $r_* e_* = \text{id}_{M_*}$  suppose que  $e_*$  soit bien définie, et donc que  $|M|$  soit une sous-structure élémentaire définissable de  $N$ . En effet, comme  $L$  est supposé égalitaire, il doit exister une formule  $\chi(v_0)$  telle que  $e_0(|M|) = e_0((v_0 = v_0)^M) = \chi(v_0)^N$ .  $\square$

On peut, en suivant le fil qui vient d'être présenté, transposer d'autres notions homotopiques à la théorie des modèles, en reprenant point par point les résultats homotopiques concernant la catégorie des ensembles simpliciaux. C'est notamment le cas de la notion de chemin entre simplexes.

Soient  $A, B$  deux éléments de  $D_1(M)$  pour lesquels il existe une formule  $\varphi$  telle que  $A = \{a \in M : M \vDash \exists v_1 \varphi(v_0, v_1)[a]\}$  et  $B = \{b \in M : M \vDash \exists v_0 \varphi(v_0, v_1)[b]\}$ . Dans ce cas,  $\varphi^M$  est appelée un *chemin* de  $A$  vers  $B$ . La relation par un chemin est une relation dont la clôture symétrique et transitive définit des composantes de chemin. Deux sous-ensembles définissables de  $M$  appartiennent à la même composante s'ils peuvent être joints par une chaîne finie de chemins.

Dans le cas d'un ensemble simplicial fibrant, la relation par un chemin est directement une relation d'équivalence. Ce n'est pas le cas de  $F_*(M)$  en général. En effet, pour que  $F_*(M)$  soit fibrant, il faut par exemple que, pour toute paire  $(\varphi_M, \varphi'_M)$  d'éléments de  $D_1(M)$  vérifiant  $\exists_0 \varphi'_M = \exists_1 \varphi_M = \psi_M$ , il existe  $\chi_M \in D_2(M)$  tel que le diagramme



soit commutatif, ce qui n'est pas vrai en général.

### 3.2. Types

Un objet supplémentaire d'application se signale en théorie des modèles : c'est l'ensemble des types dans une structure. Étant donnée une L-théorie complète  $T$  (par exemple la théorie  $T(M)$  d'une L-structure  $M$ ), un  $n$ -type est un ensemble de formules ayant toutes exactement  $v_0, \dots, v_{n-1}$  pour variables libres, qui est consistant avec  $T$ . L'ensemble des  $n$ -types est noté  $S_{n-1}(T)$ . Si  $M$  est un modèle de  $T$  et  $A \subseteq |M|$ , un  $n$ -type sur  $A$  est un  $n$ -type pour le langage  $L(A)$  obtenu à partir de  $L$  en ajoutant à  $L$  une constante d'individu ' $c_a$ ' pour chaque élément  $a$  de  $A$ . L'ensemble des  $n$ -types sur  $A$  est noté  $S_{n-1}(A)$ . Pour les mêmes raisons que précédemment à propos des formules de  $L$ , on peut voir tout  $n$ -type comme un  $n$ -simplexe d'un ensemble simplicial, à savoir

$$S_*(T) = \langle S_n(T), (\exists_i^n)_{0 \leq i \leq n}, (s_j^n)_{0 \leq j \leq n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}.$$

Le foncteur  $n \mapsto S_n(T)$  fait précisément l'objet de la section 2.1 d'un article de Robin W. Knight, de même que la section 1.2 du même article fait implicitement référence aux morphismes canoniques  $d_n^i$  et  $s_n^j$  de la catégorie  $\Delta^{11}$ . Knight introduit la notion de « catégorie de types » [*type category*], de façon à formaliser et à généraliser la suite d'espaces de types associée à toute théorie complète du langage de la logique infinitaire. Une catégorie de types au sens de Knight n'est en fait rien d'autre qu'un objet simplicial dans la catégorie des espaces topologiques et des applications continues (autrement dit, un espace topologique simplicial) vérifiant une propriété supplémentaire d'amalgamation. Cette dernière propriété est censée capturer la spécificité des espaces de types parmi les espaces simpliciaux en général. (Le fait bien connu que Knight exploite pour commencer est que chaque ensemble de types  $S_n(T)$  peut être muni d'une topologie : la topologie engendrée par les ouverts standard  $[\varphi] = \{p \in S_n(T) : \varphi \in p\}$ , pour toutes les formules  $\varphi \in F_n$  de  $L$ .) Les travaux de Knight s'inscrivent dans une démarche très précise, la recherche d'un contre-exemple à la conjecture de Vaught en théorie des modèles. Néanmoins, la transposition systématique de la notion d'ensemble simplicial à la logique qui est visée ici n'est peut-être pas sans lien avec le cadre de ces travaux. Ce serait l'objet d'un article à part que d'examiner cette question.

L'ensemble simplicial  $S_*(T)$  possède comme tel une réalisation  $|S_*(T)|$ . Mais, comme on vient de le rappeler, chaque ensemble  $S_n(T)$  constitue par ailleurs un espace topologique, et on peut ainsi introduire l'union  $S(T) = \coprod_{n \in \mathbb{N}} S_n(T)$ , munie de la topologie finale (relative à la famille des inclusions

---

<sup>(11)</sup> Cf. [7], p. 54-55. Je remercie un rapporteur anonyme pour la référence à cet article.

Sur une application possible du concept d'homotopie à la théorie des modèles

$(S_n(T) \hookrightarrow S(T))_{n \in \mathbb{N}}$ . La donnée de  $S_n(T) \times |\Delta_n| \xrightarrow{\text{Pr}_1} S_n(T) \hookrightarrow S(T)$ , pour tout  $n \geq 0$ , induit une application  $m : |S_*(T)| \rightarrow S(T)$ . Une question naturelle (qui ne sera pas examinée dans les limites de cet article) est celle de savoir à quelles conditions cette application  $m$  définit un espace fibré.

Une notion essentielle de la théorie des modèles, directement liée à celle de type, est celle de saturation. Une structure  $M$  est dite *saturée* si, pour tout  $A \subseteq |M|$  de cardinalité  $< \|M\|$ , tout type de  $S_0(A)$  est réalisé dans  $M$ . Le fait pour un modèle  $M$  d'être saturé équivaut au fait que la conjonction infinie  $\bigwedge$  rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S_0(M) & \xrightarrow{\bigwedge} & D_0(M) \\ \exists^0 \downarrow & & \downarrow \exists^{0,M} \\ T(M) & \longrightarrow & \{0, -1\} \end{array}$$

(en voyant  $M$  comme une structure infinie, tandis que les types de  $S_0(M)$  continuent d'être définis relativement au langage finitaire  $L$ ). Cette condition est évidemment beaucoup moins forte que l'existence d'un morphisme  $S_*^\exists(M) \rightarrow M_*$  d'ensembles simpliciaux, c'est-à-dire la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} S_n(M) & \xrightarrow{\bigwedge} & D_n(M) \\ \exists^n \downarrow & & \downarrow \exists^{n,M} \\ S_{n-1}(M) & \longrightarrow & D_{n-1}(M) \\ & \bigwedge & \end{array}$$

pour tous les  $n \geq 0$ .

Une dernière direction homotopique concernant les types mérite d'être mentionnée. Un 1-type complet  $p \in S_1(M)$  est dit<sup>12</sup> *définissable* ssi, à toute formule  $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n)$  correspond une formule  $d_i^{p,n}(\varphi)(v_0, \dots, v_{n-1})$  telle que, pour tout  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  d'éléments de  $M$ ,  $\varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, v_0, a_i, \dots, a_n) \in p$  ssi  $M \models d_i^{p,n}(\varphi)(v_0, \dots, v_{n-1})[\vec{a}]$ . L'ensemble des opérateurs  $d_i^{p,n} : F_n \rightarrow F_{n-1}$  forment la *définition* de  $p$  (pour les formules à  $n$  variables libres). On a :

$$\begin{aligned} d_i^{p,n}(\neg\varphi) &= \neg d_i^{p,n}(\varphi) \\ d_i^{p,n}(\varphi \wedge \psi) &= d_i^{p,n}(\varphi) \wedge d_i^{p,n}(\psi). \end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on munit chaque  $F_n$  d'une structure de groupe  $\langle F_n, \leftrightarrow, \perp \rangle$ , chaque  $d_i^{p,n}$  constitue un homomorphisme de groupes. Par suite,

$$F_*^p = \langle \langle F_n, \leftrightarrow, \perp \rangle, (d_i^{p,n})_{0 \leq i \leq n}, (s_j^n)_{0 \leq j \leq n} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

(12) Cf. [10], p. 227-231.

est un groupe simplicial. Par le théorème de Moore<sup>13</sup>, l'ensemble simplicial sous-jacent à un groupe simplicial est fibrant. Par conséquent,  $F_*^p$  est fibrant pour tout type  $p$ . On peut alors appliquer à  $F_*^p$  les méthodes élémentaires de la théorie de l'homotopie.

En outre, en écrivant '◊' au lieu de '↔', l'application  $\partial^p$  définie par :

$$\partial^p(\varphi) := \bigcirc_{i=0}^n d_i^{p,n}(\varphi)$$

pour toute formule  $\varphi \in F_n$ , représente un opérateur de différenciation, qui donne lieu à un complexe de chaînes  $\langle F_*^p, \partial^p \rangle$ . On vérifie en effet que  $\partial^p \circ \partial^p \equiv \perp$ . On peut alors appliquer à  $F_*^p$  les méthodes élémentaires de l'algèbre homologique.

### 3.3. Digression géométrique

Soit  $F_n^T$  algèbre de Boole propositionnelle formée par les formules de  $F_n$  considérées modulo leur inter-dérivabilité dans  $T$  — la relation d'inter-dérivabilité, comme celle d'équivalence logique plus haut, étant considérée à chaque fois comme une relation d'équivalence définie dans les limites d'un certain  $F_n$ . Une telle algèbre peut être munie de la topologie de l'ordre pour la relation d'ordre donnée par :  $[\phi]_T \leq [\psi]_T$  ssi  $T \vdash \phi \rightarrow \psi$ . À présent, soit  $(P_i)_{i \in I}$  un ensemble d'ouverts relativement à cette topologie.

Dans ce contexte, Kouneiher et Balan<sup>14</sup> ont défini une *variété propositionnelle* comme une famille d'applications  $\varphi_i : I \rightarrow \wp(P_i)$ ,  $j \mapsto P_{i,j}$  accompagnée de fonctions continues de transition  $\phi_{i,j} : P_{i,j} \rightarrow P_{j,i}$  vérifiant  $\phi_{i,i} = \text{id}$  et  $\phi_{i,j} \circ \phi_{j,k} = \phi_{i,k}$ . La variété  $P$  est alors définie par l'ensemble  $\coprod_{i \in I} P_i / \sim$ , où, quels que soient  $i, j \in I$  et quels que soient  $x \in P_i$  et  $y \in P_j$ ,  $x \sim y$  ssi  $y = \phi_{i,j}(x)$ .

PROPOSITION 3.5. —  $F_*^T$  est une variété propositionnelle (au sens de Kouneiher-Balan).

*Démonstration.* — En effet, soit  $\phi \in F_k$ ,  $\psi \in F_n$  avec  $k > n$  ; on pose  $\phi \equiv \psi$  ssi (par définition) il existe  $(i_1, \dots, i_{k-n}) \in \{0, \dots, k-1\}^{k-n}$  tel que  $T \vdash \phi^{(i_1, \dots, i_{k-n})} \rightarrow \psi$ , où  $\phi^{(i_1, \dots, i_{k-n})}$  représente

$$\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_{k-n}} (\phi[x_{i_1}/v_{i_1}, v_{i_1}/v_{i_1+1}, \dots, v_{k-2}/v_{k-1}] \dots [x_{i_{k-n}}/v_{i_{k-n}}, v_{i_{k-n}}/v_{i_{k-n}+1}, \dots, v_{n-1}/v_n]).$$

<sup>(13)</sup> Voir [3], p. 12.

<sup>(14)</sup> Voir [8].

Sur une application possible du concept d'homotopie à la théorie des modèles

On pose alors :

$$[\phi] = \{\psi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n : \phi \equiv \psi\}$$

$$\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow \wp(F_n), \quad k \mapsto \{\phi \in F_n : [\phi] \cap F_k \neq \emptyset\}$$

$$\phi_{n,k} : \{\phi \in F_n : [\phi] \cap F_k \neq \emptyset\} \rightarrow \{\psi \in F_k : [\psi] \cap F_n \neq \emptyset\}, \quad \phi \mapsto \psi \in [\phi] \cap F_k$$

(le choix de  $\psi$  n'important pas). On obtient ainsi une variété propositionnelle comme définie ci-dessus.  $\square$

#### 4. Catégories de modèles (*categories of models*) et catégories de modèles (*model categories*)

##### 4.1. Homologie d'André

On a vu que tout modèle d'une théorie  $T$  du premier ordre donnait lieu à un ensemble simplicial. Mais la catégorie de tous les modèles de  $T$  (avec pour morphismes les extensions élémentaires) donne elle-même lieu à un ensemble simplicial, à savoir son « nerf ». Pour une petite catégorie  $C$  donnée, le *nerf*  $\mathcal{N}(C)$  de  $C$  est l'ensemble simplicial défini par  $(\mathcal{N}(C))_n = \text{Hom}_{\text{Cat}}(\Delta_n, C)$  pour tout  $n \geq 0$ . Autrement dit,  $(\mathcal{N}(C))_n$  est l'ensemble des  $n$ -chaînes de morphismes de  $C$ .

Cette construction donne lieu à l'homologie suivante, due à Michel André (cf. [1]). Soit  $\underline{N}$  une catégorie,  $\underline{M}$  une sous-catégorie pleine de  $\underline{N}$  et  $F : \underline{M} \rightarrow \underline{A}$  un foncteur de  $\underline{M}$  dans une catégorie abélienne  $\underline{A}$ . André décrit cette situation comme formant « une catégorie avec modèles munis de coefficients » : les modèles sont ici les objets de  $\underline{M}$ , et les coefficients, des objets de  $\underline{A}$ . On suppose en outre que  $\underline{M}$  est petite, que  $\underline{A}$  possède des sommes directes et qu'une somme directe de monomorphismes de  $\underline{A}$  est un monomorphisme de  $\underline{A}$ .

Sous ces hypothèses, on introduit, pour tout objet  $N$  de  $\underline{N}$  :

$$s_1^0 : \sum \{F(M_1) : M_1 \xrightarrow{\alpha} M_0 \xrightarrow{\beta} N\} \xrightarrow{\text{id}} \sum \{F(M_1) : M_1 \xrightarrow{\beta \circ \alpha} N\}$$

$$\text{et } s_1^1 : \sum \{F(M_1) : M_1 \xrightarrow{\alpha} M_0 \xrightarrow{\beta} N\} \xrightarrow{\sum F(\alpha)} \sum \{F(M_0) : M_0 \xrightarrow{\beta} N\}.$$

On pose alors :  $d_1 = s_1^0 - s_1^1$ , et de même pour  $d_2, d_3$ , etc.

On obtient ainsi le complexe  $C_*^{\underline{M}}(N, F)$  :

$$\dots \longrightarrow \sum_{M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N} F(M_2) \xrightarrow{d_2} \sum_{M_1 \rightarrow M_0 \rightarrow N} F(M_1) \xrightarrow{d_1} \sum_{M_0 \rightarrow N} F(M_0) \xrightarrow{d_0} 0$$

dont les groupes d'homologie sont les  $H_n(N, F) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$  pour tous les  $n \geq 0$ . Le  $n$ -ième objet  $(C_*^{\underline{M}}(N, F))_n$  n'est en fait rien d'autre que l'ensemble  $\mathbb{S}_n(\underline{M} \downarrow N)$  de tous les  $n$ -simplexes du nerf de la catégorie  $\underline{M} \downarrow N$ . Le résultat établi par André<sup>15</sup> est que si  $N$  est un objet de  $\underline{M}$ , alors :

$$H_n(N, F) = \begin{cases} F(N) & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Dans ce cadre, il est alors naturel de considérer :

- la catégorie  $\underline{N}$  de toutes les L-structures (pour un langage L du premier ordre donné) ;
- la catégorie  $\underline{M} = \text{Mod}(T)$  de tous les modèles de  $T$  (pour une théorie  $T$  dans L) ;
- le foncteur  $F : \underline{M} \rightarrow \text{Ab}$  qui associe à tout  $M$  son groupe d'automorphismes.

C'est exactement, étendue au cas d'une théorie  $T$ , l'application de la construction de André qu'a proposée René Guitart dans [4].

La catégorie  $\underline{M}$  n'est pas en général petite, mais la notion de « sous-paire adéquate<sup>16</sup> » permet de contourner la difficulté. Supposons en effet que  $\underline{M}$  possède des limites finies et qu'il existe une petite catégorie  $\underline{R}$  telle que, pour tout objet  $M$  de  $\underline{M}$ ,  $1_M$  se factorise selon un diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{1_M} & M, \\ & \searrow & \swarrow \\ & & R \end{array}$$

où  $R$  est un objet de  $\underline{R}$ . Les complexes  $C_*^{\underline{M}}(\underline{N}, F)$  et  $C_*^{\underline{R}}(\underline{N}, F)$  ont alors la même homologie. Cette situation se présente notamment lorsque  $\underline{M}$  est une catégorie accessible (c'est-à-dire lorsque  $T$  est une théorie axiomatisable au moyen d'énoncés de la forme  $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ , où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formules existentielles positives). La réalisation  $X_T = |N(\text{Mod}(T))|$  du nerf de  $\underline{M} = \text{Mod}(T)$  est un CW-complexe qui, comme le remarque Guitart, peut être vu comme un espace classifiant pour  $T$ .

---

<sup>(15)</sup> [1], lemme 1.1, p. 4.

<sup>(16)</sup> [1], §8-9.

## 4.2. La catégorie des modèles d'une théorie comme pré-catégorie de modèles

On peut donner une définition catégorique générale d'une catégorie équivalente à la catégorie des modèles d'une théorie du premier ordre, comme on peut donner une définition générale d'une catégorie comparable à une catégorie d'espaces topologiques. La première s'appelle une « classe élémentaire », la seconde une « catégorie de modèles ». Les axiomes qui définissent une classe élémentaire visent à exprimer les propriétés principales d'une collection axiomatisable de structures, ordonnée par une relation d'extension élémentaire. Les axiomes qui définissent une catégorie de modèles, quant à eux, visent à capturer algébriquement ce qui, de la structure de certaines catégories, permet de donner lieu à une notion d'homotopie interne à chacune de ces catégories<sup>17</sup>.

Dans la mesure où les modèles d'une théorie  $T$  induisent des ensembles simpliciaux et que la catégorie des ensembles simpliciaux est un exemple fondamental de catégorie de modèles, une idée naturelle est d'examiner la catégorie des modèles de  $T$  comme une ébauche de catégorie de modèles<sup>18</sup>.

Les définitions d'une classe élémentaire et d'une catégorie de modèles sont les suivantes. Une *classe élémentaire (abstraite)* est une collection  $K$  de structures (de même signature), munie d'une notion de plongement  $\prec$  d'une structure dans une autre et vérifiant les conditions suivantes<sup>19</sup> :

- Si  $M \prec N$ , alors  $M \subseteq N$ .
- La relation  $\prec$  constitue un ordre partiel sur  $K$ .
- Si  $(A_i)_{i < \delta}$  est une chaîne  $\prec$ -croissante :
  1.  $\bigcup_{i < \delta} A_i \in K$  ;
  2. pour tout  $j < \delta$ ,  $A_j \prec \bigcup_{i < \delta} A_i$  ;
  3. si tout  $A_i \prec M \in K$ , alors  $\bigcup_{i < \delta} A_i \prec M$ .
- Si  $A, B, C \in K$ ,  $A \prec C$ ,  $B \prec C$  et que  $A \subseteq B$ , alors  $A \prec B$ .

---

<sup>(17)</sup> Voir [3], II. 1.

<sup>(18)</sup> Dans cet ordre d'idées, Misha Gavrillovich et Assaf Hasson ont récemment introduit la catégorie dont les objets sont les ensembles et dans laquelle il existe un morphisme  $X \rightarrow Y$  à chaque fois que  $\forall x \in X \exists y \in Y (x \subseteq y)$ . Ils ont montré que la catégorie ainsi obtenue peut être munie d'une structure de catégorie de modèles, où l'homotopie consiste, pour deux ensembles, à ne différer que par un nombre fini d'éléments.

<sup>(19)</sup> Voir [2], Définition 4.1, p. 27-28.

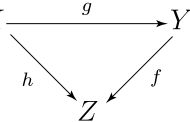


- Il existe un cardinal  $\text{LS}(K)$ , appelé *nombre de Löwenheim-Skolem* de  $K$ , tel que, pour  $A \subseteq B \in K$ , il existe  $A' \in K$  tel que  $A \subseteq A' \prec B$  et  $|A'| \leq |A| + \text{LS}(K)$ .

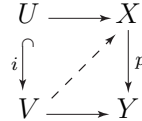
Par ailleurs, une *catégorie de modèles* est une catégorie  $\mathcal{C}$  munie de trois classes de morphismes, appelés fibrations, cofibrations et équivalences faibles, et ayant les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{C}$  possède des limites finies et des colimites finies.

2. Supposons que  $X \xrightarrow{g} Y$  commute ; si deux de ces trois morphismes sont des équivalences faibles, il en est de même du troisième.



3. Le rétracte d'une équivalence faible (resp. fibration, cofibration) est une équivalence faible (resp. fibration, cofibration).
4. Supposons que le diagramme de flèches pleines  $U \longrightarrow X$  commute



( $i$  étant une cofibration et  $p$  une fibration). Alors, si  $i$  ou  $p$  est en plus une équivalence élémentaire, la flèche en pointillé existe et le diagramme obtenu reste commutatif.

5. Tout morphisme  $f$  de  $\mathcal{C}$  se factorise de deux façons :
  - $f = p \circ i$ , où  $p$  est une fibration et  $i$  à la fois une cofibration et une équivalence faible ;
  - $f = q \circ j$ , où  $q$  est à la fois une fibration et une équivalence faible et  $j$  une cofibration.

Aucune articulation directe ne permet de comparer une classe élémentaire à une catégorie de modèles. La théorie formelle des espaces topologiques comme celle des ensembles simpliciaux n'est pas du premier ordre. Réciproquement, une classe élémentaire ne vérifie naturellement aucun des axiomes d'une catégorie de modèles. Il faut donc considérer des théories du premier ordre d'un genre particulier, aux modèles desquelles les notions qui interviennent dans la définition d'une catégorie de modèles, à commencer par celle de rétracte, puissent s'appliquer. Ce qui suit est la description d'une première piste dans cette direction.

Soient  $M, N$  deux L-structures. Un *homomorphisme*  $f : M \rightarrow N$  est une application  $f : |M| \rightarrow |N|$  telle que :

Sur une application possible du concept d'homotopie à la théorie des modèles

- $\forall c \in L \ f(c^M) = c^N$  ;
- $\forall F^{(k)} \in L \ \forall \vec{a} \in M^k \ f(F^M(\vec{a})) = F^N(f(\vec{a}))$  ;
- $\forall R^{(n)} \in L \ \forall \vec{a} \in M^n$ , si  $\vec{a} \in R^M$  alors  $f(\vec{a}) \in R^N$ .

Une L-structure  $M$  est dite *atomique compacte* si tout ensemble  $\Phi$  de formules primitives positives de L (c'est-à-dire de formules de la forme  $\exists \vec{x} (\psi_1(\vec{x}, \vec{a}) \wedge \dots \wedge \psi_n(\vec{x}, \vec{a}))$ , chaque  $\psi_i$  étant atomique) à paramètres  $\vec{a}$  dans  $M$  qui est finiment réalisé dans  $M$ , est réalisé dans  $M$ . On a que  $M$  est atomique compacte ssi, pour tout plongement élémentaire  $f : M \rightarrow N$ , il existe un homomorphisme  $g : N \rightarrow M$  tel que  $gf = \text{id}_M$ . Ceci, à son tour, est équivalent à : pour tout plongement diagonal  $f : M \rightarrow M^U$  de  $M$  dans une ultrapuissance de  $M$ , il existe un homomorphisme  $g : M^U \rightarrow M$  tel que  $gf = \text{id}_M$ . On peut appeler un tel homomorphisme  $g$  une « projection d'ultrapuissance ».

Tout produit direct de structures atomiques compactes est une structure atomique compacte, et donc toute ultrapuissance d'une structure atomique compacte est une structure atomique compacte. En outre, une sous-structure  $M_0$  de  $M$  est appelée un *rétracte* de  $M$  s'il existe un homomorphisme  $f : M \rightarrow M_0$  dont la restriction à  $M_0$  est l'identité. Les structures atomiques compactes vérifient les deux propriétés suivantes : tout rétracte d'une structure atomique compacte est atomique compact, et toute structure atomique compacte est un rétracte de chacune de ses extensions élémentaires<sup>20</sup>.

Ces résultats préalables motivent la considération d'une théorie de Horn  $T$  complète et  $\lambda$ -catégorique (avec  $\lambda > |L|$ ). Tout modèle d'une telle théorie, en effet, est atomique compact. Soit alors  $\mathcal{C}_T$  la catégorie des modèles de  $T$ , munie de trois classes distinguées de morphismes,

- dont les morphismes sont tous les homomorphismes entre modèles élémentairement équivalents ;
- dont les morphismes de première classe sont toutes les projections d'ultrapuissance ;
- dont les morphismes de deuxième classe sont tous les plongements élémentaires ;
- dont les morphismes de troisième classe sont tous les homomorphismes induisant un isomorphisme entre sous-ensembles définissables.

PROBLÈME 4.1. — *Quelle structure faut-il ajouter à  $\mathcal{C}_T$ , ou quelle propriété supplémentaire faut-il supposer à  $T$ , pour obtenir une catégorie de modèles?*

---

<sup>(20)</sup> Voir [5], 10.7.

## 5. Conclusion

Le propos de cet article a été d'établir un cadre général d'importation, en logique, de concepts venus de la théorie de l'homotopie, à la fois de la théorie des ensembles simpliciaux et de la théorie des catégories de modèles. Le point de départ de ce rapprochement est syntaxique : la possibilité de voir une formule d'un langage du premier ordre comme une chaîne, et la quantification comme un opérateur de face. Cette analogie persiste lorsqu'on aborde l'interprétation du langage et qu'on considère la structure des sous-ensembles définissables d'une structure d'interprétation, puis les espaces de types associés à une théorie complète, ce qui permet de rejoindre, notamment, certains aspects des travaux de R. Knight en théorie des modèles. Un prolongement naturel de cette piste consiste à examiner l'écart séparant la catégorie des modèles d'une théorie du premier ordre (une « classe élémentaire »), d'une catégorie de modèles.

Un tel cadre d'analyse demanderait bien entendu à être approfondi, et également appliqué à des théories axiomatiques bien connues, telle ZFC ou l'arithmétique de Peano — ce ne pouvait être l'objet de ce travail, mais pourrait être celui d'un travail ultérieur. Mais ce cadre a d'ores et déjà permis de donner lieu à certains résultats (en particulier les deux théorèmes de la section 3.1), qui précisent la correspondance pouvant être établie de la théorie des modèles vers la théorie de l'homotopie. Il permet également d'éclairer l'importance transversale de la notion d'homotopie : en effet, au-delà du contexte des espaces topologiques, les notions de structure et de plongement élémentaire concernent n'importe quelle théorie du premier ordre, et suggèrent que, de façon très générale, les relations de transformation d'une structure en une autre peuvent, sous certaines conditions, avoir pour guide le genre de transformations entre espaces sur lesquelles se penche la topologie algébrique.

## Bibliographie

- [1] ANDRÉ (M.). — Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative, volume 32 of LNM. Springer, Berlin (1967).
- [2] BALDWIN (J.). — Category. Lecture Notes. American Mathematical Society, Providence (2010).
- [3] GOERSS (P. G.), JARDINE (J. F.). — Simplicial Homotopy Theory, volume 174 of Progress in Mathematics. Birkhäuser, Basel (1999).
- [4] GUITART (R.). — Construction of an homology and a cohomology theory associated to a first order formula. Diagrammes, 23, p. 7-13 (1990).
- [5] HODGES (W.). — Model Theory, volume 42 of Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge (1993).

- [6] HOFMANN (M.), STREICHER (T.). — The groupoid interpretation of type theory. In Sambin (G.) et Smith (J. M.), editors, *Twenty Five Years of Constructive Type Theory*, volume 36 of *Oxford Logic Guides*, p. 83-111. Oxford University Press, New York (1998).
- [7] KNIGHT (R. W.). — Categories of topological spaces and scattered theories. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 48(1), p. 53-77 (2007).
- [8] KOUNEHER (J.), BALAN (A. P. M.). — Propositional manifolds and logical cohomology. *Synthese*, 125(1-2), p. 147-154 (2000).
- [9] MAY (J. P.). — *A concise course in algebraic topology*. The University of Chicago Press, Chicago (1999).
- [10] POIZAT (B.). — *A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*. Universitext. Springer, New York (2000).
- [11] WESTERSTÅHL (D.). — Self-commuting quantifiers. *Journal of Symbolic Logic*, 61(1), p. 212-224 (1996).