

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

GABRIEL BIRAME NDIAYE, DOUDOU SAKHIR THIAM

Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone, à valeurs convexes fermées bornées

Tome XIX, n° 1 (2010), p. 71-93.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_1_71_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone, à valeurs convexes fermées bornées

GABRIEL BIRAME NDIAYE⁽¹⁾, DOUDOU SAKHIR THIAM⁽²⁾

RÉSUMÉ. — Nous introduisons une notion de multimesure de Radon s -compacte, à valeurs convexes fermées bornées, afin de généraliser et d'unifier des résultats établis, pour des multimesures de Radon à valeurs faiblement compactes, par A. Costé, R. Pallu De La Barrière, K. Siggini, D. S. Thiam. Nous présentons l'intégration par rapport à de telles multimesures de Radon ; et démontrons un théorème de correspondance biunivoque, entre les multimesures faibles monotones s -compactes et les multimesures de Radon s -compactes monotones. Nous obtenons aussi un théorème de prolongeabilité, et définissons un espace $L^\infty(I)$. Cela nous a permis d'obtenir des critères d'intégrabilité, des densités d'un type nouveau, et des techniques de démonstrations plus simples.

ABSTRACT. — We introduce a notion of s -compact set-valued Radon measure, with closed convex bounded values, to extend and unify results obtained in the weakly compact case by A. Costé, R. Pallu De La Barrière, D. S. Thiam, K. Siggini. We present integration with respect to such set-valued Radon measures. We prove a one to one correspondence theorem, between s -compact monotones set-valued Radon measures, and s -compact monotones weak set-valued measures, and also an extension theorem. We define a space $L^\infty(I)$ and obtain integrability criteria, densities of new type, simple techniques in the proofs.

(*) Reçu le 12/07/08, accepté le 24/02/09

(1) Département de Mathématiques-Informatique, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, BP 5005, Sénégal
gabrielbirame@ucad.sn, gabrielbirame@yahoo.fr

(2) Président Université Dakar Bourguiba, Dakar, BP 15744, Sénégal
sxr@sentoo.sn

1. Introduction

Les multimesures ont été le sujet de plusieurs thèses dont celle de C. Godet-Thobie de l'école de C. Castaing, et celles de l'école de Pallu De La Barrière : D. S. Thiam, A. Costé, K. Siggini. Le point de vue des semi-variations a été apporté par Pallu De La Barrière [11]. Tous ces travaux ont été fait pour une multimesure à valeurs faiblement compactes. Nous avons eu le projet d'étudier l'intégration par rapport à une multimesure à valeurs convexes fermées. Cela nous a amené à définir dans [5] la notion de s -compacité qui est l'équivalent multivoque de σ -finie des mesures scalaires. Nous introduisons ici, la notion de multimesure de Radon s -compacte, et utilisons les résultats obtenus de [5] à [9], pour aborder l'intégration par rapport à une multimesure de Radon, à valeurs convexes fermées bornées. Dans la section 2, nous rappelons des résultats obtenus dans nos papiers précédents. Dans la section 3, Nous établissons un théorème de correspondance biunivoque, entre les multimesures de Radon monotones s -compactes, et les multimesures faibles s -compactes monotones. Nous obtenons aussi un théorème de prolongeabilité. Nous avons donc généralisé, des résultats établis dans le cas compact, par [12], [2], [13], et [11]. Les espaces de fonctions intégrables sont complets. Nous appliquons le concept de I -mesurable à une multimesure de Radon I , et celui de $L^\infty(I)$ que nous avons introduit dans [9], pour une multimesure faible. Nous obtenons ainsi des critères d'intégrabilités, et aussi qu' à toute fonction f de $L_+^\infty(I)$, on peut identifier une multimesure de Radon, admettant f comme densité par rapport à I . Dans la section 4, nous comparons avec la méthode de [11]. Dans la section 5, pour une mesure de Radon u , nous unifions les méthodes de [11], [13], [19], et généralisons les théorèmes de convergence de [13]. Dans [13], l'auteur pensait que son espace pouvait contenir strictement celui de [19]. Nous montrons que ces espaces sont les mêmes. Nous prouvons comme dans [19], qu'une fonction u -mesurable, dominée par une fonction intégrable, est intégrable. Nous donnons aussi des exemples de multimesures de Radon, pour lesquelles, l'intégrale d'une fonction peut ne pas être à valeurs faiblement compactes, et donc non intégrables au sens de [13] et de [11]. Ces résultats sont présentés, pour l'essentiel dans [7]. Ceci s'inscrit dans le champ de travaux de [2], [13], [11], [12], [4].

2. Notations et préliminaires

On considère E un espace topologique localement convexe séparé non complet, E' son dual topologique. Le crochet de dualité $\langle E, E' \rangle$ est $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $A \subset E$, et $y \in E'$, on pose $\delta^*(y/A) = \sup\{\langle x, y \rangle : x \in A\}$.

On considère les monoïdes suivants : $(cc(E), +)$ l'ensemble des convexes faiblement compacts de E , $(cfb(E), \dot{+})$ celui des convexes fermés bornés non vides, et $(cf(E), \dot{+})$ celui des convexes fermés non vides. Si $A, B \in cf(E)$, \overline{A} est l'adhérence de A et, $A \dot{+} B = \overline{A + B}$. On désigne par $\overline{co}(A)$, l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble A . La structure uniforme, de ces monoïdes, est celle de Hausdorff [1], et la relation d'ordre l'inclusion. Si O est une famille de parties convexes fermées de E on a :

$\inf\{A : A \in O\} = \cap\{A : A \in O\}$, et $\sup\{A : A \in O\} = \overline{co} \cup \{A : A \in O\}$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de $cf(E)$. On note : $\overline{\lim} A_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} A_n$, et $\underline{\lim} A_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{p \geq n} A_n$, au sens de l'ordre dans $cf(E)$. Si en plus, pour $A \in cf(E)$, on a $A = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$, alors A est la limite, au sens de l'ordre, dans $cf(E)$, de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit de manière analogue, la limite au sens de l'ordre dans $cfb(E)$, et dans $cc(E)$. On désigne par T un ensemble non vide. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$ est une fonction de T dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose : $f^+ = \sup(f, 0)$, et $f^- = \sup(-f, 0)$. A partir de la section 3, T désignera un espace localement compact métrisable séparable, et $K(T)$ l'ensemble des fonctions numériques, définies sur T , continues à supports compacts. Pour $f \in K(T)$, le support de f sera noté : $supp(f) = \{t \in T : f(t) \neq 0\}$. Si $A, B \in cfb(E)$, et si E est normé, on désigne par $DH(A, B)$ la distance de Hausdorff. La formule de Hörmander (voir [1], chapitre II) s'écrit :

$$DH(A, B) = \sup\{|\delta^*(y/A) - \delta^*(y/B)| : y \in E', \|y\| \leq 1\}.$$

Soit $M: \Omega \rightarrow cf(E)$ une multiapplication. On dira que M est une multimesure faible si $\delta^*(y/M(\cdot))$ est une mesure scalaire pour tout y de E' avec $M(\emptyset) = \{0\}$: cette notion a été introduite dans [2].

DÉFINITION 2.1. — On considère une multimesure faible M à valeurs dans $cf(E)$.

(1) On dit que M est séquentiellement compacte (*s-compacte*), s'il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $T_n \in \Omega$, croissante vérifiant $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n = T$ (on note $T_n \uparrow T$) et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(T_n) \in cc(E)$.

(2) On dit que M est monotone si on a : $0 \in M(A)$, $\forall A \in \Omega$.

Exemple 2.2. — Soit $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu borélienne de \mathbb{R}^n et λ une mesure σ -finie sur $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$. On considère : $M : \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow cf(\mathbb{R})$, définie par :

$$M(A) = [0, \lambda(A)], \text{ si } \lambda(A) < +\infty, \text{ et } M(A) = [0, +\infty[, \text{ sinon.}$$

M est une multimesure monotone s-compacte. L'additivité provient de la propriété de décomposition de Riesz, cf par exemple [13] page 173.

On considère une multimesure faible M à valeurs dans $cf(E)$, et on suppose que M est s-compacte et monotone. On pose : $\Lambda = \{A \in \Omega/M(A) \in cc(E)\}$.

Si $h = \sum a_i 1_{A_i}$ est une fonction en escaliers basée sur le clan Λ , soit $I(h) = \sum a_i M(A_i)$, avec h positive. Si on désigne par H l'espace de Riesz des fonctions en escaliers basées sur Λ , et $H_+ = \{h \in H : h \geq 0\}$, alors l'application $I : H_+ \rightarrow cc(E)$ est une intégrale de Daniell secondaire : I est additive, monotone i.e. $0 \in I(h)$ pour tout $h \in H_+$, et si $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de H_+ , qui converge simplement vers 0, (on note $h_n \downarrow 0$), alors $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} I(h_n) = \{0\}$. Ici on désigne par H^\vee (resp H^\wedge) l'ensemble des fonctions qui sont limites croissante (resp décroissante) de fonctions de H_+ . Pour $h_n \uparrow f$, $h_n \in H_+$ et $g_n \downarrow g$, $g_n \in H_+$, on pose : $I^\vee(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} I(h_n)$,

et $I^\wedge(g) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} I(g_n)$. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}_+^T$, on pose : $I^*(f) = \inf\{I^\vee(\psi), \psi \in H^\vee : \psi \geq f\}$, si cet ensemble est non vide, sinon on pose $I^*(f) = E$, et $I_*(f) = \sup\{I^\wedge(\phi), \phi \in H^\wedge, \phi \leq f\}$. L'espace des fonctions intégrables pour l'intégrale de Daniell scndaire I est :

$$L_+^1(I) = \{f \in \overline{\mathbb{R}}_+^T, I^*(f) = I_*(f) \in cf_b(E)\}.$$

C'est un cône convexe réticulé, voir [5] ou [7]. Si $f \in L_+^1(I)$, on pose $\int f I = I^*(f)$, et on le notera $\int(\cdot)I$ ou I. Elle est additive et positivement homogène. On posera :

$$\text{si } h \in H_+, I_y(h) = \delta^*(y, I(h)), \text{ et si } h \in H, I_y(h) = I_y(h^+) - I_y(h^-).$$

La proposition 2.3 suivante regroupe dans l'ordre les propositions 7 et 13, puis les théorèmes 6 et 1 que nous avons obtenu dans [5].

PROPOSITION 2.3. — On considère $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$, et $y \in E'$.

- (1) On a $(I_y)^*(|f|) = \delta^*(y/I^*(|f|))$.
- (2) Si $I_*(|f|) \in cf_b(E)$, alors on obtient, $(I_y)_*(|f|) = \delta^*(y/I_*(|f|))$.
- (3) On a aussi $L_+^1(I) = \cap_{y \in E'} L_+^1(I_y)$, et si $f \in L_+^1(I)$ alors, $\delta^*(y/\int f I) = \int f \delta^*(y/I(\cdot))$.
- (4) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+^T$ on a,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} I^*(f_n) = I^*\left(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} (f_n)\right).$$

Dans [5] nous avons obtenu, comme dans [13], les théorèmes de convergences monotones et dominée, au sens de l'ordre, mais cette fois ci, pour une multimesure à valeurs convexes fermées de E , et pour des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Nous appliquons une méthode de [13] pour l'intégrale multivoque, mais cette fois ci dans le cas non compact. Si on pose : $H^* = \{f \in \mathbb{R}^T, I^*(|f|) \in \text{cfb}(E)\}$, alors $(H^*, +, \leq)$ est un sous espace de Riesz de \mathbb{R}^T . Soit $V(0)$ l'ensemble des voisinages de 0 dans E . Si $V \in V(0)$, posons : $V^* = \{f \in \mathbb{R}^T, I^*(|f|) \subset V\}$. L'ensemble $V^*(0)$ des V^* quand $V \in V(0)$ est une base de filtre de 0 de H^* . Nous avons ainsi défini sur H^* une topologie faisant de H^* un espace localement convexe. l'espace $L_+^1(I)$, que nous avons défini dans [5] ou [7], est l'espace des fonctions intégrables pour l'intégrale de Daniell secondaire, où I est l'intégrale associée à la multimesure M . Ainsi, on a : $H_+ \subset L_+^1(I) \cap \mathbb{R}^T \subset H^*$. Nous venons donc de munir d'une topologie l'espace $L_+^1(I) \cap \mathbb{R}^T$ et ceci n'existait pas dans [13]. Nous en ferons de même pour $L_+^1(I)$. Ces espaces contiennent ceux obtenus par [13], et nous avons montré, à la section 5 de [8], que l'inclusion peut même être stricte.

Dans [13], la sous-additivité de I^* n'étant pas assurée dans $\text{cfb}(E)$, cette construction n'était possible que dans $\text{cc}(E)$.

DÉFINITION 2.4. —

- (i) Une fonction de $\overline{\mathbb{R}}^T$ est I -négligeable si $I^*(|f|) = \{0\}$.
- (ii) Une partie A de T est I -négligible, si 1_A est I -négligeable.

DÉFINITION 2.5. — Soit $N \subset T$, un ensemble I -négligeable, une fonction définie sur $T-N$ est une fonction définie I -pp sur T . La relation définie par $f = g$ I -pp sur l'ensemble

$$F(T, \overline{\mathbb{R}}) = \{f \text{ définie } I\text{-pp sur } T, \text{ tel que } I^*(|f|) \in \text{cfb}(E)\},$$

est une relation d'équivalence. Si Δ est l'espace quotient de $F(T, \overline{\mathbb{R}})$ par la relation I -pp, alors Δ est un espace vectoriel.

DÉFINITION 2.6. — Nous posons $\mathcal{L}_+^1(I) = \{f \in F(T, \overline{\mathbb{R}}), f \geq 0, \exists g \in L_+^1(I) \text{ tel que } f = g \text{ } I\text{-pp}\}$.

Dans toute la suite, nous supposons que E est normé, sauf spécification contraire. Soit $f \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$, si nous posons

$$N_1(f) = \sup\{\delta^*(y/I^*(|f|), y \in E', \|y\| \leq 1) = DH[\{0\}, I^*(|f|)],$$

alors N_1 est une semi-norme sur $F(T, \overline{\mathbb{R}})$, et $N_1(f) = 0$ si et seulement $f = 0$ I -pp.

DÉFINITION 2.7. — Une suite (f_n) de $F(T, \overline{R})$ converge en moyenne vers f si $\lim_n N_1(f_n - f) = 0$. La topologie de $F(T, \overline{R})$ définie par la semi-norme N_1 est la topologie de la convergence en moyenne. L'application $\hat{f} \in \Delta, \hat{f} \mapsto N_1(f)$, où $f \in \hat{f}$, est une norme sur Δ .

DÉFINITION 2.8. — Nous posons $L^1(I)$ l'adhérence de H dans $F(T, \overline{R})$,

$$L^1_+(I) = \{f \in L^1(I), f \geq 0\}, \text{ et ,}$$

$$[\mathbf{B}]_C = \{f \in \mathbf{B}, I(f) \in cc(E)\}, \text{ pour } \mathbf{B} \subset F(T, \overline{R}).$$

NB: Remarquons la différence entre $L^1_+(I)$ et $L^1_+(I)$.

Remarque 2.9. — La topologie de H^* est celle induite par N_1 .

Remarque 2.10. —

- (1) On a $[\ell^1_+(I)]_C \subset [L^1_+(I)]_C \cap R^T \subset [L^1_+(I)]_C \subset L^1_+(I) \subset \mathcal{L}^1_+(I)$,
- (2) et $[\ell^1(I)]_C = \overline{H}$ dans $[H^*]_C$.
- (3) Tous les espaces de fonctions intégrables sont réticulés, et en conséquence on a : $\ell^1(I) = \ell^1_+(I) - \ell^1_+(I)$ et $L^1(I) = L^1_+(I) - L^1_+(I)$.

Si E est complet, $cc(E)$ est fermé dans $cfb(E)$, dans ce cas on a $[\ell^1(I)]_C = \ell^1(I)$ et $[L^1(I)]_C = L^1(I)$ où $[L^1(I)]_C = \overline{H}$ dans $[F(T, \overline{R})]_C$.

THÉORÈME 2.11. — On suppose que E est normé.

- (1) L'espace $\mathcal{L}^1_+(I)$ (resp. $L^1(I)$) est complet pour la topologie de la convergence en moyenne.
 - (2) Si $(f_n)_{n \in N}$ est une suite de $\mathcal{L}^1_+(I)$ (resp. $L^1(I)$) qui converge en moyenne vers f , alors $(f_n)_{n \in N}$ possède une sous-suite qui converge I-pp vers f .
- Les fonctions de $L^1(I)$ et de $\ell^1(I)$ sont donc I-mesurables.

THÉORÈME 2.12. —

- (1) Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite croissante I-pp de $\mathcal{L}^1_+(I)$, s'il existe $g \in F(T, \overline{R})$ telle que $f_n \leq g$ I-pp pour tout $n \in N^*$, et si on a $I^*(g) \in cfb(E)$, alors $\sup_{n \in N^*} f_n \in L^1_+(I)$ et $\int (\sup_{n \in N^*} f_n)I = \sup_{n \in N^*} \int f_n I$.

(2) Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite décroissante I-pp de $\mathcal{L}_+^1(I)$, alors

$$\inf_{n \in N^*} f_n \in \mathcal{L}_+^1(I) \text{ et } \int \left(\inf_{n \in N^*} f_n \right) I = \inf_{n \in N^*} \int f_n I.$$

(3) Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite de $\mathcal{L}_+^1(I)$, s'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $f_n \leq g$ I-pp pour tout $n \in N^*$, avec $I^*(g) \in \text{cfb}(E)$, et si $(f_n)_{n \in N^*}$ converge simplement vers f I-pp, alors $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$ et

$$\int f I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n I \text{ au sens de l'ordre dans } \text{cfb}(E).$$

THÉORÈME 2.13. —

(1) Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite croissante I-pp de $\mathcal{L}_+^1(I)$, si $f = \sup_{n \in N^*} f_n$ et

S'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $f_n \leq g$ I-pp pour tout $n \in N^*$, et si $I^*(g) \in \text{cc}(E)$ alors $f \in [\mathcal{L}_+^1(I)]_C$ et $(f_n)_{n \in N^*}$ converge en moyenne vers f .

(2) Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite décroissante I-pp de $[\mathcal{L}_+^1(I)]_C$, et si $f = \inf_{n \in N^*} f_n$, alors : $f \in [\mathcal{L}_+^1(I)]_C$ et $(f_n)_{n \in N^*}$ converge en moyenne vers f .

(3) Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite de $[\mathcal{L}_+^1(I)]_C$, qui converge simplement I-pp vers une fonction f , s'il existe $g \in F(T, \overline{\mathbb{R}})$ telle que $|f_n| \leq g$ I-pp pour tout $n \in N^*$, et si $I^*(g) \in \text{cc}(E)$, alors $f \in [\mathcal{L}_+^1(I)]_C$ et $(f_n)_{n \in N^*}$ converge en moyenne vers f . Dans les trois cas on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n I = \int f I$ pour la topologie de $\text{cc}(E)$.

COROLLAIRE 2.14. — Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite de $L^1(I)$, qui converge I-pp vers f , s'il existe $g \in L_+^1(I)$ telle que $\int g I \in \text{cc}(E)$ et $|f_n| \leq g$ I-pp pour tout $n \in N^*$, alors $f \in L^1(I)$ et $\int f I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n I$ au sens de la topologie de Hausdorff de $\text{cc}(E)$, et $(f_n)_{n \in N^*}$ converge en moyenne vers f .

DÉFINITION 2.15. —

(1) Une fonction définie I-presque-partout (I-pp) sur T , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, est I-mesurable, si elle est limite I-pp d'une suite de H .

(2) Une partie A de T est I-mesurable si 1_A est I-mesurable.

DÉFINITION 2.16. — Soit f définie I-pp sur T , nous désignons par $M(f)$, la I-borne supérieure de f : $M(f) = \inf \{ \alpha \in \overline{\mathbb{R}}, f \leq \alpha 1_T \text{ I-pp} \}$.

DÉFINITION 2.17. —

- (1) La topologie de la convergence presque uniforme, définie par la seminorme $N_\infty(f) = M(|f|)$, est celle de

$$L^\infty(I) = \{f \text{ définie } I\text{-pp, } f \text{ } I\text{-mesurable, } M(|f|) < +\infty\}.$$

- (2) L'espace quotient $L^{(\infty)}(I)$ a la topologie définie par la norme $\|\bar{f}\| = N_\infty(f)$, $f \in \bar{f}$. C'est un espace de Banach.

THÉORÈME 2.18. —

- (1) Si f est I -mesurable positive, et si $I^*(f) \in \text{cfb}(E)$, alors on a :
 $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$.
- (2) Si f est I -mesurable et si $I^*(|f|) \in \text{cc}(E)$, alors $f \in L^1(I)$.

La proposition 2.19 suivante regroupe dans l'ordre, les propositions 3.5 et 3.8 de [9].

PROPOSITION 2.19. —

- (1) Si $(f_n)_{n \in N^*}$ est une suite de fonctions I -mesurables qui converge I -pp vers f , alors f est I -mesurable.
- (2) Soient f et g deux fonctions I -mesurables alors fg est I -mesurable.

THÉORÈME 2.20. — (Théorème de caractérisation de Lebesgue)

- (1) Soit f définie I -pp sur T à valeurs dans \overline{R} une fonction I -mesurable. Pour tout $\alpha \in R$, les ensembles suivants sont I -mesurables :
 $\{t \in T, f(t) < \alpha\} = \{f < \alpha\}, \{f > \alpha\}, \{f \leq \alpha\}, \{f \geq \alpha\}$.
- (2) Réciproquement, si pour tout $\alpha \in R$, $\{f < \alpha\}$ est I -mesurable, resp. $\{f > \alpha\}$, resp. $\{f \leq \alpha\}$, resp. $\{f \geq \alpha\}$, alors f est I -mesurable.

Nous rappelons la propriété suivante : si $(C_n)_{n \in N^*}$ est une suite décroissante de $\text{cc}(E)$, alors pour tout $y \in E'$ on a :

$$\inf_{n \in N^*} \delta^*(y/C_n) = \delta^*(y / \inf_{n \in N^*} C_n) \quad (2.1)$$

Dans la remarque 2.21 suivante, nous allons essayer de situer la position du problème.

Remarque 2.21. — Nous avons exposé, ci-avant, deux approches de [13]. Cependant pour assurer par exemple la sous-additivité de $I^* : I^*(f_1 + f_2) \subset I^*(f_1) + I^*(f_2)$, il fallait supposer que $I^*(f_1) \in cc(E)$, $I^*(f_2) \in cc(E)$. En effet, cette sous-additivité est basée sur la propriété 2.1. Or dans $cfb(E)$, cette propriété ne subsiste plus : à la page 78 de [13], on peut trouver un contre-exemple, communiqué par le professeur Michel Valadier. Donc dans $cfb(E)$, la construction s'effondre. C'est pourquoi, pour une multimesure faible à valeurs dans $cfb(E)$, [13] a utilisé une autre approche : une fonction $f \in R_+^T$ est M-intégrable, si elle est limite croissante d'une suite de H_+ , et si $I^*(f) \in cfb(E)$. Si maintenant la multimesure est à valeurs dans $cf(E)$, comme dans l'exemple 2.2, que peut on faire ? L'exemple 2.2 nous a suggéré la notion de séquentielle compacité (s-compact). Elle nous a permis de maintenir l'édifice, et d'obtenir, en particulier, dans [5], les différents résultats résumés dans la proposition 2.3, dans [8], les théorèmes 2.11, 2.12, 2.13, et le corollaire 2.14.

De plus l'intégrale d'une fonction peut être à valeurs dans $cfb(E)$, et non plus seulement dans $cc(E)$, comme dans [11] ou [13] : nous avons, dans [8], donné des exemples de multimesures, pour lesquelles, l'intégrale d'une fonction était à valeur dans $cfb(E)$, et non plus dans $cc(E)$. De telles fonctions ne sont pas intégrables au sens de [11], ni de [13], mais le sont suivant nos définitions. D'autre part, la notion de négligeable, que nous avons introduit dans [8], n'existait pas dans [5], ni dans [13]. Tous les résultats obtenus dans [13], le sont essentiellement, pour des fonctions définies sur T à valeurs dans \bar{R} , et en supposant que tout se passe dans $cc(E)$. Ici les fonctions sont définies I-pp sur T , à valeurs dans \bar{R} . Au total, on a eu dans [13], trois méthodes différentes d'intégration. Le lien entre ces méthodes n'avait pas encore été établi, à notre connaissance : dans [8] et [9], nous avons établi le lien entre ces méthodes, et avons également établi la corrélation avec la méthode de [11]. La notion de M-mesurabilité, que nous avons introduit, dans [9], nous a permis d'obtenir, dans le théorème 2.18, des critères d'intégrabilité, identiques à ceux pour une mesure scalaire positive, et dans le théorème 2.20, un théorème de caractérisation de Lebesgue des fonctions M-mesurables, comme dans le cas scalaire.

Dans [13], et [11], l'Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone à valeurs dans $cc(E)$, a été abordé, avec deux méthodes différentes. Dans cet article, nous étudions l'Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone à valeurs dans $cfb(E)$, en nous inspirant de la méthodes de [13]. Pour cela, nous introduisons la notion de multimesure de Radon s-compacte. Nous comparons ensuite avec la méthode de [11].

3. Intégration par rapport à une multimesure de Radon s-compacte monotone

DÉFINITION 3.1. —

- (1) La fonction multivoque, $I : K_+(T) \rightarrow cf(E)$, est s-compacte, s'il existe une suite croissante $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $K_+(T)$, qui converge simplement vers 1_T , ce que l'on note $(h_n \uparrow 1_T)$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I(h_n) \in cc(E)$.
- (2) I est monotone si $0 \in I(f)$, pour tout $f \in K_+(T)$.
- (3) Dans tout ce qui suit, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera comme dans la définition 3.1.

Les propositions 3.2 et 3.4 suivantes ont été démontrées dans [13], pour I à valeurs dans $cc(E)$ et T compact. Leurs preuves ne nécessitent pas que E soit normé.

PROPOSITION 3.2. — Soit $I : K_+(T) \rightarrow cf(E)$ une fonction additive monotone, s-compacte. si $(f_\alpha), \alpha \in A$ est une famille filtrante décroissante de $K_+(T)$, qui converge simplement vers 0, alors $[I(f_\alpha)]$ converge vers 0, pour la topologie de Hausdorff de $cf(E)$.

Preuve. — On applique une méthode de [13]. Soit $\beta \in A, \forall \alpha \geq \beta, 0 \leq f_\alpha \leq f_\beta$, si on désigne par $\text{supp}(g)$ le support de g , on a $\text{supp}(f_\alpha) \subset \text{supp}(f_\beta) = K$. D'après le théorème de Dini, (h_n) converge uniformément vers 1_T sur le compact K i.e. :

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists p, \forall n, n > p, 1 - \epsilon_1 < h_n(t) < 1, \forall t \in K, \text{ avec } \epsilon_1 < 1.$$

Soit $n_0 > p$, on a $\inf_{t \in K} h_{n_0}(t) \geq 1 - \epsilon_1 > 0$. Soit V un voisinage de 0 de E , il existe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon I(h_{n_0}) \subset V$ car $I(h_{n_0})$ est borné. En appliquant Dini sur K , il existe $\alpha_0 > \beta$ tel que

$$\forall \alpha > \alpha_0, 0 \leq f_\alpha(t) \leq \epsilon \inf_{t \in K} h_{n_0}(t),$$

d'où $0 \leq f_\alpha(t) \leq \epsilon h_{n_0}(t) \forall t \in K$. Cette inégalité est vraie aussi si $t \notin K$, on obtient :

$$\forall \alpha > \alpha_0, 0 \leq f_\alpha \leq \epsilon h_{n_0}.$$

Ceci donnerais, $I(f_\alpha) \subset I(\epsilon h_{n_0}) = \epsilon I(h_{n_0})$, si nous avons la dernière égalité :

Montrons donc que $I(\epsilon h_{n_0}) = \epsilon I(h_{n_0})$. Soit

$$X = \{f \in K(T), \exists n \geq 1, \exists M > 0, |f| \leq M h_n\},$$

X est un sous-espace de Riesz de $K(T)$ et I restreint à X est à valeurs dans

$$cc_+(E) = \{A \in cc(E) / 0 \in A\}.$$

Donc d'après la proposition 0.1 page 12 de [13], I restreint à X est homogène. \square

DÉFINITION 3.3. — *On suppose que $K_+(T)$ est muni de la topologie limite inductive et $cfb(E)$ de la topologie de Hausdorff.*

Une multimesure de Radon est une application $I : K_+(T) \rightarrow cfb(E)$ additive, positivement homogène et continue.

PROPOSITION 3.4. — *Toute application additive, monotone et s-compacte, $I : K_+(T) \rightarrow cfb(E)$ est une multimesure de Radon.*

Preuve. — Si on pose

$$H = \{f \in K(T), I(|f|) \in cc(E)\},$$

alors H est un sous-espace de Riesz de $K(T)$.

$$\text{Soit } I_1 : H_+ \rightarrow cc(E), I_1(f) = I(f),$$

d'après la proposition 3.2 ou III-1-1 de [7], I_1 est une intégrale de Daniell secondaire. On peut donc construire les espaces $L_+^1(I_1)$, $\mathcal{L}_+^1(I_1)$, $\ell^1(I_1)$, $L^1(I_1)$ et ces espaces sont complets pour la topologie de la convergence en moyenne d'après le théorème 2.11, i.e. II-1-2 de [7] ou 4.7 de [8]. Montrons que $K_+(T) \subset H^\vee$. Soit alors $f \in K_+(T)$, on a $fh_n \in H$ et $fh_n \uparrow f$. De plus, vu que $f = (f - fh_n) + fh_n$, alors on obtient $I(f) = I(f - fh_n) + I(fh_n)$. On a $I(fh_n) = I_1(fh_n) \subset I_1^\vee(f)$ et $(f - fh_n) \downarrow 0$. On en déduit d'après la proposition 3.2, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f - fh_n) = 0$, pour la topologie de Hausdorff. On obtient alors que $I(f) \subset I_1^\vee(f) = \sup_n I(fh_n)$. D'autre part $I_1(fh_n) = I(fh_n) \subset I(f)$ car I est croissante. On en déduit que :

$K_+(T) \subset H^\vee$ et si $f \in K_+(T)$, $I(f) = I_1(f) = \sup_n I(fh_n)$. Soient K un compact de T et $f \in K(T)$ tel que $\text{supp}(f) \subset K$, en posant $\|f\|_u = \sup_{t \in T} |f(t)|$ on obtient $|f| \leq \|f\|_u \varphi_K$ où $\varphi_K \in K(T)$ $\varphi_K(t) \in [0, 1]$ pour tout $t \in T$ avec $\varphi_K(t) = 1$ si $t \in K$. On en déduit que $I(|f|) \subset \|f\|_u I(\varphi_K)$. Soient p une semi-norme continue sur E, on considère $B(p) = \{x \in E, p(x) \leq 1\}$, et $B^0(p)$ la boule polaire. Si on pose

$$M_K = \sup\{\delta^*(y, I(\varphi_K)), y \in B^0(p)\}$$

on a : $\sup\{\delta^*(y, I(|f|)), y \in B^0(p)\} \leq M_K \|f\|_u$.

On en déduit que I est continue. \square

PROPOSITION 3.5. —

(1) Les espaces $L_+^1(I_1)$, $\mathcal{L}_+^1(I_1)$, $\ell^1(I_1)$, $L^1(I_1)$, sont complets pour la topologie de la convergence en moyenne, d'après le théorème 2.11, ou II-1-2 de [7], ou 4.7 de [8].

(2) Si E est complet alors I est à valeurs faiblement compactes.

(3) (i) La topologie limite inductive de $K(T)$, est plus fine que la topologie induite sur $K(T)$ par H^* ou $F(T, \overline{R})$, i.e. la topologie de la convergence en moyenne.

(ii) On a $K_+(T) \subset \ell^1(I_1)$, $H_+ \subset K_+(T) \subset H^\vee$ et $H^\vee = [K_+(T)]^\vee$.
L'intégrale $\int(\cdot)_{I_1}$ prolonge I.

(iii) Si $K_+(T)$ est muni de N_1 , l'application I est uniformément continue car $\int(\cdot)_{I_1}$ l'est.

Preuve. — Par la preuve de la proposition 3.2, si $f \in K_+(T)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f - fh_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(fh_n) = I(f)$, pour la topologie de Hausdorff de $\text{cfb}(E)$. Or $I(fh_n) \in \text{cc}(E)$, de plus d'après la proposition 2 page I-15 de [10] voir aussi [6], si E est complet $\text{cc}(E)$ est fermé dans $\text{cfb}(E)$. On en déduit que $I(f) \in \text{cc}(E)$. Si E est normé, on peut définir la topologie de la convergence en moyenne par la semi-norme N_1 , et aussi l'espace $L^\infty(I_1)$. On a d'après la preuve de la proposition 3.4, si K est un compact de T et si $f \in K(T)$ est tel que $\text{supp}(f) \subset K$, alors en posant $\|f\|_u = \sup_{t \in T} |f(t)|$, on obtient $N_1(f) \leq \|f\|_u N_1(\varphi_K)$, où $\varphi_K \in K(T)$, $\varphi_K(t) \in [0, 1]$, avec $\varphi_K(t) = 1$ si $t \in K$. On obtient donc que la topologie limite inductive sur $K(T)$, est plus fine que celle induite sur $K(T)$, par la topologie de la convergence en moyenne.

Preuve de (3), (iii) : Soient $f, f' \in \mathcal{L}_+^1(I_1)$, vu que $I_1(f) \subset I_1(f') + I_1(|f - f'|)$ et $I_1(f') \subset I_1(f) + I_1(|f - f'|)$ alors on a : $\forall y \in E'$, $\delta^*(y/I_1(f)) \leq \delta^*(y/I_1(f')) + \delta^*(y/I_1(|f - f'|))$ et $\delta^*(y/I_1(f')) \leq \delta^*(y/I_1(f)) + \delta^*(y/I_1(|f - f'|))$. Ainsi on a : $\forall y \in E'$, $|\delta^*(y/I_1(f)) - \delta^*(y/I_1(f'))| \leq \delta^*(y/I_1(|f - f'|))$. On en déduit : $DH(I_1(f), I_1(f')) \leq N_1(f - f')$, d'où le résultat. \square

De cette preuve, nous déduisons la remarque suivante.

Remarque 3.6. —

- (1) Si $f \in K_+(T)$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f - fh_n) = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(fh_n) = I(f)$, pour la topologie de Hausdorff de $\text{cfb}(E)$.
- (2) Soit K un compact de T , et $f \in K(T)$ tel que $\text{supp}(f) \subset K$, on a :

$$N_1(f) \leq \|f\|_u N_1(\varphi_K), \text{ où, } \varphi_K \in K(T),$$

$$\varphi_K(t) \in [0, 1] \forall t \in T, \text{ avec, } \varphi_K(t) = 1 \text{ si } t \in K.$$

PROPOSITION 3.7. —

- (1) Si on prend les adhérences dans H^* on a :

$$K_+(T) \subset \ell_+^1(I_1) = \overline{K_+(T)} \subset L_+^1(I_1) \subset \mathcal{L}_+^1(I_1), \text{ et}$$

$$K(T) \subset \ell^1(I_1) = \overline{K(T)}.$$

- (2) De même si on prend les adhérences dans $F(T, \overline{R})$ on a :

$$K_+(T) \subset L_+^1(I_1) = \overline{K_+(T)}, \text{ et}$$

$$K(T) \subset L^1(I_1) = \overline{K(T)}.$$

Preuve. — Nous posons $[\overline{A}]_F =$ adhérence de A dans F . Nous avons

$$K_+(T) \subset \ell_+^1(I_1) \subset \overline{[K_+(T)]_{H^*}} \subset \overline{[K_+(T)]_{F(T, \overline{R})}},$$

donc $\ell_+^1(I_1) = \overline{[K_+(T)]_{H^*}}$ et $L_+^1(I_1) = \overline{[K_+(T)]_{F(T, \overline{R})}}$, de plus

$$K(T) \subset \ell^1(I_1) \subset \overline{[K(T)]_{H^*}},$$

d'où $\ell^1(I_1) = \overline{[K(T)]_{H^*}}$. On a aussi $K(T) \subset L^1(I_1) \subset \overline{[K(T)]_{F(T, \overline{R})}}$. On en déduit que $L^1(I_1) = \overline{[K(T)]_{F(T, \overline{R})}}$. \square

PROPOSITION 3.8. — On a $K(T) \subset L^\infty(I_1)$, et la topologie limite inductive est plus fine que celle induite sur $K(T)$ par $L^\infty(I_1)$. De plus si $f \in K(T)$, alors : $N_\infty(f) \leq \|f\|_u$ et il existe $k > 0$ tel que $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

Preuve. — Soit K un compact de T et $f \in K(T)$ tel que $\text{supp}(f) \subset K$. L'inégalité, $|f| \leq \|f\|_u$ donne $N_\infty(f) \leq \|f\|_u$. De plus on a $|f| \leq N_\infty(f)\varphi_K I_1 - pp$, on en déduit $N_1(f) \leq N_\infty(f)N_1(\varphi_K)$. Si on prend $k \geq N_1(\varphi_K) > 0$, on obtient l'inégalité, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$. \square

Du théorème 2.18, nous déduisons le théorème 3.9 suivant.

THÉORÈME 3.9. — *Nous avons les critères d'intégrabilités suivants :*

- (1) *Si f est I_1 -mesurable positive, et si de plus $(I_1)^*(f) \in \text{cfb}(E)$, alors on a, $f \in \mathcal{L}_+^1(I_1)$.*
- (2) *Si f est I_1 - mesurable, et si $(I_1)^*(|f|) \in \text{cc}(E)$, alors $f \in L^1(I_1)$.*

PROPOSITION 3.10. — *Soit $f \in L_+^\infty(I_1)$, telle que $f \neq 0$ I_1 -pp.*

- (1) *Si on pose pour $g \in K_+(T)$, $J(g) = \int fgI_1$, J est alors une multimesure de Radon monotone s -compacte et $J(g) \subset N_\infty(f)I_1(g)$.*
- (2) *Si $g \in L^1(I_1)$, alors on a $g \in L^1(J)$ et, $\int gJ = \int fgI_1$.*
- (3) *Si $g \in L^1(J)$, alors on a $fg \in L^1(I_1)$, et $\int fgI_1 = \int gJ$*
- (4) *Si $f_1, f_2 \in L_+^\infty(I_1)$, avec f_1 et f_2 non nulles I_1 -pp, et si pour tout $h \in K_+(T)$, $\int hf_1I_1 = \int hf_2I_1$, alors $f_1 = f_2$ I_1 -pp.*

Cela signifie, que l'on peut identifier à f de $L_+^\infty(I_1)$, la multimesure de Radon $h \rightarrow \int hfI_1$, $h \in K_+(T)$, qui admet f comme densité par rapport à I_1 .

Preuve. —

Preuve de (1) : La fonction fg est I_1 -mesurable et $fg \leq N_\infty(f)g$ I_1 -pp. On en déduit, en utilisant les critères du théorème 3.9 (1), que fg est I_1 -intégrable, et donc J est bien définie. Avec la proposition 3.4, on a le résultat.

Preuve de (2) : Si $g \in L^1(I_1)$, d'après le théorème 2.11, il existe (g_n) , telle que $g_n \in H_+$, $g_n \rightarrow g$ dans $L_+^1(I_1)$, et $g_n \rightarrow g$ I_1 -pp. La suite (g_n) est une suite de Cauchy de $L^1(I_1)$, et vu que l'on a : Si $g \in \bar{R}_+^T$, alors $J^*(g) \subset N_\infty(f)I_1^*(g)$, on déduit que (g_n) est une suite de Cauchy de $L^1(J)$, et $g_n \rightarrow g$ J -pp. D'où, d'après le théorème 2.11, (g_n) converge (en moyenne) vers g dans $L^1(J)$. On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n J = \int g J, \text{ dans } \text{cfb}(E).$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n J = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n f I_1,$$

de plus $(g_n f)$ est une suite de Cauchy de $L^1(I_1)$, et $(g_n f) \rightarrow fg$ I_1 -pp, d'où $g_n f \rightarrow fg$ dans $L^1(I_1)$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n f I_1 = \int fg I_1$. Si $g \in L^1(I_1)$, on pose $g = g^+ - g^-$.

Preuve. (3) ? : On a :

$$J^*(g) = \inf\{ J^\vee(\psi), \psi \in H^\vee, \psi \geq g \} = \inf\{ I_1^\vee(f\psi), \psi \in H^\vee, \psi \geq g \} .$$

Comme $I_1^*(fg) \subset I_1^*(\psi f)$, on a $I_1^*(fg) \subset J^*(g)$. Si $A \subset T$ est J-négligeable, alors A est I-négligeable car

$$J^*(1_A) = 0 \Rightarrow I_1^*(1_A f) = 0 \Rightarrow 1_A f = 0 \text{ I}_1\text{-pp},$$

d'où : $1_A = 0 \text{ I}_1\text{-pp}$.

Si g est une fonction de $K(T)$, on a $\int gJ = \int fgI_1$. Vu que $K(T)$ est dense dans $L^1(J)$, Si $g \in L^1(J)$, il existe (g_n) une suite de $K(T)$ qui converge vers g dans $L^1(J)$, et donc (g_n) est une suite de Cauchy de $L^1(J)$. D'après le théorème 2.11, on peut choisir la suite (g_n) telle qu'elle converge J-pp vers g. On a alors, $\int |g_n f - g_m f| I_1 = \int |g_n - g_m| J$, i.e. $(g_n f)$ est une suite de Cauchy de $L^1(I_1)$. Donc il existe $h \in L^1(I_1)$, tel que $\int g_n f I_1$ converge vers $\int h I_1$ dans cfb(E), et $(g_n f)$ tends vers h I_1 -pp. Or (g_n) converge vers g J-pp, donc $(g_n f)$ tends vers gf J-pp . On en déduit que $(g_n f)$ tends vers gf I_1 -pp, et donc $h = fg \text{ I}_1\text{-pp}$. On a alors :

$$gf \in L^1(I_1) \text{ et } \int h I_1 = \int fg I_1 ,$$

on obtient donc que :

$$\int gJ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int g_n J = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int fg_n I_1 = \int fg I_1 .$$

Preuve (4) ? :

Si on Pose $A = \{ t \in T, \text{ tel que } f_1(t) \geq f_2(t) \}$, on a alors $|f_1 - f_2| 1_A + f_2 1_A = f_1 1_A$. On en déduit pour tout $h \in K_+(T)$:

$$\int h |f_1 - f_2| 1_A I_1 + \int h f_2 1_A I_1 = \int h f_1 1_A I_1 \quad (3.4)$$

De plus soit $J_i(h) = \int h f_i I_1$, $h \in K(T)$ avec $i = 1, 2$. Soit $g = h 1_A$, on a $g \in L^1_+(J)$ d'après l'assertion (3) de la proposition 3.10, $\int g J_i = \int g f_i I_1$. Or $J_1 = J_2$, par hypothèse, donc $\int g f_1 I_1 = \int g f_2 I_1$, ie, $\int h f_1 1_A I_1 = \int h f_2 1_A I_1$, $\forall h \in K(T)$. Avec l'équation 3.4, on a $\forall y \in E', \delta^*(y / \int h |f_1 - f_2| 1_A I_1) = 0$, i.e. $\int h |f_1 - f_2| 1_A I_1 = 0$. On en déduit que $h |f_1 - f_2| 1_A = 0 \text{ I}_1\text{-pp}$. On a alors, par symétrie : $|f_1 - f_2| 1_A = |f_1 - f_2| 1_{A^c} = 0 \text{ I}_1\text{-pp}$. Vu que $|f_1 - f_2| = |f_1 - f_2| 1_A + |f_1 - f_2| 1_{A^c} \text{ I}_1\text{-pp}$, on a $f_1 = f_2 \text{ I}_1\text{-pp}$. \square

Remarque 3.11. — Le théorème 3.12 suivant est un théorème de Riesz multivoque. Il est à rapprocher du théorème 3-7 de [12], obtenu dans le cas compact.

La preuve du théorème 3.12, utilise des techniques nouvelles dans la théorie de l'intégration multivoque. Nous travaillons ici comme si nous avions une mesure scalaire positive.

THÉORÈME 3.12. — *Il existe une bijection définie par $I(f) = \int fM$, $f \in K_+(T)$ entre les multimesures faibles monotones s-compactes, définies sur le clan Ω engendré par les compacts de T , et les multimesures de Radon monotones s-compactes à valeurs dans $\text{cfb}(E)$. On a $\mathcal{L}_+^1(I) = \mathcal{L}_+^1(M)$, $L^1(I) = L^1(M)$, et si $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$ ou $L^1(I)$, alors $\int fM = \int fI$.*

Preuve. — Soit $M : \Omega \rightarrow \text{cfb}(E)$ une multimesure faible monotone s-compacte. D'après [3] corollaire 2 page 299, si $f \in K(T)$ il existe une suite (f_n) de Ω -fonctions en escaliers nulles en dehors de $\text{supp}(f)$ et convergeant uniformément vers f sur T . On a donc que $K(T) \subset L^\infty(I)$, où I ou $\int(\cdot)I$ est le prolongement à $L^1(I)$ ou $\mathcal{L}_+^1(I)$, de l'intégrale de Daniell secondaire,

$$I(h) = \sum a_i M(A_i), \text{ avec } h = \sum a_i 1_{A_i} \text{ est une fonction en escaliers, } A_i \in \Omega.$$

Montrons que $K_+(T) \subset \mathcal{L}_+^1(I)$:

Si $f \in K_+(T)$, alors f est I -mesurable. Posons $K = \text{supp}(f)$, alors on a $|f| \leq \|f\|_u \varphi_K \in \mathcal{L}_+^1(I)$: voir la remarque 3.6. Avec le théorème 3.9, ou II-3-1 de [7], on obtient que $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$.

De plus $I : (K_+(T), N_1) \rightarrow \text{cfb}(E)$ est continue d'après la proposition 3.5, assertion (3),(iii). Donc en remplaçant N_1 par la topologie limite inductive plus fine (cf proposition 3.5, assertion (3),(i)), on a : $I : K_+(T) \rightarrow \text{cfb}(E)$ est encore continue, et donc est une multimesure de Radon. On a $M(A) = \int 1_A I$, $A \in \Omega$ ou encore $I(f) = \int fM$, $f \in K_+(T)$ est une multimesure de Radon s-compacte car $\varphi_{K_n} \uparrow 1_T$ où (K_n) est une suite croissante de compacts, dont la réunion est T . On obtient $\mathcal{L}_+^1(I) = \mathcal{L}_+^1(M)$, et si $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$ ou $L^1(I) = L^1(M)$, alors $\int fM = \int fI$.

Réciproquement : Soit I une multimesure de Radon et soit K un compact de T , il existe $\varphi_K \in K_+(T)$, tel que $0 \leq 1_K \leq \varphi_K$. Comme T est un espace localement compact métrisable séparable, on en déduit que (1_K) est I -mesurable et $0 \leq 1_K \leq \varphi_K \in \mathcal{L}_+^1(I)$. D'après le théorème 3.9, $K \in J = \{A \subset T, 1_A \in \mathcal{L}_+^1(I)\}$. Or d'après le théorème 2.12 de la convergence monotone, J est un δ -clan, on a donc que $\Omega \subset J$ et $M(A) = \int 1_A I$ est une multimesure faible monotone, toujours d'après théorème 2.12. On a donc $I(f) = \int fM$, si $f \in K_+(T)$. On obtient $\mathcal{L}_+^1(I) = \mathcal{L}_+^1(M)$, $L^1(I) = L^1(M)$, et si $f \in \mathcal{L}_+^1(I)$ ou $L^1(I) = L^1(M)$, $\int fI = \int fM$. \square

THÉORÈME 3.13. — Soit I une multimesure de Radon monotone s -compacte, il existe, d'après le théorème 3.12, une multimesure monotone M qui lui correspond.

(1) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $K_n \in \Omega$, $K_n \uparrow T$ tel que $\sup_n M(K_n) \in \text{cfb}(E)$ ou il existe $h_n \uparrow 1_T$, $h_n \in K_+(T)$ tel que $\sup_n I(h_n) \in \text{cfb}(E)$.

(ii) Si $B(T)$ est la tribu Borélienne, et si nous posons $J = \{A \subset T, 1_A \in L_+^1(I)\}$, alors $B(T) \subset J$.

(iii) Si $f \in \overline{R}^T$ est sci positive bornée, alors $f \in L_+^1(I)$.

(2) Si E est un Banach, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe $K_n \in \Omega$, $K_n \uparrow T$ tel que $\sup_n M(K_n) \in \text{cc}(E)$ ou il existe $h_n \uparrow 1_T$, $h_n \in K_+(T)$ tel que $\sup_n I(h_n) \in \text{cc}(E)$.

(b) $\forall A \in B(T)$, $1_A \in \ell^1(I)$.

(c) Si f est sci borné à support compact alors $f \in \ell^1(I)$.

Preuve. — D'après le théorème 2.12 de la convergence monotone, J est une tribu si et seulement si (i) est vrai. On applique ensuite les critères d'intégrabilités du théorème 3.9, en remarquant que ces fonctions sont I-mesurables. Il est à remarquer que dans le (2), nous sommes dans le cas compact. \square

Remarque 3.14. — On dit que I est prolongeable si toute fonction borélienne bornée à support compact est I-intégrable. Une multimesure de Radon monotone s -compacte est donc prolongeable. Les multimesures de Radon prolongeables ont été caractérisées dans le cas compact par [2], [13], [11].

4. Comparaison avec l'intégration par rapport à une semi-norme de riesz

Soit $I : K_+(T) \rightarrow \text{cfb}(E)$ une multimesure de Radon monotone s -compacte. Comme dans [12] page III-1, posons :

$$\nu(f) = \sup\{\delta^*(y, I(|f|)), \|y\| \leq 1, y \in E'\}, f \in K(T).$$

Soit J l'ensemble des fonctions de \overline{R}^T , qui sont enveloppe supérieure de fonctions de $K_+(T)$, et soit J_σ l'ensemble des fonctions qui sont limites de

suites croissantes de fonctions de $K_+(T)$, nous avons $J_\sigma = H^\vee = [K_+(T)]^\vee$. Vu que T est localement compact métrisable et séparable, alors $J = J_\sigma$. Posons alors

$$\nu_1(g) = \sup\{\nu(h), h \in H, h \leq g\}, \text{ si } g \in H^\vee.$$

Si $g_n \in K_+(T)$ est tel que $g_n \uparrow g$, on obtient d'après le lemme 1-4 page I-2 de [12] : $\nu_1(g) = \sup_n \nu(g_n)$. Si $f \in R_+^T$, nous posons,

$$\nu^*(f) = \inf\{\nu_1(g), g \in H^\vee, g \geq f\}, F_\nu = \{f \in R^T, \nu^*(|f|) < +\infty\} \text{ et,}$$

$$\ell^1(\nu) = \text{adhérence de } K(T) \text{ dans } F_\nu,$$

pour la topologie définie par la semi-norme ν^* . Le prolongement de ν_1 à R_+^T est ν^* . Si $h \in K_+(T)$, on a $\nu(h) = N_1(h)$, où N_1 est la semi-norme de la convergence en moyenne. La semi-norme ν est équivalente à celle de [11] : cf proposition XIV.9 page 188.

PROPOSITION 4.1. —

- (1) Si $g \in [K_+(T)]^\vee$, alors $\nu_1(g) = N_1(g)$.
- (2) Si $f \in R_+^T$, $\nu^*(f) \geq N_1(f)$.
- (3) On a, $F_\nu \subset H^*$, et $\ell^1(\nu) \subset \ell^1(I_1)$.

Preuve. — Si $g \in [K_+(T)]^\vee$, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $g_n \uparrow g$. Si $I^\vee(g) \in \text{cfb}(E)$, on a : $\nu_1(g) = \sup_n \nu(g_n) = \sup_n N_1(g_n) =$

$$\sup\{\sup_n \delta^*(y, I(g_n), \|y\| \leq 1, y \in E')\} =$$

$$\sup\{\delta^*(y, I^\vee(g), \|y\| \leq 1, y \in E')\} = N_1(g).$$

Si $I^\vee(g) \notin \text{cfb}(E)$, on a $\nu_1(g) = +\infty$, et en posant $N_1(g) = +\infty$, on obtient $\nu_1(g) = N_1(g)$. Si $g \in H^\vee$ et $g \geq f$, alors $N_1(g) \geq N_1(f)$, et donc

$$\nu^*(f) = \inf\{N_1(g), g \in H^\vee, g \geq f\} \geq N_1(f).$$

Si $f \in F_\nu$, on a $N_1(f) < +\infty$ et $I^*(|f|) \in \text{cfb}(E)$. On obtient alors $F_\nu \subset H^*$. De plus vu que la topologie définie par ν^* , est plus fine que celle induite sur F_ν par N_1 . On en déduit que $[\overline{K(T)}]_{\nu^*} \subset [\overline{K(T)}]_{N_1}$ dans F_ν , ie $\ell^1(\nu) \subset [\overline{K(T)}]_{N_1} \cap F_\nu$ dans H^* , ou encore que $\ell^1(\nu) \subset \ell^1(I_1) \cap F_\nu \subset \ell^1(I_1)$.

□

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $K_+(T)$ qui converge vers f dans $\ell_+^1(\nu)$, alors on a :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(f_n - f) = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = I_1^*(f) = \int f I_1$. On a alors la définition suivante, voir cependant la remarque 4.4.

DÉFINITION 4.2. — Si $f \in \ell_+^1(\nu)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $K_+(T)$, qui converge vers f dans $\ell_+^1(\nu)$. On pose $\int f I_\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n)$ dans $\text{cfb}(E)$. Si $f \in \ell^1(\nu)$, on pose $\int f I_\nu = \int f^+ I_\nu \dot{-} (-\int f^- I_\nu)$.

PROPOSITION 4.3. — Si $f \in \ell^1(\nu)$, alors $\int f I_\nu = \int f I_1$.

Preuve. — Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\ell_+^1(\nu)$, alors $\nu^*(|f_n - f|)$ converge vers 0. D'où $N_1(f_n - f)$ converge vers 0, i.e. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\ell_+^1(I_1)$, et $I(f_n)$ converge vers $\int f I_1$ dans $\text{cfb}(E)$; donc $\int f I_\nu = \int f I_1$. Si $f \in \ell^1(\nu)$, on a $\int f I_\nu = \int f^+ I_\nu \dot{-} (-\int f^- I_\nu) = \int f I_1$. \square

Remarque 4.4. — Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $K_+(T)$ qui converge vers f dans $\ell_+^1(\nu)$, alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_1(f_n - f) = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = I_1^*(f) = \int f I_1$. Cela nous a permis d'avoir la définition 4.2. Dans la méthode de [11], si E n'est pas complet, pour T compact, il se pose le problème du prolongement par continuité de l'intégrale, qui peut se retrouver dans $\text{cfb}(E'^*)$, où E'^* est le complété faible de E' : cf définition XIV.13 [11], page 190. Ici N_1 est définie à partir de I^* , ce qui permet de ne pas supposer E complet, de ne pas séparer l'intégrabilité d'avec le prolongement de l'intégrale, et de ne pas perdre le lien avec l'espace E où tout prend ses valeurs.

5. Intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle faiblement compacte

Nous supposons que E est un espace de Banach. Soit $C_0(T)$ l'ensemble des fonctions continues nulles à l'infini. Soit $u : K(T) \rightarrow E$, une mesure de Radon faiblement compacte, i.e. qui transforme la boule unitée de $C_0(T)$, en un sous ensemble relativement faiblement compact de E . Comme dans [13] page 155, si on pose

$$M_u(f) = \overline{\{u(g), g \in K(T), |g| \leq f\}}$$
 avec $f \in K_+(T)$, alors

$M_u : K_+(T) \rightarrow \text{cc}(E)$ est une intégrale de Daniell, et M_u est s -compacte. On obtient $\delta^*(y, M_u(f)) = |u_y|(f)$ où $|u_y|$ est la valeur absolue de la mesure de Radon scalaire u_y définie par :

$$u_y(g) = \langle u(g), y \rangle, g \in K(T).$$

DÉFINITION 5.1. — *Nous posons, $\ell^1(u) = \ell^1(M_u)$ et $L^1(u) = L^1(M_u)$.*

La restriction de u à $K_+(T)$ est une section, ou selection de M_u , donc on a $u : K_+(T) \rightarrow cc(E)$ est uniformément continue, si $K_+(T)$ est muni de la topologie induite par H^* ou $F(T, \bar{R})$, i.e. N_1 , et $cc(E)$ de celle de Hausdorff, car M_u est uniformément continue, d'après la proposition 3.5, (3), (iii). On Désigne par u , le prolongement par continuité de u à l'espace $L^1(M_u)$: on se mettra dans l'espace de Banach $L^1(M_u)$, où $L^1(M_u)$ est l'espace quotient par la relation M_u -pp. Si $f \in L^1(M_u)$, on pose : $u(f) = \int f u = \int f^+ u - \int f^- u$. De [19] chapitre 1 page 66, ou [13] page 160 on tire la définition suivante.

DÉFINITION 5.2. — *On pose*

- (1) $u(g) = \sup\{\|u(h)\|, |h| \leq g, h \in K(T)\}$,
si $g \in H^\vee = [K_+(T)]^\vee$,
- (2) $u(f) = \inf\{u(g), g \geq f, g \in H^\vee\}$, si $f \in \bar{R}_+^T$, et $\text{supp}(f)$ est compact,
- (3) et $u(f) = \sup\{u(g), g \geq f, g \in \bar{R}_+^T, \text{ et } \text{supp}(g) \text{ est compact}\}$, si $f \in \bar{R}_+^T$.

PROPOSITION 5.3. —

- (1) Si $f \in H^\vee$, on a $N_1(f) = u(f)$.
- (2) Si $f \in \bar{R}^T$, on a $N_1(f) \leq u(|f|)$.

Preuve. — Si $f \in H^\vee$, alors d'après le lemme 1.4 de [19], nous avons $N_1(f) = u(f)$. Si $f \in \bar{R}_+^T$, et $\text{supp}(f)$ est compact,

$$\delta^*(y, I^*(f)) = \inf\{\delta^*(y, I^\vee(g)), g \geq f, g \in H^\vee\} = (I_y)^*(f) \text{ et,}$$

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \sup_{\|y\| \leq 1} \inf\{\delta^*(y, I^\vee(g)), g \geq f, g \in H^\vee\} \\ &\leq \inf_{\|y\| \leq 1} \sup\{\delta^*(y, I^\vee(g)), g \geq f, g \in H^\vee\} \\ &\leq \{u(g), g \geq f, g \in H^\vee\} = u(f). \end{aligned}$$

Si $f \in \bar{R}_+^T$, et si (h_n) est une suite de $K_+(T)$, telle que $h_n \uparrow 1_T$, avec $I(h_n) \in cc(E)$, alors on a

$$N_1(f) = \sup_n N_1(fh_n) \leq \sup_n u(fh_n) = u(f).$$

Si $f \in \bar{R}^T$, on a $N_1(f) = N_1(|f|) \leq u(|f|)$. \square

Remarque 5.4. —

- (1) Si $A \subset T$ est u -négligeable, alors A est M_u -négligeable.
- (2) Si f est définie u -pp sur T , alors f l'est M_u -pp.
- (3) Si f est u -mesurable, alors f est M_u -mesurable.
- (4) Le théorème 5.5, ci-après, est une version presque partout des théorèmes de convergences 6-1, et 6-2 pages 157-158 de [13].

THÉORÈME 5.5. — Soit (f_n) une suite de $L^1(M_u)$ qui converge M_u -pp vers f . S'il existe $g \in [F(T, \overline{R})]_C$, i.e. $I^*(g) \in cc(E)$, tel que $|f_n| \leq g$, M_u -pp, pour tout $n \in N^*$, alors $f \in L^1(M_u)$, et f_n converge en moyenne vers f dans $L^1(M_u)$. On a alors $u(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u(f_n)$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(|f_n - f|) = 0$.

Preuve. — On applique le corollaire 2.14, à la multimesure M_u . On obtient alors que $f \in L^1(M_u)$, et f_n converge en moyenne vers f dans $L^1(M_u)$. La mesure de Radon vectorielle u , est une sélection de M_u , son prolongement u , par continuité à $L^1(M_u)$ vérifie : $u(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u(f_n)$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(|f_n - f|) = 0$. \square

Remarque 5.6. — On désigne par $L^1_+(M_u)$ l'espace obtenu pour l'intégrale de Daniell secondaire M_u .

- (1) On a $\ell^1(u) \subset \ell^1(M_u) \subset L^1(M_u)$.
- (2) L'espace $\ell^1(u)$ est celui obtenu par [19], ou [11].
- (3) L'espace $\ell^1(M_u)$ est celui obtenu par [13], et on a $\ell^1_+(M_u) \subset L^1_+(M_u)$.
- (4) L'espace $L^1(M_u)$ est celui que nous avons obtenu : c'est l'espace des fonctions intégrables, définies M_u -pp sur T , à valeurs dans \overline{R} .
- (5) D'après la proposition 1-28, page 83, de [19], $\bigcap_{y \in E'} L^1_+(|u_y|) = \ell^1_+(u)$. D'après le théorème 6 de [5], nous avons $L^1_+(M_u) = \bigcap_{y \in E'} L^1_+(|u_y|)$. Nous obtenons donc, que les espaces de [11], [13] et [19] coïncident. Dans [13], seule l'inclusion, $\ell^1(u) \subset \ell^1(M_u)$ avait été établie, et l'auteur pensait que l'inclusion pouvait être stricte. Cela n'est pas le cas.

THÉORÈME 5.7. — Soit f une fonction définie u -pp sur T à valeurs dans \overline{R} . Si f est u -mesurable, et s'il existe g tel que $|f| \leq g$ u -pp, avec $I^*(g) \in cc(E)$, par exemple g u -intégrable, alors f est u -intégrable.

Preuve. — D'après le théorème 3.9, on a : une fonction M_u -mesurable dominée par une fonction intégrable est intégrable. On a donc le résultat. \square

Remarque 5.8. — *Le théorème 5.7 est à comparer au théorème 1.22 page 74 de [19].*

Remarque 5.9. — Dans [8], section 5, nous avons donné des exemples de multimesures pour lesquelles, l'intégrale d'une fonction pouvait être dans $\text{cfb}(E)$ et non dans $\text{cc}(E)$. Si à de telles multimesures, nous identifions des multimesures de Radon, grâce au théorème 3.12, nous obtenons des multimesures de Radon, pour lesquelles l'intégrale d'une fonction peut être dans $\text{cfb}(E)$ et non $\text{cc}(E)$. De telles fonctions ne sont pas alors intégrables au sens de [11], et [13].

Pour des references concernant le Professeur D. S. Thiam, on pourra consulter [14], [15], [16], [17], et [18].

Bibliographie

- [1] CASTAING (C.), VALADIER (M.). — Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 580, p. 37-50 (1977).
- [2] COSTÉ (A.). — Contribution à la théorie de l'intégration multivoque, thèse d'état, Paris 6, (1977).
- [3] DINCULEANU (N.). — Vector Measures, Pergamon Press Veb-Berlin, Vol. 95, §. 8, p. 119 (1967).
- [4] GODET-THOBIE (C.). — Multimesures et multimesures de transition. thèse d'état, Montpellier, (1975).
- [5] NDIAYE (G. B.). — Intégration par rapport à une multimesure s -compacte monotone, Journal des sciences - Dakar, Vol. 3 (2003), no. 1, p. 44-50. <http://www.ucadjds.org/>
- [6] NDIAYE (G. B.). — Prolongeabilité et richesse d'une multimesure s -compacte à valeurs convexes fermées bornées, conditions de compacité, Journal des sciences - Dakar, Vol. 3 (2003), no. 2, p. 51-55. <http://www.ucadjds.org/>
- [7] NDIAYE (G. B.). — Multimesures et multimesures de Radon séquentiellement compactes, thèse d'état, u. c. a. d., Dakar, (2004).
- [8] NDIAYE (G. B.). — L'intégration par rapport à une multimesure, monotone et s -compacte, à valeurs convexes fermées : African Diaspora Journal of Mathematics (ADJM), vol. 6, no 1, p. 13-30 (2008).
- [9] NDIAYE (G. B.). — M -mesurabilité, par rapport à une multimesure M , à valeurs convexes fermées, et densité univoque d' une multimesure. À paraître dans Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (BAMV).
- [10] PALLU DE LA BARRIÈRE (R.). — Une alternative au théorème de Banach-Dieudonné, Seminaire d'analyse convexe, Montpellier, vol. II, fascicule I, Exposé no. 1, I.1-I.19 (1981).

- [11] PALLU DE LA BARRIÈRE (R.). — Intégration : Un nouvel itinéraire d'initiation à l'analyse mathématique, Ellipses, Paris (1997).
- [12] SIGINI (K.). — Sur les propriétés de régularité des mesures vectorielles et multivoques sur des espaces topologiques généraux, thèse de doctorat, Paris 6, (1992).
- [13] THIAM (D. S.). — Intégration dans les espaces ordonnés et intégration multivoque, thèse d'état, Paris 6, (1976).
- [14] THIAM (D. S.). — Multimesures positives. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 280, Ai, A993-A995 (1975).
- [15] THIAM (D. S.). — Intégrale de Daniell à valeurs dans un semi-groupe ordonné. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 281, no. 5-8, Aii, A215-A218 (1975).
- [16] THIAM (D. S.). — Applications à l'intégration multivoque, de l'intégrale de Daniell à valeurs dans un semi-groupe ordonné. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 281, no. 22, Ai, A955-A958 (1975).
- [17] THIAM (D. S.). — Intégrales multivoques monotones. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 282, no. 5, Ai A263-A265 (1976).
- [18] THIAM (D. S.). — Applications à l'intégration multivoque, de l'intégrale de Daniell à valeurs dans un monoïde. Intégration vectorielle et multivoque (Colloq. Univ. Caen, 1975), Expo. no. 7, 35 pp. Dép. Math., U. E. R. Sci., Univ. Caen, (1975).
- [19] THOMAS (E.). — L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle Ann. Inst. Fourier , vol. 20, p. 55-191 (1970).