ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Casoratien et équations aux différences p-adiques

Tome XXII, nº 3 (2013), p. 495-523.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2013_6_22_3_495_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXII, n° 3, 2013
pp. 495–523

Casoratien et équations aux différences p-adiques

Jean-Paul Bézivin[1]

Résumé. — Dans cet article, nous démontrons une inégalité liant la croissance d'un casoratien généralisé de m séries entières p-adique à la croissance du casoratien ordinaire de ces m séries entières. Il en résulte que si le casoratien de m fonctions entières p-adiques est un polynôme non nul, alors toutes ces fonctions sont des polynômes. Comme application, nous montrons que si une équation aux différences linéaire d'ordre t à coefficients dans $\mathbb{C}_p[x]$ a t solutions méromorphes dans tout $\mathbb{C}_p$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$, alors elle a t solutions fractions rationnelles linéairement indépendantes. C'est aussi le cas si l'équation aux différences est à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$, et si, pour une infinité de nombres premiers p, elle a t solutions méromorphes, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$, dans un disque de $\mathbb{C}_p$ de rayon strictement supérieur à 1.

Abstract. — In this paper, we prove an inequality linking the growth of a generalized casoratian of m p-adic power series to the growth of the ordinary casoratian of these m power series. A consequence is that if the casoratian of m entire p-adic functions is a non zero polynomial, then all these functions are polynomials. As an application, we prove that if a linear difference equation of order t with coefficients in $\mathbb{C}_p[x]$ has t solutions meromorphic in all $\mathbb{C}_p$, linearly independant over $\mathbb{C}_p$, then the difference equation has t solutions linearly independant over $\mathbb{C}_p$, that are rational functions. This is also the case when the linear difference equation has coefficients in $\mathbb{Q}[x]$, and has for an infinity of prime numbers p, t meromorphic solutions, linearly independant over $\mathbb{C}_p$, in a disc of $\mathbb{C}_p$ with radius strictly greater than 1.

(*) Reçu le 05/05/2012, accepté le 25/01/2013

(1) 1, Allée Edouard Quincey, 94200, Ivry-sur-Seine, France.
jp.bezivin@orange.fr, http://jp.bezivin.pagesperso-orange.fr

Article proposé par Damian Rössler.

1. Introduction, notations et résultats

Soit p un nombre premier. Nous notons $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, et $\mathbb{C}_p$ un complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on munit de la valeur absolue p-adique usuelle.

Dans tout ce qui suit, nous introduisons l'opérateur Δ, qui à une fonction f associe $\Delta(f)$ définie, quand cela a un sens, par $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$. Nous utiliserons aussi l'opérateur E défini par $E(f)(x) = f(x+1)$.

Nous définissons aussi le casoratien généralisé de m fonctions pour le m-uplet $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_m)$ (voir la définition plus bas); nous allons démontrer tout d'abord une inégalité liant la croissance d'un tel casoratien généralisé à la croissance du casoratien « ordinaire » de ces m fonctions (que nous appellerons casoratien des m fonctions) (voir le théorème 3.1). On peut voir une analogie de ce type de résultat avec les « estimations effectives » démontrées dans [7], chapitre IV.

Il en résulte comme première application que si le casoratien de m fonctions entières dans $\mathbb{C}_p$ est un polynôme, alors toutes les fonctions f_k sont des polynômes (voir le théorème 3.4).

Nous passons ensuite à l'étude des équations aux différences à coefficients polynômes dans $\mathbb{C}_p[x]$ pour un p premier fixé. Si une telle équation d'ordre s a s solutions fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$, alors elle a s solutions fractions rationnelles linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$ (cf. le théorème 4.2).

Enfin, pour des équations aux différences à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$, nous obtenons le résultat suivant : s'il existe un ensemble infini G de nombres premiers p tels que si $p \in G$, l'équation a s solutions méromorphes dans un disque de $\mathbb{C}_p$ de rayon strictement supérieur à 1, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$, l'équation a s solutions fraction rationnelles de $\mathbb{Q}(x)$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ (cf le théorème 5.6).

On peut voir ce résultat comme un analogue du critère de rationalité de Borel-Dwork (cf [1] chapitre V et [2] chapitre VII). Ce critère considère un objet global (une série formelle f à coefficients par exemple dans $\mathbb{Q}$, ayant un rayon de convergence non nul dans $\mathbb{C}$), ayant des propriétés p-adiques (portant sur le rayon de méromorphie de f dans $\mathbb{C}_p$), avec la conclusion que f est la série de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle. Ici l'objet global est l'équation aux différences E, qui possède comme propriétés p-adiques d'avoir un système complet de solutions méromorphes dans un disque de $\mathbb{C}_p$ de rayon strictement supérieur à 1 pour une infinité de p premier, avec la conclusion que toutes les solutions de E sont des fractions rationnelles.

On peut aussi voir ce résultat comme un (modeste...) analogue de la conjecture de Grothendieck-Katz, nous renvoyons le lecteur intéressé à [3] pour plus de détail sur cette conjecture.

Tous ces résultats sont les analogues de résultats démontrés pour le wronskien et les équations différentielles dans [4].

Nous renvoyons à [5] pour le fait que si une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}_p$ est solution d'une équation aux différences dont les coefficients sont des polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}[x]$, alors c'est une fraction rationnelle, ainsi que le fait qu'il existe des fonctions méromorphes transcendantes solutions d'équations aux différences à coefficients dans $\mathbb{C}_p[x]$.

Ces résultats se déduisent d'une correspondance entre fonctions entières solutions d'équations différentielles p-adiques et fonctions entières solutions d'équations aux différences p-adiques, que nous étudions dans [5].

L'auteur remercie vivement le Referee pour ses suggestions, et en particulier de lui avoir signalé la référence [6].

2. Premières propriétés

Comme nous nous intéressons à des fonctions méromorphes, il en résulte qu'en général, nous ferons l'hypothèse que ces fonctions méromorphes le sont dans un disque « ouvert » de rayon $\rho > 1$. Pour un $\rho > 0$ (éventuellement $\rho = +\infty$), nous notons A_ρ l'ensemble des séries entières convergentes dans le disque de centre 0, rayon ρ, et par M_ρ l'ensemble des fonctions méromorphes dans ce disque. L'opérateur Δ est donc défini sur A_ρ et M_ρ si $\rho > 1$.

On rappelle que pour une série entière $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ convergente pour $x \in \mathbb{C}_p$, $|x| < \rho$ (avec $\rho > 0$), on note, pour $R \in]0, \rho[$, $|f|(R) = \mathrm{Max}\{|a_n|R^n\}$. Dans le cadre où l'on s'est placé, le *principe du maximum* est valide : on a $\mathrm{Sup}\{|f(x)|, |x| \leqslant R\} = |f|(R)$. De plus, l'application $f \to |f|(R)$ est une norme ultramétrique sur l'espace des séries entières de rayon de convergence au moins ρ, qui est multiplicative, ce qui permet d'étendre la notation au cas des fonctions méromorphes dans le disque $D(0, \rho)$. D'autre part, pour toute fonction méromorphe dans le disque $D(0, \rho)$, on a pour $R \in]0, \rho[$ l'inégalité $|f'|(R) \leqslant \dfrac{|f|(R)}{R}$.

L'opérateur Δ a les propriétés suivantes :

Proposition 2.1. — *On suppose $\rho > 1$.*

a) Soit $f, g \in M_\rho$. On a

$$\Delta(fg)(x) = \Delta(f)(x)\Delta(g)(x) + f(x)\Delta(g)(x) + \Delta(f)(x)g(x)$$

ou encore

$$\Delta(fg)(x) = E(f)(x)\Delta(g)(x) + \Delta(f)(x)g(x)$$

Plus généralement, on a une « Formule de Leibniz » ; pour $n \geqslant 0$, on a :

$$\Delta^n(fg)(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (E^j\Delta^{n-j})(f)(x)\Delta^j(g)(x)$$

b) Soit $f \in M_\rho$, et $R \in]1, \rho[$. On a :

$$\big|\Delta(f)\big|(R) \leqslant \frac{|f|(R)}{R}$$

c) Soit $f \in M_\rho$, et $R \in]1, \rho[$. On a :

$$|E(f)|(R) = |f|(R)$$

d) Soit $g \in M_\rho$. Si on a $\Delta(g) = 0$, alors g est constante. Plus généralement, si $\Delta(g)$ est un polynôme, il en est de même de g.

Démonstration. — La première formule du a) est un calcul facile. Pour la seconde formule, on fait une récurrence et la preuve est la même que pour la formule de Leibniz classique.

Pour le b), on commence par le cas d'une série entière dans A_ρ. On regarde d'abord ce qui se passe pour $f_n(x) = x^n$: $g_n(x) = \Delta(f_n)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k$, et on a $|\binom{n}{k} x^k| \leqslant R^k$ pour $|x| \leqslant R$. Il en résulte que $|g_n|(R) \leqslant R^{n-1}$. Si $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, on a $\Delta(f)(x) = \sum_{n \geqslant 1} a_n g_n(x)$, et donc $|\Delta(f)|(R) \leqslant \max\{|a_n|R^{n-1}\} \leqslant \dfrac{|f|(R)}{R}$. Nous passons maintenant au cas général d'une fonction méromorphe $f \in M_\rho$, que nous écrivons $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où u et v sont dans A_ρ. On a $\Delta(f)(x) = \dfrac{\Delta(u)(x)v(x) - u(x)\Delta(v)(x)}{v(x)v(x+1)}$. Comme le disque « fermé » de centre 0, rayon R est stable par $x \to x+1$, on a si $v_1(x) = v(x+1)$ que $|v_1|(R) = |v|(R)$. Donc on a

$$|\Delta(f)|(R) = \frac{|\Delta(u)v - u\Delta(v)|(R)}{|v|(R)|v_1|(R)} \leqslant \frac{|u|(R)|v|(R)}{R|v|(R)^2} = \frac{|u|(R)}{R|v|(R)} = \frac{|f|(R)}{R}$$

ce qui termine la démonstration.

c) Laissé au lecteur.

d) Supposons que $\Delta(g) = 0$. Soit $R \in]1, \rho[$, dans le groupe des valeurs $|\mathbb{C}_p^*|$, tel que g n'ait aucun pôle sur le cercle de centre 0 et rayon R, et ω de module R. On a $g(\omega + 1)$ qui est bien défini, et $g(\omega+1) = g(\omega)$. Comme $|\omega + 1| = |\omega|$, on peut réitérer cette opération ; on en tire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g(\omega + n)$ qui est bien défini et qui vaut $g(\omega)$, d'où le fait que g est constante. L'application de $\mathbb{C}_p[x]$ dans lui-même qui au polynôme P associe $\Delta(P)$ est surjective, car les images des x^k, $k \geqslant 1$ forment une base de $\mathbb{C}_p[x]$. Supposons que $\Delta(g) = Q \in \mathbb{C}_p[x]$, il existe donc un polynôme P tel que $\Delta(P) = Q$. Alors $\Delta(g - P) = 0$, donc $g - P$ est une constante et g est un polynôme. $\square$

Nous allons avoir besoin d'un résultat sur le casoratien de séries entières. Nous aurons besoin de quelques notations supplémentaires.

Soient $f_1, \cdots, f_m$ m fonctions dans M_ρ pour un $\rho > 1$, et $n_1, \cdots, n_m$ des entiers naturels. Nous posons $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ et $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_m)$. Nous appellerons *casoratien généralisé* et nous noterons $c(\underline{f}, \underline{n})$ le déterminant

$$c(\underline{f}, \underline{n}) = \begin{vmatrix} \Delta^{n_1}(f_1) & . & \cdots & \Delta^{n_m}(f_1) \\ \Delta^{n_1}(f_2) & . & \cdots & \Delta^{n_m}(f_2) \\ . & . & \cdots & . \\ \Delta^{n_1}(f_m) & . & \cdots & \Delta^{n_m}(f_m) \end{vmatrix}$$

Dans le cas $m = 1$, on a $c(\underline{f}, \underline{n}) = \Delta^{n_1}(f_1)$. Comme cas particulier, le casoratien « ordinaire » des m fonctions $f_1, \cdots, f_m$ (que nous appellerons simplement « casoratien ») est $c(\underline{f}, \underline{q})$, où $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_m)$ et $\underline{q} = (0, \cdots, m-1)$:

$$c(\underline{f}, \underline{q}) = \begin{vmatrix} f_1 & . & \cdots & \Delta^{m-1}(f_1) \\ f_2 & . & \cdots & \Delta^{m-1}(f_2) \\ . & . & \cdots & . \\ f_m & . & \cdots & \Delta^{m-1}(f_m) \end{vmatrix}$$

Le casoratien a des propriétés analogues à celles du wronskien de séries entières, mais elles sont moins faciles à trouver dans la littérature. En particulier, on a le résultat suivant, qui, comme nous en a informé le Referee, est démontré par Casorati dans [6] ; nous en donnons la preuve pour le confort du lecteur :

PROPOSITION 2.2. — *Soit $\rho > 1$, alors le casoratien de m fonctions $f_1, \cdots, f_m$ appartenant à M_ρ est nul, si et seulement si ces m fonctions sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{C}_p$.*

Démonstration. — Le fait que si les fonctions sont dépendantes, alors le casoratien est nul est clair. On passe à la réciproque. Le cas $m = 1$ est trivial, on regarde le cas $m = 2$. On peut supposer que les deux fonctions f_1, f_2 sont non nulles. Un petit calcul montre que le fait que le casoratien soit nul donne que si $g = \dfrac{f_1}{f_2} \in M_\rho$, on a $\Delta(g) = 0$. Par suite g est constante, et f_1 et f_2 sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{C}_p$. On fait ensuite une récurrence sur m. On suppose donc le résultat acquis pour m, et on se donne $m+1$ fonctions dont le casoratien est nul. On peut supposer que $f_1, \cdots, f_m$ sont linéairement indépendantes. On voit facilement que si $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_{m+1})$, $\underline{q_m} = (0, 1, \cdots, m)$, on a l'égalité suivante :

$$c(\underline{f}, \underline{q_m}) = \begin{vmatrix} f_1(x) & . & \cdots & f_1(x+m) \\ f_2(x) & . & \cdots & f_2(x+m) \\ . & . & \cdots & . \\ f_m(x) & . & \cdots & f_m(x+m) \\ f_{m+1}(x) & . & \cdots & f_{m+1}(x+m) \end{vmatrix} = 0$$

Il existe donc une combinaison linéaire nulle des lignes de ce déterminant, les coefficients non tous nuls appartenant au corps de base, qui est ici M_ρ; on l'écrit $L_k(x) = a_1(x)f_1(x+k) + \cdots + a_{m+1}(x)f_{m+1}(x+k) = 0$, $k = 0, \cdots, m$. Le coefficient a_{m+1} ne peut être nul; en effet, si c'est le cas, on a une relation de dépendance non triviale (à coefficients dans M_ρ) sur les lignes du déterminant donnant le casoratien des fonctions $f_1, \cdots, f_m$; donc ce déterminant est nul, et par hypothèse de récurrence, les fonctions $f_1, \cdots, f_m$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{C}_p$, contrairement à l'hypothèse faite. On peut donc diviser par a_{m+1}, ou encore supposer que $a_{m+1} = 1$ sans changer les notations.

Ceci étant dit, on considère $L_k(x+1) - L_k(x) = (a_0(x+1) - a_0(x))f_1(x+k+1) + \cdots + (a_m(x+1) - a_m(x))f_m(x+k+1) = 0$, pour $k = 0, \cdots, m-1$. On a là une relation de dépendance sur M_ρ entre les lignes du déterminant donnant le casoratien de $f_1, \cdots, f_m$ (au point $x+1$). D'après les hypothèses faites, cette relation ne peut être que triviale, donc $a_j(x+1) - a_j(x) = 0$, et a_j est une fonction constante, donc un élément de $\mathbb{C}_p$. On a donc montré qu'il existe une relation de dépendance non triviale sur $\mathbb{C}_p$ entre les f_k, $k = 1, \cdots, m+1$, ce qui termine la démonstration. □

Nous aurons aussi besoin de voir l'action de l'opérateur Δ sur un déterminant dont les éléments sont des fonctions auxquelles on peut l'appliquer. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3. — *Soient $C_1, \cdots, C_m$ des colonnes de m fonctions, on note $\Delta(C_k)$ la colonne des éléments de C_k auxquels on a appliqué Δ. Soit D le déterminant $D = \det(C_1, \cdots, C_m)$. On a la formule :*

$$\Delta(D) = \sum_{J; J \neq \emptyset} \det(\Delta(C_k), k \in J; C_k, k \notin J)$$

où J parcourt toutes les parties non vides de $\{1, \cdots, m\}$.

Démonstration. — Posons $C_j = (a_{i,j})$ et soit J une partie quelconque de $\{1, \cdots, m\}$; considérons le déterminant D_J construit sur les colonnes $\Delta(C_j), j \in J$, et $C_j, j \notin J$. Ses éléments sont donc les $a^*_{i,j}$ définis par $a^*_{i,j} = \Delta(a_{i,j})$ si $j \in J$, et $a^*_{i,j} = a_{i,j}$ si $j \notin J$. On a la formule $D_J = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^m a^*_{\sigma(j),j}$, où la sommation se fait sur les permutations σ de $\{1, \cdots, m\}$, et où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature.

On a, la sommation se faisant sur toutes les parties J de $\{1, \cdots, m\}$:

$$\sum_J D_J = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(\sum_J \prod_{j=1}^m a^*_{\sigma(j),j}) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(\sum_J \prod_{j \in J} \Delta(a_{\sigma(j),j}) \prod_{j \notin J} a_{\sigma(j),j})$$

D'autre part :

$$\sum_J \prod_{j \in J} \Delta(a_{\sigma(j),j}) \prod_{j \notin J} a_{\sigma(j),j} = \prod_{j=1}^m (\Delta(a_{\sigma(j),j}) + a_{j,\sigma(j)}).$$

Comme $\Delta(f) + f = E(f)$, on a donc

$$\sum_J \prod_{j \in J} \Delta(a_{\sigma(j),j}) \prod_{j \notin J} a_{\sigma(j),j} = \prod_{j=1}^m E(a_{\sigma(j),j})$$

Par conséquent,

$$\sum_J D_J = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^m E(a_{\sigma(j),j}) = E(\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^m a_{\sigma(j),j}) = E(D)$$

Finalement, comme D lui-même correspond à prendre pour J la partie vide, on a

$$\sum_{J;J\neq\emptyset} D_J = E(D) - D = \Delta(D)$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.4. — *Soient $f_1, \cdots, f_m$ des fonctions dans M_ρ, avec $\rho > 1$. On pose $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, $\underline{n_k} = (0, \cdots, \widehat{k}, \cdots, m)$. On notera que $\underline{n_m} = \underline{q} = (0, \cdots, m-1)$. On a :*

$$\Delta(c(\underline{f}, \underline{n_m})) = \sum_{k=0}^{m-1} c(\underline{f}, \underline{n_k})$$

Démonstration. — Soit J une partie non vide de $\{0, \cdots, m-1\}$. Appliquer Δ aux éléments des colonnes d'indice $j \in J$ dans $c(\underline{f}, \underline{n_m})$ donne un déterminant nul, s'il existe un $j \in J$, $j < m$ tel que $j + 1 \notin J$, car alors on aura un déterminant avec deux colonnes égales. Autrement dit, il suffit de considérer les parties J non vides telles que si $j \in J$, et $j < m$, on a aussi $j + 1 \in J$. Ces parties sont de la forme $\{k, \cdots, m-1\}$ avec $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Le déterminant obtenu pour l'indice k est alors $c(\underline{f}, \underline{n_k})$, d'où le résultat en appliquant la proposition 2.3. $\square$

3. Inégalités pour le casoratien généralisé

Le premier résultat, qui sera à la base de tous les résultats démontrés dans ce papier, est le suivant :

Théorème 3.1. — *Soient $f_1, \cdots, f_m$ des séries entières à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de rayon de convergence au moins $\rho > 1$, et $n_1, \cdots, n_m$ des entiers naturels, $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_m)$ et $\underline{q} = (0, \cdots, m-1)$. On a alors pour tout $R \in]1, \rho[$ l'inégalité :*

$$\left|c(\underline{f}, \underline{n})\right|(R) \leqslant \frac{\left|c(\underline{f}, \underline{q})\right|(R)}{R^{(n_1+\cdots+n_m)-m(m-1)/2}}$$

Démonstration. — Dans toute la suite, le réel R appartient à $]1, \rho[$.

Le cas $m = 1$.

On itère l'inégalité $|\Delta(f)|(R) \leqslant \dfrac{|f|(R)}{R}$, il n'y a pas de difficultés.

Le cas $m = 2$.

Soient donc f_1, f_2 deux séries entières dans $\mathbb{C}_p$ (que l'on peut supposer pour démontrer l'assertion linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$), de rayon de convergence au moins ρ. On regarde l'équation aux différences (F) vérifiée par ces deux fonctions, qui est

$$\begin{vmatrix} y & \Delta(y) & \Delta^2(y) \\ f_1 & \Delta(f_1) & \Delta^2(f_1) \\ f_2 & \Delta(f_2) & \Delta^2(f_2) \end{vmatrix} = 0$$

Elle s'écrit aussi sous la forme $B_2(x)\Delta^2(y)(x) - B_1(x)\Delta(y)(x) + B_0(x)y(x) = 0$, avec pour $\underline{f} = (f_1, f_2)$, $\underline{q_2} = (0,1), \underline{q_1} = (0,2)$ et $\underline{q_0} = (1,2)$, les égalités $B_2(x) = c(\underline{f}, \underline{q_2})$, $B_1 = c(\underline{f}, \underline{q_1})$ et $B_0 = c(\underline{f}, \underline{q_0})$. D'après le corollaire 2.4, on a $\Delta(c(\underline{f}, \underline{q_2})) = c(\underline{f}, \underline{q_1}) + c(\underline{f}, \underline{q_0})$, soit encore $\Delta(B_2) = B_1 + B_0$. Prenons $y = f_1$. On a donc :

$$B_2\Delta^2(f_1) - B_1\Delta(f_1) + B_0 f_1 = B_2\Delta^2(f_1) - (B_1 + B_0)\Delta(f_1) + B_0(\Delta(f_1) + f_1) = 0$$

Notons que $\Delta(f_1)(x) + f_1(x) = f_1(x+1) = E(f_1)$. On a donc :

$$B_0(x) = -\frac{B_2\Delta^2(f_1) - \Delta(B_2)\Delta(f_1)}{E(f_1)}.$$

Comme $|\Delta(f)|(R) \leqslant \dfrac{|f|(R)}{R}$, $|\Delta^2(f)|(R) \leqslant \dfrac{|f|(R)}{R^2}$ et $|E(f)|(R) = |f|(R)$ pour une fonction f, on en déduit que $|B_0|(R) \leqslant \dfrac{B_2|(R)}{R^2}$. On a maintenant $B_1 = \Delta(B_2) - B_0$, on en déduit que

$$|B_1|(R) \leqslant \max\{|\Delta(B_2)|(R), |B_0|(R)\} \leqslant \max\{\frac{|B_2|(R)}{R}, \frac{|B_2|(R)}{R^2}\}$$

et comme $R > 1$, on a $|B_1|(R) \leqslant \dfrac{|B_2|(R)}{R}$.

On écrit maintenant l'équation aux différences sous la forme (G) suivante :

$$\Delta^2(y)(x) = A_1(x)\Delta(y)(x) + A_0(x)y(x)$$

avec $A_1(x) = \dfrac{B_1(x)}{B_2(x)}$, $A_0(x) = -\dfrac{B_0(x)}{B_2(x)}$. Ce qui précède montre que $|A_1|(R) \leqslant \dfrac{1}{R}$ et $|A_0|(R) \leqslant \dfrac{1}{R^2}$ pour $R > 1$.

Pour une solution y de (G), on exprime maintenant les $\Delta^n(y)$ sous la forme

$$\Delta^n(y)(x) = A_{1,n}(x)\Delta(y)(x) + A_{0,n}(x)y(x)$$

On calcule $\Delta^{n+1}(y)$ en utilisant la proposition 2.1, a), on a pour $\Delta^{n+1}(f)$ l'expression :

$$\Delta(A_{1,n})\Delta^2(y)+\Delta(A_{1,n})\Delta(y)+A_{1,n}\Delta^2(y)+\Delta(A_{0,n})\Delta(y)+\Delta(A_{0,n})y+A_{0,n}\Delta(y)$$

On remplace $\Delta^2(y)$ par son expression donnée par l'équation (G), et on a donc les relations de récurrence suivantes :

$$A_{1,n+1} = A_1\Delta(A_{1,n}) + A_1A_{1,n} + \Delta(A_{1,n}) + \Delta(A_{0,n}) + A_{0,n}$$

et

$$A_{0,n+1} = A_0\Delta(A_{1,n}) + A_0A_{1,n} + \Delta(A_{0,n})$$

ou encore

$$A_{1,n+1} = A_1E(A_{1,n}) + \Delta(A_{1,n}) + E(A_{0,n})$$

et

$$A_{0,n+1} = A_0E(A_{1,n}) + \Delta(A_{0,n})$$

Montrons que $|A_{1,n}|(R) \leqslant \dfrac{1}{R^{n-1}}$ et $|A_{0,n}|(R) \leqslant \dfrac{1}{R^n}$ pour $n \geqslant 0$ et $R \in]1, \rho[$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$, car $A_{0,0} = 1$ et $A_{1,0} = 0$, pour $n = 1$ car $A_{1,1} = 1$ et $A_{0,1} = 0$, et pour $n = 2$ car $A_{1,2} = A_1$ et $A_{0,2} = A_0$. Ensuite une récurrence facile utilisant les formules de récurrence démontre l'assertion.

On a maintenant la formule matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta^{n_1}(f_1) & \Delta^{n_2}(f_1) \\ \Delta^{n_1}(f_2) & \Delta^{n_2}(f_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \Delta(f_1) \\ f_2 & \Delta(f_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & A_{0,n_2} \\ A_{1,n_1} & A_{1,n_2} \end{pmatrix}$$

ce qui en prenant le déterminant, donne avec les notations $\underline{f} = (f_1, f_2)$, $\underline{n} = (n_1, n_2)$ et $\underline{q_2} = (0, 1)$ la formule

$$c(\underline{f}, \underline{n}) = (A_{0,n_1}A_{1,n_2} - A_{0,n_2}A_{1,n_1})c(\underline{f}, \underline{q_2})$$

Une majoration immédiate du terme $A_{0,n_1}A_{1,n_2} - A_{0,n_2}A_{1,n_1}$ donne comme majorant $\dfrac{1}{R^{n_1+n_2-1}}$, ce qui termine la démonstration dans ce cas $m = 2$.

Le cas général.

Pour prouver le cas général, nous procédons maintenant par récurrence sur m. Nous supposons donc le résultat acquis pour $k \leqslant m$ séries entières, et des indices quelconques, nous nous donnons $m+1$ séries entières $f_1, \cdots, f_{m+1}$, des entiers $n_1, \cdots, n_{m+1}$, nous posons $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_{m+1})$, $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_{m+1})$, $\underline{q} = (0, \cdots, m)$ et il nous faut donc démontrer que

$$\left|c(\underline{f}, \underline{n})\right|(R) \leqslant \frac{\left|c(\underline{f}, \underline{q})\right|(R)}{R^{(n_1+\cdots+n_{m+1})-\frac{m(m+1)}{2}}}$$

On peut sans perte de généralité supposer que les séries entières $f_1, \cdots, f_{m+1}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$. Nous allons suivre essentiellement le schéma de démonstration du cas $m = 2$.

Pour cela, nous écrivons l'équation aux différences vérifiée par les fonctions f_j :

$$\begin{vmatrix} y & \Delta(y) & . & \Delta^{m+1}(y) \\ f_1 & \Delta(f_1) & . & \Delta^{m+1}(f_1) \\ . & . & . & . \\ f_{m+1} & \Delta(f_{m+1}) & . & \Delta^{m+1}(f_{m+1}) \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation F s'écrit sous la forme

$$\sum_{l=0}^{m+1} (-1)^{m+1-l} c(\underline{f}, \underline{n_l}) \Delta^l(y) = 0$$

en notant $f = (f_1, \cdots, f_{m+1})$, et $n_l = (0, \cdots, \widehat{l}, \cdots, m+1)$, (où le terme $\widehat{l}$ est omis, n_l est donc un $m+1$-uplet).

Nous allons démontrer dans un premier temps que l'on a l'inégalité $|c(\underline{f}, \underline{n_j})|(R) \leqslant \dfrac{|c(\underline{f}, \underline{n_{m+1}})|(R)}{R^{m+1-j}}$ pour $R > 1$ et $j = 0, \cdots, m+1$. C'est évidemment vrai si $j = m+1$.

On utilise l'équation F, on écrit qu'elle est vérifiée pour $f_1, \cdots, f_m$. On note F_j le premier membre de l'équation F où l'on a remplacé y par f_j, on a donc $F_j = 0$. Soit $k \in \{0, \cdots, m-1\}$. On considère le déterminant $m \times m$ ayant pour première ligne $F_1, f_1, \Delta(f_1), \cdots, \widehat{\Delta^k(f_1)}, \Delta^{m-1}(f_1)$, etc, et ayant pour dernière ligne $F_m, f_m, \Delta(f_m), \cdots, \widehat{\Delta^k(f_m)}, \Delta^{m-1}(f_m)$.

Ce déterminant est évidemment nul, puisque sa première colonne est nulle. Soit $g = (f_1, \cdots, f_m)$, et pour $k \in \{0, \cdots, m-1\}$, $l \in \{0, \cdots, m+1\}$, $t_{l,k} = (l, 0, \cdots, \widehat{k}, \cdots, m-1)$. En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que l'expression (*) suivante est nulle :

$$\sum_{l=0}^{m+1} (-1)^{m+1-l} c(\underline{f}, \underline{n_l}) c(\underline{g}, \underline{t_{l,k}})$$

Dans cette expression, les $c(\underline{g}, \underline{t_{l,k}})$ sont nuls parce qu'ayant deux colonnes égales, sauf pour les indices $l = m+1, l = m$ et $l = k$. On trouve donc :

$$c(\underline{f}, \underline{n_{m+1}})c(\underline{g}, \underline{t_{m+1,k}}) - c(\underline{f}, \underline{n_m})c(\underline{g}, \underline{t_{m,k}}) + (-1)^{m+1-k} c(\underline{f}, \underline{n_k})c(\underline{g}, \underline{t_{k,k}}) = 0$$

On a maintenant par l'hypothèse de récurrence sur m, que :

$$\left|c(\underline{g}, \underline{t_{l,k}})\right|(R) \leqslant \frac{\left|c(\underline{g}, \underline{q_m})\right|(R)}{R^{l-k}}$$

avec $q_m = (0, \cdots, m)$. On remarque que $c(\underline{g}, \underline{t_{k,k}}) = \pm c(\underline{g}, \underline{q_m})$.

Comme $c(\underline{g}, \underline{q_m})$ est non nul, il en résulte que pour tout $k \leqslant m-1$, on a la majoration

$$|c(\underline{f}, \underline{n_k})|(R) \leqslant \max\{\frac{|c(\underline{f}, \underline{n_{m+1}})|(R)}{R^{m+1-k}}, \frac{|c(\underline{f}, \underline{n_m})|(R)}{R^{m-k}}\}$$

On a d'autre part l'égalité (cf le corollaire 2.4) :

$$\Delta(c(f, \underline{n_{m+1}})) = \sum_{k=0}^{m} c(\underline{f}, \underline{n_k})$$

donc aussi

$$c(\underline{f}, \underline{n_m}) = \Delta(c(f, \underline{n_{m+1}})) - \sum_{k=0}^{m-1} c(\underline{f}, \underline{n_k})$$

qui fournit que

$$|c(\underline{f}, \underline{n_m})|(R) \leqslant \max\{\frac{|c(\underline{f}, \underline{n_{m+1}})|(R)}{R}, |c(\underline{f}, \underline{n_k})|(R)(k = 0, \cdots, m-1)\}$$

Compte tenu des inégalités obtenues sur les $|c(\underline{f}, \underline{n_k})|(R)$ précédemment, on voit que l'on obtient que

$$|c(\underline{f}, \underline{n_m})|(R) \leqslant \max\{\frac{|c(\underline{f}, \underline{n_{m+1}})|(R)}{R}, \frac{|c(\underline{f}, \underline{n_m})|(R)}{R}\}$$

Comme $R > 1$, le maximum dans le second membre est atteint pour $\dfrac{|c(\underline{f}, \underline{n_{m+1}})|(R)}{R}$, ce qui fournit

$$|c(\underline{f}, \underline{n_m})|(R) \leqslant \frac{|c(\underline{f}, \underline{n_{m+1}})|(R)}{R}$$

On obtient alors les autres inégalités facilement en utilisant la majoration des termes $|c(\underline{f}, \underline{n_k})|(R)$ obtenues précédemment.

On reprend maintenant l'équation (F), que l'on écrit :

$$\Delta^{m+1}(y) = \sum_{k=0}^{m} A_k \Delta^k(y)$$

les A_k étant des fonctions méromorphes dans le disque de centre 0, rayon $\rho > 1$, telles que pour tout $R \in]1, \rho[$, on a $|A_k|(R) \leqslant \dfrac{1}{R^{m+1-k}}$, d'après les inégalités que nous venons de montrer.

En appliquant un certain nombre de fois l'opérateur Δ, on trouve que l'on a :

$$\Delta^n(y) = \sum_{k=0}^{m+1} A_{k,n} \Delta^k(y)$$

les $A_{k,n}$ étant des fonctions méromorphes, avec en particulier pour $n \leqslant m$, $A_{k,n} = 0$ si $k \neq n$ et $A_{n,n} = 1$; pour $n = m+1$, on a $A_{k,m+1} = A_k$ pour $k \leqslant m$.

On en déduit que les inégalités $|A_{k,n}|(R) \leqslant \dfrac{1}{R^{n-k}}$ sont vérifiées pour $n \leqslant m+1$ et $k \in \{0, \cdots, m\}$. Nous allons montrons qu'elles sont vérifiées pour tout n et tout k.

Pour cela, on établit des formules de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1}(y) &= \sum_{k=0}^{m} \Delta(A_{k,n} \Delta^k(y)) \\ &= \sum_{k=0}^{m} (\Delta(A_{k,n}) \Delta^{k+1}(y) + \Delta(A_{k,n}) \Delta^k(y) + A_{k,n} \Delta^{k+1}(y) \end{aligned}$$

On peut simplifier un peu en notant que pour une fonction f, on a $\Delta(f) + f = E(f)$. La relation devient :

$$\Delta^{n+1}(y) = \sum_{k=0}^{m} (E(A_{k,n}) \Delta^{k+1}(y) + \Delta(A_{k,n}) \Delta^k(y))$$

On remplace maintenant le terme $\Delta^{m+1}(y)$ par son expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} A_k \Delta^k(y)$.

On trouve alors les relations :

$$A_{m,n+1} = E(A_{m,n}) A_m + E(A_{m-1,n})$$

$$A_{k,n+1} = E(A_{m,n})A_k + E(A_{k-1,n}) + \Delta(A_{k,n})$$

pour $1 \leqslant k \leqslant m-1$, et enfin

$$A_{0,n+1} = E(A_{m,n})A_0 + \Delta(A_{0,n})$$

Une récurrence facile, utilisant les propriétés que $|E(f)|(R) = |f|(R)$ et $|\Delta(f)|(R) \leqslant \dfrac{|f|(R)}{R}$, montre alors les inégalités cherchées.

Nous passons maintenant à la dernière partie de la démonstration, en reprenant $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_{m+1})$, $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_{m+1})$ et en posant $\underline{q} = (0, \cdots, m)$.

Soit U la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} \Delta^{n_1}(f_1) & . & . & \Delta^{n_{m+1}}(f_1) \\ . & . & . & . \\ \Delta^{n_1}(f_{m+1}) & . & . & \Delta^{n_{m+1}}(f_{m+1}) \end{pmatrix}$$

On a la formule matricielle

$$U = \begin{pmatrix} f_1 & . & . & \Delta^m(f_1) \\ . & . & . & . \\ f_{m+1} & . & . & \Delta^m(f_{m+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & . & . & A_{0,n_{m+1}} \\ . & . & . & . \\ A_{m,n_1} & . & . & A_{m,n_{m+1}} \end{pmatrix}$$

qui montre que si D est le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A_{0,n_1} & . & . & A_{0,n_{m+1}} \\ . & . & . & . \\ A_{m,n_1} & . & . & A_{m,n_{m+1}} \end{pmatrix}$, on a la formule $c(\underline{f}, \underline{n}) = Dc(\underline{f}, \underline{q})$.

Si l'on note $a_{i,j} = A_{i-1,n_j}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, le déterminant D est une combinaison linéaire à coefficients ± 1 de termes de la forme $P = \prod_{i=1}^{m+1} a_{i,\sigma(i)}$, où σ parcourt les permutations de $\{1, 2, \cdots, m+1\}$. Par ce qui précède, on a $|a_{i,j}|(R) \leqslant \dfrac{1}{R^{n_j-(i-1)}}$, ce qui donne $|P|(R) \leqslant \dfrac{1}{R^{(n_1+\cdots+n_{m+1})-m(m+1)/2}}$. On a donc la même majoration pour le déterminant D, ce qui termine la démonstration du théorème. □

On peut généraliser aux fonctions méromorphes :

Théorème 3.2. — *Soient $f_1, \cdots, f_m$ des fonctions méromorphes dans un disque de $\mathbb{C}_p$ de centre 0 et de rayon au moins $\rho > 1$, et $n_1, \cdots, n_m$ des entiers naturels, $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_m)$ et $\underline{q} = (0, \cdots, m-1)$. On a alors pour tout $R \in]1, \rho[$ l'inégalité :*

$$\big|c(\underline{f}, \underline{n})\big|(R) \leqslant \frac{\big|c(\underline{f}, \underline{q})\big|(R)}{R^{(n_1+\cdots+n_m)-m(m-1)/2}}$$

Démonstration. — Soit $R \in]1, \rho[$, et ρ^* tel que $R < \rho^* < \rho$. On peut trouver un polynôme P non nul tel que $g_k = Pf_k$ est analytique dans le disque $D(0, \rho^*)$ pour tout k. Soit $Q = \dfrac{1}{P}$, on a donc $f_k = Qg_k$.

Par la formule de Leibniz, on a

$$\Delta^{n_j}(f_k) = \sum_{l_j=0}^{n_j} \binom{n_j}{l_j} (E^{l_j} \Delta^{n_j - l_j})(Q) \Delta^{l_j}(g_k)$$

On en déduit que

$$c(\underline{f}, \underline{n}) \sum_{l_1, \cdots, l_m} \prod_{j=1}^{m} \binom{n_j}{l_j} \prod_{j=1}^{m} (E^{l_j} \Delta^{n_j - l_j})(Q) c(\underline{g}, \underline{l})$$

où on a posé $l = (l_1, \cdots, l_m)$, les l_j variant entre 0 et n_j.

Puisque les g_k sont analytiques, on a l'inégalité $|c(\underline{g}, \underline{l})|(R) \leqslant \dfrac{|c(\underline{g}, \underline{q})|(R)}{R^{l_1 + \cdots + l_m - m(m-1)/2}}$, et d'autre part $|(E^{l_j} \Delta^{n_j - l_j})(Q)|(R) \leqslant \dfrac{|Q|(R)}{R^{n_j - l_j}}$. On en déduit qu'un terme dans la somme précédente est majoré par $\dfrac{|Q|(R)^m |c(\underline{g}, \underline{q})|(R)}{R^{n_1 + \cdots + n_m - m(m-1)/2}}$. Un petit calcul donne que $c(\underline{f}, \underline{q})(x) = Q(x)Q(x + 1) \cdots Q(x + m - 1) c(\underline{g}, \underline{q})(x)$, de sorte que $|c(\underline{f}, \underline{q})|(R) = |Q|^m(R) |c(\underline{g}, \underline{q})|(R)$. Donc tous les termes de la somme sont tels que leur module maximum est majoré par $\dfrac{|c(\underline{f}, \underline{q})|(R)}{R^{n_1 + \cdots + n_m - m(m-1)/2}}$, et par suite aussi $|c(\underline{f}, \underline{n})|(R)$, ce qui termine la démonstration. $\square$

On peut aussi déduire du théorème 3.1 une propriété des casoratiens généralisés de polynômes :

Corollaire 3.3. — *Soit $m \geqslant 1$, $P_1, \cdots, P_m$ des polynômes à coefficients dans un corps K de caractéristique nulle, et $n_1, \cdots, n_m$ des entiers. Soit $\underline{P} = (P_1, \cdots, P_m)$, $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_m)$, et $\underline{q} = (0, \cdots, m-1)$. Soient d_1 le degré de $c(\underline{P}, \underline{q})$, et d_2 le degré de $c(\underline{P}, \underline{n})$ (avec la convention que le degré du polynôme nul est $-\infty$). On a alors l'inégalité :*

$$d_2 \leqslant d_1 - (n_1 + \cdots + n_m) + m(m-1)/2$$

Démonstration. — Tout se passe dans un sous-corps L de K, extension de type fini de $\mathbb{Q}$. On peut supposer que L est un sous-corps d'un corps $\mathbb{C}_p$

convenable, il suffit donc de montrer l'assertion quand $K = \mathbb{C}_p$. On peut aussi supposer que $c(\underline{P}, \underline{n})$ et $c(\underline{P}, \underline{q})$ sont non nuls, en notant que si $c(\underline{P}, \underline{q})$ est nul, il en est de même de $c(\underline{P}, \underline{n})$.

Soit $R > 1$ un réel assez grand, pour que l'on ait $|c(\underline{P}, \underline{n})|(R) = \mu_2 R^{d_2}$ et $|c(\underline{P}, \underline{q})|(R) = \mu_1 R^{d_1}$ où μ_1 et μ_2 sont des constantes. Par le théorème 3.1, on a alors l'inégalité

$$|c(\underline{P}, \underline{n})|(R) = \mu_2 R^{d_2} \leqslant \frac{|c(\underline{P}, \underline{q})|(R)}{R^{(n_1+\cdots+n_m)-m(m-1)/2}} = \mu_1 R^{d_1-(n_1+\cdots+n_m)+m(m-1)/2}$$

et l'inégalité demandée en résulte immédiatement. □

Nous allons déduire du théorème 3.1 le résultat suivant :

Théorème 3.4. — *Soient $m \geqslant 1$, et $f_1, \cdots, f_m$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, $\underline{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, et pour $k \in \{0, \cdots, m\}$, $\underline{n_k} = (0, \cdots, \widehat{k}, \cdots, m)$. Si le casoratien $c(\underline{f}, \underline{n_m})$ des f_k est un polynôme non nul, alors tous les f_k sont des polynômes.*

Démonstration. — Le cas $m = 1$ est trivial, on suppose donc que $m \geqslant 2$.

Nous faisons ensuite une double récurrence : sur m (nous supposons donc le résultat acquis pour $m-1$ fonctions), et pour passer de $m-1$ à m, nous faisons une récurrence sur le degré du polynôme $P(x) = c(\underline{f}, \underline{n_m})(x)$.

On commence par le cas où le casoratien est une constante non nulle. On écrit l'équation aux différences vérifiées par les fonctions f_k :

$$\begin{vmatrix} y & \Delta(y) & . & \Delta^m(y) \\ f_1 & \Delta(f_1) & . & \Delta^m(f_1) \\ . & . & . & . \\ f_m & \Delta(f_{m+1}) & . & \Delta^m(f_m) \end{vmatrix} = 0$$

soit encore :

$$\sum_{l=0}^{m} (-1)^{m-l} c(\underline{f}, \underline{n_l}) \Delta^l(y) = 0$$

Par le théorème 3.1, on a pour $l \leqslant m-1$, l'inégalité $|c(\underline{f}, \underline{n_l})|(R) \leqslant \dfrac{|c(\underline{f}, \underline{n_m})|(R)}{R^{m-l}}$. Comme $c(\underline{f}, \underline{n_m})$ est une constante, on en déduit que $|c(\underline{f}, \underline{n_l})|(R)$ tend vers 0 si R tend vers l'infini. Par suite, pour tout $l \leqslant m-1$, on a $c(\underline{f}, \underline{n_l}) = 0$, l'équation se réduit à $\Delta^m(y) = 0$, et toutes les f_k sont des polynômes.

Supposons le résultat acquis quand P est un polynôme non nul de degré d, et supposons que P soit de degré $d+1$. On a $|c(\underline{f}, \underline{n_0})|(R) \leqslant \dfrac{|c(\underline{f}, \underline{n_m})|(R)}{R^m}$, inégalité qui montre que $c(\underline{f}, \underline{n_0})$ est un polynôme Q, de degré $\leqslant d+1-m \leqslant d$. D'autre part, si $g_k = \Delta(f_k)$, et $\underline{g} = (g_1, \cdots, g_m)$, on a $c(\underline{f}, \underline{n_0}) = c(\underline{g}, \underline{n_m})$. Donc si Q est non nul, l'hypothèse de récurrence s'applique, et montre que les g_k sont des polynômes. Comme $g_k = \Delta(f_k)$, tous les f_k sont des polynômes.

Supposons maintenant que $Q = 0$. Alors les g_k ne sont pas linéairement indépendants. Soit r le rang de la famille $\{g_1, \cdots, g_m\}$, qui vérifie donc $1 \leqslant r \leqslant m-1$. On peut supposer sans perte de généralité que $\{g_1, \cdots, g_r\}$ sont linéairement indépendants. Toute fonction g_k est donc combinaison linéaire de ces r fonctions ; on en déduit que tous les f_k sont combinaison linéaire des fonctions $f_1, \cdots, f_r$, et de la fonction constante et égale à 1. Comme les f_k sont linéairement indépendants, il en résulte que $m \leqslant r+1$, et par suite $r = m-1$. On peut supposer qu'alors la fonction f_m est alors égale à la somme d'une combinaison linéaire des fonctions f_k, $k \leqslant m-1$, et d'une constante b non nulle. Il en résulte que le casoratien des fonctions f_k, $1 \leqslant k \leqslant m$ est égal au casoratien des fonctions $f_1, \cdots, f_{m-1}$, multiplié par b. Donc le casoratien de $f_1, \cdots, f_{m-1}$ est un polynôme, non nul, et par l'hypothèse de récurrence sur m, toutes les fonctions f_k, $1 \leqslant k \leqslant m-1$ sont des polynômes, donc aussi f_m, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 3.5. — Le résultat ne s'étend pas aux fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$. Pour le voir, soit g une fonction entière non nulle, h une fonction entière telle que $\Delta(h)(x) = g(x)g(x+1)$ (on peut montrer que l'opérateur Δ est surjectif de l'espace des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$ dans lui-même, donc h existe bien). Posons $f_1 = \dfrac{h}{g}$, $f_2 = \dfrac{1}{g}$; on constate alors facilement que le casoratien des deux fonctions f_1 et f_2 est égal à 1, et comme g est quelconque, le fait que le casoratien de deux fonctions méromorphes soit un polynôme non nul n'implique pas que les deux fonctions soient des fractions rationnelles.

4. Équations aux différences à coefficients dans $\mathbb{C}_p[x]$

THÉORÈME 4.1. — *Soit $s \geqslant 1$, $P_0, \cdots, P_s$ des polynômes dans $\mathbb{C}_p[x]$, avec P_s non nul.*

Soit (F) l'équation aux différences :

$$P_s(x)\Delta^s(y) + \cdots + P_0(x)y(x) = 0$$

On suppose que l'équation aux différences (F) a s solutions $y_{k,p}$, fonctions entières dans $\mathbb{C}_p$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Alors (F) possède s solutions polynômes, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Démonstration. — Soient $y_{k,p}$ les fonctions entières solutions. On a tout d'abord par le corollaire 2.4 l'égalité

$$\Delta(c(\underline{y_p}, \underline{n_s})) = \sum_{j=0}^{s-1} c(\underline{y_p}, \underline{n_j})$$

D'autre part, en utilisant l'équation (F), on exprime la dernière colonne des casoratiens généralisés $c(\underline{y_p}, \underline{n_j})$ ce qui donne l'égalité

$$c(\underline{y_p}, \underline{n_j})(x) = (-1)^{s-j} \frac{P_j}{P_s} c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)$$

donc :

$$\Delta(c(\underline{y_p}, \underline{n_s}))(x) = \frac{\sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{s-j} P_j}{P_s} c(\underline{y_p}, \underline{n_s})$$

ce qui montre que $z_p(x) = c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)$ est une fonction entière dans $\mathbb{C}_p$, non nulle, qui est solution de l'équation aux différences

$$Q_1(x)\Delta(z) + Q_0(x)z = 0$$

avec $Q_1(x) = P_s(x)$, $Q_0(x) = \sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{s+1-j} P_j$.

Si $Q_0 = 0$, on a $\Delta(c(\underline{y_p}, \underline{n_s}) = 0$, et $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)$ est une constante non nulle, donc un polynôme.

Supposons que Q_0 soit non nulle. Soit $R > 0$ tel que tous les zéros de P_0 et P_1 soient de modules $\leqslant R$. Soit ω un zéro de $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)$ de module $> R$. Alors on déduit de l'équation que $\Delta(c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(\omega) = 0$, ce qui implique $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(\omega + 1) = 0$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(\omega + m) = 0$ pour tout m entier, ce qui implique que ce casoratien est nul, d'où une contradiction. Donc le casoratien $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})$ n'a qu'un nombre fini de zéros, et par suite c'est un polynôme, qui est non nul. Par le théorème 3.4, toutes les fonctions entières $y_{k,p}$ sont des polynômes, ce qui termine la démonstration. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cette section :

THÉORÈME 4.2. — *Soient $s \geqslant 1$, et $P_0, \cdots, P_s$ des polynômes dans $\mathbb{C}_p[x]$, avec P_s non nul.*

Soit (F) l'équation aux différences :

$$P_s(x)\Delta^s(y) + \cdots + P_0(x)y(x) = 0$$

On suppose que l'équation aux différences (F) a s solutions $y_{k,p}$, fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}_p$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Alors (F) possède s solutions fractions rationnelles, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Démonstration. — On peut écrire l'équation (F) sous la forme (F^*) suivante :

$$Q_s(x)E^s(y)(x) + \cdots + Q_0(x)y(x) = 0$$

On a $Q_s = P_s$, qui est donc non nul. A priori, on ne peut dire la même chose de Q_0, qui peut être nul. Si c'est le cas, soit l le plus petit entier avec $Q_l \neq 0$ (l peut parfaitement être égal à s). En faisant une translation sur la variable x, on se ramène au cas où Q_0 est non nul, avec une équation d'ordre inférieur. On peut donc supposer sans perte de généralité que Q_0 est non nul.

Ceci étant posé, soit y une solution méromorphe dans $\mathbb{C}_p$ de (F), et ω un pôle de y. Si $Q_0(\omega)$ est non nul, il résulte de l'équation (F^*) qu'il existe $l_1 \geqslant 1$ tel que $\omega + l_1$ est pôle de y. On ne peut poursuivre ce procédé indéfiniment. Il existe un entier $l_\omega \geqslant 0$ tel que si $j \geqslant 1$, $\omega + l_\omega + j$ n'est plus pôle de y. Il résulte alors de l'équation (F^*) que $Q_0(x + l_\omega)y(x + l_\omega)$ n'a plus ω comme pôle. Par suite $\omega + l_\omega$ est un zéro θ de Q_0. Soit $R > 0$, que l'on peut prendre > 1, tel que tous les zéros de Q_0 soient de module $\leqslant R$. Il résulte de ce qui précède que tous les pôles de y sont de module $\leqslant R$. Par suite y n'a qu'un nombre fini de pôles. On applique cela pour chaque $y_{k,p}$; il existe alors un polynôme $H(x)$ non nul, tel que les $z_{k,p}(x) = H(x)y_{k,p}(x)$ soient des fonctions entières dans $\mathbb{C}_p$. Il est clair que les $z_{k,p}$ sont linéairement indépendantes, et vérifient une équation aux différences d'ordre s à coefficients polynômes. Par le théorème 4.1, cette équation possède s solutions polynômes linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$, et donc l'équation (F) possède s solutions fractions rationnelles linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$. $\square$

5. Equations aux différences à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$

Nous allons avoir besoin d'un certain nombre de lemmes.

Lemme 5.1. — *Soit $s \geqslant 1$, $P_0, \cdots, P_s$ des polynômes de $\mathbb{Q}(x)$, avec Q_s non nul. Soit F l'équation aux différences :*

$$(F) \qquad P_s(x)\Delta^s(y) + \cdots + P_0(x)y(x) = 0$$

Alors l'équation aux différences vérifiée par les $\Delta(y)$, où y parcourt les solutions de (F) est si $P_0 \neq 0$:

$$Q_s(x)\Delta^s(z) + \cdots + Q_0(x)z(x) = 0$$

avec $Q_s(x) = P_0(x)P_s(x+1)$, $Q_k(x) = P_0(x)P_{k+1}(x+1) - P_0(x+1)P_{k+1}(x) + P_0(x)P_k(x+1)$ pour $0 \leqslant k \leqslant s-1$.

Si $P_0 = 0$, elle est :

$$Q_{s-1}(x)\Delta^{s-1}(z) + \cdots + Q_0(x)z(x) = 0$$

avec $Q_k(x) = P_{k+1}(x)$, $k = 0, \cdots, s-1$.

Démonstration. — Si $P_0 = 0$, l'assertion est claire. Nous supposons donc P_0 non nul. On rappelle que $\Delta(f) = \Delta(f)\Delta(g) + \Delta(f)g + \Delta(g)f = E(f)\Delta(g) + \Delta(f)g$. On divise par P_s l'équation (F), et on applique Δ :

$$\Delta^{s+1}(y) = -\sum_{k=0}^{s-1} \Delta(\frac{P_k}{P_s})\Delta^k(y) = -\sum_{k=0}^{s-1} E(\frac{P_k}{P_s})\Delta^{k+1}(y) + \Delta(\frac{P_k}{P_s})\Delta^k(y))$$

On a d'autre part puisque $P_0 \neq 0$:

$$y = -\sum_{j=1}^{s} \frac{P_j}{P_0}\Delta^j(y)$$

On remplace le terme y apparaissant dans le second membre de l'expression précédente, et un petit calcul donne la relation

$$\sum_{k=0}^{s} Q_k\Delta^{k+1}(y) = 0,$$

avec les valeurs de Q_k annoncées. En posant $z = \Delta(y)$, on termine la démonstration. $\square$

Lemme 5.2. — *Soient $P_0, P_1 \in \mathbb{Q}[x]$, avec P_1 non nul, unitaire. Soit F l'équation :*

$$P_1(x)\Delta(y)(x) + P_0(x)y(x) = 0$$

On suppose qu'il existe une partie infinie G de l'ensemble des nombres premiers, telle que si $p \in G$ l'équation F a une solution série entière y_p, non nulle, de rayon de convergence > 1.

Alors F possède une unique solution polynôme non nulle, appartenant à $\mathbb{Q}[x]$ et unitaire.

Démonstration. — On peut supposer P_0, P_1 premiers entre eux. Noter que le résultat est une trivialité si $P_0 = 0$. On commence par traiter le cas où P_1 est constant, donc égal à 1 car unitaire. Supposons que P_0 est non nul; on peut trouver un entier $p \in G$ tel que tous les coefficients de P_0 soient de modules 1 s'ils ne sont pas nuls. Soit $R > 1$; on écrit que y_p est solution, et on prend le module maximal, pour un $R > 1$ inférieur au rayon de convergence de y_p :

$$|P_0|(R)|y_p|(R) = |P_1|(R)|\Delta(y_p)|(R) = |\Delta(y_p)|(R) \leqslant \frac{|y_p|(R)}{R}$$

Comme par l'hypothèse faite sur les coefficients de P_0, on a en notant $d(P_0)$ le degré de P_0 : $|P_0|(R) = R^{d(P_0)}$, il vient $R^{d(P_0)} \leqslant \frac{1}{R}$, ce qui est absurde car $R > 1$. Par suite $P_0 = 0$, l'équation s'écrit $\Delta(y) = 0$, et le résultat cherché est trivial.

On poursuit en supposant que le degré de P_1 est $\geqslant 1$.

Prenons $p \in G$ assez grand, de façon que P_1 et P_0 aient leurs coefficients non nuls de module 1. Si P_0 est non nul, on peut trouver alors $R \in]1, \rho_p[$ tel que $|P_1|(R) = R^{d(P_1)}$ et $|P_0|(R) = R^{d(P_0)}$. Le fait que y_p vérifie l'équation montre que

$$|P_0|(R)|y_p|(R) = |P_1|(R)|\Delta(y_p)|(R) \leqslant |P_1|(R)|\frac{|y_p|(R)}{R}$$

ce qui implique si P_0 est non nul que $R^{d(P_0)} \leqslant R^{d(P_1)-1}$, et donc $d(P_0) \leqslant d(P_1) - 1$. Si P_0 est nul, cette inégalité sur les degrés est aussi trivialement vérifiée.

On écrit maintenant l'équation sous la forme :

$$P_1(x)y(x+1) + (P_0(x) - P_1(x))y(x) = 0$$

On a $P_0 - P_1 \neq 0$ par ce qui précède.

On choisit $p \in G$ assez grand, de façon que tous les zéros non nuls de P_1, de $P_1 - P_0$, soient de module 1.

Soit $\rho_p > 1$ le rayon de convergence de la solution non nulle y_p. Soit ω un zéro de y_p avec $1 < |\omega| < \rho_p$. Par les hypothèses faites, il vient $y_p(\omega+1) = 0$, et comme $|\omega + 1| = |\omega|$, on peut itérer l'opération : $\omega + j$ est zéro de y_p pour tout $j \geqslant 0$, ce qui donne que $y_p = 0$, et une contradiction. Donc y_p n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}_p$ de module > 1. On sait qu'alors on peut écrire $y_p(x) = A_p(x)z_p(x)$, où A_p est un polynôme unitaire, ayant tous ses zéros de module $\leqslant 1$, et z_p une série entière de rayon de convergence ρ_p, n'ayant aucun zéro dans le disque $D(0, \rho_p)$.

On a

$$P_1(x)A_p(x+1)z_p(x+1) = (P_1(x) - P_0(x))A_p(x)z_p(x)$$

En raison des hypothèses faites sur les zéros de P_1, $P_1 - P_0$, et A_p, il en résulte que $P_1(x)A_p(x+1)$ et $(P_1(x) - P_0(x))A_p(x)$ diffèrent d'une constante multiplicative non nulle dans $\mathbb{C}_p$, on a $P_1(x)A_p(x+1) = \mu_p(P_1(x) - P_0(x))A_p(x)$ avec μ_p non nulle. Comme tous les polynômes intervenant sont unitaires, on a $\mu_p = 1$.

Cela montre que $A_p \in \mathbb{C}_p[x]$, unitaire, est solution de l'équation aux différences. Soit maintenant V un supplémentaire du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}_p$: $\mathbb{C}_p = \mathbb{Q} \bigoplus V$, et L la projection $\mathbb{Q}$ -linéaire de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{Q}$ associée. En appliquant L aux coefficients de A_p, on trouve un polynôme B, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, unitaire comme A_p (donc non nul), qui est solution de l'équation (F). Si C est une autre solution possédant les mêmes propriétés, la fraction rationnelle $\dfrac{B}{C}$ est périodique de période 1, donc constante, et égale à 1 puisque B et C sont unitaires, donc $B = C$. Par suite B est l'unique polynôme unitaire dans $\mathbb{Q}[x]$, solution de l'équation (F), donc indépendant de $p \in G$, et ceci termine la démonstration. $\square$

Lemme 5.3. — *Soit $s \geqslant 1$, P_k, $k = 0, \cdots, s$ des polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$, avec P_s, non nul, unitaire, les P_k étant premiers entre eux. Soit (F) l'équation aux différences :*

$$(F) \qquad P_s(x)\Delta^s(y)(x) + \cdots + P_0(x)y(x) = 0$$

On suppose qu'il existe un ensemble G de nombres premiers, infini, tel que pour $p \in G$, l'équation (F) ait s solutions séries entières de rayon de convergence > 1, $y_{k,p}$, $k = 1, \cdots, s$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Alors si $\underline{y_p} = (y_{1,p}, \cdots, y_{s,p})$, $\underline{q} = (0, 1, \cdots, s-1)$, $\underline{n_k} = (0, \cdots, \widehat{k}, \cdots, s)$, *le casoratien* $c(\underline{y}, \underline{q})$ *est de la forme* $\mu_p A(x)$, *où* A *est un polynôme non nul de* $\mathbb{Q}[x]$, *unitaire, indépendant de* $p \in G$, *et* μ_p *est une constante non nulle dans* $\mathbb{C}_p$. *Le polynôme* P_s *divise* A, *on a* $A(x) = S(x)P_s(x)$, *où* $S \in \mathbb{Q}[x]$ *unitaire.*

De plus, pour tout $k \in \{0, \cdots, s\}$, *on a* $c(\underline{y_p}, \underline{n_k})(x) = \mu_p(-1)^{s-k} S(x) P_k(x)$.

Démonstration. — Soit $p \in G$. On a tout d'abord par le corollaire 2.4 l'égalité

$$\Delta(c(\underline{y_p}, \underline{n_s})) = \sum_{j=0}^{s-1} c(\underline{y_p}, \underline{n_j})$$

D'autre part, en utilisant l'équation (F), on exprime la dernière colonne des casoratiens $c(\underline{y_p}, \underline{n_j})$ ce qui donne l'égalité

$$c(\underline{y_p}, \underline{n_j})(x) = (-1)^{s-j} \frac{P_j}{P_s} c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)$$

donc :

$$\Delta(c(\underline{y_p}, \underline{n_s}))(x) = \frac{\sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s-j} P_j}{P_s} c(\underline{y_p}, \underline{n_s})$$

ce qui montre que $z_p(x) = c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)$ est une série entière de rayon de convergence > 1 dans $\mathbb{C}_p$, non nulle, qui est solution de l'équation aux différences

$$Q_1(x)\Delta(z) + Q_0(x)z = 0$$

avec $Q_1(x) = P_s(x)$, $Q_0(x) = \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s+1-j} P_j$.

Par le lemme 5.2, il existe un polynôme A dans $\mathbb{Q}[x]$, non nul et unitaire, indépendant de $p \in G$ et une constante μ_p non nulle dans $\mathbb{C}_p$, tels que $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x) = \mu_p A(x)$. On a de plus que P_s divise A, on peut donc écrire que $A(x) = S(x)P_s(x)$, où S est unitaire dans $\mathbb{Q}[x]$ et lui aussi indépendant de $p \in F$.

Une autre équation vérifiée par les $y_{k,p}$ est

$$c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)\Delta^s(z)(x) + \cdots + (-1)^{s-k} c(\underline{y_p}, \underline{n_k})(x)\Delta^k(z) + \cdots \\ + (-1)^s c(\underline{y_p}, \underline{n_0})(x)z(x) = 0$$

On fait la différence avec (F) multipliée par $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x)$ et cette dernière équation multipliée par $P_s(x)$, on trouve une équation aux différences d'ordre $\leqslant s-1$, qui est vérifiée par les $y_{k,p}$. Par suite tous ses coefficients sont nuls, on trouve donc l'égalité :

$$P_k(x) c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x) = (-1)^{s-k} c(\underline{y_p}, \underline{n_k})(x) P_s(x)$$

Ceci est vrai pour tout $p \in G$. On choisit maintenant $p \in G$ de façon que toutes les racines du polynôme unitaire P_s qui sont non nulles soient de module $\leqslant 1$. Pour un tel p, la fraction rationnelle $\dfrac{AP_k}{P_s}$ a un rayon de convergence > 1 dans $\mathbb{C}_p$. On en déduit que toute racine de P_s apparait dans AP_k avec une multiplicité inférieure ou égale à celle dans P_s. Comme les P_k sont premiers entre eux, on en déduit que P_s divise A dans $\mathbb{Q}[x]$. Il existe donc un polynôme unitaire $S \in \mathbb{Q}[x]$, indépendant de $p \in G$, tel que $A(x) = S(x)P_s(x)$, donc $c(\underline{y_p}, \underline{n_s})(x) = \mu_p S(x)P_s(x)$.

Par suite $\mu_p S(x)P_s(x)P_k(x) = (-1)^{s-k}c(\underline{y_p}, \underline{n_k})(x)P_s(x)$. Donc on a $c(\underline{y_p}, \underline{n_k})(x) = \mu_p(-1)^{s-k}S(x)P_k(x)$, ce qui termine la démonstration. □

Nous passons à la proposition suivante :

Proposition 5.4. — *Soit $s \geqslant 1$, $P_0, \cdots, P_s$ des polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$, avec P_s non nul.*

Soit (F) l'équation aux différences :

$$P_s(x)\Delta^s(y) + \cdots + P_0(x)y(x) = 0$$

On suppose qu'il existe un ensemble infini G de nombres premiers p, tel que si $p \in G$, l'équation aux différences (F) a s solutions $y_{k,p}$, séries entières à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de rayon de convergence strictement supérieur à 1, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Alors (F) possède s solutions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. — On peut supposer que P_s est unitaire, et que les P_k sont premiers entre eux. Nous allons faire une récurrence sur s; Le cas $s = 1$ a été traité dans le lemme 5.2. Il nous faut passer maintenant du cas d'ordre $\leqslant s-1$ à l'ordre s.

On regarde d'abord le cas où P_0 est nul. En posant $z = \Delta(y)$, on est ramené au cas de l'équation (H) suivante :

$$(H) \qquad P_s(x)\Delta^{s-1}(z) + \cdots + P_1(x)z = 0$$

Soit $p \in G$. Les $z_{k,p} = \Delta(y_{k,p})$ sont solutions de l'équation (H). Elles ne peuvent pas être linéairement indépendantes, ni toutes nulles (car alors toutes les $y_{k,p}$ serait constantes, ce qui est impossible car $s \geqslant 2$). Soit r le rang de la famille des $z_{k,p}$, on a donc $1 \leqslant r \leqslant s-1$. On peut supposer que les $z_{k,p}$, $1 \leqslant k \leqslant r$ sont linéairement indépendantes. Tous les

$z_{k,p}$ s'expriment alors comme combinaison linéaire des $z_{k,p}$, $1 \leqslant k \leqslant r+1$. On en déduit facilement que tous les $y_{k,p}$ s'expriment comme combinaison linéaire des $y_{k,p}$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$, et de la constante 1. Il en résulte que $s \leqslant r+1$, et donc $r = s-1$. Par conséquent, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à l'équation (H). Elle possède donc $s-1$ solutions polynômes H_k, $k = 1, \cdots, s-1$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Il existe des polynômes $T_k \in \mathbb{Q}[x]$ tels que $\Delta(T_k) = H_k$. La famille des T_k à laquelle on rajoute la constante 1 est alors une famille de s polynômes, solutions de (F), que l'on voit facilement être linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, ce qui termine la démonstration dans ce cas.

On suppose donc dans la suite que $P_0 \neq 0$.

On peut alors considérer l'équation vérifiée par les $\Delta(y)$, où y parcourt les solutions de (F). Soit (F_1) cette équation, cf le lemme 5.1. On peut l'écrire sous la forme :

$$P_{s,1}(x)\Delta^s(z) + \cdots + P_{0,1}(x)z = 0$$

où les polynômes $P_{k,1} \in \mathbb{Q}[x]$ sont premiers entre eux, et $P_{s,1}$ est unitaire. Si $P_{0,1}$ est non nul, on peut itérer et trouver une équation d'ordre s vérifiée par les $\Delta^2(y)$, où y parcourt les solutions de (F), etc.

Nous allons montrer que ce processus ne peut se poursuivre indéfiniment ; pour cela, nous raisonnons par l'absurde. Nous supposons donc que pour tout j, l'équation (F_j) ayant pour solutions les $\Delta^j(y)$, où y parcourt les solutions de (F), est de la forme :

$$P_{s,j}(x)\Delta^s(z) + \cdots + P_{0,j}(x)z = 0$$

avec les $P_{k,j} \in \mathbb{Q}[x]$, premiers entre eux, et le polynôme $P_{s,j}$ unitaire, avec la propriété que $P_{0,j} \neq 0$ pour tout j, et nous voulons trouver une contradiction.

Posons $z_{k,j} = \Delta^j(y_{k,p})$. Alors les $z_{k,j}$, $1 \leqslant k \leqslant s$, sont des solutions de (F_j) qui sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$. En effet, si ce n'est pas le cas, soit j_0 le plus petit entier tel que les $z_{k,j}$ soient linéairement dépendantes. On a $j_0 \geqslant 1$, et il existe une combinaison linéaire non triviale nulle des $\Delta^{j_0}(y_{k,p})$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \Delta^{j_0}(y_{k,p}) = 0$. Par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} \lambda_k \Delta^{j_0-1}(y_{k,p}) = \theta$, où θ est une constante. Cette constante ne peut être nulle, car les $\Delta^{j_0-1}(y_{k,p})$ sont linéairement indépendants. Par suite, la constante 1 est solution de l'équation (F_{j_0-1}), et on a $P_{0,j_0-1} = 0$, contrairement à l'hypothèse faite.

Par suite, on peut appliquer à l'équation (F_j) les résultats du lemme 5.3. Il existe des polynômes unitaires A_j et S_j dans $\mathbb{Q}[x]$, indépendants de

$p \in G$, et des constantes non nulles $\mu_{p,j}$ dans $\mathbb{C}_p$ telles que $c(\underline{z_j}, \underline{n_k}) = (-1)^{s-k}\mu_{p,j} S_j(x) P_{k,j}(x)$.

Notons $A = A_0$ (on a donc $A(x) = A_0(x) = S_0(x)P_{s,0}(x) = S(x)P_s(x)$), δ_h le coefficient du terme de plus haut degré de $P_{0,h}$. Soit j un entier tel que $js > d(A)$, que l'on fixe à partir de maintenant. Soit aussi $p \in G$ tel que tous les δ_h, $0 \leqslant h \leqslant j$, soient de module 1, et que les zéros des polynômes A_h, $P_{s,h}$, pour $h \leqslant j$, soient tous de module $\leqslant 1$.

On remarque que, avec des notations évidentes

$$c(\Delta^{h+1}(\underline{y_p}), \underline{n_s}) = c(\Delta^h(\underline{y_p}), \underline{n_0})$$

Donc

$$\mu_{p,h+1} S_{h+1}(x) P_{s,h+1}(x) = (-1)^s \mu_{p,h} S_h(x) P_{0,h}(x)$$

d'où on déduit que $\mu_{p,h+1} = (-1)^s \mu_{p,h}\delta_h$. Par les hypothèses faites, on a alors que $|\mu_{p,h+1}| = |\mu_{p,h}|$, de sorte que $|\mu_{p,j}| = |\mu_{p,0}| = |\mu_p|$.

D'autre part, on a : $c(\Delta^j(\underline{y_p}), \underline{n_s}) = c(\underline{y_p}, \underline{m_j})$, où $m_j = (j, j+1, \cdots, j+s-1)$.

On en déduit que pour $R > 1$ convenable on a :

$$|c(\Delta^j(\underline{y_p}), \underline{n_s}|(R) \leqslant \frac{|c(\underline{y_p}, \underline{n_s}|(R)}{R^{js}}$$

Soit encore :

$$|\mu_{p,j}||S_j|(R)|P_{s,j}|(R) \leqslant \frac{|\mu_{p,0}||S_0|(R)|P_{s,0}|(R)}{R^{js}}$$

Compte tenu du choix de $p \in G$, il vient :

$$R^{d(S_j)+d(P_{s,j})} \leqslant R^{d(A)-js}$$

et comme $R > 1$, on en déduit que

$$d(P_{s,j}) \leqslant d(S_j) + d(P_{s,j}) \leqslant d(A) - js < 0$$

ce qui est absurde puisque $P_{s,j}$ est non nul., et ceci démontre l'assertion.

Il existe donc des entiers j tels que $P_{0,j} = 0$. Soit j_0 le plus petit entier tel que l'on ait cette propriété, on a $j_0 \geqslant 1$, et $P_{0,h} \neq 0$ si $h \leqslant j_0 - 1$. On procède alors comme au début de la preuve (le cas $P_0 = 0$) pour montrer que (F_{j_0-1}) possède s solutions polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, et il est facile de montrer qu'alors (F) possède également s solutions polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$, linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. $\square$

Pour continuer, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 5.5. — *Soit $s \geqslant 1$, et $P_0, \cdots, P_s$ des polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$. avec P_s non nul. Soit (F) l'équation aux différences :*

$$(F) \qquad P_s(x)\Delta^s(y)(x) + \cdots + P_0(x)y(x) = 0$$

Il existe un polynôme non nul A à coefficients dans $\mathbb{Q}$, unitaire, qui possède la propriété suivante : Soit p un nombre premier, et y une solution méromorphe de (F) dans un disque $D(0, \rho_p)$ de $\mathbb{C}_p$ avec $\rho_p > 1$. Alors $A(x)y(x)$ est analytique dans $D(0, \rho_p)$.(Le polynôme A trouvé est donc indépendant à la fois de p premier et de toute solution y méromorphe dans un disque de $\mathbb{C}_p$ de l'équation (F)).

Démonstration. — On peut écrire l'équation (F) sous la forme (F^*) suivante :

$$Q_s(x)E^s(y)(x) + \cdots + Q_0(x)y(x) = 0$$

On a $Q_s = P_s$, qui est donc non nul. A priori, on ne peut dire la même chose de Q_0, qui peut être nul. Si c'est le cas, soit l le plus petit entier avec $Q_l \neq 0$ (l peut parfaitement être égal à s). En faisant une translation sur la variable x, on se ramène au cas où Q_0 est non nul, avec une équation d'ordre inférieur. On peut donc supposer sans perte de généralité que Q_0 est non nul.

Ceci étant posé, soit y une solution méromorphe dans un disque $D(0, \rho_p)$ de $\mathbb{C}_p$, avec $\rho_p > 1$, et ω un pôle de y. Si $Q_0(\omega)$ est non nul, il résulte de l'équation (F^*) qu'il existe $l_1 \geqslant 1$ tel que $\omega + l_1$ est pôle de y. On ne peut poursuivre ce procédé indéfiniment. Il existe un entier $l_\omega \geqslant 0$ tel que si $j \geqslant 1$, $\omega + l_\omega + j$ n'est plus pôle de y. Il résulte alors de l'équation (F^*) que $Q_0(x + l_\omega)y(x + l_\omega)$ n'a plus ω comme pôle. Par suite $\omega + l_\omega$ est un zéro θ de Q_0 (dans $\mathbb{C}_p$).

On peut maintenant raisonner en sens inverse : Si ω est un pôle de y, et si $Q_s(\omega - s)$ est non nul, il existe $l \leqslant s - 1$ tel que $\omega + l - s$ soit pôle de y, autrement dit il existe $k_1 \geqslant 1$, tel que $\omega - k_1$ soit pôle de y. On ne peut encore poursuivre indéfiniment le procédé, donc il existe un $k_\omega \geqslant 0$, tel que $\omega - k_\omega$ est pôle de y, et pour tout $l \geqslant 1$, $\omega - k_\omega - l$ n'est plus pôle de y. Par l'équation (F^*), on en déduit que $Q_s(x - k_\omega - s)y(x - k_\omega)$ n'a plus ω comme pôle, et par suite $\omega - k_\omega - s$ est un zéro λ de Q_s (toujours dans $\mathbb{C}_p$).

Il en résulte que $l_\omega + k_\omega + s$ est la différence entre un zéro θ de $Q_0(x)$, et un zéro λ de $Q_s(x)$. On regarde donc toutes les différences entre ces zéros (dans $\mathbb{C}_p$) qui possèdent la propriété d'être des entiers naturels, ce qui est un ensemble fini qui ne dépend que de Q_0 et Q_s, et pas de p (c'est en fait l'ensemble des entiers $n \geqslant 0$ tels que $Q_0(x)$ et $Q_s(x+n)$ ne soient pas premiers entre eux). Cet ensemble est donc majoré, disons par $m \in \mathbb{N}$, indépendant de p, et pour tout ω, on a $l_\omega \leqslant l_\omega + k_\omega + s \leqslant m$.

On écrit maintenant l'équation sous la forme

$$Q_0(x)y(x) = \sum_{j=1}^{s} A_{j,0}(x)y(x+j)$$

où les $A_{j,0} = -Q_j(x)$ sont des polynômes. On multiplie cette égalité par $Q_0(x+1)$, et dans le second membre, on utilise l'équation (F^*) pour $x+1$ pour exprimer le terme $Q_0(x+1)y(x+1)$, etc. On trouve pour tout n une relation de la forme

$$Q_0(x)Q_0(x+1)\cdots Q_0(x+n)y(x) = \sum_{j=n+1}^{n+s} A_{j,n}(x)y(x+j)$$

où les $A_{j,n}$ sont des polynômes. Prenons $n = m$, on a donc :

$$Q_0(x)Q_0(x+1)\cdots Q_0(x+m)y(x) = \sum_{j=m+1}^{m+s} A_{j,n}(x)y(x+j)$$

Il résulte de ce qui précède que, pour tout ω pôle de y, le second membre de cette égalité n'a pas de pôle en ω. La fonction $A(x)y(x)$ avec $A(x) = Q_0(x)Q_0(x+1)\cdots Q_0(x+m)$ est donc analytique dans $D(0, \rho_p)$, et comme m est indépendant de p, il en est de même de A, ce qui termine la démonstration du lemme. $\square$

Nous pouvons énoncer et démontrer maintenant le résultat principal de cette partie :

THÉORÈME 5.6. — *Soient $s \geqslant 1$, et $P_0, \cdots, P_s$ des polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$, avec P_s non nul.*

Soit (F) l'équation aux différences :

$$P_s(x)\Delta^s(y) + \cdots + P_0(x)y(x) = 0$$

On suppose qu'il existe un ensemble infini G de nombres premiers p, tel que si $p \in G$, l'équation aux différences (F) a s solutions $y_{k,p}$, fonctions méromorphes dans un disque de $\mathbb{C}_p$ de rayon strictement supérieur à 1, linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}_p$.

Alors (F) possède s solutions fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$, linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. — Nous utilisons le lemme 5.5 précédent. Considérons l'équation déduite de (F) en posant $z = A(x)y(x)$, où A est le polynôme dont l'existence est démontrée dans le lemme 5.5. Il est clair que si y est solution de (F), z est solution d'une équation (H), équation aux différences à coefficients polynômes dans $\mathbb{Q}[x]$.

Par les hypothèses faites, il vient immédiatement que si $p \in G$, les $z_{k,p}(x) = A(x)y_{k,p}(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (H). Par le lemme 5.5, ce sont des séries entières de rayon de convergence > 1 dans $\mathbb{C}_p$. Par le théorème 4.2, l'équation (H) possède s solutions polynômes linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, donc l'équation (F) possède s solutions fractions rationnelles, linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Bibliographie

[1] Amice (Y.). — Les nombres p-adiques, Presses universitaires de France, collection SUP (1975).

[2] André (Y.). — G-functions and Geometry. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1989).

[3] André (Y.). — Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz et un problème de Dwork. In Geometric aspects of Dwork theory Vol I, II, p. 55-112. Walter de Gruyter Gmbh & co, KG, Berlin (2004).

[4] Bézivin (J.-P.). — Wronskien et équations différentielles p-adiques, Acta Arithmetica 158, p. 61-78 (2013).

[5] Barsky (D.), Bézivin (J.-P.). — Article en préparation.

[6] Casorati (P.). — Il calcolo delle differenze finite interpretatoed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio pricimalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilitá complessa. Annali di Matematica Pura ed Applicata, Series 2, 10, (1), p. 10-45 (1880).

[7] Dwork (B.), Gerotto (G.), Sullivan (F.J.). — An introduction to G-functions. Annals of Math studies, 133, Princeton University Press (1994).