

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

ABDELAZIZ BELLAGH, JEAN-PAUL BÉZIVIN

Quotients de suites holonomes

Tome XX, n° 1 (2011), p. 135-166.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2011_6_20_1_135_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Quotients de suites holonomes

ABDELAZIZ BELLAGH⁽¹⁾ ET JEAN-PAUL BÉZIVIN⁽²⁾

RÉSUMÉ. — Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif de \mathbb{C} , et $d \geq 1$. On note G_d l'ensemble des éléments de \mathbb{C} s'écrivant $w_1 + \dots + w_d$ avec $w_j \in G$ pour tout j . Soient u_n et v_n deux suites de nombres complexes vérifiant des relations de récurrence à coefficients polynômes en la variable n (suites holonomes), avec $v_n \neq 0$ pour n assez grand. Dans cet article, nous nous intéressons au problème suivant :

Soit $a_n = \frac{u_n}{v_n}$, on suppose que pour un entier $d \geq 1$, a_n appartient à G_d où G est sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de \mathbb{C} .

A-t-on que la suite a_n est récurrente linéaire ?

Dans ce qui suit, nous prouvons que dans quelques cas particuliers, la réponse est affirmative.

ABSTRACT. — (Quotient of holonomics sequences) For a subgroup G of the multiplicative group of \mathbb{C} and $d \geq 1$, let G_d be the set of complex numbers such that there exists $w_j, j = 1, \dots, d$ in G with $z = w_1 + \dots + w_d$. Let u_n and v_n be sequences of complex numbers that verify linear recurrence relations with polynomials coefficients (holonomic sequences). Suppose that $v_n \neq 0$ for large n .

In this paper, we are interested in the following problem:

Let $a_n = \frac{u_n}{v_n}$, and suppose that for an integer $d \geq 1$, a_n belongs to G_d for a finitely generated subgroup G of the multiplicative group of \mathbb{C} .

Does it follows that a_n is a linear recurrent sequence ?

We prove that in some particular cases, the answer to this question is positive.

(*) Reçu le 06/05/2010, accepté le 01/09/2010

⁽¹⁾ Faculté de Mathématiques, Université des Sciences et de la Technologie Houari-Boumediène, BP.32, El-Alia, Bab-Ezzouar, 16111, Alger, Algérie.
abellagh@yahoo.fr

⁽²⁾ Université de Caen, Département de Mathématiques et Mécanique, Laboratoire N. Oresme, Campus II, Boulevard du Maréchal Juin, BP 5186, 14032 Caen Cedex, France.
bezivin@math.unicaen.fr

<http://www.math.unicaen.fr/bezivin>

1. Introduction et résultats

Soit K un corps de caractéristique nulle, et w_n une suite d'éléments de K . On dit que $w = (w_n)$ est une suite récurrente linéaire à coefficients constants (ou suite récurrente linéaire pour simplifier) s'il existe un entier $s \geq 1$ et des éléments $a_k, k = 0, \dots, s$ avec $a_s \neq 0$ tels que l'on ait pour tout n

$$a_s w_{n+s} + \dots + a_k w_{n+k} + \dots + a_0 w_n = 0$$

Il a été conjecturé par C. Pisot, et démontré par Y. Pourchet et A.J. Van der Poorten le résultat suivant (Théorème du Quotient de Hadamard, voir [18],[13] ou [14], et pour des améliorations au cas où on suppose que l'hypothèse sur a_n est vraie seulement pour une infinité de n , [3]):

THÉORÈME 1.1. — *Soit K un corps de caractéristique nulle, et u_n, v_n deux suites d'éléments de K , récurrentes linéaires à coefficients constants. On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, et que les $a_n = \frac{u_n}{v_n}$ appartiennent à un sous-anneau de K , qui est de type fini sur \mathbb{Z} . Alors la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants.*

On peut considérer des suites récurrentes plus générales. Soit $s \geq 1, P_k, 0 \leq k \leq s$ des polynômes à coefficients dans K , avec P_s non nul. On dit que w_n est une suite holonome (d'éléments de K), si on a pour tout n assez grand :

$$P_s(n)w_{n+s} + \dots + P_k(n)w_{n+k} + \dots + P_0(n)w_n = 0$$

Il est évidemment naturel de se poser la question de généraliser à ces suites holonomes le théorème du Quotient de Hadamard, c'est-à-dire de trouver des conditions assurant que le quotient de deux suites holonomes est encore une suite holonome.

La question la plus naturelle est d'imposer que le quotient des deux suites holonomes u_n et v_n est une suite a_n d'éléments d'un anneau A de type fini sur \mathbb{Z} , et de se poser la question de savoir si sous cette hypothèse la suite a_n est holonome ; cependant nous n'avons pas trouvé de moyens d'attaque sur un tel problème.

Pour poursuivre, nous avons besoin de quelques notations.

Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif de K , et $d \geq 1$. On note G_d l'ensemble des éléments de \mathbb{C} s'écrivant $w_1 + \dots + w_d$ avec $w_j \in G$ pour tout j .

Le théorème 4 de [1] montre alors que si une suite holonome u_n est telle qu'il existe un sous-groupe G de type fini, et un entier d tel que $u_n \in G_d$

pour tout n , alors u_n est une suite récurrente linéaire. Ce résultat a des conséquences arithmétiques intéressantes, par exemple si u_n est une suite holonome d'éléments de \mathbb{Z} qui n'est pas récurrente linéaire, l'ensemble des nombres premiers p tel qu'il existe un indice n tel que p divise $u_n \neq 0$, est infini. On pourra voir l'article récent de F. Luca [8] pour des résultats quantitatifs sur ce type de problème dans le cas de suites holonomes d'ordre 2.

Nous allons dans cet article, donner des réponses partielles positives à la question suivante, qui est une généralisation du résultat du théorème 4 de [1], celui-ci correspondant au cas où la suite v_n est égale à 1 pour tout n :

Question. — *Soit K un corps de caractéristique nulle, et u_n, v_n deux suites holonomes d'éléments de K . On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, et qu'il existe un sous-groupe G du groupe multiplicatif de K , de type fini, et un entier $d \geq 1$ tel que $a_n = \frac{u_n}{v_n} \in G_d$ pour tout n .*

La suite a_n est-elle une suite récurrente linéaire ?

Remarque 1.2. — Une suite holonome, dont les valeurs appartiennent à G_d pour un entier $d \geq 1$ et un groupe G de type fini est récurrente linéaire à coefficients constants par le théorème 4 de [1]. Donc dans le contexte de la question, les conditions “la suite a_n est holonome” et “la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants”, dans la conclusion sur a_n , sont équivalents.

Dans toute la suite, le corps de base est le corps des nombres complexes, ce qui ne nuit pas à la généralité ; nous devrons à l'occasion nous placer dans un sous-corps K de \mathbb{C} de type fini sur \mathbb{Q} .

Nous allons démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1.3. — *Soient P_0, P_1, P_2, P_3 des polynômes non nuls à coefficients dans \mathbb{C} . Soit G un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de \mathbb{C} , $d \geq 1$ et u_n, v_n deux solutions de la récurrence d'ordre 3 suivante :*

$$P_3(n)w_{n+3} + P_2(n)w_{n+2} + P_1(n)w_{n+1} + P_0(n)w_n = 0.$$

On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, que $a_n = \frac{u_n}{v_n} \in G_d$ et enfin que pour tout $L \in \mathbb{C}$, l'ensemble des indices n tels que $a_n = L$ est fini. Alors la suite a_n est une suite récurrente linéaire.

Nous reviendrons à la fin de l'article sur la condition $v_n \neq 0$ pour n assez grand, et aussi sur la condition que a_n ne prend qu'un nombre fini de fois toute valeur L fixée.

Nous avons aussi un résultat plus général, pour des suites holonomes d'ordre s quelconques, mais avec des conditions beaucoup plus restrictives.

THÉORÈME 1.4. — *Soit $s \geq 2$, et P_k , $k = 0, \dots, s$ des polynômes non nuls à coefficients dans \mathbb{C} .*

On considère l'équation (E) d'ordre $s \geq 2$:

$$P_s(n)w_{n+s} + P_{s-1}(n)w_{n+s-1} + \dots + P_0(n)w_n = 0$$

On fait l'hypothèse que (E) a s solutions linéairement indépendantes $u_j(n)$, $j = 1, \dots, s-1$, et $v(n)$, avec $v(n) \neq 0$ pour n assez grand, et on pose $a_j(n) = \frac{u_j(n)}{v(n)}$. Nous ferons aussi la convention que $a_0(n)$ est la suite constante égale à 1.

On suppose que les $a_j(n)$, $j = 0, \dots, s-1$, appartiennent tous à un G_d , pour un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de \mathbb{C} et un entier $d \geq 1$ fixé. Alors les suites $a_j(n)$ sont des suites récurrentes linéaires.

On en déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.5. — *Soit G un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de \mathbb{C} , $d \geq 1$ un entier, et u_n et v_n deux suites holonomes, vérifiant la même récurrence d'ordre 2. On suppose que v_n est non nul pour tout n , et on pose $\frac{u_n}{v_n} = a_n$. On suppose, de plus, que $a_n \in G_d$ pour tout n . Alors la suite a_n est une suite récurrente linéaire à coefficients constants.*

Les auteurs remercient le Referee pour de nombreuses remarques intéressantes.

2. Remarques préliminaires

Dans cette partie nous faisons quelques remarques destinées à simplifier l'exposé.

2.1 Nous aurons presque toujours à considérer des suites pour n assez grand. Nous faisons donc cette convention pour tout ce qui suit, et nous ne rappellerons cette hypothèse que quand cela sera nécessaire.

2.2 Un cas particulier où la réponse à la question posée est affirmative est le suivant. Supposons que la suite v_n soit une suite holonome inversible, c'est-à-dire que son inverse est aussi holonome. C'est le cas si v_n vérifie une relation de récurrence de la forme $v_{n+t} = R(n)v_n$, où $t \geq 1$ et R est

une fraction rationnelle non nulle ; les suites holonomes inversibles sont caractérisées par le fait qu'il existe un entier m tel que sur les progressions arithmétiques de raison m , on ait une telle récurrence d'ordre 1, cf [16], proposition 4.5, page 47.

Dans ce cas, une suite $a_n = \frac{u_n}{v_n}$ est aussi holonome comme produit de deux suites holonomes, et sous l'hypothèse qu'il existe un entier d et un sous-groupe de type fini G du groupe multiplicatif de \mathbb{C} tel que $a_n \in G_d$ pour tout n , le théorème 4 de [1] montre que la suite a_n est récurrente linéaire à coefficients constants.

3. Rappels

Nous aurons besoin des résultats suivants :

THÉORÈME 3.1. — *Soit T un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de \mathbb{C} . Soit $s \geq 1$. Alors il existe seulement un nombre fini de points $x = (x_0, \dots, x_s) \in \mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ tels que les trois propriétés a), b) c) soient vérifiées :*

- a) *Pour tout i , $0 \leq i \leq s$, on a $x_i \in T$;*
- b) *On a $x_0 + \dots + x_s = 0$;*
- c) *Pour toute partie E de $\{0, \dots, s\}$ non vide et non égale à $\{0, \dots, s\}$, on a $\sum_{i \in E} x_i \neq 0$.*

Démonstration. — Voir [4], [15]. □

Nous aurons besoin aussi de ce qui suit :

DÉFINITION 3.2. — *Soit I un ensemble d'indices, non vide et fini, de cardinal $s + 1$, et $u(n) = (u_i(n), i \in I)$ une suite d'éléments de $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ et $u_i(n)$ non nul pour tout i et tout $n \in \mathbb{N}$. Soit J une partie non vide de I . On dit que la partie J est irréductible pour l'entier n , si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- a) *On a $\sum_{i \in J} u_i(n) = 0$;*
- b) *Pour toute partie A de J non vide et différente de J , on a $\sum_{i \in A} u_i(n) \neq 0$.*

LEMME 3.3. — Soit K un sous-corps de \mathbb{C} , de type fini sur \mathbb{Q} , et G un sous-groupe du groupe multiplicatif de K , que nous supposons de type fini. Soit $\tilde{G} = \{z \in K ; \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n \in G\}$. Alors \tilde{G} est un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K .

Démonstration. — Voir [5]. \square

LEMME 3.4. — Soit I un ensemble d'indices, non vide et fini, de cardinal $s + 1$, et $u(n) = (u_i(n), i \in I)$ une suite d'éléments de $\mathbb{P}^s(\mathbb{C})$ vérifiant que $u_i(n)$ non nul pour tout i et tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\sum u_i(n) = 0$ pour tout n .

Soit F une partie infinie de \mathbb{N} . Alors il existe une partition I_1, \dots, I_t de I , et une partie infinie E de F , tels que pour tout $n \in E$, et tout j , $1 \leq j \leq t$, I_j soit irréductible pour n .

Démonstration. — Voir [1], lemme 1, page 63. \square

Les deux lemmes qui suivent sont très proches de parties de la preuve du théorème 4 de [1], page 64 et 65 ; nous redonnons les preuves pour être complet.

LEMME 3.5. — Soit K un sous-corps de \mathbb{C} , de type fini sur \mathbb{Q} . Soit $I = \{(k, j)\}$ une partie non vide de cardinal $s+1$ de \mathbb{N}^2 , et $u(q) = (u_{k,j}(q), (k, j) \in I)$ une suite d'éléments de $\mathbb{P}^s(K)$ vérifiant que $u_{k,j}(q)$ est non nul pour tout $(k, j) \in I$ et tout $q \in \mathbb{N}$. Soit G un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K , \tilde{G} le sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K donné par le lemme 3.3, on suppose que $u_{k,j}(q)$ appartient à G pour tout k, j, q . Soit λ un entier non nul n'appartenant pas à \tilde{G} , et $q \rightarrow m_q$ une application injective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . On suppose que, pour tout entier $q \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{(k,j) \in I} \lambda^{j m_q} u_{k,j}(q) = 0$.

Soit F une partie infinie de \mathbb{N} . Alors il existe un ensemble infini E inclus dans F , et une partition I_h de l'ensemble d'indice I tels que, pour tout $q \in E$, et pour tout h on a $\sum_{(k,j) \in I_h} u_{k,j}(q) = 0$. Par suite, pour toute famille finie y_j d'éléments de K , on a $\sum_{(k,j) \in I} y_j u_{k,j}(q) = 0$.

Démonstration. — On applique le lemme 3.4 pour trouver une partie infinie E de F , et une partition de l'ensemble d'indices ayant les propriétés indiquées dans ce lemme 3.4. Pour $q \in E$, on peut appliquer le théorème 3.1 à chaque somme $\sum_{(k,j) \in I_h} \lambda^{j m_q} u_{k,j}(q)$ et au sous-groupe T engendré par \tilde{G} et λ , qui est de type fini. Ceci implique que les éléments

$(\lambda^{jm_q} u_{k,j}(q))$, pour (k, j) dans I_h et $q \in E$, ne prennent qu'un nombre fini de valeurs dans l'espace projectif. Soient (j, k) et (j', k') deux éléments de I_h , on peut alors trouver un élément fixé $w \in K^*$ tel que, pour une infinité d'indices q , on ait $\lambda^{jm_q} u_{k,j}(q) = w \lambda^{j'm_{q'}} u_{k',j'}(q)$. Si on prend deux valeurs distinctes q_1 et q_2 de q , et si on fait le quotient, cela implique que $\lambda^{(j-j')(m_{q_1}-m_{q_2})} \in G$. Comme $q \rightarrow m_q$ est injective, si $j \neq j'$ on obtient que $\lambda \in \tilde{G}$, ce qui est contraire aux hypothèses faites. Donc l'indice j est fixe pour chaque élément de la partition. On obtient donc après division par λ^{jm_q} que $\sum_{(k,j) \in I_h} u_{k,j}(q) = 0$. On multiplie par y_j , et on resomme le tout, ce qui donne que $\sum_{(k,j) \in I} y_j u_{k,j}(q) = 0$ pour tout $q \in E$. \square

LEMME 3.6. — Soit K un sous-corps commutatif de \mathbb{C} , de type fini sur \mathbb{Q} . Soit T un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de K , d, t des entiers non nuls, et pour $1 \leq k \leq t$, des suites $b_{n,k}$ telles que $b_{n,k} \in T_d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient d'autre part $P_k(x)$ des polynômes à coefficients dans K . On suppose que, pour tout n , on a

$$\sum_{k=1}^t P_k(n) b_{n,k} = 0$$

Alors, pour tout $y \in K$, et pour tout m fixé, il existe une suite strictement croissante d'entiers α_q , telle que, si $J_q = \{\alpha_q, \dots, \alpha_q + m\}$, pour tout $n \in J = \cup_{q \geq 0} J_q$, on a

$$\sum_{k=1}^t P_k(y) b_{n,k} = 0$$

Démonstration. — On peut tout d'abord écrire $b_{n,k} = \sum_{l=1}^d g_{n,k,l}$ avec $g_{n,k,l} \in T$.

Soit $c \in \{0, \dots, m\}$. On pose $P_k(c+x) = \sum_j m_{k,j}(c) x^j$, où les $m_{k,j}(c)$ dépendent de c mais varient dans un ensemble fini. Soit H le sous-groupe engendré par T et tous les $m_{k,j}(c)$ qui sont non nuls, et soit λ un entier naturel n'appartenant pas à \tilde{H} .

Nous considérons maintenant l'ensemble F_0 d'entiers suivant : $F_0 = \{c + \lambda^h, c = 0, \dots, m, h \in \mathbb{N}\}$. Nous voulons démontrer que pour tout $y \in K$

et pour tout $n \in F_0$ assez grand, on a :

$$\sum_{k=1}^t P_k(y)b_{n,k} = 0$$

Pour cela, nous raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe $y_0 \in K$, et une partie infinie F de F_0 où la somme considérée n'est pas nulle, et nous voulons trouver une contradiction.

Puisque F est infini, on peut supposer, quitte à se restreindre à une partie infinie de F , que la valeur c intervenant dans la définition des éléments de F est fixée. Pour $n = c + \lambda^q \in F$, la relation devient

$$\sum_{k,j} m_{k,j}(c)\lambda^{qj}b_{n,k} = 0$$

Comme $m_{k,j}\lambda^{qj}b_{n,k} = \sum m_{k,j}\lambda^{qj}g_{n,k,l}$, on est en présence d'une somme de termes de la forme $\lambda^{jq}u_{k,j,l}(q)$ (noter que n dépend de q). Si l'on n'est pas dans le cas trivial où tous les $g_{n,k,l}$ sont nuls sauf pour un nombre fini de q , on peut supposer en remplaçant éventuellement F par une de ses parties infinies, que $u_{k,j,l}(q)$ appartient à \tilde{H} ; on a $\lambda \notin \tilde{H}$, et $m_q = q$ est bien injectif.

On peut donc appliquer le lemme 3.5 ; on choisit un $x \in K$, et on prend les y_j égaux aux x^j d'où l'existence d'une partie infinie E de F telle que, pour tout $q \in E$, $n = c + \lambda^q$, on a

$$\sum_{k,j} m_{k,j}(c)x^j b_{n,k} = 0$$

soit encore

$$\sum_k P_k(c+x)b_{n,k} = 0$$

Enfin, on choisit x tel que $x + c = y_0$, ce qui donne la relation

$$\sum_k P_k(y_0)b_{n,k} = 0$$

pour tout $q \in E$ (avec $n = c + \lambda^q$). Mais ceci est absurde, puisque $E \subset F$, compte tenu de la définition de F .

On a donc obtenu que, pour tout $y \in K$ et tout $n \in F_0$ assez grand, on a

$$\sum_k P_k(y)b_{n,k} = 0$$

ce qui termine la démonstration. \square

4. Résultats techniques

Nous notons tout de suite que si l'on est en présence d'une suite holonome d'éléments de \mathbb{C} , il existe un sous-corps K de \mathbb{C} , de type fini sur \mathbb{Q} , qui va contenir toutes les valeurs de la suite, et les coefficients des polynômes intervenant dans la relation de récurrence. Ceci est valable bien sûr pour un nombre fini de telles suites, il existe un sous-corps K de \mathbb{C} , de type fini sur \mathbb{Q} ayant cette propriété pour toutes les suites considérées. On peut donc appliquer les résultats de la section précédente.

LEMME 4.1. — *Soit T un sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de \mathbb{C} , d, t des entiers non nuls, et pour $1 \leq k \leq t$, des suites $b_{n,k}$ telles que $b_{n,k} \in T_d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient d'autre part $P_k(x)$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} . On suppose que, pour tout n , on a*

$$\sum_{k=1}^t P_k(n) b_{n,k} = 0$$

On suppose de plus que, pour tout k , il existe deux suites holonomes $u_{n,k}$ et $v_{n,k}$ telles que $v_{n,k}$ est non nul pour n assez grand, vérifiant $b_{n,k} = \frac{u_{n,k}}{v_{n,k}}$.

Alors il existe un entier N , tel que si $n \geq N$, le polynôme

$$\sum_{k=1}^t P_k(y) b_{n,k}$$

est le polynôme nul.

Démonstration. — Posons $w_{n,k} = u_{n,k} \prod_{h \neq k} v_{n,h}$. Les suites $w_{n,k}$ sont des

suites holonomes comme produits de suites holonomes, et on a $\sum_{k=0}^t P_k(n) w_{n,k} = 0$ pour tout n par hypothèse. Soit $y \in \mathbb{C}$ fixé ; la suite $t_n = \sum_{k=0}^t P_k(y) w_{n,k}$

est une suite holonome également. Il existe donc un entier m , dépendant de la récurrence vérifiée par t_n , telle que si t_n est nulle pour $n = M, M + 1, \dots, M + m$, alors t_n est nulle pour tout $n \geq M$. On applique alors le lemme 3.6 avec cette valeur de m , on a donc $t_n = 0$ pour $n \in \{\alpha_q, \dots, \alpha_q + m\}$; si l'on choisit q assez grand, on obtient par ce qui précède que t_n est nulle.

Soit maintenant E l'ensemble des indices n tel que le polynôme $T_n(y) = \sum_{k=1}^t P_k(y) b_{n,k}$ n'est pas le polynôme nul, et F l'ensemble des zéros dans \mathbb{C} des

polynômes T_n , $n \in E$. Alors F est au plus dénombrable ; prenons $y = y_0 \in \mathbb{C}$ qui n'est pas dans F , il existe un N tel que si $n \geq N$, on a $T_n(y_0) = 0$. Ceci implique par le choix de y_0 que le polynôme T_n est le polynôme nul pour $n \geq N$, ce qui termine la démonstration du lemme. \square

Soit maintenant $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, P_0, \dots, P_m des polynômes, et a_n une suite d'éléments de \mathbb{C} . On définit les matrices $A_m(n, y) = (\alpha_{i,j})$ d'ordre $2m$ suivantes :

La première ligne est :

$$[0, \dots, 0, P_m(y), \dots, P_0(y)]$$

La troisième ligne est obtenue en décalant d'un rang et en remplaçant y par $y + 1$:

$$[0, \dots, 0, P_m(y + 1), \dots, P_0(y + 1), 0]$$

On obtient ainsi en poursuivant ce procédé les lignes d'indice impair, celle de rang $2m - 1$ étant :

$$[P_m(y + m - 1), \dots, P_0(y + m - 1), 0, \dots, 0]$$

La seconde ligne est :

$$[0, \dots, 0, P_m(y)a_{n+m}, \dots, P_0(y)a_n]$$

La quatrième ligne est obtenue en décalant d'un rang et en remplaçant y par $y + 1$, et n par $n + 1$:

$$[0, \dots, 0, P_m(y + 1)a_{n+m+1}, \dots, P_0(y + 1)a_{n+1}, 0]$$

On obtient ainsi en poursuivant ce procédé les lignes d'indice pair, celle de rang $2m$ étant :

$$[P_m(y + m - 1)a_{n+2m-1}, \dots, P_0(y + m - 1)a_{n+m-1}, 0, \dots, 0]$$

La matrice $A_2(n, y)$ est donc :

$$A_2(n, y) = \begin{pmatrix} 0 & P_2(y) & P_1(y) & P_0(y) \\ 0 & P_2(y)a_{n+2} & P_1(y)a_{n+1} & P_0(y)a_n \\ P_2(y + 1) & P_1(y + 1) & P_0(y + 1) & 0 \\ P_2(y + 1)a_{n+3} & P_1(y + 1)a_{n+2} & P_0(y + 1)a_{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Nous noterons aussi $B_m(n, y)$ le déterminant de la matrice $A_m(n, y)$. On a alors le résultat suivant :

LEMME 4.2. — Soient a_n et v_n deux suites d'éléments de \mathbb{C} , et P_k des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} , $k = 0, \dots, m$, avec P_m et P_0 non nuls.

a) On suppose que v_n est non nul pour tout n assez grand, et que les deux suites v_n et $a_n v_n$ vérifient la récurrence suivante :

$$P_m(n)w_{n+m} + \dots + P_k(n)w_{n+k} + \dots + P_0(n)w_n = 0$$

Alors on a $B_m(n, n) = 0$ pour tout n assez grand.

b) Si de plus il existe un entier d non nul, et un sous-groupe de type fini G du groupe multiplicatif de \mathbb{C} tel que $a_n \in G_d$ pour tout n , alors il existe un entier N tel que si $n \geq N$, le polynôme $B_m(n, y)$ est nul.

Démonstration. — a) Par hypothèse on a :

$$P_m(n)v_{n+m} + \dots + P_k(n)v_{n+k} + \dots + P_0(n)v_n = 0$$

et

$$P_m(n)v_{n+m}a_{n+m} + \dots + P_k(n)v_{n+k}a_{n+k} + \dots + P_0(n)v_n a_n = 0$$

C'est un système de deux équations linéaires homogènes en les $m + 1$ inconnues $(v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m})$.

Dans chacune de ces équations, on change n en $n + 1$. On obtient deux nouvelles équations :

$$P_m(n+1)v_{n+m+1} + \dots + P_k(n+1)v_{n+k+1} + \dots + P_0(n+1)v_{n+1} = 0$$

et

$$P_m(n+1)v_{n+m+1}a_{n+m+1} + \dots + P_k(n+1)v_{n+k+1}a_{n+k+1} + \dots + P_0(n+1)v_{n+1}a_{n+1} = 0$$

et on peut considérer que l'on est en présence de 4 équations linéaires, en les $m + 2$ variables v_n, \dots, v_{n+m+1} . On voit donc que le procédé augmente le nombre d'équations de deux, et le nombre de variables par 1.

Au bout de $t = m - 1$ opérations de ce type, on voit que l'on obtient un système de $2m$ équations en les $2m$ inconnues v_n, \dots, v_{n+2m-1} .

Il est facile de voir que la matrice du système est la matrice $A_m(n, n)$.

On a $v_n \neq 0$; par suite ce système homogène admet une solution non triviale, et donc le déterminant de la matrice $A_m(n, n)$ est nul, ce qui démontre l'assertion.

b) Le déterminant $B_m(n, n)$ va s'écrire sous la forme $\sum Q_h(n)b_{n,h}$, avec les Q_h polynômes en les polynômes $P_j(y+l)$, et les $b_{n,h}$ somme de monômes en les a_{n+k} . Par suite, on voit que les hypothèses du lemme 4.1 sont vérifiées. Il en résulte que $\sum Q_h(y)b_{n,h}$ est le polynôme nul, ce qui démontre l'assertion. \square

LEMME 4.3. — Soit $m \geq 2$ un entier, v_n et a_n deux suites d'éléments de \mathbb{C} . On suppose que v_n est non nulle pour tout n assez grand, et que les deux suites v_n et $u_n = a_n v_n$ vérifient la récurrence

$$P_m(n)w_{n+m} + \dots + P_k(n)w_{n+k} + \dots + P_0(n)w_n = 0$$

où l'on suppose que les polynômes P_k sont tous non nuls.

Soit N un entier tel que pour tout $n \geq N$, on ait $P_k(n) \neq 0$ pour tout k . Soit M un entier, avec $M \geq N$, tel que les nombres a_{M+j} , $j = 0, \dots, m$ soient tous égaux, sauf peut-être pour l'un d'entre eux. Alors la suite a_n est constante à partir de M .

Démonstration. — On montre d'abord que les a_{M+j} sont égaux pour $0 \leq j \leq m$. En effet, si on a $a_{M+j} = c$ pour tout $j \in \{0, \dots, m\}$ sauf peut-être pour $j = k$, on écrit les relations de récurrence pour la suite v_n et la suite $a_n v_n$ en faisant $n = M$, on multiplie la première par c , et on soustrait à la seconde ; il vient alors $P_k(M)v_{M+k}(c - a_{M+k}) = 0$, ce qui avec les hypothèses faites montre que $a_{M+k} = c$.

On peut ensuite appliquer le résultat obtenu pour $n = M + 1$, on a que les valeurs $a_{M+1}, \dots, a_{M+1+m-1}$ sont toutes égales à a_M , donc par le raisonnement précédent on a aussi que a_{M+m+1} est égale à a_M , et une récurrence immédiate termine la démonstration. \square

Remarque 4.4. — Le résultat ne s'étend pas au cas où l'un des polynômes P_k , $1 \leq k \leq m - 1$, est nul.

En effet, la suite récurrente linéaire vérifiant la récurrence $3w_{n+3} - 7w_{n+2} + 4w_n = 0$ (Le polynôme P_1 est donc nul) et les valeurs initiales $w_0 = 0, w_1 = 40, w_2 = 0$ (il s'agit de la suite $w_n = 32 - 5 \cdot 2^n - 27(-1)^n \frac{2^n}{3^n}$), vérifie aussi $w_3 = 0$, de sorte qu'il y a dans le quadruplet $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ trois valeurs égales, mais la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

Nous aurons besoin aussi du lemme qui suit, qui est particulier au cas d'ordre 3 :

LEMME 4.5. — Soit A un sous-anneau de type fini de \mathbb{C} . Soient $P_k(y)$, $k = 0, 1, 2, 3$ quatre polynômes non nuls à coefficients dans \mathbb{C} . On considère la relation de récurrence (R) suivante :

$$P_3(y+k)w_{k+3} + P_2(y+k)w_{k+2} + P_1(y+k)w_{k+1} + P_0(y+k)w_k = 0$$

Soient $u_n(y)$, $v_n(y)$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}(y)$ vérifiant la relation de récurrence (R). On suppose qu'il existe une infinité de valeurs de n telles que $v_n(y)$ est non nul. Soit enfin a_n une suite d'éléments de A telles que l'on ait pour tout n $u_n(y) = a_n v_n(y)$. On suppose de plus que, pour tout $L \in \mathbb{C}$, l'ensemble des n tels que $a_n = L$ est fini. Alors a_n est une suite récurrente linéaire.

Démonstration. — Les quatre suites $u_n(y+1)$, $u_{n+1}(y)$, $v_n(y+1)$, $v_{n+1}(y)$ vérifient la même récurrence, qui est :

$$P_3(y+n+1)w_{n+3} + P_2(y+n+1)w_{n+2} + P_1(y+n+1)w_{n+1} + P_0(y+n+1)w_n = 0$$

Elles sont donc liées sur $\mathbb{C}(y)$. Soient h_0, h_1, h_2, h_3 des éléments non tous nuls de $\mathbb{C}(y)$ (que l'on peut supposer être des polynômes) tels que

$$h_0(y)u_{n+1}(y) + h_1(y)u_n(y+1) + h_2(y)v_{n+1}(y) + h_3(y)v_n(y+1) = 0$$

pour tout n assez grand.

On a donc :

$$(h_0(y)a_{n+1} + h_2(y))v_{n+1}(y) + (h_3(y) + h_1(y)a_n)v_n(y+1) = 0$$

On montre d'abord que $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ et $h_3(y) + h_1(y)a_n$ sont non nuls à partir d'un certain rang.

On regarde le premier terme $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$. Si h_0 est non nul, ce polynôme ne peut être nul que si h_2 est de même degré que h_0 , et si a_{n+1} est l'opposé du quotient des coefficients des termes de plus haut degré dans h_0 et h_2 . Par l'hypothèse faite sur a_n , ceci n'est pas vrai à partir d'un certain rang.

Si maintenant h_0 est nul, il faut montrer que h_2 ne peut être nul. Si c'était le cas, on aurait la relation $(h_3(y) + h_1(y)a_n)v_n(y+1) = 0$. Comme l'un des polynômes h_1 ou h_3 est non nul (puisque l'un des h_k est non nul), un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que $h_3(y) + h_1(y)a_n$ est non nul à partir d'un certain rang, donc $v_n(y+1)$ est nul à partir de ce rang, ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

On montre de même que $h_3(y) + h_1(y)a_n$ est non nul à partir d'un certain rang.

On a donc que $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ et que $h_3(y) + h_1(y)a_n$ sont non nuls à partir d'un certain rang. (Remarquer que cela donne aussi, puisqu'il existe une infinité d'entiers n tels que $v_n(y)$ n'est pas nul, que $v_n(y)$ est non nul à partir d'un certain rang).

Pour une fraction rationnelle non nulle $F = A/B$ où A et B sont des polynômes, nous appelons degré de F la différence entre les degrés de A et B .

Montrons maintenant que le degré de $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ et celui de $h_3(y) + h_1(y)a_n$ sont constants à partir d'un certain rang.

Pour le premier terme $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$, c'est clair si h_0 est nul, on a vu que h_2 ne pouvait être nul. Supposons maintenant que h_0 est non nul, alors le degré de $h_0(y)a_{n+1} + h_2(y)$ est différent du maximum des degrés des deux polynômes h_0 et h_2 que s'ils ont même degré, et si a_{n+1} est l'opposé du quotient des coefficients des termes de plus haut degré de ces polynômes. Comme a_n ne prend une valeur fixée qu'un nombre fini de fois, ceci est impossible pour n assez grand. Ceci vaut aussi pour $h_3(y) + h_1(y)a_n$.

Pour n assez grand, le degré de $v_{n+1}(y)$ est donc égal au degré de $v_n(y)$ plus une constante $\delta \in \mathbb{Z}$, et le degré de $v_n(y)$ est de la forme $\delta n + \tau$. La fraction rationnelle $y^{-\delta n - \tau} v_n(y)$, admet donc une limite si $y \rightarrow \infty$, que l'on note b_n , et qui est non nulle.

Soit d_k le degré de P_k , et d le maximum de $d_k + \delta k + \tau$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. On peut écrire pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ que $P_k(y+n)v_{n+k}(y) = y^{\delta n + \tau + d_k + \delta k} (y^{-d_k} P_k(y+n)) (y^{-\delta(n+k) - \tau} v_{n+k}(y))$, de sorte qu'en multipliant par $y^{-d - \delta n}$ la relation de récurrence vérifiée par $v_n(y)$, on a

$$\sum_{k=0}^3 y^{d_k + \delta k + \tau - d} (y^{-d_k} P_k(y+n)) (y^{-\delta(n+k) - \tau} v_{n+k}(y)) = 0.$$

Le terme $(y^{-d_k} P_k(y+n))$ admet une limite non nulle indépendante de n (c'est le coefficient du terme de plus haut degré de P_k) si $y \rightarrow \infty$, et comme $d_k + \delta k + \tau - d \leq 0$ pour tout k , le terme $y^{d_k + \delta k + \tau - d}$ admet une limite qui est soit nulle, soit égale à 1 si $d = d_k + \delta k + \tau$, ce qui se produit au moins une fois. Donc $y^{d_k + \delta k + \tau - d} (y^{-d_k} P_k(y+n))$ admet une limite L_k indépendante de n pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, et l'un des L_k est non nul. D'autre part $y^{-\delta(n+k) - \tau} v_{n+k}(y)$ converge vers b_{n+k} non nul.

Il vient donc que

$$\sum_{k=0}^3 L_k b_{n+k} = 0$$

et de même en utilisant $u_n(y)$:

$$\sum_{k=0}^3 L_k a_{n+k} b_{n+k} = 0$$

Les deux suites b_m et $a_m b_m$ sont donc récurrentes linéaires, on a $b_m \neq 0$ pour tout m , leur quotient est $a_m \in A$, donc par le théorème du quotient de Hadamard, a_m est une suite récurrente linéaire. \square

5. Preuve du théorème 1.3

5.1. Mise en place

On a vu que le déterminant $B_3(n, y)$ était nul (voir le lemme 4.2).

On pose :

$$R_1 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+3} - a_n).$$

$$R_2 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+3})(a_{n+1} - a_n)$$

$$R_3 = (a_{n+5} - a_{n+3})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n)$$

$$R_4 = (a_{n+5} - a_{n+3})(a_{n+4} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n)$$

$$R_5 = (a_{n+5} - a_{n+4})(a_{n+3} - a_n)(a_{n+2} - a_{n+1})$$

$$R_6 = (a_{n+5} - a_{n+4})(a_{n+3} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n)$$

$$R_7 = (a_{n+5} - a_{n+4})(a_{n+3} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n)$$

On remarque aussi que si l'on pose

$$J(y) = \frac{P_2(y)P_0(y+1)}{P_1(y)P_1(y+1)} \quad \text{et} \quad K(y) = \frac{P_3(y)P_0(y+1)P_0(y+2)}{P_1(y)P_1(y+1)P_1(y+2)}$$

et si w_n est une solution de la récurrence de départ, la suite $t_n = w_n \prod_{k=N}^{n-1} \frac{P_1(k)}{P_0(k)}$

vérifie la récurrence :

$$K(n)t_{n+3} + J(n)t_{n+2} + t_{n+1} + t_n = 0$$

Il est clair qu'en faisant ce procédé à la fois sur u_n et v_n , ce qui ne change pas leur quotient, on peut simplement considérer les récurrences de cette forme, ce que nous allons faire à partir de ce qui suit.

On obtient en calculant le déterminant $B_3(n, y)$, la relation :

$$R_1 K(y)K(y+1) - R_2 (J(y+1)-1)K(y+1) - R_3 J(y)K(y+1) - R_5 J(y+2)(K(y) - J(y)J(y+1)) + R_7 (K(y+1) + J(y)J(y+1)J(y+2) - J(y+1)J(y+2)) = 0$$

Le fait que le déterminant $B_3(n, y)$ est nul veut dire que les colonnes de ce déterminant $B_3(n, y)$ sont liées (noter que le corps de base n'est plus \mathbb{C} , mais $\mathbb{C}(y)$ dans ce qui suit).

On fixe m , et on se donne une combinaison linéaire non triviale entre les colonnes du déterminant, avec des coefficients $c_{k,m}(y)$, $0 \leq k \leq 5$ qui sont donc des éléments de $\mathbb{C}(y)$, non tous nuls. On peut clairement supposer que ce sont des polynômes premiers entre eux. Le coefficient $c_{5,m}$ est affecté à la première colonne, etc.

On obtient deux séries d'égalités.

La première concerne les lignes 1, 3, 5, où ne figurent pas les a_m . On trouve :

$$\begin{aligned} K(y)c_{3,m}(y) + J(y)c_{2,m}(y) + c_{1,m}(y) + c_{0,m}(y) &= 0 \\ K(y+1)c_{4,m}(y) + J(y+1)c_{3,m}(y) + c_{2,m}(y) + c_{1,m}(y) &= 0 \\ K(y+2)c_{5,m}(y) + J(y+2)c_{4,m}(y) + c_{3,m}(y) + c_{2,m}(y) &= 0 \end{aligned}$$

Soit F la relation de récurrence

$$K(y+k)w_{k+3} + J(y+k)w_{k+2} + w_{k+1} + w_k = 0$$

Soit $v_{k,m}(y)$ la suite holonome d'éléments de $\mathbb{C}(y)$ vérifiant F telle que $v_{k,m}(y) = c_{k,m}(y)$ pour $k = 0, 1, 2$. Le fait que $K(X)$ est non nul, et les relations précédentes montrent que $v_{k,m}(y) = c_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5$.

On regarde maintenant les autres lignes :

$$\begin{aligned} K(y)c_{3,m}(y)a_{m+3} + J(y)c_{2,m}(y)a_{m+2} + c_{1,m}(y)a_{m+1} + c_{0,m}(y)a_m &= 0 \\ K(y+1)a_{m+4}c_{4,m}(y) + J(y+1)a_{m+3}c_{3,m}(y) + a_{m+2}c_{2,m}(y) + a_{m+1}c_{1,m}(y) &= 0 \\ K(y+2)a_{m+5}c_{5,m}(y) + J(y+2)a_{m+4}c_{4,m}(y) + a_{m+3}c_{3,m}(y) + a_{m+2}c_{2,m}(y) &= 0 \end{aligned}$$

On fait de même, en introduisant la suite holonome $u_{k,m}(y)$ vérifiant F avec $u_{k,m}(y) = a_{m+k}c_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 2$, et les relations précédentes montrent que $u_{k,m}(y) = a_{m+k}c_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5$.

On a donc obtenu que $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5$.

On reprend maintenant la matrice $A_3(m, y)$ et on y supprime les lignes 1, 2, et la colonne 6.

On trouve la matrice $M_m(y)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & K(y+1) & J(y+1) & 1 & 1 \\ 0 & a_{m+4}K(y+1) & a_{m+3}J(y+1) & a_{m+2} & a_{m+1} \\ K(y+2) & J(y+2) & 1 & 1 & 0 \\ a_{m+5}K(y+2) & a_{m+4}J(y+2) & a_{m+3} & a_{m+2} & 0 \end{pmatrix}$$

qui a donc 4 lignes et 5 colonnes. Le 5-uplet

$$[v_{5,m}(y), v_{4,m}(y), v_{3,m}(y), v_{2,m}(y), v_{1,m}(y)]$$

est solution du système associé à la matrice $M_m(y)$.

On regarde maintenant $A_3(m+1, y+1)$, et cette fois-ci on y supprime la ligne 5 et la ligne 6, et la première colonne.

On vérifie que l'on retrouve la matrice $M_m(y)$. Le 5-uplet

$$[v_{4,m+1}(y+1), v_{3,m+1}(y+1), v_{2,m+1}(y+1), v_{1,m+1}(y+1), v_{0,m+1}(y+1)]$$

est solution du système associé. On a donc deux solutions du système associé à la matrice $M_m(y)$, et on peut remarquer que les deux solutions sont non triviales.

5.2. Le rang de la matrice $M_m(y)$

Le rang de la matrice $M_m(y)$ est au moins deux, car le déterminant formé avec les lignes 1,3 et les colonnes 1,2 est non nul.

Si le rang est égal à 2 pour un entier m fixé, on voit en utilisant les déterminants d'ordre 3 formés avec les lignes 1, 2, 3, et les colonnes 1, 2, k avec $k = 3, 4, 5$, qui sont donc nuls, que l'on a $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+3} = a_{m+4}$ (on a supposé que les polynômes P_k étaient non nuls). On sait qu'alors la suite a_n est constante à partir de $m+1$.

Il nous reste donc deux cas :

- A) Il existe un entier N tel que si $m \geq N$, le rang de $M_m(y)$ est 4 ;
- B) Il existe une infinité d'entiers m tels que le rang de $M_m(y)$ est 3.

5.3. Le cas de rang 4

On suppose donc dans cette partie que le rang de $M_m(y)$ est 4 à partir d'un certain rang. Dans ce cas, les deux 5-uplets solution trouvés sont proportionnels. Il existe donc $\theta_m(y)$ non nul dans $\mathbb{C}(y)$ tel que $v_{k+1,m}(y) = \theta_m(y)v_{k,m+1}(y+1)$ pour $k = 0, \dots, 4$.

La suite $k \rightarrow v_{k,m+1}(y+1)$ vérifie la récurrence G suivante :

$$K(y+1+k)w_{k+3} + J(y+1+k)w_{k+2} + w_{k+1} + w_k = 0$$

et il en est de même de la suite $k \rightarrow v_{k+1,m}(y)$. Par suite c'est le cas aussi de la suite $\tau_k = v_{k+1,m}(y) - \theta_m(y)v_{k,m+1}(y+1)$, qui est nulle pour $k = 0, \dots, 4$. Donc elle est nulle pour tout k en utilisant la relation de récurrence G .

On a aussi que $\eta_k = u_{k+1,m}(y) - \theta_m(y)u_{k,m+1}(y+1)$ est nulle pour tout k par le même argument.

En particulier, on a $u_{6,m}(y) = \theta_m(y)u_{5,m+1}(y+1)$ et $v_{6,m}(y) = \theta_m(y)v_{5,m+1}(y+1)$. Mais $u_{5,m+1}(y+1) = a_{m+6}v_{5,m+1}(y+1)$, donc $u_{6,m}(y) = a_{m+6}v_{6,m}(y)$.

On a donc $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 6$. Supposons montré que pour tout m , on a $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5+q$; on vient de le faire pour $q = 1$. On a $u_{k+1,m}(y) = \theta_m(y)u_{k,m+1}(y+1)$ et $v_{k+1,m}(y) = \theta_m(y)v_{k,m+1}(y+1)$ pour tout k . Comme $u_{k,m+1}(y+1) = a_{k+m+1}v_{k,m+1}(y+1)$ pour $0 \leq k \leq 5+q$, on a $u_{k+1,m}(y) = a_{k+1+m}v_{k+1,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq q+5$, et donc $u_{k,m}(y) = a_{k+m}v_{k,m}(y)$ pour $0 \leq k \leq 5+q+1$.

On a donc finalement que $u_{k,m}(y) = a_{m+k}v_{k,m}(y)$ pour tout $k \geq 0$.

On note aussi que l'on ne peut avoir $v_{k,m}(y)$ nul à partir d'un certain rang ; en effet, ceci impliquerait par la relation de récurrence que $v_{k,m}(y)$ soit nul pour tout k , ce qui n'est pas vrai.

On fixe maintenant m , on pose $u_n^*(y) = u_{n,m}(y)$, $v_n^*(y) = v_{n,m}(y)$, et $a_n^* = a_{n+m}$. L'hypothèse faite sur a_n assure que a_n^* appartient à un sous-anneau A de \mathbb{C} , de type fini sur \mathbb{Z} , et les autres hypothèses du lemme 4.5 sont vérifiées, par suite a_n^* est une suite récurrente linéaire, et donc a_n également.

5.4. On suppose que le rang de $M_n(y)$ est 3 pour une infinité d'entiers

Dans ce cas, on récupère pour un tel entier donné n et fixé tel que la matrice soit de rang 3, que tous les déterminants extraits d'ordre 4 sont

nuls. On note tout de suite que l'on peut sans problèmes remplacer $y + 1$ par y dans la matrice $M_n(y)$. Notons C_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$ les colonnes de ce déterminant. Nous allons utiliser l'annulation de trois de ces déterminants extraits :

L'annulation du déterminant construit en éliminant la colonne C_3 donne après simplification :

Relation L1 :

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+2})K(y) - (a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+4})J(y+1) = 0$$

L'annulation du déterminant construit en éliminant la colonne C_2 donne après simplification :

Relation L2 :

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+2})J(y) - (a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+3}) = 0$$

Enfin, l'annulation du déterminant construit en éliminant la colonne C_4 donne après simplification :

Relation L3 :

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+3})K(y) - (a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+4})J(y)J(y+1) = 0$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui n'utilise que le fait que le déterminant $B_3(n, y)$ est nul pour tout n assez grand :

LEMME 5.1. — *On se place sous les hypothèses du théorème 1.3, de sorte que le déterminant $B_3(n, y)$ est nul pour n assez grand. Alors :*

a) *Si on a $J(y) = 1$, et s'il existe une infinité d'entiers m tels que $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$, alors a_n est récurrente linéaire ;*

b) *Si on a $J(y)J(y+1) = K(y)$, et s'il existe une infinité d'entiers m tels que $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$, alors a_n est récurrente linéaire.*

Démonstration. —

a) On reprend la relation $B_3(n, y) = 0$ pour tout n assez grand, disons $n \geq N$, qui devient :

$$R_1(a, n)K(y)K(y+1) + (R_7(a, n) - R_3(a, n))K(y+1) - R_5(a, n)(K(y) - 1) = 0$$

On peut choisir l'entier m de telle sorte que les valeurs introduites à partir de m dans ce qui suit soient toutes plus grandes que N .

Prenons tout d'abord $n = m + 2$. On a donc $a_{n+2} = a_{n+3}$. On trouve que $R_7 = 0$, et $R_3 = R_1$. La relation $B_3(n, y) = 0$ devient

$$(K(y) - 1)(R_1 K(y + 1) - R_5) = 0$$

Si R_1 ou R_5 est non nul, on en déduit que $K(y)$ est constant ; par suite, on est ramené au cas du théorème du quotient de Hadamard.

Si R_1 et R_5 sont nuls, on récupère les égalités

$$(a_{m+7} - a_{m+4})(a_{m+6} - a_{m+3})(a_{m+5} - a_{m+2}) = 0$$

et

$$(a_{m+7} - a_{m+6})(a_{m+5} - a_{m+2})(a_{m+4} - a_{m+3}) = 0$$

Si $a_{m+7} = a_{m+4}$, on utilise les indices $m + k$, $k = 4, 5, 6, 7$, où il y a trois valeurs égales pour a_n , et a_n est constante à partir de $m + 4$.

Si $a_{m+5} = a_{m+2}$, on utilise les indices $m + k$, $k = 2, 3, 4, 5$, où il y a trois valeurs égales pour a_n , et a_n est constante à partir de $m + 1$.

On a donc $a_{m+6} = a_{m+3}$. Il en résulte que $(a_{m+7} - a_{m+3})(a_{m+5} - a_{m+2})(a_{m+4} - a_{m+3}) = 0$

Si $a_{m+5} = a_{m+2}$, cas déjà vu, et a_n est constante à partir de $m + 2$.

Si $a_{m+4} = a_{m+3}$, on a $a_{m+3} = a_{m+4} = a_{m+5} = a_{m+6}$, et a_n est constante à partir de $m + 3$.

On a donc nécessairement que $a_{m+3} = a_{m+6} = a_{m+7}$.

Posons maintenant $m' = m + 2$. On a donc $a_{m'+1} = a_{m'+4} = a_{m'+5}$, et toujours $J(y) = 1$. Le raisonnement fait ci-dessus conduit donc à $a_{m'+3} = a_{m'+6} = a_{m'+7}$, soit à $a_{m+5} = a_{m+8} = a_{m+9}$. Si on pose alors $m^* = m + 4$, on a $a_{m^*+1} = a_{m^*+4} = a_{m^*+5}$, et par suite $a_{m^*+3} = a_{m^*+6} = a_{m^*+7}$, donc $a_{m+7} = a_{m+10} = a_{m+11}$. Par récurrence, on montre que $a_{4(k+1)+m} = a_{m+4k+1} = a_{m+1}$, $a_{4k+2+m} = a_{4k+3+m} = a_{m+3}$ pour tout k assez grand, contrairement aux hypothèses faites, ce qui termine la démonstration.

b) En tenant compte du fait que K et J sont non nuls, il vient la relation :

$$R_1 J(y) J(y + 1) + (R_7 - R_3) J(y) - R_2 (J(y + 1) - 1) = 0$$

Posons $n = m - 1$, de sorte que $a_{n+2} = a_{n+3}$. Dans ce cas, on a $R_1 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n)$, $R_2 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n)$, $R_3 = (a_{n+5} - a_{n+2})(a_{n+4} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n) = R_1$, $R_7 = 0$. La relation

devient $(R_1 J(y) - R_2)(J(y+1) - 1) = 0$, et si R_1 ou R_2 est non nul, cela implique que $J(y)$ est constant, donc aussi $K(y)$, et on a terminé.

Donc $R_1 = R_2 = 0$. On revient à la variable m :

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+3} - a_m)(a_{m+1} - a_{m-1}) = 0$$

$$\text{et } (a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+3} - a_{m+1})(a_m - a_{m-1}) = 0.$$

Comme a_{m+4} n'est pas égal à a_{m+1} , on a $(a_{m+3} - a_m)(a_{m+1} - a_{m-1}) = 0$. Si $a_{m+3} \neq a_m$, on a $a_{m+1} = a_{m-1}$, et a_n est constante à partir de $m-1$ puisque $a_{m-1} = a_{m+1} = a_{m+2}$.

On a donc $a_{m+3} = a_m$. Il vient alors que $(a_m - a_{m+1})(a_m - a_{m-1}) = 0$. Si $a_m = a_{m+1}$, on a a_n constante à partir de m .

Par suite $a_{m-1} = a_m = a_{m+3}$.

Posons $m^* = m - 2$, on a obtenu $a_{m^*+1} = a_{m^*+2} = a_{m^*+5}$. Comme a_n n'est pas constante, on trouve par le raisonnement précédent que $a_{m^*-1} = a_{m^*} = a_{m^*+3}$, soit encore que $a_{m-3} = a_{m-2} = a_{m+1}$, ou $a_{(m-4)+1} = a_{(m-4)+2} = a_{(m-4)+5} = a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$. On a alors par récurrence que, pour tout k tel que $m - 4k$ soit assez grand, $a_{(m-4k)+1} = a_{(m-4k)+2} = a_{(m-4k)+5} = a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5} = \alpha_m$. Comme on a $a_{m-1} = a_m = a_{m+3}$, le même raisonnement donne que $a_{(m-4k)-1} = a_{(m-4k)} = a_{(m-4k)+3} = a_{m-1} = a_m = a_{m+3} = \beta_m$.

Soit A l'ensemble des entiers m , qui par hypothèse est infini. Pour $m \in A$, posons $m = 4q_m + h_m$, avec $h_m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Quitte à se restreindre à une partie infinie B de A , on peut supposer que h_m est une constante h . On obtient donc pour $m \in B$ que $a_{4(q_m-k)+h+j}$ est égal à α_m si $j = 1, 2$, et β_m si $j = 0, 3$. En tenant compte de la contrainte que $m - 4k$ doit être assez grand, et en posant $l = q_m - k$, il en résulte qu'il existe une constante c tel que si $c \leq l \leq q_m$, on a $a_{4l+h+j} = \alpha_m$ si $j = 1, 2$, et β_m si $j = 0, 3$. Donc α_m et β_m sont constants pour $m \in B$. Comme q_m tend vers l'infini si $m \in B$ tend vers l'infini, on en conclut que a_n est constante sur les progressions arithmétiques modulo 4, contrairement aux hypothèses faites, et cela termine la démonstration. \square

On va maintenant étudier successivement trois cas pour des entiers m , tel que le rang de $M_m(y)$ est trois (il y a par hypothèse une infinité de tels m), et donc les relations L_1, L_2, L_3 sont vérifiées pour m . L'outil principal sera le lemme 4.3.

5.4.1. Cas $K(y)$ et $J(y+1)$ liés, et $K(y)$ et $J(y)J(y+1)$ liés

On voit immédiatement que ceci implique que $J(y)$ et $K(y)$ sont des constantes, et on est ramené au théorème du quotient de Hadamard.

5.4.2. Le cas où $K(y)$ et $J(y+1)$ ne sont pas liés

Par la relation L1, il vient que $(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+2}) = 0$ et $(a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+4}) = 0$. On a donc en particulier que soit $a_{m+4} = a_{m+1}$ pour une infinité de valeurs de m , soit $a_{m+5} = a_{m+2}$ pour une infinité de valeurs de m .

Premier cas : On a $a_{m+4} = a_{m+1}$ pour une infinité de valeurs de m . Ceci implique que $(a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+1}) = 0$. Si on a $a_{m+2} = a_{m+1}$, on a pour les indices $m+k$, $k = 1, 2, 3, 4$, 3 valeurs égales, et a_n est constant à partir de $m+1$ par le lemme 4.3, que nous allons utiliser un bon nombre de fois, ce qui est contraire aux hypothèses faites.

On a donc $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$.

La relation L2 devient

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+2} - a_{m+1})(1 - J(y)) = 0$$

Si $a_{m+3} = a_{m+1}$, on a encore a_n constante à partir de $m+1$ en utilisant les indices $m+k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Si $a_{m+2} = a_{m+1}$, c'est pareil.

On a donc $J(y) = 1$.

Nous avons obtenu que $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$, et $J(y) = 1$. On peut alors utiliser le lemme 5.1, a), ce qui termine la preuve.

Second cas : On suppose que $a_{m+5} = a_{m+2}$ pour une infinité de valeurs de m . On a alors que $(a_{m+2} - a_{m+1})(a_{m+2} - a_{m+4}) = 0$. Si $a_{m+4} = a_{m+2}$, on voit encore que a_n est constante à partir de $m+2$.

On a donc $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$.

La relation L3 donne que

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+3} - a_{m+1})(J(y)J(y+1) - K(y)) = 0$$

Si $a_{m+4} = a_{m+1}$ ou si $a_{m+3} = a_{m+1}$, on trouve encore que a_n est constante à partir de $m+1$; on suppose donc que $a_{m+4} \neq a_{m+1}$ et que $a_{m+3} \neq a_{m+1}$. On a alors $J(y)J(y+1) - K(y) = 0$, et $a_{m+1} = a_{m+2} = a_{m+5}$. On peut alors utiliser le lemme 5.1, b), ce qui termine la démonstration.

5.4.3. Le cas où $K(y)$ et $J(y)J(y+1)$ sont linéairement indépendants

Ceci donne grâce à la relation L3 les égalités suivantes :

$$(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+3}) = 0$$

et

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+4}) = 0$$

Premier cas : On a $a_{m+4} = a_{m+1}$ pour une infinité de valeurs de m . Il en résulte que $(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+5} - a_{m+1}) = 0$.

Si $a_{m+3} = a_{m+1}$, on a trois valeurs égales pour a_n parmi les indices $m+k$, $k=1,2,3,4$, et a_n est constante à partir de $m+1$.

Sinon, on a $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$.

La relation L2 donne que

$$(a_{m+3} - a_{m+1})(a_{m+2} - a_{m+1})(1 - J(y)) = 0$$

Comme on peut supposer que $a_{m+1} \neq a_{m+3}$, on a si $J(y) \neq 1$, $a_{m+2} = a_{m+1}$ et encore a_n constante en utilisant les indices $m+k$, $k=1,2,3,4$

Donc on a $1 = J(y)$, $a_{m+1} = a_{m+4} = a_{m+5}$, et on peut utiliser le lemme 5.1, a), ce qui termine la démonstration.

Second cas : On a $a_{m+5} = a_{m+3}$ pour une infinité de valeurs de m . On a alors par la seconde relation que soit $a_{m+3} = a_{m+4}$, auquel cas $a_{m+3} = a_{m+4} = a_{m+5}$, et on a a_n constante à partir de $m+3$, ou alors $a_{m+1} = a_{m+3} = a_{m+5}$. La relation L1 donne $(a_{m+4} - a_{m+1})(a_{m+1} - a_{m+2})K(y) - (a_{m+2} - a_{m+1})((a_{m+1} - a_{m+4})J(y+1)) = 0$, et comme une des égalités $a_{m+4} = a_{m+1}$ ou $a_{m+2} = a_{m+1}$ permet encore de montrer a_n constante à partir d'un certain rang, on a $K(y) = J(y+1)$.

Nous revenons maintenant à la récurrence de départ, qui est donc

$$J(n+1)w_{n+3} + J(n)w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = 0$$

Pour une solution quelcoque w_n de cette récurrence, posons $\delta_n = J(n)w_{n+2} + w_n$. On a alors $\delta_{n+1} + \delta_n = 0$. Il en résulte que l'on $\delta_n = (-1)^n \delta_0$. Posons alors $t'_n = w_{2n}$ et $t''_n = w_{2n+1}$. On a alors $J(2n)t'_{n+1} + t'_n = \delta_0$ et $J(2n+2)t'_{n+2} + t'_{n+1} = \delta_0$, d'où $J(2n+2)t'_{n+2} - (J(2n) - 1)t'_{n+1} - t'_n = 0$. Cette récurrence est donc vérifiée par les deux suites v_{2n} et $u_{2n} = a_{2n}v_{2n}$; donc la suite a_{2n} est récurrente linéaire par le théorème 1.3. On vérifie de même que la suite a_{2n+1} est récurrente linéaire, et il en résulte que la suite a_n est récurrente linéaire, ce qui démontre l'assertion.

6. Preuve du théorème 1.4

6.1. Quelques lemmes

On note M la matrice dont les coefficients de la i -ème ligne sont les $P_{s+1-j}(n)a_i(n+s+1-j)$, où i varie entre 0 et $s-1$, et j entre 1 et $s+1$. C'est donc une matrice à s lignes et $s+1$ colonnes.

On note T la matrice obtenue en remplaçant les $P_j(n)$ par 1 dans la matrice M .

On fabrique la matrice N à $s+2$ lignes et colonnes en bordant la matrice M de la manière suivante : On rajoute une première colonne de termes nuls (qui sera la colonne d'indice 0), pour $0 \leq i \leq s-1$, et on rajoute les deux lignes d'indice $i = s$ et $i = s+1$ qui sont

$$[P_s(n+1), P_{s-1}(n+1), \dots, P_0(n+1), 0]$$

et

$$[P_s(n+1)a_{s-1}(n+s+1), P_{s-1}(n+1)a_{s-1}(n+s), \dots, P_0(n+1)a_{s-1}(n+1), 0]$$

LEMME 6.1. — *Soit n un entier assez grand, fixé. Soit m un entier appartenant à $\{1, \dots, s\}$. Le déterminant de la matrice T_m obtenue à partir de T en y supprimant la colonne d'indice m est non nul.*

Démonstration. — On va raisonner par l'absurde, et supposer que ce déterminant est nul. Dans ce cas, il existe une combinaison linéaire non triviale des lignes de T_m qui est nulle. Il existe donc des $\mu_i \in \mathbb{C}$, non tous nuls (qui peuvent dépendre de n , mais n est fixé), tels que l'on ait

$$\sum_{i=0}^{s-1} \mu_i a_i(n+s+1-j) = 0$$

pour $j = 1, \dots, s+1$, $j \neq m$. Posons $b(q) = \sum_{i=0}^{s-1} \mu_i a_i(q)$ et

$$u(q) = b(q)v(q) = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \mu_i a_i(q) \right) v(q) = \sum_{i=0}^{s-1} \mu_i u_i(q)$$

qui est une solution de l'équation aux différences (E) nulle pour tout $q = n+j$, $1 \leq j \leq s+1$, $j \neq m$. Par le lemme 4.3, la suite $u(q)$ est nulle à partir de n , ceci contredit l'indépendance linéaire des $u_i(q)$ et termine la démonstration. \square

LEMME 6.2. — Pour $1 \leq k \leq s$, on note

$$Q_k(y) = P_{s-k}(y+1) \left(\prod_{1 \leq j \leq s+1, j \neq k} P_{s+1-j}(y) \right)$$

Le déterminant de la matrice N est donné par la formule suivante :

$$P_s(n+1) \sum_{1 \leq k \leq s} (-1)^k (a_{s-1}(n+s+1) - a_{s-1}(n+s+1-k)) Q_k(n) \det(T_k)$$

où T_k est la matrice obtenue à partir de la matrice T en y supprimant la colonne d'indice k , $1 \leq k \leq s$.

Démonstration. — On va développer par rapport aux deux dernières lignes. On développe par rapport à la dernière ligne, on choisit tout d'abord un indice j , $0 \leq j \leq s+1$, et on voit que puisqu'il y a un zéro en dernière place, on peut se limiter aux j tels que $j \leq s$. Le déterminant de N prend la forme :

$$\sum_{0 \leq j \leq s} (-1)^{s+1-j} P_{s-j}(n+1) a_{s-1}(n+s+1-j) \Gamma_j$$

où Γ_j est le déterminant de la matrice N privée de sa dernière ligne, et de sa colonne d'indice j .

On considère maintenant Γ_j , et on le développe par rapport à sa dernière ligne, en repérant toujours les colonnes par les indices $0, \dots, s+1$, dont on a enlevé le terme j .

Supposons $j \neq 0$, ce qui veut dire que la première colonne de N n'a pas été supprimée pour obtenir Γ_j . Dans ce cas, le déterminant Γ_j est égal à $(-1)^s P_s(n+1) \det(M_j)$, où M_j est la matrice M privée de sa colonne d'indice j , $1 \leq j \leq s$.

Supposons maintenant que $j = 0$. On développe alors, le terme correspondant à l'indice k de colonne ($1 \leq k \leq s$) est $(-1)^{s+1-k} P_{s-k}(n+1) \det(M_k)$

Finalement, on trouve une première formule, qui est

$$P_s(n+1) \sum_{k=1}^s (-1)^k P_{s-k}(n+1) (a_{s-1}(n+s+1) - a_{s-1}(n+s+1-k)) \det(M_k)$$

On voit tout de suite que

$$\det(M_k) = \left(\prod_{1 \leq j \leq s+1, j \neq k} P_{s+1-j}(n) \right) \det(T_k)$$

ce qui termine la démonstration du lemme. \square

6.2. Preuve du théorème 1.4

On commence par écrire que $v(n)$ et les $u_j(n)$, $1 \leq j \leq s-1$ sont solutions de (E) en remplaçant les $u_j(n)$ en fonction des $a_j(n)$ et de $v(n)$; ceci étant fait, on change dans l'équation vérifiée par $v(n)$ l'indice n par $n+1$, et on fait de même pour l'équation vérifiée par $a_{s-1}(n)v(n)$. On obtient un système linéaire homogène d'équations, dont (v_n, \dots, v_{n+s+1}) est une solution, qui par hypothèse n'est pas la solution nulle. La matrice du système est N , et donc son déterminant est nul.

Des lemmes 4.1 et 6.2, il résulte que l'on va avoir en raison de l'hypothèse que les $a_j(n)$ sont dans G_d pour un groupe de type fini G et un entier d convenables des égalités polynomiales :

$$\sum_{1 \leq k \leq s} (-1)^k (a_{s-1}(n+s+1) - a_{s-1}(n+s+1-k)) Q_k(y) \det(T_k) = 0$$

Nous allons commencer par le cas où $s = 2$.

Dans ce cas, on peut expliciter la relation, qui devient (en notant $a_n = a_1(n)$) :

$$\begin{aligned} P_2(y)P_0(y+1)(a_{n+3} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n) \\ - P_1(y)P_1(y+1)(a_{n+3} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n) = 0 \end{aligned}$$

Si les polynômes $P_2(y)P_0(y+1)$ et $P_1(y)P_1(y+1)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{C} , leurs coefficients sont nuls pour tout n . Dans ce cas, on a les deux relations $(a_{n+3} - a_{n+1})(a_{n+2} - a_n) = 0$ et $(a_{n+3} - a_{n+2})(a_{n+1} - a_n) = 0$. La première montre que pour tout n , on a parmi les $s+1 = 3$ valeurs $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$, au moins deux qui sont égales, ou parmi les valeurs a_n, a_{n+1}, a_{n+2} , au moins deux qui sont égales. On applique alors le lemme 4.3, qui montre que la suite a_n est constante à partir d'un certain rang, et ceci termine la preuve dans ce premier cas.

Si les polynômes sont dépendants, comme ils sont non nuls, il existe une constante λ telle que $P_1(y)P_1(y+1) = \lambda P_2(y)P_0(y+1)$. Nous allons dans ce cas étudier les solutions de la récurrence.

On note N un entier tel que si $n \geq N$, on ait $P_0(n)P_1(n)P_2(n) \neq 0$. Soit pour $n \geq N+1$, t_n la suite définie par $t_n = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{P_0(k)}{P_1(k)}$. Soit w_n une solution quelconque de la récurrence, et $x_n = \frac{w_n}{t_n}$. On vérifie immédiatement que l'on a $\lambda^{-1}x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$, ce qui ramène l'énoncé à démontrer au théorème du quotient de Hadamard, et ceci termine la démonstration.

Dans la suite, on suppose que $s \geq 3$. La démonstration va se dérouler suivant le même schéma de preuve, mais avec quelques complications techniques.

Soient m, l deux indices fixés, distincts, appartenant à $\{1, \dots, s\}$. On va appliquer ce qui précède en remplaçant a_{s-1} par une combinaison linéaire $d(n) = \lambda_1 a_1(n) + \dots + \lambda_{s-1} a_{s-1}(n)$, en imposant que $d(n+s+1) = d(n+s+1-j)$ pour $1 \leq j \leq s$ et $j \neq m, l$, et aussi que le coefficient λ_{s-1} ne soit pas nul (on va le prendre égal à 1), ce qui implique l'indépendance linéaire de $a_i(q)$, $0 \leq i \leq s-2$ et de $d(q)$.

En écrivant que $d(n+s+1-j) - d(n+s+1) = 0$ pour $1 \leq j \leq s$ et $j \neq m, l$, on trouve le système (S) aux inconnues λ_i , $i = 1, \dots, s-2$

$$\sum_{i=1}^{s-2} \lambda_i (a_i(n+s+1-j) - a_i(n+s+1)) = a_{s-1}(n+s+1) - a_{s-1}(n+s+1-j)$$

La matrice de ce système est la matrice $(a_i(n+s+1-j) - a_i(n+s+1))$, $1 \leq i \leq s-2$, $j \neq m, l$. Il suffit donc de montrer que le déterminant de cette matrice est non nul pour prouver cette assertion.

Considérons la matrice $T_{m+1}(n+1)$ dont le déterminant est non nul par le lemme 6.1. On commence par modifier cette matrice en soustrayant la première colonne de cette matrice à toutes les autres, puis on considère la matrice extraite obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne. On trouve la matrice $(a_i(n+s+2-h) - a_i(n+1+s))$, avec $1 \leq i \leq s-1$, et $2 \leq h \leq s+1$, $h \neq m+1$. (En effet, pour obtenir $T_{m+1}(n+1)$, comme $m+1 \geq 2$, on n'a pas enlevé la première colonne de $T(n+1)$).

On change l'indice h en le posant égal à $j+1$, où j varie entre 1 et s , et $j \neq m$. La matrice devient $(a_i(n+s+1-j) - a_i(n+1+s))$. avec $1 \leq i \leq s-1$, $1 \leq j \leq s$, et $j \neq m$.

On développe maintenant le déterminant de la matrice précédente suivant la colonne d'indice l . Comme ce déterminant est non nul, on en déduit qu'il existe un indice i_0 tel que le mineur égal au déterminant de la matrice $(a_i(n+s+1-j) - a_i(n+1+s))$, avec $1 \leq i \leq s-1$, $i \neq i_0$, $1 \leq j \leq s$, et $j \neq m, l$ est non nul. Quitte à renuméroter les a_i , on peut supposer que $i_0 = s-1$; le système (S) précédent aux inconnues λ_i est alors un système de Cramer, ce qui prouve l'assertion.

On obtient que la somme des deux expressions suivantes est nulle :

$$(-1)^m (d(n+s+1) - d(n+s+1-m)) Q_m(y) \det(T_m)$$

et

$$(-1)^l(d(n+s+1) - d(n+s+1-l))Q_l(y)\det(T_l)$$

Le lemme 6.1 donne que $\det(T_m)$ et $\det(T_l)$ sont non nuls tous les deux. Donc comme tous les polynômes P_k sont non nuls, si l'un des termes $d(n+s+1-m) - d(n+s+1)$ ou $d(n+s+1-l) - d(n+s+1)$ est nul, l'autre aussi ; par le lemme 4.3, la suite $d(q)$ serait constante, ce qui par l'indépendance linéaire des $a_i(q)$ contredirait le fait que λ_{s-1} est non nul.

On a obtenu une relation de dépendance non triviale entre Q_m et Q_l . En simplifiant cette relation, on voit qu'il existe $\delta_{m,l}$ non nul, tel que $P_{s-m}(y+1)P_{s+1-l}(y) = \delta_{m,l}P_{s-l}(y+1)P_{s+1-m}(y)$.

Pour $l = s$, on obtient que pour $k = 0, \dots, s-1$ on a

$$P_{k+1}(y) = \mu_k \varphi(y) P_k(y+1) \text{ où } \mu_k = \frac{1}{\delta_{s-k,s}}, \quad \varphi(y) = \frac{P_1(y)}{P_0(y+1)}.$$

On vérifie alors par récurrence sur $k = 1 \dots, s$ que

$$P_k(y) = P_0(y) \prod_{i=0}^{k-1} \left(\mu_i \frac{P_1(y+i)}{P_0(y+i)} \right)$$

Si on pose $\theta_k = \prod_{i=0}^{k-1} \mu_i$, et $\eta_n = \prod_{m=N_0}^{n-1} \frac{P_1(m)}{P_0(m)}$ pour n assez grand et N_0

convenable (qui est une suite holonome inversible), toute suite w_n vérifiant l'équation aux différences (E) de départ sera telle que la suite $t_n = \eta_n w_n$ va vérifier la relation de récurrence à coefficients constants (F) suivante :

$$\sum_{k=0}^s \theta_k t_{n+k} = 0$$

et on est alors ramené au théorème du Quotient de Hadamard, ce qui termine la preuve.

6.3. Preuve du corollaire 1.5

Le premier cas est celui, trivial, où la suite a_n est constante à partir d'un certain rang, ce qui équivaut à dire que les suites u_n et v_n sont linéairement dépendantes. On suppose donc pour poursuivre que ce n'est pas le cas. On écrit la récurrence sous la forme :

$$P_2(n)w_{n+2} + P_1(n)w_{n+1} + P_0(n)w_n = 0$$

Comme il est clair que l'on peut supposer que les polynômes P_0 et P_2 ne sont pas nuls, il nous reste deux possibilités :

Premier cas : Le polynôme P_1 n'est pas nul. On peut alors appliquer le théorème 1.4, qui donne le résultat.

Deuxième cas : Le polynôme P_1 est nul. On voit alors facilement que les deux suites v_{2k} et v_{2k+1} vérifient des récurrences d'ordre 1, et par la remarque 2.2 l'assertion en résulte.

7. Quelques commentaires

1) Nous avons dû faire dans nos énoncés l'hypothèse naturelle que la suite v_n était non nulle à partir d'un certain rang, mais aussi l'hypothèse que la suite a_n quotient des deux suites u_n et v_n ne prenait qu'un nombre fini de fois toute valeur L fixée.

En fait ces deux hypothèses sont liées. En effet, si L est une valeur fixée dans \mathbb{C} , dire que a_n prend une infinité de fois la valeur L est équivalent à dire que la suite $w_n = u_n - Lv_n$, qui vérifie la récurrence commune à u_n et v_n , s'annule une infinité de fois.

Dans le cas d'une suite récurrente linéaire w_n d'éléments de \mathbb{C} , l'étude de l'ensemble des indices n tels que $w_n = 0$ conduit au théorème de Skolem-Mahler-Lech, ([17], [9], [7]), qui affirme qu'il existe un entier $d \geq 1$, tel que, pour tout $r \in \{0, \dots, d-1\}$, on a soit $w_{kd+r} = 0$ pour tout k assez grand, soit l'ensemble des indices k tels que $w_{kd+r} = 0$ est fini.

Dans le cas d'une suite holonome w_n , il a été démontré d'abord dans le cas où la série génératrice $\sum w_n x^n$ est algébrique ([2]), puis dans le cas général ([10]), qu'il existe un entier $d \geq 1$, tel que, pour tout $r \in \{0, \dots, d-1\}$, on a soit $w_{kd+r} = 0$ pour tout k assez grand, soit l'ensemble des indices k tels que $w_{kd+r} = 0$ est de densité arithmétique nulle.

Le problème de savoir s'il existe une suite holonome w_n tel que l'ensemble formé par les indices n appartenant à une progression arithmétique tels que $w_n = 0$ est un ensemble infini de densité arithmétique nulle est à notre connaissance un problème ouvert (qui se ramène bien sûr à savoir s'il existe une suite holonome telle que les indices où elle s'annule forme un ensemble infini de densité arithmétique nulle). A priori, on ne peut donc exclure que pour une valeur L , l'ensemble des indices n appartenant à une progression arithmétique tels que a_n soit égal à L soit un ensemble infini de densité arithmétique nulle.

Nous allons cependant exhiber une classe de récurrences, telles que pour toute solution w_n de cette récurrence ayant une infinité de termes non nuls, on a $w_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, ce qui par ce qui précède permet d'appliquer nos résultats.

Nous utiliserons un théorème dû à O. Perron. ([12], [11]). Considérons une relation de récurrence \mathcal{R} de la forme

$$(a_s + \varepsilon_s(n))w_{n+s} + \cdots + (a_0 + \varepsilon_0(n))w_n = 0$$

où les a_k sont des constantes, avec $a_s a_0 \neq 0$, et les $\varepsilon_k(n)$ des suites de limite nulle. Si l'on suppose que le polynôme $P(X) = a_s X^s + \cdots + a_0$ a des racines α_j de modules tous distincts, alors \mathcal{R} possède une base $e_j(n)$, $j = 1, \dots, s$ de solutions telles que $e_j(n) = \alpha_j^n (1 + \beta_j(n))^n$, avec $\beta_j(n)$ de limite nulle.

Il est clair que l'hypothèse faite sur les α_j implique que, pour toute solution non nulle w_n de la récurrence, on a w_n non nul à partir d'un certain rang.

On pourra consulter [6] pour des généralisations de ce résultat et des références bibliographiques.

A titre d'exemple, pour tout choix des polynômes Q_k de degrés au plus deux, la récurrence suivante satisfait à ces conditions :

$$(n^3 + Q_3(n))w_{n+3} - (6n^3 + Q_2(n))w_{n+2} + (11n^3 + Q_1(n))w_{n+1} - (6n^3 + Q_0(n))w_n = 0$$

2) On peut songer à donner des applications arithmétiques des résultats précédents. Nous n'avons pour le moment que des résultats assez faibles, nous en donnons simplement un exemple ; nous espérons pouvoir revenir sur cette question.

On considère les deux suites $u_n = n! + 2^n$ et $v_n = n! + 3^n$. Elles vérifient toutes les deux la récurrence

$$P_3(n)w_{n+3} + P_2(n)w_{n+2} + P_1(n)w_{n+1} + P_0(n)w_n = 0$$

avec $P_3(n) = (n^2 - 2n + 3)$, $P_2(n) = -(n^3 + 6n^2 - 8n + 17)$, $P_1(n) = (5n^3 + 11n^2 - 2n + 28)$, et $P_0(n) = -(6n^3 + 6n^2 + 12n + 12)$. En fait les trois suites $n!, 2^n, 3^n$ constituent une base de solutions de cette récurrence, ce qui montre que, pour une solution quelconque w_n , s'il existe une infinité de n tel que $w_n \neq 0$, on a $w_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On peut donc par ce qui précède appliquer le théorème 1.3. Soit z_n le PGCD de u_n et v_n . On a alors le résultat suivant :

Soit l'ensemble des nombres premiers divisant un terme de la suite $\alpha_n = \frac{u_n}{z_n}$ est infini, soit l'ensemble des nombres premiers divisant un terme de la suite $\beta_n = \frac{v_n}{z_n}$ est infini.

En effet, dans le cas contraire, il existe un ensemble fini S de nombres premiers tels que les facteurs premiers de $\alpha_n\beta_n$ sont dans S pour tout n ; comme on a $\frac{n! + 2^n}{n! + 3^n} = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = a_n$, on peut appliquer le théorème 1.3. Mais on sait que pour une suite récurrente linéaire a_n vérifiant cette condition, il existe un entier $d \geq 1$, et des λ_r, μ_r rationnels tels que $a_{kd+r} = \lambda_r \mu_r^k$, pour tout k assez grand. On montre facilement que ce n'est pas le cas, et cette contradiction démontre l'assertion.

Bibliographie

- [1] BÉZIVIN (J.-P.). — Sur un théorème de G. Polya. *Journal für die reine angewandte Math*, 364, p. 60–68, (1986).
- [2] BÉZIVIN (J.-P.). — Une généralisation du théorème de Skolem-Mahler-Lech. *Quart. J. Math Oxford*. 40, no 158, p. 133–138, (1989).
- [3] CORVAJA (P.), ZANNIER (U.). — Finiteness of integral values for the ratio of two linear recurrence. *Invent. Math*, 149, no. 2, p. 431–451, (2002).
- [4] EVERTSE (J.H.). — On sums of S-units and linear recurrences. *Compositio Math*, 53, no 2, p. 225–244, (1984).
- [5] LANG (S.). — *Fundamentals of diophantine geometry*. New York, (1983).
- [6] KOOMAN (R.J), TIJDEMAN (R.). — Convergence properties of linear recurrence sequences. *Nieuw Arch Wisk*. 4, no 1, p. 13–25, (1990).
- [7] LECH (C.). — A note on recurring series. *Ark Mat*, 2, p. 417–421, (1953).
- [8] LUCA (F.). — Prime divisors of binary holonomic sequences. *Adv in Appl Math*. 40, no 2, p. 168–169, (2008).
- [9] MAHLER (K.). — Eine Arithmetische Eigenschaft der Taylor Koeffizienten rationaler Funktionen. *Proc Akad Wet Amsterdam*, 38, p. 51–60, (1935).
- [10] METHFESSEL (C.). — On the zeros of recurrence sequences with non constant coefficients. *Archiv der Mathematik*, 74, p. 201–206, (2000).
- [11] NORLUND (N.). — *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Springer Verlag, Berlin (1924).
- [12] PERRON (O.). — Über einen Satz des Herrn Poincaré. *J reine angew Math*, 136, p. 17–37, (1909).
- [13] POURCHET (Y.). — Solution du problème arithmétique du quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris*. 288, no. 23, p. 1055–1057, (1979).
- [14] RUMELY (R.). — Notes on van der Poorten's proof of the Hadamard quotient theorem. I, II. *Séminaire de Théorie des Nombres*, Paris (1986–87), p. 349–382, p. 383–409, *Progr. Math.*, 75, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1988).
- [15] SCHLICKWEI (H.P.), VAN DER POORTEN (A.J.). — Additive relations in fields. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 51, no. 1, p. 154–170, (1991).

- [16] SINGER (M.F.), VAN DER PUT (M.). — Galois theory of difference equations. Lecture Notes in Mathematics, 1666. Springer-Verlag, Berlin, (1997).
- [17] SKOLEM (T.). — Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen. Comptes Rendus du 8-ième congrès des mathématiciens scandinaves, p. 163-188, (1935).
- [18] VAN DER POORTEN (A.J.). — Solution de la conjecture de Pisot sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles. C. R. Acad. Sci. Paris. 306, no. 3, p. 97-102, (1988).