ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Gilles Carron

Inégalité de Sobolev et volume asymptotique

Tome XXI, nº 1 (2012), p. 151-172.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2012_6_21_1_151_0>

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (http://afst.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://afst.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXI, n° 2, 2012
pp. 151–172

Inégalité de Sobolev et volume asymptotique

Gilles Carron[(1)]

Résumé. — En 1999, M. Ledoux a démontré qu'une variété complète à courbure de Ricci positive ou nulle vérifiant une inégalité de Sobolev euclidienne était euclidienne. On présente un raccourci de la preuve. De plus nos arguments permettent un raffinement d'un résultat de B-L. Chen et X-P. Zhu à propos des variétés localement conformément plate à courbure de Ricci positive ou nulle. Enfin, on étudie ce qui se passe lorsque l'hypothèse sur la courbure de Ricci est remplacée par une hypothèse sur la courbure scalaire.

Abstract. — A result of M. Ledoux is that a complete Riemannian manifold with non negative Ricci curvature satisfying the Euclidean Sobolev inequality is the Euclidean space. We present a shortcut of the proof. We also give a refinement of a result of B-L. Chen et X-P. Zhu about locally conformally flat manifolds with non negative Ricci curvature. Eventually, we discuss Ledoux's result when the hypothesis on the Ricci curvature is weakened on a hypothesis on the scalar curvature.

1. Introduction

L'objectif de cette note est de présenter plusieurs résultats de rigidité obtenus à partir d'inégalités de type Sobolev. Nos arguments sont basés sur le choix de bonnes fonctions tests et ils sont inspirés par la preuve d'un très joli résultat de M. Ledoux ([10]). Pour présenter ce résultat, nous

(*) Reçu le 01/09/2011, accepté le 16/01/2012

(1) Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR 6629), Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, B.P. 92208, 44322 Nantes Cedex 3, France.
Gilles.Carron@math.univ-nantes.fr

Article proposé par Jean-Pierre Otal.

introduisons les meilleurs constantes $K(n,p)$ ($p \in [1,n[$) de l'inégalité de Sobolev euclidienne :

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,,\ \|f\|^p_{\frac{pn}{n-p}} \leqslant K(n,p)^p\,\|df\|_p^p\ ; \tag{1.1}$$

c'est-à-dire

$$K(n,p)^{-1} = \inf_{f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\|df\|_p}{\|\,f\,\|_{\frac{pn}{n-p}}}\ .$$

Grâce aux travaux de G.Talenti et T. Aubin ([3], [18]), on connaît la valeur de $K(n,p)$ et on sait de plus, que pour $p \in]1,n[$, les fonctions

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{(\lambda^q + \|x\|^q)^{\frac{n-p}{p}}},\ \text{avec } q = \frac{p}{p-1}$$

réalisent l'égalité dans l'inégalité de Sobolev euclidienne (1.1). Le résultat de M. Ledoux est le suivant

Théorème 1.1. — *Soit (M^n,g) une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive ou nulle. Si pour un $p \in [1,n[$ celle ci vérifie l'inégalité de Sobolev :*

$$\forall f \in C_0^\infty(M)\,,\ \|f\|^p_{\frac{pn}{n-p}} \leqslant K(n,p)^p\,\|df\|_p^p$$

alors (M^n,g) est isométrique à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Un raisonnement basé sur le caractère infinitésimallement euclidien de la géométrie riemannienne montre facilement que si une variété riemannienne (M^n,g) vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\forall f \in C_0^\infty(M)\,,\ \|f\|^p_{\frac{pn}{n-p}} \leqslant A^p\,\|df\|_p^p \tag{1.2}$$

alors

$$A \geqslant K(n,p)\ .$$

On sait de plus qu'une telle inégalité de Sobolev (1.2) implique en toute généralité une croissance euclidienne pour le volume des boules géodésiques ([2], [6], [15, theorem 3.1.5]) :

$$\forall x \in M, \forall r > 0\ ,\ \operatorname{vol} B(x,r) \geqslant C(p,n)\left(\frac{r}{A}\right)^n\ .$$

Lorsque la courbure de Ricci de la métrique g est positive ou nulle, le théorème de comparaison de Bishop-Gromov nous apprend que le quotient

$$\frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{r^n}$$

est une fonction décroissante de r ; on peut alors définir ν_∞ le *volume asymptotique* de (M^n, g) par :

$$\nu_\infty := \lim_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{r^n}.$$

On a donc $\nu_\infty \leqslant \omega_n$ où ω_n est le volume de la boule euclidienne de rayon 1. De plus l'égalité $\nu_\infty = \omega_n$ implique que la variété (M^n, g) est isométrique à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Le but de la preuve de M. Ledoux consiste à démontrer que l'hypothèse de positivité de la courbure de Ricci et l'inégalité de Sobolev

$$\forall f \in C_0^\infty(M)\ \ \|f\|^p_{\frac{pn}{n-p}} \leqslant K(n,p)^p\, \|df\|_p^p$$

implique que $\nu_\infty \geqslant \omega_n$. Pour cela, il étudie une inéquation différentielle impliquée par l'inégalité de Sobolev.

La preuve fournie par M. Ledoux a été reprise par de nombreux auteurs et pour différentes inégalités de type Sobolev pour démontrer que si la constante A de l'inégalité de Sobolev (1.2) est presque euclidienne et si la courbure de Ricci est positive ou nulle alors le volume asymptotique est presque maximal et donc d'après un résultat de T. Colding la variété est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ ([1], [5], [14], [21], [22], [23]). Dans un papier récent S. Pigola et G. Veronelli ([13]) utilise une autre méthode basée sur des théorèmes de comparaison pour le laplacien. Ici, on va démontrer le résultat suivant :

Théorème A. — *Soit (M^n, g) une variété Riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev :*

$$\forall f \in C_0^\infty(M)\,,\ \|f\|^p_{\frac{pn}{n-p}} \leqslant A^p\, \|df\|_p^p$$

si le quotient

$$\frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{r^n}$$

admet une limite lorsque r tend vers l'infini :

$$\nu_\infty = \lim_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{r^n}$$

alors

$$\nu_\infty \geqslant \omega_n \left(\frac{K(n,p)}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\ .$$

Notre preuve débute avec les mêmes arguments que celle de M. Ledoux mais une observation nous permet de raccourcir la fin de celle ci. Remarquons que la preuve de M. Ledoux pourrait être adaptée pour démontrer ce résultat ; cf. la preuve de [1, theorem 3.3]. De plus, il sera évident que ce résultat et sa preuve peuvent être généralisé à beaucoup d'autres inégalités de type Sobolev (voir par exemple [5],[22],[23]).

Pour les variétés à courbure de Ricci presque positive, on sait que ce quotient a une limite. C'est-à-dire on suppose que pour un point $o \in M$ on a la minoration :

$$\mathrm{Ricci}_g \geqslant -(n-1)G(d(o,\,.\,))g$$

où G est une fonction continue positive sur $[0,+\infty[$ qui vérifie

$$b := \int_0^{+\infty} G(t)dt < +\infty\ .$$

Les théorèmes de comparaison montrent que si h est la fonction solution du problème de Cauchy

$$h'' = Gh,\ h(0) = 0, h'(0) = 1$$

alors pour

$$V(r) = \int_0^r h(t)^{n-1}dt\ ,$$

le quotient

$$\frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{V(r)}$$

est une fonction décroissante. De plus la fonction h est convexe, le quotient $h(r)/r$ est une fonction croissante et l'on a pour

$$\alpha := \lim_{r\to\infty} \frac{h(r)}{r} \ \text{ alors }\ 1 + b \leqslant \alpha \leqslant e^b\ .$$

Ce qui montre que dans ce cas le quotient $\frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{r^n}$ a bien une limite en $+\infty$ égale à

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{r^n} = \frac{\alpha^{n-1}}{n} \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{V(r)}\ .$$

Ainsi, notre théorème A permet de retrouver des résultats récents de S. Pigola et G. Veronelli ([13]) et de L. Adriano et C. Xia ([1]).

Par ailleurs, notre preuve nous permettra également de re-démontrer un résultat de rigidité de B-L. Chen et X-P. Zhu ([8])

Théorème 1.2. — *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne complète non compacte localement conformément plate à courbure de Ricci positive ou nulle si*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{r^2}{\operatorname{vol} B(o,r)} \int_{B(o,r)} \operatorname{Scal}_g d\operatorname{vol}_g = 0$$

alors (M^n, g) *est plate.*

En fait nous démontrerons un petit raffinement de ce résultat à savoir :

Théorème B. — *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne complète non compacte localement conformément plate à courbure de Ricci positive ou nulle alors soit la variété est plate soit nous avons l'inégalité :*

$$\omega_n^{\frac{2}{n}} - \nu_\infty^{\frac{2}{n}} \leqslant n^{-2} \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{(\operatorname{vol} B(o,r))^{\frac{n-2}{n}}} \int_{B(o,r)} \operatorname{Scal}_g d\operatorname{vol}_g \ .$$

Enfin, on remarque qu'une variété riemannienne (M^n, g) complète à courbure scalaire positive ou nulle vérifiant l'inégalité de Sobolev optimale :

$$\forall f \in C_0^\infty(M)\,,\ \left\|f\right\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant K(n,2)^2 \left\|df\right\|_2^2 ,$$

vérifie aussi l'inégalité suivante

$$\forall f \in C_0^\infty(M)\,,\ \left\|f\right\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant K(n,2)^2 \int_M \left[|df|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}\operatorname{Scal}_g f^2\right] d\operatorname{vol}_g \ .$$

Ainsi l'invariant de Yamabe de la métrique g est égale à celui de la sphère ronde :

$$Y([g]) := \inf_{f\in C_0^\infty(M)} \frac{\int_M \left[|df|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}\operatorname{Scal}_g f^2\right] d\operatorname{vol}_g}{\left\|f\right\|^2_{\frac{2n}{n-2}}} = Y(\mathbb{S}^n).$$

Grâce au travaux de T. Aubin et R. Schoen ([4], [16]), on sait que pour une variété compacte (M^n, g) non conformément équivalente à la sphère ronde on a

$$Y([g]) < Y(\mathbb{S}^n)\ .$$

Ce résultat est fondamental pour trouver une métrique conforme à courbure scalaire constante et il permet de conclure le programme initié par H.Yamabe et N. Trudinger ([24],[19]). Ainsi une généralisation du résultat de M. Ledoux serait de déterminer les variétés riemanniennes complètes dont l'invariant de Yamabe est égale à celui de la sphère ronde. On remarque qu'il y a de nombreux exemples de telles variétés, en effet selon [17, Prop 2.2], nous avons

Proposition 1.3. — *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne complète telle qu'il existe une immersion conforme*

$$\Phi\colon (M, g) \to (\mathbb{S}^n, can)$$

alors

$$Y([g]) = Y(\mathbb{S}^n)\ .$$

Le résultat spectaculaire de l'article de R. Schoen et S-T. Yau nous apprend que si de plus la courbure scalaire est positive ou nulle alors (dans la plupart des cas) une telle immersion est injective. Il est alors naturel de classifier les variétés riemanniennes complètes à courbure scalaire positive ou nulle dont l'invariant de Yamabe est égale à celui de la sphère ronde. En fait en reprenant l'analyse d'Aubin et Schoen avec de bonnes fonctions tests, nous pouvons démontrer qu'une telle variété riemannienne est soit localement conformément plate, soit de dimension inférieure à 5 ; de plus l'égalité entre $Y([g]) = Y(\mathbb{S}^n)$ impose qu'en tout point la masse de la variété asymptotiquement euclidienne obtenue par explosion stéréographique est négative ou nulle. Lorsque la conjecture/théorème de la masse positive généralisée est vraie (cf. le discours de R. Schoen et S-T. Yau pour énoncer [17, prop 4.4']) alors nous pouvons en déduire que la variété est conformément équivalente à un ouvert $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ et que de plus la dimension de Hausdorff de son complémentaire vérifie :

$$\dim_H(\mathbb{S}^n \setminus \Omega) \leqslant (n-2)/2.$$

Compte tenu de l'état des connaissances sur le théorème de la masse positive généralisé, notre résultat sera le suivant :

Théorème C. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne complète non compacte à courbure scalaire positive ou nulle :*

$$\mathrm{Scal}_g \geqslant 0$$

et dont l'invariant de Yamabe est celui de la sphère ronde

$$Y([g]) = Y(\mathbb{S}^n)\ .$$

Supposons l'une des hypothèses suivantes vérifiées :

i) $n = \dim M \geqslant 6$*,*

ii) M *est spin* [1]*,*

(1) Par exemple si M est orienté et si $n = 3$.

iii) M^n est localement conformément plate de dimension $n \neq 5$,

alors (M,g) est conformément équivalente à un ouvert $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ telle que

$$\dim_H(\mathbb{S}^n \setminus \Omega) \leqslant (n-2)/2.$$

Remerciements. — Je remercie V. Minerbe pour ses commentaires avisés. Le rapporteur de ce papier m'a donné des conseils judicieux, je le remercie également. Je suis aussi partiellement financé par le projet ACG: ANR-10-BLAN 0105.

2. Preuve du théorème A

Le cas $p = 1$ est relativement aisé car l'inégalité de Sobolev

$$\forall f \in C_0^\infty(M) \ \ \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant A\,\|df\|_1$$

est équivalente à l'inégalité isopérimétrique

$$\forall \Omega \subset M,\ A\operatorname{vol}(\partial\Omega) \geqslant \operatorname{vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}$$

qui, elle, implique la minoration

$$\operatorname{vol} B(o,r) \geqslant \left(\frac{r}{n\,A}\right)^n .$$

Concernant le cas où $p \in]1,n[$, on introduit, comme M. Ledoux, les fonctions

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^{\frac{(q-1)(n-p)}{p}}}{(\lambda^q + d(o,x)^q)^{\frac{n-p}{p}}}.$$

où $q = p/(p-1)$. On notera

$$\theta(r) = \frac{\operatorname{vol} B(o,r)}{r^n} .$$

En reprenant les calculs fait par M. Ledoux, on a facilement :

$$\|f_\lambda\|^p_{\frac{pn}{n-p}} = \left(\int_0^{+\infty} \frac{nqr^{q-1+n}\lambda^{n(q-1)}}{(\lambda^q + r^q)^{n+1}}\theta(r)dr\right)^{1-\frac{p}{n}}$$

En faisant alors le changement de variables $r = \lambda\rho$ on obtient :

$$\|f_\lambda\|^p_{\frac{pn}{n-p}} = \left(\int_0^{+\infty} \frac{nq\rho^{q-1+n}}{(1+\rho^q)^{n+1}}\theta(\lambda\rho)d\rho\right)^{1-\frac{p}{n}}$$

En notant

$$A_{n,p} = \left(\int_0^{+\infty} \frac{nq\rho^{q-1+n}}{(1+\rho^q)^{n+1}} d\rho \right)^{1-\frac{p}{n}}$$

grâce au théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|f_\lambda\|^p_{\frac{pn}{n-p}} = (\nu_\infty)^{1-\frac{p}{n}} A_{n,p} \ . \tag{2.1}$$

De même, en introduisant la mesure de Stieljes : $dv(r)$ où $v(r) = \operatorname{vol} B(o,r)$, on trouve

$$\|df_\lambda\|^p_p = q^p \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_M \frac{\lambda^{(q-1)(n-p)} d(o,x)^{(q-1)p}}{(\lambda^q + d(o,x)^q)^n} d\mathrm{vol}_g(x)$$

$$= q^p \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_M \frac{\lambda^{(q-1)(n-p)} r^{(q-1)p}}{(\lambda^q + r^q)^n} dv(r)$$

$$= q^p \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \lambda^{(q-1)(n-p)} \int_0^{+\infty} qr^{q-1} \left(\frac{nr^q}{(\lambda^q + r^q)^{n+1}} - \frac{1}{(\lambda^q + r^q)^n} \right) v(r) dr$$

$$= q^p \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_0^{+\infty} q\rho^{n+q-1} \left(\frac{n\rho^q}{(1+\rho^q)^{n+1}} - \frac{1}{(1+\rho^q)^n} \right) \theta(\lambda\rho) d\rho$$

D'où en notant

$$B_{n,p} = q^p \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_0^{+\infty} q\rho^{n+q-1} \left(\frac{n\rho^q}{(1+\rho^q)^{n+1}} - \frac{1}{(1+\rho^q)^n} \right) d\rho \ ,$$

$$= q^p \left(\frac{n-p}{p}\right)^p n \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+q-1}}{(1+\rho^q)^n} d\rho \ ,$$

on obtient :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|df_\lambda\|^p_p = \nu_\infty B_{n,p} \ . \tag{2.2}$$

Ainsi l'inégalité de Sobolev:

$$\forall f \in C_0^\infty(M) \ \ \|f\|^p_{\frac{pn}{n-p}} \leqslant A^p \|df\|^p_p$$

implique avec les égalités (2.1) et (2.2) :

$$(\nu_\infty)^{1-\frac{p}{n}} A_{n,p} \leqslant A^p \nu_\infty B_{n,p}$$

Et puisque lorsqu'on effectue les calculs sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ on a égalité, on en déduit

$$(\nu_\infty)^{-\frac{p}{n}} \leqslant A^p \frac{B_{n,p}}{A_{n,p}} = (\omega_n)^{-\frac{p}{n}} \left(\frac{A}{K(n,p)}\right)^p .$$

3. Preuve du théorème B

On va maintenant démontrer le théorème B. Pour cela on se sert de la classification des variétés localement conformément plates à courbure de Ricci positive ou nulle obtenue dans ([7]). Cette classification implique qu'une telle variété, si elle n'est pas compacte, est

– soit plate,
– soit isométrique à un quotient du produit $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$
– soit globalement conformément équivalente à $\mathbb{R}^n$.

Dans le deuxième cas, le volume asymptotique est nul et la limite du terme de gauche est l'infini donc l'inégalité est bien valide. Il faut donc traiter le cas où $M = \mathbb{R}^n$ équipé d'une métrique

$$g = u^{\frac{4}{n-2}} \,\mathrm{eucl}\ .$$

Dans ce cas, l'invariance conforme de l'invariant de Yamabe fournit l'inégalité de type Sobolev :

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\ \ \|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leqslant K(n,2)^2 \left[\|df\|_2^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Scal}_g f^2 d\mathrm{vol}_g \right]\ .$$

On utilise les mêmes arguments en testant cette inégalité à la fonction

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}{(\lambda^2 + d(o,x)^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

pour obtenir

$$(\nu_\infty)^{1-\frac{2}{n}} A_{n,2} \leqslant K(n,2)^2 \left(\nu_\infty B_{n,2} + I\right)\ ,$$

où

$$I = \limsup_{\lambda \to \infty} \frac{n-2}{4(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Scal}_g f_\lambda^2 \, d\mathrm{vol}_g\ .$$

Or, en introduisant la mesure de Stieljes $dS(r)$ où $S(r) = \int_{B(o,r)} \mathrm{Scal}_g d\mathrm{vol}_g$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Scal}_g f_\lambda^2(x) \mathrm{vol}_g &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^{n-2}}{(\lambda^2 + d(o,x)^2)^{n-2}} \mathrm{Scal}_g(x) d\mathrm{vol}_g(x) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(\lambda^2 + r^2)^{n-2}} dS(r) \\
&= \int_0^{+\infty} 2(n-2) \frac{\lambda^{n-2} r}{(\lambda^2 + r^2)^{n-1}} S(r) dr
\end{aligned}$$

D'où en posant

$$\Sigma(r) = r^{2-n} \int_{B(o,r)} \mathrm{Scal}_g d\mathrm{vol}_g \ ,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Scal}_g f_\lambda^2 d\mathrm{vol}_g &= 2(n-2) \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2} r^{n-1}}{(\lambda^2+r^2)^{n-1}} \Sigma(r) dr \\
&= 2(n-2) \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{n-1}} \Sigma(\lambda\rho) d\rho
\end{aligned}$$

D'où

$$I \leqslant C_n \limsup_{r\to+\infty} r^{2-n} \int_{B(o,r)} \mathrm{Scal}_g d\mathrm{vol}_g$$

où

$$C_n = \frac{(n-2)^2}{2(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{n-1}} d\rho \ .$$

Et on obtient finalement :

$$(\nu_\infty)^{1-\frac{2}{n}} \frac{A_{n,2}}{B_{n,2}} \leqslant K(n,2)^2 \left(\nu_\infty + \frac{C_n}{B_{n,2}} \limsup_{r\to+\infty} r^{2-n} \int_{B(o,r)} \mathrm{Scal}_g d\mathrm{vol}_g \right)$$

soit encore

$$\omega_n^{\frac{2}{n}} \leqslant \nu_\infty^{\frac{2}{n}} + \frac{C_n}{B_{n,2}} \limsup_{r\to+\infty} \frac{\int_{B(o,r)} \mathrm{Scal}_g d\mathrm{vol}_g}{(\nu_\infty r^n)^{1-\frac{2}{n}}} \ .$$

Pour finir on compare les deux constantes C_n et $B_{n,2}$. Rappelons que

$$\begin{aligned}
B_{n,2} &= (n-2)^2 n \int_0^\infty \frac{\rho^{n+1}}{(1+\rho^2)^n} d\rho \\
&= -(n-2)^2 n \int_0^\infty \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{(1+\rho^2)^{n-1}} \right) \frac{\rho^n}{2(n-1)} d\rho \\
&= (n-2)^2 n \int_0^\infty \frac{1}{(1+\rho^2)^{n-1}} \frac{n\rho^{n-1}}{2(n-1)} d\rho \\
&= n^2 C_n.
\end{aligned}$$

4. Preuve du théorème C

On suppose dans cette section que (M^n, g) est une variété riemannienne complète de courbure scalaire positive ou nulle et qu'elle vérifie l'inégalité de Sobolev-Yamabe :

$$\forall f \in C_0^\infty(M) \tag{4.1}$$
$$\left(\int_M |f|^{\frac{2n}{n-2}} d\mathrm{vol}_g\right)^{1-\frac{2}{n}} \leqslant K(n,2)^2 \int_M \left[|df|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{Scal}_g f^2\right] d\mathrm{vol}_g$$

Le premier point est d'analyser les contraintes imposées sur la géométrie locale. Pour cela on fixe un point $x \in M$; en reprenant la preuve du résultat sus mentionné de T.Aubin et R.Schoen avec quelques modifications dues à la non compacité de la variété et en utilisant notamment une fonction test inspirée de celle de R. Schoen, nous démontrerons que

- Si $n \geqslant 6$ alors le tenseur de Weyl s'annule en x.
- Si $n \in \{3, 4, 5\}$ ou si g est localement conformément plate alors la masse de la variété obtenue par explosion stéréographique de $(M \setminus \{x\}, g)$ est positive ou nulle.

Ceci sera démontré dans les trois sous sections suivantes. Ainsi en dimension $n \geqslant 6$, une telle variété est localement conformément plate. Dans la dernière sous section, on rappellera les arguments tirés de l'article de Schoen-Yau et de la preuve de la conjecture de la masse positive de E. Witten qui permette de conclure dans les différents cas.

4.1. Estimées préliminaires

Le point de départ est que cette inégalité de Sobolev (4.1) assure l'existence d'un noyau de Green minimal positif, noté $G(x, y) = G_x(y)$, pour l'opérateur de Yamabe :

$$L := \Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{Scal}_g \ .$$

Pour alléger les notations on notera

$$a_n = \frac{n-2}{4(n-1)}.$$

De plus si x est un point de M et $\mathcal{O}$ un voisinage compact de x alors on sait que (cf. [17, Cor. 2.3])

$$\int_{M\setminus\mathcal{O}} G_x^{\frac{2n}{n-2}} d\mathrm{vol}_g < +\infty$$
$$\text{et} \quad \int_{M\setminus\mathcal{O}} \left[|dG_x|^2 + a_n \mathrm{Scal}_g G_x^2\right] d\mathrm{vol}_g < +\infty \tag{4.2}$$

On sait aussi que l'inégalité de Sobolev (4.1) implique une estimée gaussienne sur le noyau de la chaleur de L : il y a une constante C_n telle que

$$\forall x, y \in M, \forall t > 0 \ : \ e^{-tL}(x,y) \leqslant C_n \, \frac{e^{-\frac{d^2(x,y)}{5t}}}{t^{\frac{n}{2}}},$$

ainsi on a

$$G_x(y) = \int_0^{+\infty} e^{-tL}(x,y)dt \leqslant \frac{C'_n}{d(x,y)^{n-2}}.$$

Notons $\Omega := \{y \in M, G_x(y) < t\}$, c'est le complémentaire d'un voisinage compact de x et en intégrant par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} \left[|dG_x|^2 + a_n \mathrm{Scal}_g G_x^2\right] d\mathrm{vol}_g &= \int_{\{G_x = t\}} G_x \frac{\partial G_x}{\partial n} \\
&= t \int_{\{G_x = t\}} \frac{\partial G_x}{\partial n} \\
&= t \int_{\{G_x > t\}} \Delta G_x \\
&= t - t \int_{\{G_x > t\}} a_n \mathrm{Scal}_g G_x \, d\mathrm{vol}_g
\end{aligned}$$

où n désigne la normale unitaire sortante à $\partial\Omega_t$ et l'expression $\int_{\{G_x>t\}} \Delta G_x$ est à comprendre au sens des distributions. On applique alors l'inégalité de Sobolev (4.1) à la fonction $\min(G_x, t)$ pour obtenir

$$t^2 \mathrm{vol}\,\{G_x > t\}^{1-\frac{2}{n}} \leqslant K(n,2)^2 \left[t + t \int_{\{G_x > t\}} a_n \mathrm{Scal}_g (t - G_x) d\mathrm{vol}_g \right] \leqslant K(n,2)^2 \, t\,.$$

Ce qui permet d'obtenir l'estimation suivante

$$\mathrm{vol}\,\{G_x > t\} \leqslant C t^{-\frac{n}{n-2}}. \tag{4.3}$$

On remarque maintenant que l'invariance conforme du noyau de Green fait que ces estimées sont encore valides pour une déformation conforme à support compact de g.

4.2. Une bonne fonction test

4.2.1. Implémentation

On fixe maintenant $x \in M$ et suivant [11, thm. 5.1], on modifie conformément g dans un voisinage compact de x pour obtenir une métrique

$$\bar{g} = e^v g$$

où $v(x) = 1$, v est à support dans un voisinage compact de x et en x toutes les dérivées covariantes symétriques du tenseur de Ricci de $\bar{g}$ sont nulles jusqu'à l'ordre N (N étant choisi assez grand). Ceci implique qu'en coordonnées normales autour de x on a :

$$d\mathrm{vol}_{\bar{g}} = \left(1 + O\left(s^N\right)\right) s^{n-1} ds d\sigma$$

où $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue de la sphère unité dans l'espace tangent $(T_xM, \bar{g}_x = g_x)$.

Dans ce cas on sait aussi que

$$\Delta_{\bar{g}} \mathrm{Scal}_{\bar{g}}(x) = \frac{|W|^2(x)}{6}. \tag{4.4}$$

où $|W|(x)$ est la norme du tenseur de Weyl de g en x (c'est aussi la norme du tenseur de Weyl de $\bar{g}$ en x). Tous les calculs de cette sous-section (4.2) seront fait pour la métrique $\bar{g}$.

Posons $\sigma_{n-1} = n\omega_n$ le volume de la sphère unité de dimension $n-1$ et

$$\alpha_n = \frac{1}{\sigma_{n-1}(n-2)}.$$

Soit $\lambda > 0$, la fonction test que nous choisissons est

$$f_\lambda := \frac{\lambda^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\lambda^2 + r^2\right)^{\frac{n-2}{2}}}$$

où la fonction $r \colon M \to \mathbb{R}_+$ est définie par

$$G_x(y) = \frac{\alpha_n}{r(y)^{n-2}},$$

où on le rappelle G_x est la fonction de Green conforme pour la métrique $\bar{g}$ avec pôle en x. L'estimée (4.3) assure que le volume des sous-lignes de niveau de r croit au maximum de façon euclidienne :

$$\mathrm{vol}\{r \leqslant R\} \leqslant CR^n.$$

Ainsi on a $f_\lambda \in L^{\frac{2n}{n-2}}$ et le même calcul que précédemment montre que

$$\|f_\lambda\|_{\frac{2n}{n-2}}^{\frac{2n}{n-2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2n\rho^{1+n}}{(1+\rho^2)^{n+1}}\theta(\lambda\rho)d\rho \text{ avec } \theta(\tau) = \frac{\mathrm{vol}\{r \leqslant \tau\}}{\tau^n} \quad (4.5)$$

Ensuite on calcule comme précédemment :

$$\begin{aligned}\int_M |df_\lambda|^2 &= \lambda^{n-2}(n-2)^2 \int_M \frac{r^2}{(\lambda^2+r^2)^n}|dr|^2 d\mathrm{vol}_{\bar g} \\ &= \lambda^{n-2}(n-2)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\tau^2}{(\lambda^2+\tau^2)^n}\left(\int_{r=\tau}|dr|\right)d\tau\end{aligned}$$

Cependant

$$\begin{aligned}\int_{\{r=\tau\}}|dr| &= \frac{\tau}{n-2}\int_{\{G_x=\alpha_n/\tau^n\}}\frac{|dG_x|}{G_x} \\ &= \frac{\tau^{n-1}}{(n-2)\alpha_n}\int_{\{G_x=\alpha_n/\tau^n\}}|dG_x| \\ &= \frac{\tau^{n-1}}{(n-2)\alpha_n}\left[1-a_n\int_{\{r<\tau\}}\mathrm{Scal}_g G_x d\mathrm{vol}_g\right]\end{aligned}$$

D'où en posant

$$v(\tau) = a_n \int_{\{r<\tau\}} \mathrm{Scal}_g G_x d\mathrm{vol}_g$$

on obtient finalement :

$$\int_M |df_\lambda|^2 = \sigma_{n-1}\lambda^{n-2}(n-2)^2\left[\int_0^{+\infty}\frac{\tau^{n+1}}{(\lambda^2+\tau^2)^n}d\tau - \int\frac{\tau^{n+1}}{(\lambda^2+\tau^2)^n}v(\tau)d\tau\right].$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\int_M a_n\mathrm{Scal}_g f_\lambda^2 d\mathrm{vol}_{\bar g} &= \int_M \frac{(\lambda r)^{n-2}}{\alpha_n(\lambda^2+r^2)^{n-2}}a_n\mathrm{Scal}_{\bar g}G_x d\mathrm{vol}_{\bar g} \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^{n-2}}{\alpha_n(\lambda^2+\tau^2)^{n-2}}dv(\tau) \\ &= \lambda^{n-2}(n-2)^2\sigma_{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\tau^4-\lambda^4}{(\lambda^2+\tau^2)^3}\left(\frac{\tau}{\lambda^2+\tau^2}\right)^{n-3}v(\tau)d\tau\end{aligned}$$

où comme précédemment nous avons utilisé la mesure de Stieljes $dv(\tau)$. Au final il nous reste :

$$\int_M \left[|df_\lambda|^2 + a_n\mathrm{Scal}_g f_\lambda^2\right] d\mathrm{vol}_{\bar g} = \omega_n B_{n,2} - J(\lambda)$$

où

$$\omega_n B_{n,2} = \sigma_{n-1}(n-2)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(1+\rho^2)^n} d\rho$$

et

$$J(\lambda) = \lambda^{n+2}(n-2)^2 \sigma_{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{n-3}}{(\lambda^2+\tau^2)^n} v(\tau) d\tau\,.$$

Remarquons qu'il est facile de justifier nos calculs en les effectuant d'abord pour la fonction de Green conforme avec ple en x et condition de Dirichlet sur le bord d'une grande boule géodésique $B(x,R)$ et en faisant ensuite tendre R vers l'infini. De plus, le fait que $g = \bar{g}$ au dehors d'un voisinage $\mathcal{O}$ compact de x et que

$$\int_{M\setminus\mathcal{O}} \mathrm{Scal}_g G_x^2 < +\infty$$

implique que

$$v(\tau) = O(r^{n-2}) \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{v(\tau)}{\tau^{n-1}} d\tau < +\infty, \tag{4.6}$$

et donc les quantités ci-dessus sont bien finies.

4.2.2. Asymptotiques

Pour pouvoir faire un développement asymptotique des quantités $J(\lambda)$ et $\|f_\lambda\|_{\frac{2n}{n-2}}^{\frac{2n}{n-2}} =: I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0, nous devons utiliser l'allure du noyau de Green près de x. Celui-ci se trouve dans l'article de Lee-Parker ([11, lem. 6.4]

Proposition 4.1. — *En utilisant les coordonnées normales $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $s = \sqrt{\sum_j v_j^2}$ de $\bar{g}$, on a :*

i) Si $n \in \{3,4,5\}$ ou si g est localement conformément plate au voisinage de x alors

$$G_x(y) = \alpha_n \left(\frac{1}{s^{n-2}} + m + O(s) \right)$$

ii) Si $n = 6$ alors :

$$G_x(y) = \alpha_6 \left(\frac{1}{s^4} - \frac{1}{288} |W|^2(x) \log s + O(1) \right)$$

iii) Si $n \geqslant 7$ alors

$$G_x(y) = \frac{\alpha_n}{s^{n-2}} \left[1 + \frac{s^2}{12(n-4)} \left(\frac{s^2}{12(n-6)} |W|^2(x) - \mathrm{Hess}_{\bar{g}} \mathrm{Scal}_{\bar{g}}(v,v) \right) + O\left(s^5\right) \right]$$

À partir de cette proposition, nous pouvons en déduire un développement asymptotique des fonctions I et J.

Asymptotique de la fonction J : On remarque d'abord que les estimations (4.6) impliquent que lorsque $\lambda \to 0+$:

$$\int_\delta^{+\infty} \frac{\tau^{n-3}}{(\lambda^2+\tau^2)^n} v(\tau) d\tau = O(1).$$

L'asymptotique du noyau de Green, l'égalité (4.4) et le fait que

$$\int_{\{s=R\}} \mathrm{Scal}_{\bar{g}} d\sigma = -\frac{R^2}{2n} \sigma_{n-1} \left(\Delta_{\bar{g}} \mathrm{Scal}_{\bar{g}}\right)(x) + O(R^3)$$

permettent de démontrer que

$$v(\tau) = -\tau^4 \frac{|W(x)|^2}{192n(n-1)} + O(\tau^5).$$

Esnuite grâce aux estimations

$$\lambda^{n+2} \int_0^\delta \frac{\tau^{n-3}}{(\lambda^2+\tau^2)^n} \tau^4 d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(1+\rho^2)^n} d\rho + O\left(\lambda^{n+2}\right),$$

et

$$\lambda^{n+2} \int_0^\delta \frac{\tau^{n-3}}{(\lambda^2+\tau^2)^n} \tau^5 d\tau = \begin{cases} O\left(\lambda^5\right) & \text{si } n \geqslant 4 \\ O\left(\lambda^5 \ln|\lambda|\right) & \text{si } n = 3, \end{cases}$$

on obtient :

$$J(\lambda) = -\lambda^4 \frac{(n-2)^2 \sigma_{n-1}}{192n(n-1)} |W|^2(x) \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(1+\rho^2)^n} d\rho + o\left(\lambda^4\right). \tag{4.7}$$

De plus si la métrique g est localement conformément plate au voisinage de x, alors on peut supposer que la métrique $\bar{g}$ est plate au voisinage de x et dans ce cas on a

$$J(\lambda) = O\left(\lambda^{n+2}\right). \tag{4.8}$$

Asymptotique de la fonction I : La proposition (4.1) implique un développement asymptotique de la fonction

$$\theta(\tau) = \tau^{-n}\mathrm{vol}_{g_{\bar{g}}}\{r \leqslant \tau\} = \tau^{-n}\mathrm{vol}_{g_{\bar{g}}}\left\{y \in M, G(x,y) \geqslant \frac{\alpha_n}{r^{n-2}}\right\} :$$

i) Si $n \in \{3,4,5\}$ ou si g est localement conformément plate au voisinage de x alors

$$\theta(\tau) = \omega_n + \omega_n\, m\, \frac{n}{n-2}\tau^{n-2} + O\left(\tau^{n-1}\right) .$$

ii) Si $n = 6$ alors on obtient

$$\theta(\tau) = \omega_6 - \omega_6 \frac{|W(x)|^2}{192}\tau^4 \ln(\tau) + O\left(\tau^4\right) .$$

iii) Si $n \geqslant 7$ alors

$$\theta(\tau) = \omega_n + \omega_n \frac{|W(x)|^2}{48\, n\, (n-6)}\tau^4 + O\left(\tau^5\right) .$$

Puisque la fonction θ est bornée, on obtient :

$$\int_{\delta/\lambda}^{+\infty} \frac{2n\rho^{1+n}}{(1+\rho^2)^{n+1}}\theta(\lambda\rho)d\rho = O\left(\lambda^n\right) .$$

De plus, pour $\alpha < n$, nous avons

$$\int_0^{\delta/\lambda} \frac{2n\rho^{1+n}}{(1+\rho^2)^{n+1}}\rho^\alpha d\rho = \int_0^{+\infty} \frac{2n\rho^{1+n}}{(1+\rho^2)^{n+1}}\rho^\alpha d\rho + O\left(\lambda^{n-\alpha}\right) .$$

Ces calculs permettent d'établir :

i) Si $n \in \{3,4,5\}$ ou si g est localement conformément plate au voisinage de x alors

$$I(\lambda) = \omega_n A_{n,2}^{\frac{n}{n-2}} + m\lambda^{n-2}\frac{n}{n-2}\omega_n \int_0^\infty \frac{2n\rho^{2n-1}}{(1+\rho^2)^{n+1}}d\rho + o\left(\lambda^{n-2}\right)$$

ii) Si $n = 6$ alors on obtient

$$I(\lambda) = \omega_6 A_{6,2}^{\frac{3}{2}} - \frac{|W|^2(x)}{192}\lambda^4 \log(\lambda) \int_0^\infty \frac{12\omega_6\rho^{11}}{(1+\rho^2)^7}d\rho + O\left(\lambda^4\right)$$

iii) Si $n \geqslant 7$ alors

$$I(\lambda) = \omega_n A_{n,2}^{\frac{n}{n-2}} + \frac{|W|^2(x)}{48(n-2)(n-6)}\lambda^4 \int_0^\infty \frac{2n\omega_n \rho^{n+5}}{(1+\rho^2)^{n+1}} d\rho + O\left(\lambda^5\right). \quad (4.9)$$

Où

$$\omega_n A_{n,2}^{\frac{n}{n-2}} = \sigma_{n-1} \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^n} d\rho = 2^{-n}\sigma_n \quad (4.10)$$

4.3. Discussion sur la géométrie locale

L'inégalité de Sobolev-Yamabe (4.1) implique donc que

$$I(\lambda)^{1-\frac{2}{n}} \leqslant K(n,2)^2 \left(\omega_n B_{n,2} - J(\lambda)\right).$$

Ainsi, lorsque la dimension de M égale à 6, nos développements asymptotiques impliquent que $W(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout x, on en déduit que la métrique g est localement conformément plate.

Lorsque $n \geqslant 7$, nous devons comparer

$$I(\lambda)^{1-\frac{2}{n}}$$

et

$$K(n,2)^2 \left(\omega_n B_{n,2} - J(\lambda)\right).$$

Puisque

$$I(\lambda) = A_n + c_n |W|^2(x)\lambda^4 + O\left(\lambda^5\right)$$

où les constantes A_n et c_n sont tirées de (4.9). Ainsi, on obtient

$$I(\lambda)^{1-\frac{2}{n}} = A_n^{1-2/n} + \left(1 - \frac{2}{n}\right) c_n A_n^{-2/n} |W|^2(x)\lambda^4 + O\left(\lambda^5\right).$$

De plus on sait que

$$K(n,2)^2 = \sigma_n^{-2/n} \frac{4}{n(n-2)} \text{ et que } A_n^{1-2/n} = K(n,2)^2 \omega_n B_{n,2}.$$

De la même façon, on écrit

$$-J(\lambda) = b_n |W|^2(x)\lambda^4 + o\left(\lambda^4\right),$$

où la constante b_n est issue de (4.7). Compte-tenu de l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho^a}{(1+\rho^2)^b} d\rho = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(b)},$$

on calcule

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{n}\right)c_nA_n^{-2/n} &= \frac{n-2}{n}4\sigma_n^{-2/n}\sigma_{n-1}\frac{1}{48\,(n-2)\,(n-6)}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+3\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\Gamma\,(n+1)}\\ &= \sigma_n^{-2/n}\sigma_{n-1}\frac{1}{12\,n\,(n-6)}\frac{\left(\frac{n}{2}+2\right)\,\left(\frac{n}{2}+1\right)}{n\left(\frac{n}{2}-2\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\,(n)}\\ &= \sigma_n^{-2/n}\sigma_{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\Gamma\,(n)}\frac{(n+4)(n+2)}{12n^2(n-4)(n-6)} \qquad (4.11)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}K(n,2)^2b_n &= \sigma_n^{-2/n}\frac{4}{n(n-2)}\frac{\sigma_{n-1}(n-2)^2}{192n(n-1)}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\Gamma'\,(n)}\\ &= \sigma_n^{-2/n}\sigma_{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\Gamma\,(n)}\frac{n-2}{48n^2(n-1)}\,. \qquad (4.12)\end{aligned}$$

Les calculs (4.11) et (4.12) montrent que (si $n > 6$)

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)c_nA_n^{-2/n} > K(n,2)^2b_n\,.$$

Et on en déduit de la même faon que la variété est localement conformément plate.

Donc l'inégalité de Sobolev-Yamabe (4.1) implique donc que que $n \in \{3,4,5\}$ ou que g est localement conformément plate. Dans tous les cas (avec 4.7 ou 4.8), on obtient alors que le terme de masse m apparaissant dans le développement asymptotique du noyau de Green est forcément négatif ou nul.

4.4. Discussion finale

Lorsque $n \geqslant 7$ et que g est localement conformément plate, le fait que la courbure scalaire de g soit positive ou nulle, implique d'après [17] la conclusion du théorème C. En effet, Schoen et Yau montre d'abord que dans ces dimensions, l'application développement de la structure localement conformément plate réalise un difféomorphisme conforme du revêtement universel de M vers un ouvert de la sphère [17, Prop. 3.3 iii)]. D'après la seconde partie de l'argumentation de Schoen et Yau ceci implique que la masse est positive ou nulle en tout point et qu'elle est nulle si et seulement si M est égale à son revêtement universel [17, Prop. 4.4].

Les autres cas découlent du théorème de masse positive généralisée et de l'adaptation des raisonnements de E.Witten et de P. Jammes à notre cadre ([20], [12], [9]).

Nous expliquons comment démontrer que la masse en x est positive ou nulle lorsque M est une variété spin que $n \in \{3,4,5\}$ ou que (M^n, g) est localement conformément plate. Une adaptation de l'argument présenté ici et l'argument de P. Jammes permettra de démontrer que si n est pair et si g est localement conformément plat alors la masse est positive ou nulle.

On fixe donc x et pour $\varepsilon > 0$ on considère la métrique

$$\widehat{g}_\varepsilon = \left(\alpha_n^{-1} G_x + \varepsilon\right)^{\frac{4}{n-2}} g$$

c'est une métrique complète sur $M \setminus \{x\}$ à courbure scalaire positive ou nulle et avec un bout asymptotiquement euclidien. Cette métrique étant conforme à g, elle vérifie aussi l'inégalité de Yamabe-Sobolev (4.1). De plus la métrique $\widehat{g}_\varepsilon$ admet dans des coordonnées stéréographiques autour de x un développement limité :

$$\widehat{g}_\varepsilon = \left(1 + \frac{m+\varepsilon}{t^{n-2}}\right) \text{eucl} + O\left(t^{1-n}\right).$$

On note Σ le fibré des spineurs sur $(M \setminus \{x\}, \widehat{g}_\varepsilon)$ et on introduit l'espace de Hilbert $H_0^1(M \setminus \{x\}, \Sigma)$ obtenu en complétant l'espace $C_0^\infty(M \setminus \{x\}, \Sigma)$ pour la norme associée à

$$\sigma \mapsto \int_{M\setminus\{x\}} |\not{D}\sigma|^2 d\text{vol}_{\widehat{g}_\varepsilon} = \int_{M\setminus\{x\}} \left[|\nabla\sigma|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\widehat{g}_\varepsilon} |\sigma|^2\right] d\text{vol}_{\widehat{g}_\varepsilon}$$

où on travaille avec la métrique $\widehat{g}_\varepsilon$.

Il est facile de voir que l'inégalité de Sobolev (4.1) implique que

$$\sigma \in H_0^1(M \setminus \{x\}, \Sigma) \Rightarrow \nabla\sigma \in L^2 \text{ et } \sigma \in L^{\frac{2n}{n-2}}$$

De plus un argument facile basé sur des fonctions de coupure bien choisi permet de démontrer que si

$$\not{D}\sigma \in L^2 \text{ et } \sigma \in L^2 \Rightarrow \sigma \in H_0^1(M \setminus \{x\}, \Sigma).$$

Si σ est un spineurs parallèle de norme 1 sur l'espace euclidien, on en déduit par transplantation un spineur $\tilde{\sigma}$ sur $M \setminus \{x\}$ à support dans un voisinage de x qui est asymptotiquement parallèle. En cherchant le minima de la fonctionnelle définie sur $H_0^1(M \setminus \{x\}, \Sigma)$ par

$$\xi \mapsto \frac{1}{2} \int_{M\setminus\{x\}} |\not{D}\xi|^2 d\text{vol}_{\widehat{g}_\varepsilon} - \text{Re}\left(\int_{M\setminus\{x\}} \langle \xi, \not{D}\tilde{\sigma}\rangle d\text{vol}_{\widehat{g}_\varepsilon}\right),$$

on trouve $\xi \in H_0^1(M \setminus \{x\}, \Sigma)$ vérifiant :

$$\not{D}^2 \xi = \not{D} \tilde{\sigma}.$$

On en déduit que $\not{D}\xi \in H_0^1(M \setminus \{x\}, \Sigma)$ ainsi le spineur défini par

$$\widehat{\sigma} = \tilde{\sigma} - \not{D}\xi$$

est harmonique

$$\not{D}\widehat{\sigma} = 0$$

et de plus $\nabla\widehat{\sigma} \in L^2$, car $\nabla\tilde{\sigma} \in L^2$ et $\not{D}(\not{D}\xi)$ et $\not{D}\xi$ sont dans L^2 donc $\nabla\not{D}\xi \in L^2$.

Le fait que $(M \setminus \{x\}, \widehat{g}_\varepsilon)$ soit complet permet de justifier l'intégration par parties de Witten et d'obtenir

$$\frac{\sigma_{n-1}}{4}(m+\varepsilon) = \int_{M\setminus\{x\}} \left[|\nabla\widehat{\sigma}|^2 + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}_{\widehat{g_\varepsilon}} |\widehat{\sigma}|^2 \right] d\mathrm{vol}_{\widehat{g_\varepsilon}}.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, on a $m+\varepsilon \geqslant 0$ donc la masse est positive ou nulle. Dans le cadre du théorème C, on sait alors que la masse est nulle. Alors les métriques $\widehat{g}_\varepsilon$ et $\widehat{g}_0 = \left(\alpha_n^{-1} G_x\right)^{\frac{4}{n-2}} g$ étant conformément équivalente, en utilisant l'invariance conforme de l'opérateur de Dirac et en passant à la limite $\varepsilon \to 0$ on obtient :

$$0 = \int_{M\setminus\{x\}} |\nabla\widehat{\sigma}|^2 d\mathrm{vol}_{\widehat{g_0}}.$$

Où toutes les quantités sont calculées par rapport à la métrique non complète $\widehat{g}_0$. On en déduit que le spineur $\widehat{\sigma}$ est parallèle. On en déduit que le fibré des spineurs de $(M \setminus \{x\}, \widehat{g}_0)$ est trivialisé par une base de spineurs parallèle. On en déduit donc que la métrique $(M \setminus \{x\}, \widehat{g}_0)$ est plate sans holonomie. On peut alors conclure avec les arguments de Schoen et Yau.

Bibliographie

[1] Adriano (L.), Xia (C.). — Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds, J. Math. Anal. Appl. 371 p. 372-383 (2010).

[2] Akutagawa (K.). — Yamabe metrics of positive scalar curvature and conformally flat manifolds, Differ. Geom. Appl. 4, p. 239-258 (1994).

[3] Aubin (T.). — Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, J. Differential Geometry 11 , no. 4, p. 573-598 (1976).

[4] Aubin (T.). — Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pur. Appl., IX. Ser., 55, p. 269-296 (1976).

[5] do Carmo (M.), Xia (C.). — Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities, Compos. Math. 140, no. 3, p. 818-826 (2004).

[6] Carron (G.). — Inégalités isopérimétriques de Faber-Krahn et conséquences, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992), Vol. 1 of Sémin. Congr., p. 205-232. Paris: Soc. Math. France (1996).

[7] Carron (G.), Herzlich (M.). — Conformally flat manifolds with nonnegative Ricci curvature, Compos. Math. 142, no. 3, p. 798-810 (2006).

[8] Chen (B.-L.), Zhu (X.-P.). — A gap theorem for complete non-compact manifolds with nonnegative Ricci curvature, Comm. Anal. Geom. 10, p. 217-239 (2002).

[9] Jammes (P.). — Un théorème de la masse positive pour le problème de Yamabe en dimension paire, J. Reine Angew. Math. 650, p. 101-106 (2011).

[10] Ledoux (M.). — On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities, Comm. Anal. Geom. 7, p. 347-353 (1999).

[11] Lee (J. M.) and Parker (T. H.). — The Yamabe problem, Bull. Am. Math. Soc., 17, p. 37-91 (1987).

[12] Parker (T.), Taubes (C-H.). — On Witten's proof of the positive energy theorem, Commun. Math. Phys. 84, p. 223-238 (1982).

[13] Pigola (S.), Veronelli (G.). — Lower volume estimates and Sobolev inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 138, no. 12, p. 4479-4486 (2010).

[14] Ruan (Q-H.), Chen (Z-H.). — Nash inequality on Riemannian manifolds, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 49, no. 4, p. 915-918 (2006).

[15] Saloff-Coste (L.). — Aspects of Sobolev-Type Inequalities, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol 289. Cambridge University Press (2002).

[16] Schoen (R.). — Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geom., 20, p. 479-495 (1984).

[17] Schoen (R.), Ya (S. T.). — Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature, Invent. Math. 92, p. 47-71 (1988).

[18] Talenti (G.). — Best constant in Sobolev inequality, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110, p. 353-372 (1976).

[19] Trudinge (N.S.). — Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser., 22, p. 265-274 (1968).

[20] Witten (E.). — A new proof of the positive energy theorem, Comm. Math. Phys. 80, p. 38-402 (1981).

[21] Xia (C.). — Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and almost best Sobolev constant, Illinois J. Math. 45, no. 4, p. 1253-1259 (2001).

[22] Xia (C.). — The Gagliardo-Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature, J. Funct. Anal. 224, no. 1, p. 230-241 (2005).

[23] Xia (C.). — The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on complete manifolds, Math. Res. Lett. 14, no. 5, p. 875-885 (2007).

[24] Yamabe (H.). — On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J., 12, p. 21-37 (1960).