ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

JULIEN LOIZELET

Solutions globales des équations d'Einstein-Maxwell

Tome XVIII, nº 3 (2009), p. 495-540.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2009_6_18_3_495_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVI, n° 3, 2009
pp. 495–540

Solutions globales des équations d'Einstein-Maxwell

Julien Loizelet[(1)]

Résumé. — En adaptant une méthode de Lindblad et Rodnianski, on prouve l'existence de solutions globales pour les équations d'Einstein-Maxwell en dimension d'espace $n \geqslant 3$. Les données initiales considérées sont lisses, asymptotiquement euclidiennes et suffisamment petites. On utilise la jauge harmonique et la jauge de Lorenz.

Abstract. — Adapting a method of Lindblad and Rodnianski, we prove existence of global solutions for the Einstein-Maxwell equations in space dimension $n \geqslant 3$. We consider small enough smooth and asymptotically flat initial data. We use harmonic gauge and Lorenz gauge.

Table des matières

(*) Reçu le 17 décembre 2007, accepté le 31 octobre 2008
(1) Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique (UMR CNRS 6083)
Faculté des Sciences et Techniques, Université François Rabelais, Parc de Grandmont
37200 Tours, France
Julien.Loizelet@lmpt.univ-tours.fr

1. Introduction

On constate un intérêt croissant pour l'étude des solutions asymptotiquement euclidiennes des équations d'Einstein en dimensions supérieures, cf.[1, 5, 6, 7]. Les premiers travaux sur le sujet de Christodoulou et Klainerman [4] prouvant la stabilité non linéaire de l'espace de Minkowski à quatre dimensions utilisent les équations de Bianchi et, de ce fait, ne se généralisent pas de façon évidente pour des dimensions plus grandes que quatre. L'existence globale sur $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $n \geqslant 4$ pour des données initiales suffisamment petites de solutions de système d'équations d'ondes quasi-linéaires du type des équations d'Einstein en coordonnées harmoniques a été prouvée dans [9, 15], voir aussi [3] pour $n \geqslant 5$ impair, avec des conditions de décroissance des données initiales incompatibles avec les équations de contraintes. Dans [14], H. Lindblad et I. Rodnianski ont prouvé l'existence de solutions globales des équations d'Einstein couplées à un champ scalaire, quand $n = 3$, pour des données initiales C^∞ suffisamment petites et asymptotiquement euclidiennes, en choisissant de travailler avec la jauge harmonique (1.4). Le but de ce travail est de montrer, en utilisant à la fois la jauge harmonique (1.4) et la jauge de Lorenz (1.5), l'existence de solutions globales des équations d'Einstein - Maxwell avec des données initiales petites, en dimension d'espace $n \geqslant 3$:

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \ , \\ D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \ . \end{cases} \tag{1.1}$$

Ces équations donnent une relation entre le tenseur gravitationnel $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ (exprimé en fonction de la courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ et de la courbure scalaire $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ d'une métrique Lorentzienne $g_{\mu\nu}$ inconnue) et le tenseur énergie-tension $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(\mathcal{F}_{\mu\lambda}\mathcal{F}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\lambda\rho}\mathcal{F}_{\lambda\rho})$ d'un champ électromagnétique $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A étant une 1-forme (4-potentiel électromagnétique). Ces équations sont une généralisation directe des équations en dimension $n + 1 = 4$.

On considère alors le problème de Cauchy suivant : on se donne une variété Σ_0 (de dimension n) avec une métrique Riemannienne g_0, un 2-tenseur symétrique k_0 et des données initiales $(A^0 = A^0_i dx^i, E^0 = E^0_i dx^i)$ pour le champ électromagnétique. On veut trouver une variété $\mathcal{M}$ (de dimension $n+1$) avec une métrique Lorentzienne g et un potentiel électromagnétique A qui vérifient (1.1) telle que Σ_0 soit plongé dans $\mathcal{M}$, g_0 soit la restriction de g sur Σ_0 , k_0 soit la seconde forme fondamentale de Σ_0 dans $\mathcal{M}$ et que (A^0, E^0) soit la restriction sur Σ_0 du potentiel vectoriel $A_i dx^i$ et du « champ électrique » $E_i dx^i = F_{0i} dx^i$.

On suppose les conditions initiales C^∞ et asymptotiquement euclidiennes : i.e. pour $r = |x| \to +\infty$, $\alpha > 0$ et M la masse ADM on a :

$$\forall\, i,j = 1,...,n \quad \begin{cases} g_{0ij} = \begin{cases} (1+\frac{2M}{r})\delta_{ij} + O(r^{-1-\alpha}) \ , \text{ pour } n = 3 \ , \\ \delta_{ij} + O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \ , \text{ pour } n \geqslant 4 \ , \end{cases} \\ A^0 = O(r^{\frac{1-n}{2}-\alpha}) \ , \\ k_{0ij} = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \ , \\ E^0 = O(r^{-\frac{n+1}{2}-\alpha}) \ . \end{cases} \tag{1.2}$$

De plus, on impose que les données initiales vérifient les équations de contraintes :

$$\forall\, i,j = 1,...,n \qquad \begin{cases} R_0 - k^i_{0j}k^j_{0i} + k^i_{0i}k^j_{0j} = 2\mathcal{F}_{0i}{\mathcal{F}_0}^i + \mathcal{F}_{ij}\mathcal{F}^{ij} \ , \\ \nabla^j k_{0ij} - \nabla_i k^j_{0j} = \mathcal{F}_{0j}{\mathcal{F}_i}^j \quad , \\ \nabla_i \mathcal{F}^{0i} = 0 \ . \end{cases} \tag{1.3}$$

où R_0 désigne la courbure scalaire de g_0 et ∇ la dérivée covariante par rapport à g_0.

Enfin, on choisit de travailler avec deux jauges particulières : la jauge de coordonnées harmoniques

$$\partial_\mu \left(g^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \right) = 0 \quad \forall \nu = 0,...,n \tag{1.4}$$

et la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu \left(\sqrt{|\det g|} A^\mu \right) = 0 \ . \tag{1.5}$$

1.1. Écriture sous la forme d'un système quasi-linéaire

Dans cette section, on utilise les conditions de jauge pour transformer le système de départ (1.1) en un système quasi-linéaire de forme adéquate pour le reste de l'argumentation.

L'équation $D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ de (1.1) entraîne [1] :

$$\begin{aligned} 0 = \quad & \partial_\mu \left[\sqrt{|\det g|} g^{\nu\beta} g^{\mu\alpha} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right] \\ = \quad & g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\partial_\alpha A_\beta) - g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}\partial_\beta A_\alpha) + (\partial_\mu g^{\nu\beta}) \\ & \left[\sqrt{|\det g|} g^{\mu\alpha}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

---

(1) On note $\tilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$.

$$
\begin{aligned}
= \;& g^{\nu\beta}\sqrt{|\det g|}\tilde{\Box}_g A_\beta + \underbrace{g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha})\partial_\alpha A_\beta - g^{\nu\beta}\partial_\mu(\sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha})\partial_\beta A_\alpha}_{=0 \text{ d'après (1.4)}} \\
& \underbrace{-g^{\nu\beta}g^{\mu\alpha}\sqrt{|\det g|}\partial_\mu\partial_\beta A_\alpha}_{(I)} + (\partial_\mu g^{\nu\beta})\left[\sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\right] .
\end{aligned}
$$

Or , d'après (1.5) :

$$
\begin{aligned}
0 = \;& \partial_\beta\partial_\mu(\sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha}A_\alpha) \\
= \;& \partial_\beta\left(\underbrace{\partial_\mu(\sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha})A_\alpha}_{=0 \text{ d'après (1.4)}} + \sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha}\partial_\mu A_\alpha\right) \qquad (1.7) \\
= \;& \sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha}\partial_\beta\partial_\mu A_\alpha + \partial_\beta\left(\sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha}\right)\partial_\mu A_\alpha .
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
(I) = \;& g^{\nu\beta}\partial_\beta\left(\sqrt{|\det g|}g^{\mu\alpha}\right)\partial_\mu A_\alpha \qquad (1.8) \\
= \;& g^{\nu\beta}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{|\det g|}g^{\lambda\tau}(\partial_\beta g_{\lambda\tau})g^{\mu\alpha} + \sqrt{|\det g|}\partial_\beta g^{\mu\alpha}\right)\partial_\mu A_\alpha .
\end{aligned}
$$

On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
0 = \;& g^{\nu\beta}\tilde{\Box}_g A_\beta + \underbrace{\frac{1}{2}g^{\nu\beta}g^{\lambda\tau}\partial_\beta g_{\lambda\tau}g^{\mu\alpha}\partial_\mu A_\alpha}_{=0 \text{ d'après (1.4) et (1.5)}} \qquad (1.9) \\
& + g^{\nu\beta}(\partial_\beta g^{\mu\alpha})\partial_\mu A_\alpha + g^{\mu\alpha}(\partial_\mu g^{\nu\beta})(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) .
\end{aligned}
$$

Finalement, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Box}_g A_\sigma = \;& g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\partial_\mu g_{\nu\sigma})(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) - (\partial_\sigma g^{\mu\alpha})\partial_\mu A_\alpha \qquad (1.10) \\
= \;& m^{\nu\beta}m^{\mu\alpha}\partial_\mu h_{\nu\sigma}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + m^{\rho\mu}m^{\lambda\alpha}\partial_\sigma h_{\rho\lambda}\partial_\mu A_\alpha \\
& + O(|h|\,|\partial h|\,|\partial A|) .
\end{aligned}
$$

Maintenant, prenant la trace de l'équation dans (1.1) : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2(\mathcal{F}_\mu{}^\alpha\mathcal{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\sigma\tau}\mathcal{F}^{\sigma\tau})$, on obtient :

$$
R(1 - \frac{n+1}{2}) = 2\mathcal{F}_{\sigma\tau}\mathcal{F}^{\sigma\tau}(1 - \frac{n+1}{4}) . \qquad (1.11)
$$

Injectant R ainsi trouvé dans (1.1), on a :

$$
R_{\mu\nu} = 2\mathcal{F}_\mu{}^\alpha\mathcal{F}_{\nu\alpha} - \frac{1}{n-1}g_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\sigma\tau}\mathcal{F}^{\sigma\tau} . \qquad (1.12)
$$

Et on calcule que

$$2\mathcal{F}_\mu{}^\alpha \mathcal{F}_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{n-1} g_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\sigma\tau}\mathcal{F}^{\sigma\tau} = 2m^{\alpha\beta}(\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \quad (1.13)$$
$$-\frac{1}{n-1} m_{\mu\nu} m^{\alpha\sigma} m^{\beta\tau}(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma) + O(|h|\,|\partial A|^2).$$

Ainsi, en supposant (1.4) et (1.5) vérifiées, on peut écrire (1.1) sous la forme du système d'équations d'ondes quasi-linéaires :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\tilde{\Box}_g h_{\mu\nu} & = & F_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h) \\
 & & -4m^{\alpha\beta}(\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \\
(1.14.1) & & +\frac{2}{n-1} m_{\mu\nu} m^{\alpha\sigma} m^{\beta\tau}(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma) \\
 & & +O(|h|\,|\partial A|^2)\ , \\
\tilde{\Box}_g A_\sigma & = & m^{\nu\beta} m^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\nu\sigma}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\
 & & +m^{\rho\mu} m^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial_\mu A_\alpha \\
(1.14.2) & & +O(|h|\,|\partial h|\,|\partial A|)\ ,
\end{array}\right. \quad (1.14)$$

où $F_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h)$ est défini dans le lemme 3.2 de [13] et $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - m_{\mu\nu}$.

Plus précisément,

$$F_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h) = P(\partial_\mu h, \partial_\nu h) + Q_{\mu\nu}(\partial h, \partial h) + G_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h)\ , \quad (1.15)$$

où

$$P(\partial_\mu h, \partial_\nu h) = \frac{1}{4} m^{\alpha\alpha'} \partial_\mu h_{\alpha\alpha'}\, m^{\beta\beta'} \partial_\nu h_{\beta\beta'} - \frac{1}{2} m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \partial_\mu h_{\alpha\beta}\, \partial_\nu h_{\alpha'\beta'}\ , \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu}(\partial h, \partial h) \ = \ & \partial_\alpha h_{\beta\mu}\ m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \partial_{\alpha'} h_{\beta'\nu} \\
& - m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_\alpha h_{\beta\mu}\ \partial_{\beta'} h_{\alpha'\nu} - \partial_{\beta'} h_{\beta\mu}\ \partial_\alpha h_{\alpha'\nu}\big) \\
& + m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_\mu h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\alpha h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\mu h_{\beta\nu}\big) \\
& + m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_\nu h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\alpha g h_{\beta\mu} - \partial_\alpha h_{\alpha'\beta'}\, \partial_\nu h_{\beta\mu}\big) \quad (1.17) \\
& + \frac{1}{2} m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_{\beta'} h_{\alpha\alpha'}\, \partial_\mu h_{\beta\nu} - \partial_\mu h_{\alpha\alpha'}\, \partial_{\beta'} h_{\beta\nu}\big) \\
& + \frac{1}{2} m^{\alpha\alpha'} m^{\beta\beta'} \big(\partial_{\beta'} h_{\alpha\alpha'}\, \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\nu h_{\alpha\alpha'}\, \partial_{\beta'} h_{\beta\mu}\big)
\end{aligned}$$

est une forme nulle et $G_{\mu\nu}(h)(\partial h, \partial h)$ est une forme quadratique en ∂h avec des coefficients lisses dépendant de h et s'annulant quand h s'annule : $G_{\mu\nu}(0)(\partial h, \partial h) = 0$.

Rappelons que $\tilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$, on est alors amené à étudier le système :

$$\tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1_{\mu\nu} \\ A_\sigma \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu} \\ F^A_\sigma \end{pmatrix}}_{F_M} - \begin{pmatrix} \tilde{\Box}_g h^0_{\mu\nu} \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{1.18}$$

où $h_{\mu\nu} = h^1_{\mu\nu} + h^0_{\mu\nu}$ avec $h^0_{\mu\nu}(t) = \begin{cases} \chi(r/t)\chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{\mu\nu} & \text{pour } n = 3 , \\ 0 \quad \text{pour } n \geqslant 4 , \end{cases}$

$\chi \in C^\infty$, $\chi(s)$ valant 1 quand $s \geqslant 3/4$ et 0 quand $s \leqslant 1/2$ et :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu}(h)(\partial A, \partial A) = \quad & -4m^{\alpha\beta}(\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta A_\mu)(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) \\ & + \frac{2}{n-1} m_{\mu\nu} m^{\alpha\sigma} m^{\beta\tau}(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma) \\ & + O(|h|\,|\partial A|^2) , \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} F^A_\sigma(h)(\partial h, \partial A) = \quad & m^{\nu\beta} m^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\nu\sigma}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \\ & + m^{\rho\mu} m^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial_\mu A_\alpha \\ & + O(|h|\,|\partial h|\,|\partial A|) . \end{aligned} \tag{1.20}$$

2. Théorème d'existence globale

Le théorème suivant est le résultat principal de ce travail. Cette section ne contient qu'une esquisse de la preuve, les détails étant présentés dans les sections suivantes.

Théorème 2.1 (Théorème d'existence globale). — *Soient* $(\Sigma_0, g_0, k_0, A^0, E^0)$ *les données initiales du système d'équations d'Einstein-Maxwell* (1.1). *Supposons que* Σ_0 *soit difféomorphe à* $\mathbb{R}^n$, *que* (g_0, k_0, A^0, E^0) *soient* C^∞ *et vérifient les conditions* (1.2) *et* (1.3).
Soit N *un entier naturel tel que* $N \geqslant 2[\frac{n+2}{2}] + 6$. *Soit* $g_0 = \delta + h^0_0 + h^1_0$ *où* $h^0_{0ij} = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{ij} & \textit{pour } n = 3 , \\ 0 \quad \textit{pour } n \geqslant 4 , \end{cases}$ *avec* $\chi \in C^\infty$ *valant* 1 *pour* $r \geqslant 3/4$ *et* 0 *pour* $r \leqslant 1/2$. *Posons*

$$\begin{aligned} E_{N,\gamma}(0) = \sum_{0 \leqslant |I| \leqslant N} \Bigg(& \left\| (1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla \nabla^I h^1_0 \right\|^2_{L^2} + \left\| (1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla^I k_0 \right\|^2_{L^2} \\ & + \left\| (1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla \nabla^I A^0 \right\|^2_{L^2} + \left\| (1+r)^{1/2+\gamma+|I|} \nabla^I E^0 \right\|^2_{L^2} \Bigg) . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Il existe alors une constante $\varepsilon_0 > 0$ *telle que, pour toutes données initiales vérifiant*

$$\begin{aligned} \sqrt{E_{N,\gamma}(0)} + M \leqslant \varepsilon_0, & \quad \text{si } n = 3 \\ \sqrt{E_{N,\gamma}(0)} \leqslant \varepsilon_0, & \quad \text{si } n \geqslant 4 \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour un certain $\gamma > 0$, le problème de Cauchy pour le système (1.1) *possède une solution C^∞ globale (g, A) avec $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ géodésiquement complète.*

Idée de la preuve :

Il est standard de montrer (cf. section 3) que toute solution h^1 du système (1.18) avec des données initiales vérifiant (1.3), (1.4) et (1.5) définit une solution $g = m + h^1 + h^0$ du système (1.1). Et puisqu'on peut toujours construire des données initiales vérifiant (1.3), (1.4) et (1.5) à partir des données initiales du théorème 2.1 (cf. section 3), on est ramené à chercher des solutions globales de (1.18). De plus, on sait que si les données initiales vérifient (1.3), (1.4) et (1.5) alors il existe une solution locale en temps (h, A) de (1.18) telle que $g = m + h$ et A vérifient (1.4) et (1.5) pour tout t dans un intervalle maximal d'existence $[0, T_0]$. On note que T_0 peut être caractérisé par le fait que $\mathcal{E}_N(t) \to \infty$ quand $t \to T_0^-$.

Soit $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ définie par (10.10), soit $0 < \delta < \frac{1}{4}$ et soit $T < T_0$ le temps maximal tel que l'inégalité

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leqslant 2C_N \varepsilon^2 (1+t)^{2\delta} \tag{2.3}$$

soit vraie pour $0 \leqslant t \leqslant T$. (Les hypothèses du théorème d'existence globale font que $T > 0$). Le théorème 7.1 permet de montrer que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'inégalité (2.3) entraîne la même inégalité avec $2C_N$ remplacée par C_N pour $0 \leqslant t \leqslant T$. Puisque $\mathcal{E}_N^{Maxwell}$ est une fonction continue, cela contredit la maximalité de T et donc que (2.3) est vraie pour $0 \leqslant T \leqslant T_0$. De plus, puisque l'énergie $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ est maintenant finie en $t = T_0$, on peut étendre la solution $(h_{\mu\nu}, A_\sigma)$ au delà de T_0, contredisant ainsi la maximalité de T_0 et montrant que $T_0 = +\infty$. Ceci a pour conséquence que la solution est globale.

3. Construction des données initiales

3.1. Construction

Dans ce paragraphe, on vérifie qu'à partir des données initiales (g_0, k_0, A^0, E^0), on peut construire $(g_{t=0}, \partial_t g|_{t=0}, A|_{t=0}, \partial_t A|_{t=0})$ satisfaisant (1.4) et (1.5).

Soit $\chi \in C^\infty$ valant 1 pour $r \geqslant 3/4$ et 0 pour $r \leqslant 1/2$. On a supposé

$$g_0 = \delta + h_0^0 + h_0^1 \text{ où } h_{0ij}^0 = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{ij} & \text{pour } n = 3\,, \\ 0 \quad \text{pour } n \geqslant 4\,, \end{cases}$$

et on veut

$$g|_{t=0} = m + h^0|_{t=0} + h^1|_{t=0} \text{ où } h^0_{\mu\nu}|_{t=0} = \begin{cases} \chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{\mu\nu} & \text{pour } n = 3\ , \\ 0 \quad \text{pour } n \geqslant 4\ . \end{cases}$$

Soit $a^2 = \begin{cases} (1 - \frac{2M}{r}\chi(r)) & \text{pour } n = 3\ , \\ 1 \quad \text{pour } n \geqslant 4\ . \end{cases}$

On pose tout d'abord :

$$g_{ij}|_{t=0} = g_{0ij}, \quad g_{00}|_{t=0} = -a^2, \quad g_{0i}|_{t=0} = 0\ , \tag{3.1}$$

$$\partial_t g_{ij}|_{t=0} = -2ak_{0ij}\ . \tag{3.2}$$

Il reste à déterminer $\partial_t g_{0\alpha}$. Pour cela, on cherche à satisfaire la condition de coordonnées harmoniques écrite sous la forme :

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta}\ .$$

En prenant $\mu = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2}g^{00}\partial_t g_{00} = -g^{\beta i}\partial_i g_{0\beta} + \frac{1}{2}g^{ij}\partial_t g_{ij}\ ,$$

et donc

$$\partial_t g_{00}|_{t=0} = 2a^3 g_0^{ij} k_{0ij}\ . \tag{3.3}$$

Si on prend cette fois $\mu = i$, on obtient :

$$g^{00}\partial_t g_{0i} = -g^{\beta j}\partial_j g_{i\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_i g_{\mu\nu}\ ,$$

d'où

$$\partial_t g_{0i}|_{t=0} = a^2 g_0^{kj}\partial_j g_{0ki} - \frac{1}{2}a^2 g_0^{kj}\partial_i g_{0kj} - a\partial_i a\ . \tag{3.4}$$

Enfin, il faut construire $A|_{t=0}$ et $\partial_t A|_{t=0}$.
Pour celà, on choisit $A_0|_{t=0} = 0$, on pose $A_i|_{t=0} = A_i^0$ et $\partial_t A_i|_{t=0} = E_i^0$ et on calcule $\partial_t A_0|_{t=0}$ en utilisant que $(D^\mu A_\mu)|_{t=0} = 0$.

3.2. Équivalence du système réduit et du système initial

On a construit $(A|_{t=0}, \partial_t A|_{t=0})$ tel que :

$$D_\mu A^\mu|_{t=0} = 0\ . \tag{3.5}$$

On impose que A^ν soit solution de l'équation d'évolution

$$\Box_g A^\nu = R_\sigma{}^\nu A^\sigma \ , \tag{3.6}$$

avec $A_\mu|_{t=0}$ et $\partial_t A_\mu|_{t=0}$ précedemment construites pour données initiales.

On note que (3.6) vient de :

$$\begin{aligned} 0 = D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} &= D_\mu(D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu) \\ &= -D_\mu D^\nu A^\mu + D_\mu D^\mu A^\nu \\ &= \Box_g A^\nu - D_\mu D^\nu A^\mu \\ &= \Box_g A^\nu - g^{\beta\nu}(R^\mu{}_{\sigma\mu\beta} A^\sigma + D_\beta \underbrace{D_\mu A^\mu}_{=0}) \\ &= \Box_g A^\nu - R_\sigma{}^\nu A^\sigma \end{aligned} \tag{3.7}$$

Étant donnée une solution A_μ du système réduit (1.14) vérifiant (3.6), on veut montrer que A_μ satisfait la condition de Lorenz $D_\mu A^\mu = 0$ et l'équation de Maxwell $D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ pour tout t.

Dans ce but, on définit :

$$\Lambda := D_\mu A^\mu \tag{3.8}$$

et on veut montrer que $\Lambda = 0$ pour tout t. Par construction des données initiales, on a $\Lambda = 0$ en $t = 0$. On calcule que

$$\begin{aligned} D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} &= -D^\nu \Lambda + \Box_g A^\nu - R_\sigma{}^\nu A^\sigma \\ &= -D^\nu \Lambda \ , \end{aligned} \tag{3.9}$$

d'après (3.6). Ceci montre que $\partial_t \Lambda = 0$ sur Σ_0 si et seulement si on impose l'équation de contrainte de Maxwell

$$D_i \mathcal{F}^{i0}|_{t=0} = 0 \ . \tag{3.10}$$

En supposant cette équation de contrainte vérifiée, on obtient d'après (3.9) :

$$0 = D_\nu D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = -\Box_g \Lambda \ .$$

Ici, on a utilisé que le membre de gauche de la dernière équation est identiquement nul car $\mathcal{F}^{\mu\nu} = D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu$. Il s'en suit que Λ satisfait l'équation d'onde homogène :

$$\Box_g \Lambda = 0 \ .$$

Or, par (3.5), on a $\Lambda = 0$ sur Σ_0 et on a $\partial_t \Lambda = 0$ sur Σ_0 d'après l'équation de contrainte (3.10). Ainsi, $\Lambda \equiv 0$ sur tout développement globalement hyperbolique de Σ_0. On voit alors, d'après (3.9), que $D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ pour tout t, montrant que le champ A_μ satisfait à la fois l'équation de Maxwell et la jauge de Lorenz pour tout t.

Maintenant, étant donnée une solution g du système réduit (1.14) , on va montrer que $g = m + h$ satisfait la condition de jauge harmonique (1.4) et l'équation d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$ pour tout t.
Soit g la solution des équations d'Einstein réduites (1.14) , on peut écrire (avec la notation $\Gamma^\lambda = g^{\alpha\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$) :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu \Gamma_\nu + D_\nu \Gamma_\mu) = \mathcal{N}_{\mu\nu} \tag{3.11}$$

où $\mathcal{N}_{\mu\nu}$ est une certaine fonction donnée de g, ∂g, A et ∂A. En effet (en notant $\Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\delta}(\partial_\mu g_{\delta\nu} + \partial_\nu g_{\delta\mu} - \partial_\delta g_{\mu\nu})$), on a :

$$R_{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\beta \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \beta} - \partial_\nu \Gamma_{\mu\ \beta}^{\ \beta}}_{A} \underbrace{- \Gamma_{\rho\ \nu}^{\ \beta} \Gamma_{\mu\ \beta}^{\ \rho}}_{B} + \underbrace{\Gamma_{\rho\ \beta}^{\ \beta} \Gamma_{\mu\ \nu}^{\ \rho}}_{C} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} A =& -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\nu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \qquad (3.13) \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_\beta g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \\ B =& \ \frac{1}{4}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \qquad (3.14) \\ C =& \ -\Gamma_{\mu\alpha\nu} \Gamma^\alpha - \frac{1}{2}(\partial_\beta g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \qquad (3.15) \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(D_\nu \Gamma_\mu + D_\mu \Gamma_\nu) &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \Gamma_\mu + \partial_\mu \Gamma_\nu) - \Gamma_{\mu\alpha\nu} \Gamma^\alpha \qquad (3.16) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\nu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu g^{\alpha\beta}) \Gamma_{\alpha\nu\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\nu g^{\alpha\beta}) \Gamma_{\alpha\mu\beta} - \Gamma_{\mu\alpha\nu} \Gamma^\alpha \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} =& \ \frac{1}{2}(D_\nu \Gamma_\mu + D_\mu \Gamma_\nu) - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} \qquad (3.17) \\ &- \frac{1}{2}(\partial_\mu g^{\alpha\beta}) \Gamma_{\alpha\nu\beta} - \frac{1}{2}(\partial_\nu g^{\alpha\beta}) \Gamma_{\alpha\mu\beta} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}(\partial_\nu g^{\alpha\beta})(\partial_\mu g_{\alpha\beta}) \\
:=\ &\frac{1}{2}(D_\nu\Gamma_\mu + D_\mu\Gamma_\nu) - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} + \mathcal{N}_1(g,\partial g)\ .
\end{aligned}
$$

Comme g est solution des équations réduites (1.14), on a :

$$
-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} = \mathcal{N}_2(g,\partial g, A, \partial A)\ . \tag{3.18}
$$

On se ramène donc bien à (3.11).
Pour prouver que $\Gamma^\lambda = 0$, on part de (3.11) et on utilise l'identité de Bianchi contractée $D^\nu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}D_\mu R$:

$$
\begin{aligned}
0 =\ & 2(D^\nu R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}D_\mu R) \\
=\ & D^\nu D_\mu \Gamma_\nu + D^\nu D_\nu \Gamma_\mu + 2D^\nu \mathcal{N}_{\mu\nu} - D_\mu D^\nu \Gamma_\nu - D_\mu \mathcal{N}^\nu_{\ \nu} \\
=\ & D^\nu D_\nu \Gamma_\mu + R_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma + 2D^\nu\mathcal{N}_{\mu\nu} - D_\mu \mathcal{N}^\nu_{\ \nu}\ .
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Ainsi Γ^λ vérifie une équation d'onde avec condition initiale $\Gamma^\lambda_{t=0} = 0$. La théorie des équations hyperboliques nous dit que si, en plus, $D_t\Gamma^\lambda_{t=0} = 0$ alors $\Gamma^\lambda = 0$ pour tout t. Et en utilisant les équations de contraintes (1.3), on peut montrer qu'effectivement $D_t\Gamma^\lambda_{t=0} = 0$ (cf [2]).

4. Estimations faibles de décroissance

Cette section présente les premières estimations que l'on obtient lorsque l'on utilise l'inégalité de Klainerman-Sobolev à poids de la proposition 9.6. Ces estimations dîtes faibles seront améliorées (pour $n = 3$) dans la section 6.

Soient δ et γ tels que $0 < \delta < 1/4$ et $\delta < \gamma$. Supposons (2.3) vérifiée pour $t \leqslant T$.

Corollaire 4.1 (Estimations faibles de décroissance). — *Soit $0 \leqslant t \leqslant T$. Soient (h^1, A) vérifiant (2.3) et h^0 défini par (10.13). Pour $i = 0, 1$ avec $\delta' = \delta$ si $i = 0$ et $\delta' = \gamma > \delta$ si $i = 1$, on a :*

$$
\left|\partial Z^I A(t,x)\right| + \left|\partial Z^I h^i(t,x)\right| \leqslant
$$

$$
\begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-1-\delta'}, & q>0\ , \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-1/2}, & q<0\ , \end{cases} \quad |I| \leqslant N - \left[\frac{n+2}{2}\right]\ , \tag{4.1}
$$

De plus,

$$\left|Z^I A(t,x)\right| + \left|Z^I h^i(t,x)\right| \leqslant$$
$$\begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-\delta'}, & q>0\,, \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2}, & q<0\,, \end{cases} |I| \leqslant N - \left[\frac{n+2}{2}\right]\;, \tag{4.2}$$

et

$$\left|\bar{\partial} Z^I A(t,x)\right| + \left|\bar{\partial} Z^I h^i(t,x)\right| \leqslant$$
$$\begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-\delta'}, & q>0\,, \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2}, & q<0\,, \end{cases} |I| \leqslant N - \left[\frac{n+2}{2}\right] - 1\,. \tag{4.3}$$

Preuve : Comme les hypothèses sur A et h^1 sont les mêmes, il suffit d'adapter la preuve du corollaire 9.3 de [14], l'outil fondamental étant l'inégalité de Klainerman-Sobolev à poids de la proposition 9.6.

On ne prouvera les estimations que pour $i = 1$, celles pour $i = 0$ découlant d'un calcul direct s'appuyant sur la forme de h^0.
Commençons par montrer (4.1). D'après la proposition 9.6, il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$(1+|t|+|x|)^{\frac{n-1}{2}}[(1+|q|)w(q)]^{\frac{1}{2}}\,|u(t,x)| \leqslant C \sum_{|I|\leqslant[\frac{n+2}{2}]} \left\|w(q)^{\frac{1}{2}} Z^I u(t,.)\right\|_{L^2}. \tag{4.4}$$

Prenant $u = \partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$, on a pour tout $|J| \leqslant N - \left[\dfrac{n+2}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} (1+|t|+|x|)^{\frac{n-1}{2}}\;[(1+|q|)w(q)]^{\frac{1}{2}} \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(t,x)\right| \\ \leqslant C \sum_{|I|\leqslant[\frac{n+2}{2}]} \left\|w(q)^{\frac{1}{2}} Z^I \partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(t,.)\right\|_{L^2} \\ \leqslant C \sum_{|K|\leqslant N} \left\|w(q)^{\frac{1}{2}} \partial Z^K \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(t,.)\right\|_{L^2} \\ \underbrace{\leqslant}_{\text{d'après (2.3)}} C\varepsilon(1+t)^\delta. \end{aligned} \tag{4.5}$$

D'où :

$$\left|\partial Z^I A(t,x)\right| + \left|\partial Z^I h^1(t,x)\right| \leqslant$$
$$\begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}(1+|q|)^{-1-\gamma}(1+t)^{\delta}, & q>0, \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}(1+|q|)^{-1/2}(1+t)^{\delta}, & q<0, \end{cases} \quad |I| \leqslant N - \left[\frac{n+2}{2}\right] . \tag{4.6}$$

Ceci entraîne (4.1) et on note aussi que, pour $t = 0$, on a :

$$\left|\partial Z^I A(0,x)\right| + \left|\partial Z^I h^1(0,x)\right| \leqslant C\varepsilon(1+|x|)^{\frac{-1-n}{2}-\gamma}, \quad |I| \leqslant N - \left[\frac{n+2}{2}\right] . \tag{4.7}$$

D'après les hypothèses (1.2),

$$\liminf_{|x|\to+\infty} \left|h^1(0,x) + A(0,x)\right| \to 0 . \tag{4.8}$$

On a alors

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(0,x)\right| \to 0, \quad |I| \leqslant N - \left[\frac{n+2}{2}\right] . \tag{4.9}$$

En effet, pour $|I| = 0$, cela découle de (4.8) et si $|I| \geqslant 1$, cela vient de (4.1) puisque $|Z\phi| \leqslant C(1+t+|x|)\,|\partial\phi|$.

On peut alors montrer (4.2) en $t = 0$. Soit $|X| >> 1$, on a, pour tout $|I| \leqslant N - \left[\frac{n+2}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(0,|x|\omega)\right| &\leqslant \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(0,|X|\omega)\right| \\ &\quad + \int_{|x|}^{|X|} \left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(0,\rho\omega)\right| d\rho \\ &\underbrace{\leqslant}_{\text{d'après (4.7)}} \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(0,|X|\omega)\right| + \int_{|x|}^{|X|} C\varepsilon(1+|\rho|)^{\frac{-1-n}{2}-\gamma}\, d\rho \\ &\leqslant \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(0,|X|\omega)\right| + C\varepsilon(1+|x|)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Faisant tendre $|X|$ vers $+\infty$, on obtient (4.2) en $t = 0$, en utilisant (4.9). On a même :

$$\left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}(0,x)\right| \leqslant C\varepsilon(1+|x|)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} . \tag{4.11}$$

Pour montrer (4.2) quand $t \geqslant 0$, on étudie séparément le cas où $r \geqslant t$ et le cas $r < t$. Dans les deux cas, on intègre (4.1) depuis l'hyperplan $t = 0$ le long de lignes où $t + r$ et $\omega = \frac{x}{|x|}$ sont fixés :

• cas où $r \geqslant t$; on a $|q| = r - t$ et $t + |q| = r$:

$$\begin{aligned}
&\left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (t, r\omega)\right| \qquad (4.12)\\
&\leqslant \int_r^{t+r} \left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (t+r-\rho, \rho\omega)\right| d\rho + \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (0, (t+r)\omega)\right| \\
&\underbrace{\leqslant}_{\text{par (4.1) et (4.11)}} C\varepsilon \int_r^{t+r} (1+\rho)^{\frac{1-n}{2}+\delta} (1+\rho-t+\rho-r)^{-1-\gamma}\, d\rho + C\varepsilon(1+t+r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\underbrace{\leqslant}_{\rho \geqslant r} C\varepsilon \int_r^{t+r} (1+r)^{\frac{1-n}{2}+\delta} (1+\rho-t)^{-1-\gamma}\, d\rho + C\varepsilon(1+t+r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\leqslant C\varepsilon(1+r)^{\frac{1-n}{2}+\delta} \left[-\frac{1}{\gamma}(1+\rho-t)^{-\gamma}\right]_r^{t+r} + C\varepsilon(1+t+r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\leqslant C\varepsilon(1+\underbrace{r}_{=t+|q|})^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+\underbrace{r-t}_{=|q|})^{-\gamma} + C\varepsilon(1+t+r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \\
&\leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-\gamma}\,.
\end{aligned}$$

• cas où $r < t$; on a $|q| = t - r$ et $t + |q| = 2t - r$:

$$\left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (t, r\omega)\right| \leqslant$$

$$\underbrace{\int_r^{t+r} \left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (t+r-\rho, \rho\omega)\right| d\rho}_{(I)} + \underbrace{\left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (0, (t+r)\omega)\right|}_{(II)}\,. \qquad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
(II) &\underbrace{\leqslant}_{\text{par (4.11)}} C\varepsilon(1+t+r)^{\frac{1-n}{2}-\gamma} \qquad (4.14)\\
&\underbrace{\leqslant}_{1+t+r=\frac{1}{2}(2+2t+2r)\geqslant\frac{1}{2}(1+2t-r)\geqslant\frac{1}{2}(1+t+|q|)} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

$$(I) \leqslant \underbrace{\int_r^{\frac{t+r}{2}} \left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (t+r-\rho, \rho\omega)\right| d\rho}_{(I_1)}$$

$$\underbrace{+\int_{\frac{t+r}{2}}^{t+r} \left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (t+r-\rho, \rho\omega)\right| d\rho}_{I_2} \; . \tag{4.15}$$

$$(I_2) \leqslant \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (0, (t+r)\omega)\right| + \left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (\frac{t+r}{2}, \frac{t+r}{2}\omega)\right| \; . \tag{4.16}$$

En utilisant (4.14) et (4.2) pour $q = 0$, on obtient

$$(I_2) \leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2} \; . \tag{4.17}$$

Enfin, on a :

$$(I_1) \underbrace{\leqslant}_{\text{par } (4.1)} \int_r^{\frac{t+r}{2}} C\varepsilon(1+2(t+r)-3\rho)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+t+r-2\rho^{-1/2})\, d\rho \tag{4.18}$$

$$\leqslant C\varepsilon(1+t+|q|^{\frac{1-n}{2}+\delta}) \left[-(1+t+r-2\rho)^{1/2}\right]_r^{\frac{t+r}{2}}$$

$$\leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2} \; .$$

On a donc bien :

$$\left|Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} (t, r\omega)\right| \leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2} \; . \tag{4.19}$$

Finalement, les estimations (4.3) suivent de (4.2) puisque

$$\left|\bar{\partial}\phi\right| \leqslant C \sum_{|I|=1} \left|Z^I\phi\right| / (1+t+|q|) \; .$$

5. Jauge harmonique et jauge de Lorenz

La section 3 nous assure que les conditions de jauge de Lorenz et de jauge harmonique se propagent dans le temps. Ces jauges vont nous permettre d'obtenir des estimations plus fines sur certains composants de h et A (cf lemme 5.1 et proposition 5.3).

Commençons par noter que, si A et g vérifient (1.4) et (1.5), alors

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = 0 \; . \tag{5.1}$$

(5.1) entraîne le lemme suivant :

LEMME 5.1. — *Pour A et g vérifiant* (5.1) *on a*

$$|\partial A|_{\mathcal{L}} \leqslant C \left|\bar{\partial} A\right| + O(|h|\,|\partial A|)\,. \tag{5.2}$$

Preuve. (5.1) implique que

$$m^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = O(|h|\,|\partial A|)\,. \tag{5.3}$$

En décomposant cette égalité par rapport à la famille $\mathcal{U} = \{L, \underline{L}, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$ définie dans la section 10, on a

$$-\frac{1}{2}\underline{L}^\mu \partial_\mu A_L - \frac{1}{2}L^\mu \partial_\mu A_{\underline{L}} + \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{S^i} A_{S^i} = O(|h|\,|\partial A|)\,. \tag{5.4}$$

En ajoutant et en retranchant la quantité $-\frac{1}{2}(L^\mu \partial_\mu A_L + \sum_{i=1}^{n-1} S^{i\mu}\partial_\mu A_L)$, puis en passant à la valeur absolue, on obtient

$$\begin{aligned} &\underbrace{\tfrac{1}{2}\left|\underline{L}^\mu \partial_\mu A_L + L^\mu \partial_\mu A_L + \sum_{i=1}^{n-1} S^{i\mu}\partial_\mu A_L\right|}_{=|\partial A|_{\mathcal{L}}} \leqslant O(|h|\,|\partial A|) \qquad (5.5)\\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\underbrace{\left|L^\mu \partial_\mu A_L + \sum_{i=1}^{n-1} S^{1\mu}\partial_\mu A_L + L^\mu \partial_\mu A_{\underline{L}} + 2\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\partial_{S^i} A_{S^i}\Big)\right|}_{\leqslant C\left|\bar{\partial} A\right|}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

5.1. Étude du terme source F_M de (1.18)

Le lemme suivant est fondamental pour l'estimation du terme $Z^I F_M$, où les champs Z sont définis dans la section 10, estimation qui intervient lorsque l'on doit commuter l'équation (1.18) avec les champs de vecteurs Z^I (cf preuve du théorème 7.1 et annexe A1) .

LEMME 5.2. — *Si $g_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ vérifie la condition harmonique* (1.4), *on a*

$$|F(h)(\partial h, \partial h)|_{\mathcal{TU}} \leqslant C \left|\bar{\partial} h\right| |\partial h| + O(|h|\,|\partial h|^2) \tag{5.6}$$

$$|F(h)(\partial h, \partial h)| \leqslant C\,|\partial h|^2_{\mathcal{TU}} + C\left|\bar{\partial} h\right| |\partial h| + O(|h|\,|\partial h|^2) \tag{5.7}$$

Si, en plus, A vérifie la condition de Lorenz (1.5) *(et donc* (5.1) *est vérifiée), alors*

$$\left|\tilde{F}(h)(\partial A, \partial A)\right|_{\mathcal{TU}} \leqslant C\left|\bar{\partial} A\right||\partial A| + O(|h|\,|\partial A|^2) \tag{5.8}$$

$$\left|\tilde{F}(h)(\partial A, \partial A)\right| \leqslant C\,|\partial A|^2 + O(|h|\,|\partial A|^2) \tag{5.9}$$

$$\left|F^A_\sigma(h)(\partial h, \partial h)\right| \leqslant C\left|\bar{\partial} h\right||\partial A| + C\left|\bar{\partial} A\right||\partial h| + O(|h|\,|\partial h|\,|\partial A|)$$

Preuve du lemme (5.2). —

Preuve de (5.6) *et* (5.7). — Cf preuve de la proposition 9.7 de [14]. (L'outil principal est la proposition 5.3 pour $|I| = 0$).

Preuve de (5.9). — L'estimation est évidente.

Preuve de (5.8). —

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\mu\nu}(h)(\partial A, \partial A) = \quad & -4\underbrace{m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\nu A_\alpha}_{\tilde{P}_{\mu\nu}(\partial A, \partial A)} \\ & + 4\underbrace{m^{\alpha\beta}\partial_\beta A_\mu(\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + 4m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\alpha A_\nu}_{\tilde{Q}^1_{\mu\nu}(\partial A, \partial A)} \\ & + \frac{2}{n-1}\underbrace{m_{\mu\nu}m^{\alpha\sigma}m^{\beta\tau}(\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\sigma)}_{\tilde{Q}^2_{\mu\nu}(\partial A, \partial A)} \\ & + O(|h|\,|\partial A|^2)\end{aligned} \tag{5.10}$$

On peut montrer, en utilisant le lemme 5.1 que

$$\left|\tilde{Q}^1_{\mu\nu}(\partial A, \partial A) + \tilde{Q}^2_{\mu\nu}(\partial A, \partial A)\right| \leqslant \left|\bar{\partial} A\right||\partial A| + O(|h|\,|\partial A|^2) \tag{5.11}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\left|\tilde{P}_{\mu\nu}(\partial A, \partial A)\right|_{\mathcal{TU}} &= \left|m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\nu A_\alpha\right|_{\mathcal{TU}} \\ &= \sum_{T\in\mathcal{T}, U\in\mathcal{U}} \left|m^{\alpha\beta}\partial_\mu A_\beta \partial_\nu A_\alpha T^\mu U^\nu\right| \\ &\leqslant C\left|\bar{\partial} A\right||\partial A|\end{aligned} \tag{5.12}$$

(5.11) et (5.12) implique le résultat souhaité.

Preuve de (5.10). — On a

$$F_\sigma^A(h)(\partial h, \partial A) = \underbrace{m^{\nu\beta} m^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\nu\sigma} \partial_\alpha A_\beta}_{a} - \underbrace{m^{\nu\beta} m^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\nu\sigma} \partial_\beta A_\alpha}_{b} \tag{5.13}$$

$$+ \underbrace{m^{\rho\mu} m^{\lambda\alpha} \partial_\sigma h_{\rho\lambda} \partial_\mu A_\alpha}_{c} \tag{5.14}$$

$$+ O(|h|\,|\partial h|\,|\partial A|) \tag{5.15}$$

Comme $m^{\underline{L}\underline{L}} = 0$, on a clairement $|a| \leqslant \left|\bar\partial h\right| |\partial A| + \left|\bar\partial A\right| |\partial h|$.

Pour b, si $(\beta, \mu) \neq (\underline{L}, \underline{L})$, l'estimation est triviale. Si $(\beta, \mu) = (\underline{L}, \underline{L})$, on est amené à estimer $-m^{L\underline{L}} m^{\underline{L}L} \partial_{\underline{L}} h_{L\sigma} \partial_{\underline{L}} A_L$ et le résultat suit en utilisant le lemme 5.1.

Pour c, la seule estimation non triviale intervient quand $(\mu, \sigma) = (\underline{L}, \underline{L})$, i.e. on doit estimer

$$m^{L\underline{L}} m^{\lambda\alpha} \partial_{\underline{L}} h_{L\lambda} \partial_{\underline{L}} A_\alpha \ . \tag{5.16}$$

Or, la condition d'harmonicité (1.4), écrite sous la forme

$$g^{\beta\mu} \partial_\mu g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \ ,$$

nous donne

$$\begin{aligned} m^{L\underline{L}} \partial_{\underline{L}} h_{L\lambda} = \quad & m^{\underline{L}L} \partial_\lambda h_{\underline{L}L} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} m^{S^i S^j} \partial_\lambda h_{S^i S^j} \\ & - m^{\underline{L}L} \partial_L h_{\underline{L}\lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} m^{S^i S^j} \partial_{S^i} h_{S^j \lambda} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} m^{S^i S^j} \partial_{S^j} h_{S^i \lambda} \\ & + O(|h|\,|\partial h|) \ . \end{aligned} \tag{5.17}$$

En injectant (5.17) dans (5.16), on s'aperçoit que si $\lambda \neq \underline{L}$, on aboutit facilement à l'estimation voulue. Si $\lambda = \underline{L}$, on a alors $\alpha = L$ et on utilise le lemme 5.1 pour conclure.

5.2. Estimations de $\left|\partial Z^I h\right|_{\mathcal{LT}}$ et $\left|\partial Z^I h\right|_{\mathcal{LL}}$

La condition harmonique (1.4) permet de montrer la proposition suivante (proposition 8.2 de [14]) :

Proposition 5.3 (condition harmonique). — *Soient g une métrique Lorentzienne satisfaisant (1.4) relativement à un système de coordonnées*

$\{x^\mu\}_{\mu=0,\ldots,n}$ *et* I *un multi-index. Supposons que* $H^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - m^{\mu\nu}$ *vérifie la condition*

$$\left|Z^J H\right| \leqslant C, \quad \forall\,|J| \leqslant |I|/2, \quad \forall Z \in \mathcal{Z} \tag{5.18}$$

Alors il existe une constante C' *telle que*

$$\begin{aligned}&\left|\partial Z^I H\right|_{\mathcal{LT}} \leqslant \\ &C'\left(\sum_{|J|\leqslant|I|}\left|\bar\partial Z^J H\right| + \sum_{|J|\leqslant|I|-1}\left|\partial Z^J H\right| + \sum_{|I_1|+|I_2|\leqslant|I|}\left|Z^{I_2}H\right|\left|\partial Z^{I_1}H\right|\right)\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}&\left|\partial Z^I H\right|_{\mathcal{LL}} \leqslant \\ &C'\left(\sum_{|J|\leqslant|I|}\left|\bar\partial Z^J H\right| + \sum_{|J|\leqslant|I|-1}\left|\partial Z^J H\right|_{\mathcal{LT}}\right. \\ &\qquad\left. + \sum_{|J|\leqslant|I|-2}\left|\partial Z^J H\right| + \sum_{|I_1|+|I_2|\leqslant|I|}\left|Z^{I_2}H\right|\left|\partial Z^{I_1}H\right|\right)\end{aligned} \tag{5.20}$$

Les mêmes estimations sont valables pour $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - m_{\mu\nu}$ *.*

Preuve. — Cf. [14, Appendix D]. La preuve utilise uniquement la condition harmonique (1.4) et ne nécessite donc aucune modification dans le cas des équations d'Einstein-Maxwell.

Remarque. — La condition (5.18) est assurée par le corollaire 4.1.

Cette proposition entraîne en particulier le résultat suivant (qui permet d'assurer une partie de l'hypothèse (7.1) du théorème 7.1) :

Corollaire 5.4. — *Soit* $h = h^1 + h^0$ *une solution du système réduit d'Einstein-Maxwell* (1.14). *Supposons que* h^1 *vérifie* (2.3) *sur* $[0,T]$. *Alors pour tout* $t \in [0,T]$ *on a*

$$|\partial h|_{\mathcal{LT}} + |\partial Z h|_{\mathcal{LL}} \leqslant \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{-\delta}, & q>0\,. \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{-1-n}{2}+\delta}(1+|q|)^{1/2}, & q<0\,. \end{cases}$$

$$|h|_{\mathcal{LT}} + |Z h|_{\mathcal{LL}} \leqslant \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}, & q>0\,. \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{\frac{1-n}{2}}(1+|q|)^{1/2+\delta}, & q<0\,. \end{cases} \tag{5.21}$$

Ceci est l'équivalent des résultats (10.1) et (10.2) de [14]. Les outils principaux de la preuve sont la proposition 5.3 et le corollaire 4.1.

6. Estimations fortes de décroissance

Dans cette section, on améliore, quand $n = 3$, les estimations du corollaire 4.1. Ces estimations améliorées sont présentées dans la proposition 6.1. On note que les dimensions d'espace $n \geqslant 4$, cette proposition peut être directement déduite du corollaire 4.1 (la terminologie « estimations fortes » n'est donc pertinente qu'en dimension $n = 3$) ; les nouvelles estimations dîtes fortes serviront d'hypothèses pour le théorèmen 7.1. En comparaison de [14], la difficulté vient de l'étude des nouveaux termes introduits par l'équation de Maxwell.

Le corollaire 7.2 de [14] permet de montrer le résultat suivant :

Proposition 6.1 (Estimations fortes de décroissance). — *Soit* $(h = h^1 + h^0, A)$ *une solution des équations réduites d'Einstein-Maxwell* (1.14). *Supposons que* (h^1, A) *vérifie* (2.3) *sur l'intervalle* $[0, T]$. *Alors pour tout* $t \in [0, T]$, *on a :*

$$\text{pour } n = 3,\ |\partial A| + |\partial h|_{\mathcal{TU}} \leqslant C\varepsilon(1 + t + |q|)^{-1}\ , \tag{6.1}$$

$$\text{pour } n = 3,\ |\partial h| \leqslant C\varepsilon t^{-1} \ln t\ , \tag{6.2}$$

$$\text{pour } n \geqslant 4,\ |\partial A| + |\partial h| \leqslant C\varepsilon(1 + t + |q|)^{-1}. \tag{6.3}$$

Sous les mêmes hypothèses, soient $\gamma' < \gamma - \delta$ *et* $\mu' > \delta > 0$ *fixés. Alors il existe des constantes* M_k *et* C_k, *dépendant de* (γ', μ', δ), *telles que*

$$\left|\partial Z^I A(t,x)\right| + \left|\partial Z^I h^1(t,x)\right| \leqslant$$

$$\begin{cases} C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-1-\gamma'},\ q > 0\ , \\ C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-1/2+\mu'},\ q < 0\ , \end{cases} |I| = k \leqslant N/2 + 2\ , \tag{6.4}$$

$$\left|Z^I A(t,x)\right| + \left|Z^I h^1(t,x)\right| \leqslant$$

$$\begin{cases} C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-\gamma'},\ q > 0\ , \\ C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{1/2+\mu'},\ q < 0\ , \end{cases} |I| = k \leqslant N/2 + 2\ , \tag{6.5}$$

$$\left|\bar\partial Z^I A(t,x)\right| + \left|\bar\partial Z^I h^1(t,x)\right| \leqslant$$
$$\begin{cases} C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-2+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{-\gamma'},\ q > 0\ , \\ C_k\varepsilon(1+t+|q|)^{-2+M_k\varepsilon}(1+|q|)^{1/2+\mu'},\ q < 0\ , \end{cases} |I| = k \leqslant N/2 + 1\ . \tag{6.6}$$

Les mêmes estimations sont vraies pour h^0 *avec* γ' *remplacée par* $M_k\varepsilon$.

Preuve de (6.1), (6.2) *et* (6.3) *.—*

• Montrons tout d'abord que $|\partial A| \leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1}$ quand $n=3$.

Posons $n(t) = (1+t+|q|)\,|\partial A|$.
En utilisant la proposition 9.3 avec $\phi = A$ et $F = F^A$, et $\bar{w}(q) = 1$ (donc $\alpha = 0$)), on a :

$$n(t) \leqslant \underbrace{C \sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} \sum_{|I|\leqslant 1} \left\|Z^I A\right\|_{L^\infty}}_{(I)} + \underbrace{C\int_0^t (1+\tau)\left\|F^A\right\|_{L^\infty(D_\tau)}\,d\tau}_{(II)} \tag{6.7}$$
$$+ \underbrace{C\int_0^t \sum_{|I|\leqslant 2} (1+\tau)^{-1}\left\|Z^I A\right\|_{L^\infty(D_\tau})\,d\tau}_{(III)}$$

Montrons que (I), (II) et (III) sont majorés par $C\varepsilon$.

$(I) \leqslant C\varepsilon$ d'après le corollaire 4.1.
Dans D_τ, on a $1+\tau \sim 1+\tau+|r-\tau|$, d'où, en utilisant le corollaire 4.1 :

$$\begin{aligned}
&(III) \qquad\qquad (6.8)\\
&\leqslant C\varepsilon\int_0^t \sum_{|I|\leqslant 2}(1+\tau+|r-\tau|)^{-1}(1+\tau+|r-\tau|)^{-1+\delta}(1+\tau+|r-\tau|)^{1/2}\\
&\leqslant C\varepsilon\int_0^t (1+\tau+|r-\tau|)^{-1+(\delta-1/2)}\\
&\leqslant C\varepsilon\int_0^t (1+\tau+|r-\tau|)^{-1-a}, \quad \text{avec } a>0\\
&\leqslant C\varepsilon
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le lemme 5.2 et le corollaire 4.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
(II) &\leqslant C\int_0^t (1+\tau)\left\|\left|\bar{\partial}h\right||\partial A| + \left|\bar{\partial}A\right||\partial h| + O(|h|\,|\partial h|\,|\partial A|)\right\|_{L^\infty(D_\tau)} \qquad (6.9)\\
&\leqslant C\varepsilon\int_0^t (1+\tau+|r-\tau|)(1+\tau+|r-\tau|)^{\delta-3/2}\\
&\qquad (1+\tau+|r-\tau|)^{-1+\delta}(1+|r-\tau|)^{-1/2}\\
&\leqslant C\varepsilon\int_0^t (1+|r-\tau|)^{-2+2\delta}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \quad C\varepsilon \int_0^t (1+|r-\tau|)^{-1-a}, \quad \text{avec } a>0$$
$$\leqslant \quad C\varepsilon$$

• Pour les estimations sur h de (6.1) et (6.2), on peut adapter les preuves de (10.3) et (10.4) de [14]. En effet, en utilisant le lemme 5.2 et le corollaire 4.1, on montre le lemme suivant :

Lemme 6.2. — *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition 6.1 et* $(F,\tilde{F})$ *tel que dans* (1.18) *Alors*

$$\left|F+\tilde{F}\right|_{\mathcal{TU}} \leqslant C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}\left|\partial h\right| + C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}\left|\partial A\right| \tag{6.10}$$
$$\left|F+\tilde{F}\right| \leqslant C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}\left|\partial h\right| + C\varepsilon t^{\frac{-3}{2}+\delta}\left|\partial A\right| + C\left|\partial h\right|^2_{\mathcal{TU}} + C\left|\partial A\right|^2 \tag{6.11}$$

En utilisant la proposition 9.3, ainsi que $|\partial A| \leqslant C\varepsilon(1+t)^{-1}$, on a :

Lemme 6.3. — *Avec une constante* C *dépendant de* $\gamma>0$

$$\begin{aligned}(1+t)\left\|\left|\partial h\right|_{\mathcal{TU}}(t,.)+\left|\partial A\right|(t,.)\right\|_{L^\infty} \\ \leqslant C\varepsilon + C\varepsilon\int_0^t (1+\tau)^{\delta-\frac{1}{2}}\left\|\partial h(\tau,.)+\partial A(\tau,.)\right\|_{L^\infty} d\tau\,.\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}(1+t)\left\|\left|\partial h\right|(t,.)+\left|\partial A\right|(t,.)\right\|_{L^\infty} \leqslant C\varepsilon \\ +C\varepsilon\int_0^t (1+\tau)^{\delta-\frac{1}{2}}\left\|\partial h(\tau,.)+\partial A(\tau,.)\right\|_{L^\infty} \\ +(1+\tau)\left\|\left|\partial h\right|_{\mathcal{TU}}(\tau,.)+\left|\partial A\right|(\tau,.)\right\|^2_{L^\infty} d\tau\,.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Et on conclut en utilisant le lemme 10.7 de [14] avec
$b(t)=(1+t)\left\|\left|\partial h\right|_{\mathcal{TU}}(t,.)+\left|\partial A\right|(t,.)\right\|_{L^\infty}$,
$c(t)=(1+t)\left\|\left|\partial h\right|(t,.)+\left|\partial A\right|(t,.)\right\|_{L^\infty}$ et $a=1/2-\delta$:

Lemme 6.4 (lemme 10.7 de [14]). — *Supposons que les fonctions* $b(t)\geqslant 0$ *et* $c(t)\geqslant 0$ *satisfont*

$$b(t) \leqslant C\varepsilon\Big(\int_0^t (1+s)^{-1-a}c(s)\,ds+1\Big) \tag{6.14}$$
$$c(t) \leqslant C\varepsilon\Big(\int_0^t (1+s)^{-1-a}c(s)\,ds+1\Big)+C\int_0^t (1+s)^{-1}b^2(s)\,ds \tag{6.15}$$

pour certaines constantes positives telles que $a \geqslant C^2\varepsilon$ *et* $a \geqslant 4C\varepsilon/(1-2C\varepsilon)$. *Alors*

$$b(t) \leqslant 2C\varepsilon, \qquad et \qquad c(t) \leqslant 2C\varepsilon\big(1 + a\ln(1+t)\big) \tag{6.16}$$

• (6.3) découle du corollaire 4.1.

Preuve de (6.4), (6.5) *et* (6.6). —

Pour une dimension d'espace $n \geqslant 4$, le résultat découle du corollaire 4.1.

Pour $n = 3$, on adapte la preuve de (10.5) de [14] : on suppose que (6.4) est vraie pour $|I| \leqslant k$ et on cherche à prouver l'estimation pour $|I| = k+1$ (les arguments ci-dessous pouvant être appliqués au cas $k = 0$). D'après (9.20) on a pour tout $|I| \leqslant N/2+2$ avec $N \geqslant 6 + 2[\frac{n+2}{2}]$:

$$\begin{aligned}\left|Z^I F_M\right| &\leqslant C\varepsilon \sum_{|K|\leqslant|I|} \frac{\left|\partial Z^K h\right| + \left|\partial Z^K A\right|}{1+t} \\ &+C \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|, |J|\leqslant|K|<|I|} (\left|\partial Z^J h\right| + \left|\partial Z^J A\right|)(\left|\partial Z^K h\right| + \left|\partial Z^K A\right|).\end{aligned} \tag{6.17}$$

En utilisant la proposition 5.3 de [14] p. 25 (avec $\phi = \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$ et $F = F_M$), on a

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right| \\ &\leqslant C\left(\left|Z^I F_M\right| + \left|Z^I F^0\right| + (1+t+|q|)^{-1} \sum_{|K|\leqslant|I|, |J|+(|K|-1)_+\leqslant|I|} \left|Z^J H\right| \left(\left|\partial Z^K h^1\right| + \left|\partial Z^K A\right|\right)\right) \\ &+\frac{C}{1+|q|} \sum_{|K|\leqslant|I|} \left(\sum_{|J|+(|K|-1)_+\leqslant|I|} \left|Z^J H\right|_{\mathcal{LL}} + \sum_{|J'|+(|K|-1)_+\leqslant|I|-1} \left|Z^{J'} H\right|_{\mathcal{LT}} + \sum_{|J''|+(|K|-1)_+\leqslant|I|-2} \left|Z^{J''} H\right| \right) \\ &\qquad \left(\left|\partial Z^K h^1\right| + \left|\partial Z^K A\right|\right).\end{aligned} \tag{6.18}$$

Et on conclut en utilisant le même raisonnement que dans [14], en posant $n_{k+1}(t) = (1+t+|q|) \sum_{|I|\leqslant k+1} \left\|\bar{w}(q)\left(\left|\partial Z^I h^1\right| + \left|\partial Z^I A\right|\right)\right\|_{L^\infty}$ et en se servant de la proposition 9.3 avec $\phi = Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$.En effet, la proposition 9.3 entraîne (en utilisant le corollaire 4.1) :

$$n_{k+1}(t) \tag{6.19}$$
$$\leqslant \underbrace{C\varepsilon + C\varepsilon \int_0^t (1+\tau)^{-1}\left(\varepsilon n_{k+1}(t) + \varepsilon^2(1+\tau)^{C\varepsilon} + \varepsilon(1+\tau)^{-\frac{1}{2}-\mu'}\right) d\tau}_{N(t)}$$

On doit montrer que $N(t) \leqslant C\varepsilon(1+t)^{C\varepsilon}$ pour une certaine constante C. Or

$$|N'(t)| \leqslant C(1+\tau)^{-1}\left(\varepsilon n_{k+1}(t) + \varepsilon^2(1+\tau)^{C\varepsilon} + \varepsilon(1+\tau)^{-\frac{1}{2}-\mu'}\right) \tag{6.20}$$
$$\underbrace{\leqslant}_{\text{d'après (6.20)}} C\varepsilon(1+t)^{-1}\left(N(t) + \varepsilon(1+t)^{C\varepsilon}\right). \tag{6.21}$$

Ainsi

$$(N(t)(1+t)^{-2C\varepsilon})' \tag{6.22}$$
$$= (1+t)^{-2C\varepsilon}(N'(t) - 2C\varepsilon N(t)(1+t)^{-1})$$
$$\underbrace{\leqslant}_{\text{d'après (6.21)}} (1+t)^{-2C\varepsilon}$$
$$\left(C\varepsilon^2(1+t)^{-1+C\varepsilon} + \underbrace{C\varepsilon(1+t)^{-1}N(t) - 2C\varepsilon N(t)(1+t)^{-1}}_{\leqslant 0}\right)$$
$$\leqslant C\varepsilon^2(1+t)^{-1-C\varepsilon}.$$

On a donc pour une certaine constante C'

$$N(t)(1+t)^{-2C\varepsilon} - N(0) \leqslant C'\varepsilon. \tag{6.23}$$

D'où

$$N(t) \leqslant (C'+C)\varepsilon(1+t)^{2C\varepsilon}. \tag{6.24}$$

Ceci prouve (6.4).

L'estimation (6.5) suit en intégrant (6.4) le long de $(\omega = y/|y|, \tau + |y| = \textit{constante})$ à partir de l'hyperplan $t = 0$, en utilisant (4.7), i.e.

$$\forall\ |I| \leqslant N-2 \qquad \left|Z^I h^1(0,x)\right| + \left|Z^I A(0,x)\right| \leqslant C\varepsilon(1+|x|)^{\frac{1-n}{2}-\gamma}.$$

•(6.6) vient de (6.5) et de l'inégalité

$$\left|\bar\partial Z^I \phi\right| \leqslant C\frac{1}{1+t+|q|}\sum_{|J|\leqslant|I|+1}\left|Z^J\phi\right|. \tag{6.25}$$

7. Théorème d'estimations fortes d'énergie

Adaptons la preuve du théorème 11.1 de [14] pour montrer le théorème :

THÉORÈME 7.1 (ESTIMATION FORTE D'ÉNERGIE). — *Soit* $(g_{\mu\nu}(t) = h_{\mu\nu}(t)+m_{\mu\nu}(t), A_\sigma(t))$ *une solution locale en temps des équations d'Einstein-Maxwell réduites (1.14) satisfaisant la condition harmonique et la jauge de Lorenz sur l'intervalle* $[0,T]$. *Supposons aussi que pour certains* $0 < \mu' < \frac{1}{2}$ *et* $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, *on ait les estimations suivantes pour* $0 \leqslant t \leqslant T$ *et pour tout multi-indices* $|I| \leqslant N/2+1$ *:*

$$|\partial A| + |\partial H|_{\mathcal{TU}} + (1+|q|)^{-1}\,|H|_{\mathcal{TL}} + (1+|q|)^{-1}\,|ZH|_{\mathcal{LL}} \tag{7.1}$$
$$\leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1}$$

$$\left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}\right| + \frac{\left|Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+|q|} + \frac{1+t+|q|}{1+|q|}\left(\left|\bar\partial Z^I \begin{pmatrix} h \\ A \end{pmatrix}\right|\right) \tag{7.2}$$
$$\leqslant \begin{cases} C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+C\varepsilon}(1+|q|)^{-1-C\varepsilon}, & q>0 \\ C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1+C\varepsilon}(1+|q|)^{-1/2+\mu'}, & q<0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\mathcal{E}_N^{Maxwell}(0)} + M \leqslant \varepsilon \quad si\ n=3, \tag{7.3}$$
$$\sqrt{\mathcal{E}_N^{Maxwell}(0)} \leqslant \varepsilon \qquad si\ n \geqslant 4.$$

Soit $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ *définie par (10.4), alors il existe une constante c indépendante de* T *telle que si* $\varepsilon \leqslant c^{-2}$ *on a l'estimation d'énergie :*

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leqslant C_N\varepsilon^2(1+t)^{c\varepsilon}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7.4}$$

où C_N *est une constante dépendant uniquement de* N.

7.1. Fin de la preuve du théorème 2.1

Rappelons que T a été défini comme le temps maximal tel que l'inégalité d'énergie (2.3)

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leqslant 2C_N\varepsilon^2(1+t)^{2\delta}$$

soit vraie pour $0 \leqslant t \leqslant T$. Ayant supposé cette inégalité, on a pu établir la proposition 6.1. Or, on peut vérifier que les hypothèses (7.1) et (7.2) du théorème 7.1 sont assurées par le corollaire 5.4 et la proposition 6.1.

La conclusion du théorème 7.1 montre qu'on a alors :

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leqslant C_N \varepsilon^2 (1+t)^{c\varepsilon}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{7.5}$$

Par conséquent, si on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on peut montrer que $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) \leqslant C_N \varepsilon^2 (1+t)^{2\delta}$, contredisant, par un argument de continuité, la maximalité de T et entraînant que (g, A) est une solution globale. Le fait que $(\mathbb{R}^{n+1}, g)$ est alors géodésiquement complète peut être établi par des arguments identiques à ceux de [13] (cf.section 8).

7.2. Preuve du théorème 7.1

Dans un premier temps, on cherche à appliquer la proposition 9.2 à la fonction $\phi = Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$.

On a :

$$\tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} = \tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} - \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} + \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Posant, par analogie avec (11.11) de [14], $D_M^I = \tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} - \hat{Z}^I \tilde{\Box}_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$, on a, d'après (1.18) et (7.6) :

$$\left| \tilde{\Box}_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right| \leqslant \left| D_M^I \right| + \left| Z^I F_M \right| + \left| Z^I F^0 \right|, \tag{7.7}$$

où $F^0 = \tilde{\Box}_g h^0$. On arrive ainsi, en utilisant la proposition 9.2, à :

$$\begin{aligned}
&\int_{\sum_\tau} \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w + \int_0^t \int_{\sum_\tau} \left| \bar{\partial} Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w' \\
&\leqslant 8 \int_{\sum_0} \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w + C\varepsilon \int_0^t \int_{\sum_\tau} \frac{\left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2}{(1+t)} w \\
&+ 16 \underbrace{\int_0^t \int_{\sum_\tau} \varepsilon^{-1} (\left| Z^I F_M \right|^2 (1+t) w}_{(i)} + 16 \underbrace{\int_0^t \int_{\sum_\tau} \varepsilon^{-1} \left| D_M^I \right|^2)(1+t) w}_{(ii)} \\
&+ 16 \underbrace{\int_0^t \int_{\sum_\tau} \left| Z^I F^0 \right| \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right| w}_{(iii)}.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Les estimations des termes (i), (ii) et (iii) font respectivement l'objet des lemmes 7.2, 7.3 et 7.4 suivants :

Lemme 7.2. — *Pour tout* $|I| \leqslant N$ *on a :*

$$\int_0^t \int_{\sum_\tau} \varepsilon^{-1}(\left|Z^I F_M\right|^2 (1+t)w \tag{7.9}$$

$$\leqslant C\varepsilon \sum_{|J|\leqslant|I|} \int_0^t \int_{\sum_\tau} \left(\frac{\left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|^2}{(1+t)} w + \left|\bar\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|^2 w' \right)$$

$$+ C\varepsilon \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \int_0^t \int_{\sum_\tau} \frac{\left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|^2}{(1+t)^{1-2C\varepsilon}} w + C\varepsilon^3 .$$

Preuve. — On peut montrer (cf. Annexe A1, (9.1)) une estimation de $\left|Z^I F_M\right|$ analogue à celle de $\left|Z^I F\right|$ du lemme 11.2 de [14] p.43. Cette dernière estimation entraîne le lemme 7.2 (cf lemme 11.13 de [14] p.43-44). On utilise l'inégalité de Hardy de la proposition 9.4.

Lemme 7.3. — *Pour tout* $|I| \leqslant N$, *on a :*

$$\varepsilon^{-1} \int_0^t \int_{\sum_\tau} \left| \tilde\Box_g Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} - \hat Z^I \tilde\Box_g \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 (1+t)w \tag{7.10}$$

$$\leqslant C\varepsilon \sum_{|J|\leqslant|I|} \int_0^t \int_{\sum_\tau} (\frac{\left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|^2}{(1+t)} w + \left|\bar\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|^2 w')$$

$$+ C\varepsilon \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \int_0^t \int_{\sum_\tau} \frac{\left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|^2}{(1+t)^{1-2C\varepsilon}} w + C\varepsilon^3 .$$

Preuve. — On peut reprendre la preuve du lemme 11.5 de [14] (p.46) : on trouve une estimation analogue à (11.21) de [14] avec h^1 remplacée par $\begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$. La preuve est ensuite séparéé en deux parties :

- $|K| \leqslant N/2 + 1$ où on utilise alors l' hypothèse (7.2) et la preuve reste la même que dans [14] en prenant $\begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$ à la place de h^1.

• $|K| \geqslant N/2$, là encore, la preuve reste identique à celle de [14] en prenant $\begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$ à la place de h^1.

Lemme 7.4. — *Pour tout $|I| \leqslant N$ on a :*

$$\int_0^t \int_{\sum_\tau} |Z^I F^0| \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right| w \leqslant C_N \varepsilon \tag{7.11}$$

$$\sum_{|J| \leqslant |I|} \left(\int_0^t \int_{\sum_\tau} \frac{\left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2}{(1+t)^2} w + \int_0^t \left(\int_{\sum_\tau} \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w\, dx \right)^{1/2} \frac{dt}{(1+t)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

où C_N est une constante qui ne dépends que de N.

Preuve. — Même preuve que celle du lemme 11.4 de [14] p.44 en prenant $\begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}$ à la place de h^1.

En utilisant ces trois lemmes et (7.8) on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\sum_t} \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w + \int_0^t \int_{\sum_\tau} \left| \bar{\partial} Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w' \qquad\qquad \\
\leqslant 8 \int_{\sum_0} \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w \\
+ C_N \varepsilon \sum_{|J| \leqslant |I|} \int_0^t \frac{1}{(1+t)^{3/2}} \left(\int_{\sum_\tau} \left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w\, dx \right)^{1/2} dt \\
+ C\varepsilon \sum_{|J| \leqslant |I|} \int_0^t \int_{\sum_\tau} \left(\frac{\left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2}{(1+t)} w + \left| \bar{\partial} Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2 w' \right) \\
+ C\varepsilon \sum_{|J| \leqslant |I|-1} \int_0^t \int_{\sum_\tau} \frac{\left| \partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix} \right|^2}{(1+t)^{1-2C\varepsilon}} w + C\varepsilon^3 .
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Soit $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t)$ définie par (10.10), soit $\mathcal{S}_N^{Maxwell}(t)$ définie par (10.11), on a donc pour $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) + \mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) \leqslant 8\mathcal{E}_k^{Maxwell}(0) + C\varepsilon \mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) + C\varepsilon^3 \tag{7.13}$$

$$+\int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau}\,d\tau+\int_0^t \frac{C_N\varepsilon\sqrt{\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau+\int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_{k-1}^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}}\,d\tau\,.$$

On peut alors conclure de la même façon que dans [14] p.45 : On choisit $C\varepsilon \leqslant 1/2$ de tel sorte qu'on puisse absorber le terme $C\varepsilon\mathcal{S}_k^{Maxwell}(t)$ dans le terme de gauche $\mathcal{S}_k^{Maxwell}(t)$, multipliant ainsi par 2 les constantes du membre de droite :

$$\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t)+\mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) \leqslant 16\mathcal{E}_k^{Maxwell}(0)+C\varepsilon^3 \tag{7.14}$$

$$+\int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau}\,d\tau+\int_0^t \frac{C_N\varepsilon\sqrt{\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau+\int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_{k-1}^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}}\,d\tau\,.$$

On voit ensuite que :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{C_N\varepsilon\sqrt{\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau &\leqslant \int_0^t \frac{4C_N^2\varepsilon^2+1/4\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau \\ &\leqslant C_N\varepsilon^2+\int_0^t \frac{1/4\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{3/2}}\,d\tau \\ &\leqslant C_N\varepsilon^2+1/2\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) \quad car\,\mathcal{E}_k^{Maxwell}\,est\,croissante\,.\end{aligned} \tag{7.15}$$

En utilisant l'hypothèse $\mathcal{E}_N^{Maxwell}(0) \leqslant \varepsilon^2$, on obtient alors, pour ε suffisamment petit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t)+\mathcal{S}_k^{Maxwell}(t) &\leqslant C_N\varepsilon^2 \\ &+\int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau}\,d\tau+\int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_{k-1}^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}}\,d\tau\,,\end{aligned} \tag{7.16}$$

où le dernier terme est absent pour $k=0$ et C_N est une constante dépendant uniquement de N.

Pour $k=0$, cela entraîne que :

$$\mathcal{E}_0^{Maxwell}(t) \leqslant C_N\varepsilon^2+\int_0^t \frac{c_0\varepsilon\mathcal{E}_0^{Maxwell}(\tau)}{(1+\tau)}\,d\tau\,. \tag{7.17}$$

On utilise alors le lemme de Gronwall suivant : Soient $\psi, y : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant :

$$\exists c \geqslant 0, \forall t \in [a,b] : \quad y(t) \leqslant c+\int_a^t \psi(s)y(s)\,ds\,,$$

alors :

$$\forall t \in [a,b] \quad y(t) \leqslant c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right).$$

Et on trouve :

$$\mathcal{E}_0^{Maxwell}(t) \leqslant C_N(1+t)^{c_0\varepsilon}. \tag{7.18}$$

En supposant que (7.4) est vraie au rang $k-1$, on obtient, d'après (7.16) :

$$\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t) \leqslant \underbrace{C_N\varepsilon^2 + \int_0^t \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(\tau)}{1+\tau}\, d\tau + \int_0^t \frac{C\varepsilon^3}{(1+\tau)^{1-C\varepsilon}}\, d\tau}_{G(t)}\ . \tag{7.19}$$

On voit que :

$$G'(t) \leqslant \frac{C\varepsilon\mathcal{E}_k^{Maxwell}(t)}{(1+t)} + \frac{C\varepsilon^3}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \underbrace{\leqslant}_{\text{d'après (7.19)}} \frac{C\varepsilon G(t)}{(1+t)} + \frac{C\varepsilon^3}{(1+t)^{1-C\varepsilon}}. \tag{7.20}$$

On a :

$$\left(G(t)(1+t)^{-C\varepsilon}\right)' = \left(G'(t) - \frac{C\varepsilon}{1+t}G(t)\right)(1+t)^{-C\varepsilon} \leqslant \frac{C\varepsilon^3}{1+t}. \tag{7.21}$$

Enfin, en utilisant que pour $t \geqslant 0$, on a $C\varepsilon \ln(1+t) \leqslant (1+t)^{C\varepsilon}$, on obtient par intégration :

$$\begin{aligned} G(t) &\leqslant G(0)(1+t)^{C\varepsilon} + C\varepsilon^3(1+t)^{C\varepsilon} \\ &\leqslant C_N\varepsilon^2(1+t)^{C\varepsilon} + C\varepsilon^3(1+t)^{2C\varepsilon} \\ &\leqslant C_N\varepsilon^2(1+t)^{2C\varepsilon}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Ceci termine la récurrence et la preuve du théorème.

8. Complétude géodésique

Proposition 8.1. — *Supposons que $h = g - m$ satisfait les estimations*[2] *suivantes :*

$$|h||\partial h| + |\partial h|_{\mathcal{TU}} + |\bar{\partial} h|_{\underline{LL}} \leqslant C\varepsilon t^{-1}, \tag{8.1}$$

$$|\partial h(t,x)| \leqslant C\varepsilon t^{-1}, \quad \textit{pour} \quad |x| \leqslant t/2 \tag{8.2}$$

Soit $X(\tau)$ une géodésique. Alors les valeurs du paramètre τ parcourent l'intervalle $[0,\infty)$.

---

(2) Ces estimations sont consistantes avec les estimations de décroissance prouvées pour h dans la proposition 6.1.

On note :

$$X(\tau) = (x^0(\tau), x(\tau)) = (t(\tau), x(\tau)) = (t(\tau), r\omega(\tau))\,, \tag{8.3}$$

$$\begin{cases} \ddot{X}^\alpha(\tau) + \Gamma_{\beta\ \gamma}^{\ \alpha}(X(\tau))\dot{X}^\beta(\tau)\dot{X}^\gamma(\tau) = 0\,, \\ X(0) = Y \quad \dot{X}(0) = \zeta\,. \end{cases} \tag{8.4}$$

Prenant $\alpha = 0$ dans (8.4), on a :

$$\ddot{x}^0 + \frac{1}{2}(m^{0\sigma} + h^{0\sigma})(\partial_\beta h_{\gamma\sigma} + \partial_\gamma h_{\beta\sigma} - \partial_\sigma h_{\beta\gamma})\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0\,, \tag{8.5}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\ddot{x}^0 - \frac{1}{2}(2\partial_\beta h_{0\gamma} - \partial_0 h_{\beta\gamma})\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = O(|h|\,|\partial h|\,|\dot{x}|^2) \underbrace{=}_{\text{d'après (8.1)}} O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{8.6}$$

Comme on a

$$\partial_\beta h_{0\gamma}\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \frac{d}{d\tau}(h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma) - h_{0\gamma}\ddot{x}^\gamma\,, \tag{8.7}$$

on est ramené à étudier :

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma) - \frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2) - h_{0\gamma}\ddot{x}^\gamma\,. \tag{8.8}$$

D'après (8.4) et (8.1), on a

$$|h_{0\gamma}\ddot{x}^\gamma| \leqslant |h|\,|\Gamma|\,|\dot{x}|^2 \leqslant \varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2\,. \tag{8.9}$$

Ceci nous amène à considérer l'équation suivante :

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma) - \frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{8.10}$$

Notons ici qu'en dimension $n+1 \geqslant 5$, on a, d'après la proposition 6.1 :

$$\frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{8.11}$$

Pour $n = 3$, on a seulement $|\partial h(t,x)| \leqslant C\varepsilon t^{-1}$ quand $|x| \leqslant t/2$. Comme $\partial_0 = \partial_s - \partial_q$, on a (d'après (8.1)) :

$$-\frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \frac{1}{2}\partial_q h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{8.12}$$

Dans l'expression $\partial_q h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma$, seul le terme $\partial_q h_{\underline{LL}}\left|\dot{x}^{\underline{L}}\right|^2$ n'a pas la décroissance souhaitée (i.e. $\partial_q h_{\underline{LL}}\left|\dot{x}^{\underline{L}}\right|^2$ n'est pas $O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)$).
On peut donc écrire

$$-\frac{1}{2}\partial_0 h_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \frac{1}{2}\partial_q h_{\underline{LL}}\left|\dot{x}^{\underline{L}}\right|^2 + O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{8.13}$$

On utilise alors les écritures suivantes :

$$\dot{x}^{\underline{L}} = -\frac{1}{2}\dot{x}^{\alpha}L_{\alpha} = -\frac{1}{2}(-\dot{x}^0 + \frac{\dot{x}^i x_i}{|x|}) = -\frac{1}{2}(-\frac{d}{d\tau}(t-r)) = -\frac{\dot{q}}{2}\,, \tag{8.14}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_q h_{00} &= \partial_q h(\partial_t, \partial_t) = \partial_q h(\frac{L+\underline{L}}{2}, \frac{L+\underline{L}}{2}) \\ &= \frac{1}{4}\partial_q h_{LL} + \frac{1}{2}\partial_q h_{L\underline{L}} + \frac{1}{4}\partial_q h_{\underline{LL}} = \frac{1}{4}\partial_q h_{\underline{LL}} + O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1})\,.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Soit ξ une fonction cut-off de l'ensemble $r \geqslant \frac{x^0}{2}$.
On a

$$\begin{aligned}\partial_q h_{00} =& \quad (1-\xi)\partial_q h_{00} + \partial_q(\xi h_{00}) - \partial_q(\xi)h_{00} \\ =& \quad \partial_q \xi h_{00} + O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1})\,.\end{aligned} \tag{8.16}$$

Ainsi :

$$-\frac{1}{2}\partial_q h_{\underline{LL}}\left|\dot{x}^{\underline{L}}\right|^2 = \dot{q}^2(4\partial_q(\xi h_{00}) + O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}))\,. \tag{8.17}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(\xi h_{00}\dot{q}) &= \xi h_{00}\ddot{q} + \dot{q}\tfrac{d}{d\tau}(\xi h_{00}) \\ &= \xi h_{00}\ddot{q} + \dot{q}^2\partial_q(\xi h_{00}) + \dot{q}\dot{s}\partial_s(\xi h_{00}) + \dot{q}\dot{\omega}\partial_\omega(\xi h_{00}) \\ &= \xi h_{00}\ddot{q} + \dot{q}^2\partial_q(\xi h_{00}) + \partial_L(\xi h_{00})\dot{x}^L\dot{x}^{\underline{L}} + \partial_\omega(\xi h_{00})\dot{x}^\omega\dot{x}^{\underline{L}}\,.\end{aligned} \tag{8.18}$$

On a $\partial_\omega h_{00} = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1})$, $\partial_L h_{00} = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1})$, $\partial_\omega \xi(\frac{x_0}{r}) = 0$ et $\partial_L \xi(\frac{x_0}{r}) = O(\left|x^0+1\right|^{-1})$. On a donc

$$\dot{q}^2\partial_q(\xi h_{00}) = \frac{d}{d\tau}(\xi h_{00}\dot{q}) - \xi h_{00}\ddot{q} + O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}) \tag{8.19}$$

et

$$-\frac{1}{2}\partial_q h_{\underline{LL}}\left|\dot{x}^{\underline{L}}\right|^2 = \frac{d}{d\tau}(\xi h_{00}\dot{q}) - \xi h_{00}\ddot{q} + O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}\left|\dot{x}\right|^2)\,. \tag{8.20}$$

Pour l'instant, on a

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma + \xi h_{00}\dot{q}) - \xi h_{00}\ddot{q} = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}\left|\dot{x}\right|^2)\,. \tag{8.21}$$

Or

$$\ddot{q} = \frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - \frac{\dot{x}^i x_i}{|x|}) = \ddot{x}^0 - \frac{\ddot{x}^i x_i}{r} - r^{-1}(\left|\dot{x}\right|^2) - r^{-2}\left|x.\dot{x}\right|^2)\,. \tag{8.22}$$

En utilisant que $|\ddot{x}|^2 \leqslant |\Gamma|\,|\dot{x}|^2$ (d'après (8.4)), que $r^{-1} \leqslant |t|^{-1}$ dans le support de ξ et en se servant de (8.1), on obtient

$$\xi h_{00}\ddot{q} = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{8.23}$$

On peut ainsi se ramener à étudier

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^0 - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma + \xi h_{00}\dot{q}) = O(\varepsilon\left|x^0+1\right|^{-1}|\dot{x}|^2)\,. \tag{8.24}$$

Intégrons entre t_0 et t en utilisant que $|\dot{x}|^2 \leqslant \left|\dot{x}^0\right|^2 + C$:

$$\begin{aligned}&\left|\dot{x}^0(t) - \dot{x}^0(t_0) - h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma(t) + h_{0\gamma}\dot{x}^\gamma(t_0) + \xi h_{00}\dot{q}(t) - \xi h_{00}\dot{q}(t_0)\right| \\ &\qquad \leqslant \textstyle\int_{t_0}^t \left(C\varepsilon\left|x^0(s)+1\right|^{-1}\left|\dot{x}^0(s)\right|^2 + C\varepsilon\right)ds\,.\end{aligned} \tag{8.25}$$

Soit $V_0 = \dot{x}^0(t_0)$. On a :

$$\left|\dot{x}^0(t)\right| \leqslant C\left(|V_0|\,(1+\varepsilon)+\varepsilon+\varepsilon(t-t_0)\right) + \int_{t_0}^t C\varepsilon\left|x^0(s)+1\right|^{-1}\left|\dot{x}^0(s)\right|^2 ds\,. \tag{8.26}$$

On utilise alors le lemme de Gronwall suivant : soient $y, z \in C^1([t_0,t_1])$ et $\psi \in C^0([t_0,t_1],\mathbb{R}^+)$ satisfaisant pour tout t dans $[t_0,t_1]$:

$$y(t) \leqslant z(t) + \int_{t_0}^t \psi(s)y(s)\,ds$$

alors :

$$\forall t\in[t_0,t_1]\quad y(t) \leqslant z(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)\,ds\right) + \int_{t_0}^t \frac{dz}{dt}(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)\,du\right)ds.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\left|\dot{x}^0(t)\right| \leqslant\,& C(|V_0|\,(1+\varepsilon)+\varepsilon)\exp\left(\int_{t_0}^t C\varepsilon\left|x^0(s)+1\right|^{-1}\left|\dot{x}^0(s)\right|ds\,,\right) \\ &+ \int_{t_0}^t C\varepsilon\exp\left(\int_s^t C\varepsilon\left|x^0(u)+1\right|^{-1}\left|\dot{x}^0(u)\right|du\right)ds\,.\end{aligned} \tag{8.27}$$

Plusieurs cas sont alors possibles :

Si $V_0 > 0$ et $x^0(t_0) > 0$ ou si $V_0 < 0$ et $x^0(t_0) > 0$, on peut montrer que

$$\dot{x}^0(t) \leqslant C(x^0(t)+1)^{C\varepsilon}\left[(|V_0|\,(1+\varepsilon)+\varepsilon)(x^0(t_0)+1)^{-C\varepsilon} + \varepsilon(t-t_0)\right]. \tag{8.28}$$

Ceci peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}(x^0(t)+1)^{1-C\varepsilon} \leqslant C\left[(|V_0|(1+\varepsilon)+\varepsilon)(x^0(t_0)+1)^{-C\varepsilon}+\varepsilon(t-t_0)\right]. \tag{8.29}$$

En integrant, on trouve :

$$x^0(t)+1 \leqslant C\left[(|V_0|(1+\varepsilon)+\varepsilon)(x^0(t_0)+1)^{-C\varepsilon}(t-t_0)+\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)^2\right]. \tag{8.30}$$

Ainsi, x^0 reste borné en temps fini et, par (8.28), $\dot{x}^0$ reste aussi borné en temps fini.

9. Annexes

9.1. A1 : Estimation de $\left|Z^I F_M\right|$

L'estimation de $\left|Z^I F_M\right|$ est l'objet du lemme suivant :

Lemme 9.1. —

Pour F_M défini dans (1.18) *et pour tout* $|I| \leqslant N$*, on a :*

$$\begin{aligned}\left|Z^I F_M\right| \leqslant & \\ C\sum_{|J|\leqslant|I|} & \left(\frac{\varepsilon\left|\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\ A\end{pmatrix}\right|}{1+t}+\frac{\varepsilon(1+|q|)^{\mu'-1/2}\left|\bar\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\ A\end{pmatrix}\right|}{(1+t+|q|)^{1-C\varepsilon}}+\frac{\varepsilon^2\left|Z^J\begin{pmatrix}h^1\\ A\end{pmatrix}\right|}{(1+t+|q|)(1+|q|)}\right) \\ & +C\sum_{|J|\leqslant|I|-1}\frac{\varepsilon\left|\partial Z^J\begin{pmatrix}h^1\\ A\end{pmatrix}\right|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}}+\frac{\varepsilon^2}{(1+t+|q|)^4}.\end{aligned} \tag{9.1}$$

Preuve :
D'après (1.18), on a $\left|Z^I F_M\right| \leqslant \left|Z^I F\right| + \left|Z^I \tilde{F}\right| + \left|Z^I F^A\right|$. On va majorer chacun de ces trois derniers termes par le membre de droite de (9.1).

i) En suivant le même raisonnement que la preuve du lemme 11.2 de [14] (en tenant compte de la dimension n), on montre que $\left|Z^I F\right|$ vérifie (9.1).

ii) D'après le lemme 5.2, on a

$$\left|Z^I\tilde{F}(h)(\partial A,\partial A)\right| \leqslant C\underbrace{\sum_{|J|+|K|\leqslant|I|}\left|\partial Z^J A\right|\left|\partial Z^K A\right|}_{(1)} \tag{9.2}$$

$$+C \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|+|J_3|\leqslant|I|} \left|Z^{J_3}h\right| \left|\partial Z^{J_2}A\right| \left|\partial Z^{J_1}A\right|}_{(2)} .$$

iii) D'après le lemme 5.2, on a

$$\left|Z^I F^A(h)(\partial h, \partial A)\right| \leqslant \tag{9.3}$$
$$\underbrace{C \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|} \left(\left|\bar\partial Z^J h\right| \left|\partial Z^K A\right| + \left|\bar\partial Z^J A\right| \left|\partial Z^K h\right|\right)}_{(3)}$$
$$+ C \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|+|J_3|\leqslant|I|} \left|Z^{J_3}h\right| \left|\partial Z^{J_2}h\right| \left|\partial Z^{J_1}A\right|}_{(4)} .$$

Reste à estimer (1), (2), (3) et (4) :

Notons tout d'abord que

$$\forall\, |J|, \quad \left|Z^J h^0\right| \leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{-1} \text{ et } \left|\partial Z^J h^0\right| \leqslant C\varepsilon(1+t+|q|)^{-2} . \tag{9.4}$$

On a :

$$(1) \leqslant \quad |\partial A| \left|\partial Z^I A\right| + \sum_{|J|\leqslant|I|-1, |K|\leqslant\frac{|I|-1}{2}} \left|\partial Z^J A\right| \left|\partial Z^K A\right| \tag{9.5}$$
$$\leqslant \frac{C\varepsilon \left|\partial Z^I A\right|}{1+t} + \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \frac{C\varepsilon \left|\partial Z^J A\right|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \quad d'\,après\,(7.1)\,et\,(7.2) .$$

De plus,

$$(2) \leqslant \quad \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant|I|} |h| \left|\partial Z^{J_2}A\right| \left|\partial Z^{J_1}A\right|}_{a} \tag{9.6}$$
$$+ \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant|I|-1, 1\leqslant|J_3|\leqslant|I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]} \left|Z^{J_3}h\right| \left|\partial Z^{J_2}A\right| \left|\partial Z^{J_1}A\right|}_{b}$$
$$\underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant\left[\frac{n+2}{2}\right]-1, |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\leqslant|J_3|\leqslant|I|} \left|Z^{J_3}h\right| \left|\partial Z^{J_2}A\right| \left|\partial Z^{J_1}A\right|}_{c} .$$

Or

$$a \leqslant \; C\,|\partial A|\,\left|\partial Z^I A\right| + C \sum_{|J|\leqslant |I|-1, |K|\leqslant \frac{|I|-1}{2}} \left|\partial Z^J A\right|\left|\partial Z^K A\right| \tag{9.7}$$

car $|h| \leqslant C$ d'après le corollaire 4.1

$$\leqslant \quad \frac{C\varepsilon\left|\partial Z^I A\right|}{1+t} + \sum_{|J|\leqslant |I|-1} \frac{C\varepsilon\left|\partial Z^J A\right|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \quad \text{d'après (7.1) et (7.2)}$$

$$b \leqslant \; C \sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant |I|-1} \left|\partial Z^{J_2} A\right|\left|\partial Z^{J_1} A\right| \text{car } \left|Z^{J_3} h\right| \leqslant C \tag{9.8}$$

si $1 \leqslant |J_3| \leqslant N - \left[\dfrac{n+2}{2}\right]$ d'après le corollaire 4.1.

$$\leqslant \quad \sum_{|J|\leqslant |I|-1} \frac{C\varepsilon\left|\partial Z^J A\right|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \quad \text{d'après (7.2).}$$

$$c \leqslant \; C \sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant\left[\frac{n+2}{2}\right]-1, |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\leqslant |J_3|\leqslant |I|} \left|Z^{J_3} h^1\right|\left|\partial Z^{J_2} A\right|\left|\partial Z^{J_1} A\right| \tag{9.9}$$

$$+C \sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant\left[\frac{n+2}{2}\right]-1, |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]-1\leqslant |J_3|\leqslant |I|} \left|Z^{J_3} h^0\right|\left|\partial Z^{J_2} A\right|\left|\partial Z^{J_1} A\right|$$

$$\leqslant \quad C \sum_{|J|\leqslant |I|} \left(\frac{\varepsilon\left|\partial Z^J A\right|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2\left|Z^J h^1\right|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right)$$

d'après le corollaire 4.1 et (9.4) (car $N \geqslant 2\left[\frac{n+2}{2}\right] - 1$).

Ainsi

$$(2) \leqslant C \sum_{|J|\leqslant |I|} \left(\frac{\varepsilon\left|\partial Z^J A\right|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2\left|Z^J h^1\right|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right) + \sum_{|J|\leqslant |I|-1} \frac{C\varepsilon\left|\partial Z^J A\right|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}}\,. \tag{9.10}$$

Dans ce qui suit, on utilisera souvent que $\left|\bar\partial\phi\right| \leqslant C\,|\partial\phi|$. Revenons aux majorations :

$$(3) \leqslant C \underbrace{\sum_{|J|+|K|\leqslant |I|} \left|\bar\partial Z^J h\right|\left|\partial Z^K A\right|}_{d} + C \underbrace{\sum_{|J|+|K|\leqslant |I|} \left|\bar\partial Z^J A\right|\left|\partial Z^K h\right|}_{e}, \tag{9.11}$$

et on a :

$$d \leqslant C\,|\partial A|\left|\bar\partial Z^I h\right| + C\left|\partial Z^I A\right|\left|\bar\partial h\right| + C \sum_{|J|+|K|\leqslant |I|-1} \left|\bar\partial Z^J h\right|\left|\partial Z^K A\right| \tag{9.12}$$

$$\leqslant \; C\,|\partial A|\left|\bar\partial Z^I h^1\right| + C\left|\partial Z^I A\right|\left|\bar\partial h^1\right|$$

$$
\begin{aligned}
&+ C\varepsilon \sum_{|J|\leqslant|I|} \left|\partial Z^J A\right| (1+t)^{-1} \\
&+ C \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|-1} \left|\bar{\partial} Z^J h^1\right| \left|\partial Z^K A\right| \quad \text{par (9.4)} \\
\leqslant\ & C \sum_{|J|\leqslant|I|} \frac{\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} \\
&+ C \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|-1} \left|\bar{\partial} Z^J h^1\right| \left|\partial Z^K A\right| \quad \text{par (7.1) et (7.2)} \\
\leqslant\ & C \sum_{|J|\leqslant|I|} \frac{\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} + \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|-1, |J|\leqslant|I|/2, |K|\geqslant|I|/2} C \left|\bar{\partial} Z^J h^1\right| \left|\partial Z^K A\right| \\
&+ \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|-1, |J|\geqslant|I|/2, |K|\leqslant|I|/2} C \left|\bar{\partial} Z^J h^1\right| \left|\partial Z^K A\right| \\
&+ \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|-1, |J|\leqslant|I|/2, |K|\leqslant|I|/2} C \left|\bar{\partial} Z^J h^1\right| \left|\partial Z^K A\right| \\
\leqslant\ & C \sum_{|J|\leqslant|I|} \frac{\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} + \frac{C\varepsilon}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right| \quad \textit{par}\ (7.2)\,.
\end{aligned}
$$

Un calcul similaire donne

$$
\begin{aligned}
e \leqslant\ & \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|} C \left|\bar{\partial} Z^J A\right| \left|\partial Z^K h^1\right| + \frac{C\varepsilon}{1+t} \sum_{|J|\leqslant|I|} \left|\partial Z^J A\right| \ \textit{par}\ (9.4) \qquad (9.13) \\
\leqslant\ & C \sum_{|J|\leqslant|I|} \frac{\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} + C \sum_{|J|\leqslant|I|} \frac{\varepsilon (1+|q|)^{\mu'-1/2} \left|\bar{\partial} Z^J A\right|}{(1+t+|q|)^{1-C\varepsilon}} \ \textit{par}\ (7.2)\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
(3) \leqslant\ & C \sum_{|J|\leqslant|I|} \frac{\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} + C \sum_{|J|\leqslant|I|} \frac{\varepsilon (1+|q|)^{\mu'-1/2} \left|\bar{\partial} Z^J A\right|}{(1+t+|q|)^{1-C\varepsilon}} \qquad (9.14) \\
&+ \frac{C\varepsilon}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|\,.
\end{aligned}
$$

Enfin, on a

$$(4) \leqslant \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant|I|} |h| \left|\partial Z^{J_2} h\right| \left|\partial Z^{J_1} A\right|}_{a'} \tag{9.15}$$
$$+ \underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant|I|-1, 1\leqslant|J_3|\leqslant|I|\left[\frac{n+2}{2}\right]} \left|Z^{J_3} h\right| \left|\partial Z^{J_2} h\right| \left|\partial Z^{J_1} A\right|}_{b'}$$
$$\underbrace{\sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant\left[\frac{n+2}{2}\right]-1, |I|-\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\leqslant|J_3|\leqslant|I|} \left|Z^{J_3} h\right| \left|\partial Z^{J_2} h\right| \left|\partial Z^{J_1} A\right|}_{c'} .$$

D'aprs le corollaire 4.1, $|h|$ et $\left|Z^{J_3} h\right|$ pour $|J_3| \leqslant |I| - \left[\frac{n+2}{2}\right]$ sont bornés donc :

$$\begin{aligned} a' + b' &\leqslant \sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant|I|} C \left|\partial Z^{J_2} h^0\right| \left|\partial Z^{J_1} A\right| + \sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant|I|} C \left|\partial Z^{J_2} h^1\right| \left|\partial Z^{J_1} A\right| \\ &\leqslant \sum_{|K|\leqslant|I|} \frac{C\varepsilon}{1+t} \left|\partial Z^{J_1} A\right| + \sum_{|J_1|+|J_2|\leqslant|I|} C \left|\partial Z^{J_2} h^1\right| \left|\partial Z^{J_1} A\right| \ \textit{par}\,(9.4)\,. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Et par un calcul analogue à celui de l'estimation du terme a (cf (9.7)), on trouve :

$$a' + b' \leqslant \frac{C\varepsilon \left|\partial Z^I \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} + \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \frac{C\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} . \tag{9.17}$$

De même, par un calcul analogue à celui de l'estimation du terme c (cf (9.9)), on trouve :

$$c' \leqslant C \sum_{|J|\leqslant|I|} \left(\frac{\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2 \left|Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right) . \tag{9.18}$$

Ainsi

$$(4) \leqslant \quad C \sum_{|J|\leqslant|I|} \left(\frac{\varepsilon \left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{1+t} + \frac{\varepsilon^2 \left|Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{(1+t+|q|)(1+|q|)} \right) \tag{9.19}$$

$$+ \sum_{|J|\leqslant|I|-1} \frac{C\varepsilon\left|\partial Z^J \begin{pmatrix} h^1 \\ A \end{pmatrix}\right|}{(1+t)^{1-C\varepsilon}} .$$

Finalement, (9.5), (9.10), (9.14) et (9.19) montrent que (9.1) est vraie.

On peut aussi noter (pour l'annexe A2) que d'après (10.16) de [14], (9.3) et (9.2), et en utilisant le corollaire 4.1, on a pour tout $|I| \leqslant N/2+2$ avec $N \geqslant 6 + 2[\frac{n+2}{2}]$:

$$\left|Z^I F_M\right| \leqslant C\varepsilon \sum_{|K|\leqslant|I|} \frac{\left|\partial Z^K h\right| + \left|\partial Z^K A\right|}{1+t+|q|} \tag{9.20}$$
$$+ C \sum_{|J|+|K|\leqslant|I|, |J|\leqslant|K|<|I|} (\left|\partial Z^J h\right| + \left|\partial Z^J A\right|)(\left|\partial Z^K h\right| + \left|\partial Z^K A\right|) .$$

9.2. A2 : Quelques résultats importants

Dans ce paragraphe, on rédige quelques résultats de [14] généralisés lorsque c'est nécessaire pour $n \geqslant 3$. Ces résultats sont la base même de la méthode utilisée pour montrer l'existence globale. C'est pourquoi il semblait utile, pour faciliter la compréhension du lecteur, de les reprendre ici.

On considère le poids suivant :

$$w = w(q) = \begin{cases} (1+|q|)^{1+2\gamma}, & \text{quand} \quad q > 0 , \\ (1+|q|)^{-2\mu}, & \text{quand} \quad q < 0 . \end{cases} \tag{9.21}$$

avec $\mu \geqslant 0$ et $0 < \gamma < 1$. Notons $q_- = |q|$ si $q \leqslant 0$ et $q_- = 0$ si $q \geqslant 0$.

La proposition 6.2 de [14] est celle-ci :

Proposition 9.2. — *Soit ϕ une solution de $\tilde{\Box}_g\phi = F$ avec une métrique g telle que, pour $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$, on ait :*

$$(1+|q|)^{-1}|H|_{\mathcal{LL}} + |\partial H|_{\mathcal{LL}} + \left|\bar\partial H\right| \leqslant C\varepsilon'(1+t)^{-1} , \tag{9.22}$$
$$(1+|q|)^{-1}|H| + |\partial H| \leqslant C\varepsilon'(1+t+|q|)^{-\frac12}(1+|q|)^{-\frac12}(1+q_-)^{-\mu} .$$

Alors pour tout $0 < \gamma \leqslant 1$ et $0 < \varepsilon' \leqslant \gamma/C_1$, on a

$$\int_{\Sigma_t} |\partial\phi|^2 w + \int_0^t\int_{\Sigma_t} \left|\bar\partial\phi\right|^2 w' \leqslant 8\int_{\Sigma_0} |\partial\phi|^2 w + 16\int_0^t\int_{\Sigma_t}\left(\frac{C\varepsilon'|\partial\phi|^2}{1+t} + |F|\,|\partial\phi|\right) w . \tag{9.23}$$

La proposition qui suit reprends le corollaire 7.2 de [14] :

Pour $\gamma' \geqslant -1$, $\mu' \leqslant 1/2$, on définit cette fois le poids

$$\varpi = \varpi(q) = \begin{cases} (1+|q|)^{1+\gamma'}, & \text{quand} \quad q > 0\ , \\ (1+|q|)^{1/2-\mu'} & \text{quand} \quad q < 0\ . \end{cases} \tag{9.24}$$

Proposition 9.3. — *Ici $n = 3$. Soit $\phi_{\mu\nu}$ une solution de l'équation $\tilde{\Box}_g \phi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Supposons que $H^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta}$ satisfait*

$$|H| \leqslant \frac{\varepsilon'}{4}, \quad \int_0^\infty \| H(t,\cdot)\|_{L^\infty(D_t)} \frac{dt}{1+t} \leqslant \frac{\varepsilon'}{4}, \quad |H|_{\mathcal{L}\mathcal{T}} \leqslant \frac{\varepsilon'}{4}\, \frac{|q|+1}{1+t+|x|} \tag{9.25}$$

dans la région $D_t = \{x \in \mathbf{R}^3;\ t/2 \leqslant |x| \leqslant 2t\}$.

Alors, pour $\alpha = \max(1+\gamma', 1/2-\mu')$, pour tout $U, V \in \{L, \underline{L}, S_1, S_2\}$ et un point arbitraire $x \in D_t$, on a :

$$\begin{aligned} (1+t+|x|)|\varpi(q)\partial\phi(t,x)|_{UV} &\lesssim \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} \sum_{|I|\leqslant 1} \| \varpi(q) Z^I \phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty} \\ &+ \int_0^t \Big(\varepsilon'\alpha \|\varpi(q)|\partial\phi(t,\cdot)|_{UV}\|_{L^\infty} + (1+\tau)\|\varpi(q)|F(\tau,\cdot)|_{UV}\|_{L^\infty(D_\tau)} \\ &\qquad + \sum_{|I|\leqslant 2} (1+\tau)^{-1} \|\varpi(q) Z^I \phi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(D_\tau)} \Big)\, d\tau. \end{aligned} \tag{9.26}$$

En reprenant la démonstration de l'inégalité de Hardy, faite en dimension 3 dans [14], on obtient :

Proposition 9.4 (Inégalité de Hardy). — *Soit $n \geqslant 3$ et soit w défini par* (9.21)*. Alors, pour tout $2-n \leqslant a \leqslant 1$ et tout $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on a*

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|u|^2}{(1+|q|)^2} \frac{w\, dx}{(1+t+|q|)^{1-a}} \leqslant C \int_{\mathbf{R}^n} |\partial u|^2 \frac{w\, dx}{(1+t+|q|)^{1-a}}\,. \tag{9.27}$$

Si de plus $a < 2\min(\gamma,\mu)$, alors

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|u|^2}{(1+|q|)^2} \frac{(1+|q|)^{-a}}{(1+t+|q|)^{1-a}} \frac{w\, dx}{(1+q_-)^{2\mu}} \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |\partial u|^2\, w'\, dx\,. \tag{9.28}$$

La proposition suivante (Proposition 6.5.1 de [8]) joue un rôle fondamental dans la démonstration de l'existence globale :

Proposition 9.5 (Inégalité de Klainerman). — *Il existe une constante C telle que*

$$(1+|t|+|x|)^{n-1}(1+||t|-|x||)\,|u(t,x)|^2 \leqslant C \sum_{|I|\leqslant[\frac{n+2}{2}]} \left|\left|Z^I u(t,.)\right|\right|^2_{L^2} \quad (9.29)$$

si u est dans $C^\infty(]t-1,t+1[\times\mathbb{R}^n)$ et décroît rapidement.

Dans ce travail, on utilise une version à poids de cette proposition, avec le poids $w(q)$ défini par (9.21). En reprenant la démonstration de la proposition 14.1 de [14] , faite en dimension $n=3$, on obtient :

Proposition 9.6 (Inégalité de Klainerman à poids). — *Soit $n \geqslant 3$, il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on ait*

$$(1+|t|+|x|)^{\frac{n-1}{2}}[(1+|q|)w(q)]^{\frac{1}{2}}\,|u(t,x)| \leqslant C \sum_{|I|\leqslant[\frac{n+2}{2}]} \left|\left|w(q)^{\frac{1}{2}} Z^I u(t,.)\right|\right|_{L^2}. \quad (9.30)$$

10. Notations

10.1. Notations basiques

- Les indices grecs $\alpha, \beta, \mu, \nu \dots$ et les indices latins $i, j, \dots$ parcourent respectivement $0, \dots, n$ et $1, \dots, n$.

- On utilise, à de nombreuses reprises, la convention de sommation sur les indices répétés dans des positions différentes. Par exemple : $X_\mu Y^\mu = \sum_{\mu=0}^{n} X_\mu Y^\mu$.

- On note $\{x^\mu\}_{\mu=0,\dots,n} = (t,x) = (-x_0, x_1, \dots, x_n), r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ et $\omega = \frac{x}{|x|}$.

- Le symbole D dénote la dérivation covariante de Levy-Civita par rapport à la métrique g. On note $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ et $\partial = (\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n)$.

- $\delta_{\mu\nu}$ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{\mu\nu} = \delta_\mu^\nu = \delta^{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = \nu, \\ 0 \text{ si } \mu \neq \nu. \end{cases}$

- $m = -dt^2 + \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$ est la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

- On note $\widetilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$ et $\widetilde{\Box}_m = \Box = -\partial_t^2 + \partial_1^2 \ldots + \partial_n^2$.

- Pour les symboles de Christoffel, on note :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\ \nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\delta}(\partial_\mu g_{\delta\nu} + \partial_\nu g_{\delta\mu} - \partial_\delta g_{\mu\nu})$$

10.2. La famille $\mathcal{Z}$

- La famille de champs de vecteurs $\mathcal{Z}$ est composée des champs de vecteurs suivants :

$$\partial_\alpha, \quad \alpha = 0, \ldots, n. \tag{10.1}$$

$$Z_{\alpha\beta} = x_\beta\partial_\alpha - x_\alpha\partial_\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n. \tag{10.2}$$

$$Z_0 = \sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha \partial_\alpha. \tag{10.3}$$

On notera Z^I tout produit de $|I|$ champs de vecteurs de $\mathcal{Z}$.

- Notant $[X, Y] = XY - YX$, on a $[\Box, \partial_\alpha] = [\Box, Z_{\alpha,\beta}] = 0$ et $[\Box, Z_0] = 2\Box$. Soit $Z \in \mathcal{Z}$, on définit c_Z par $[\Box, Z] = c_Z\Box$ et on note $\widehat{Z} = Z + c_Z$.

10.3. La famille $\mathcal{U}$

- En tout point (t, x), on définit deux vecteurs L et $\underline{L}$ isotropes pour la métrique m :

$L = \partial_t + \partial_r$ dénote le champ de vecteur tangent au cône de lumière futur de Minkowski $t - r =$ constante. (On a $L^0 = 1$, $L^i = \dfrac{x^i}{|x|}$, $i = 1, \ldots, n$.)

On utilise les notations :

$$\partial_s = \frac{1}{2} L^\mu \partial_\mu = \frac{1}{2}\partial_L = \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_r), \quad \text{avec } s = t + r.$$

$\underline{L} = \partial_t - \partial_r$ dénote le champ de vecteur transverse au cône de lumière $t - r =$ constante. (On a $\underline{L}^0 = 1$, $\underline{L}^i = -\dfrac{x^i}{|x|}$, $i = 1, \ldots, n$).

On utilise les notations :

$$\partial_q = -\frac{1}{2}\underline{L}^\mu\partial_\mu = -\frac{1}{2}\partial_{\underline{L}} = \frac{1}{2}(\partial_r - \partial_t), \quad \text{avec } q = r - t.$$

• On définit alors la famille $\mathcal{U} = \{L, \underline{L}, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$, où $S_1, S_2, \ldots,$ S_{n-1} dénotent des champs de vecteurs orthogonaux deux à deux, de norme 1, engendrant l'espace tangent aux sphères $t =$ constante, $r =$ constante.

On utilise les notations $\partial_{S^i} = S^{i\mu}\partial_\mu$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

• Dérivées :

– On note $\partial = (\partial_t, \partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ les dérivées d'espace et de temps.

– Les dérivées tangentes aux cônes $t - r = cste$ sont symbolisées par $\bar{\partial} = (\bar{\partial}_0, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_n)$ avec $\bar{\partial}_0 = L^\mu \partial_\mu = \partial_t + \partial_r$ et $\bar{\partial}_i = \partial_i - \omega_i \partial_r$ pour $i = 1, \ldots, n$.

• Décomposition par rapport à la famille $\mathcal{U}$:

– Pour tout champ de vecteurs X et tout $U \in \mathcal{U}$, on $X_U = X_\alpha U^\alpha$, où $X_\alpha = m_{\alpha\beta} X^\beta$.

– Tout champ de vecteurs X peut s'écrire

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^L L + X^{\underline{L}} \underline{L} + \sum_{i=1}^{n} X^{S_i} S_i,$$

où $X^L = -X_{\underline{L}}/2,\ X^{\underline{L}} = -X_L/2,\ X^{S_i} = X_{S_i}$.

– Pour tout couple de champs de vecteurs (X, Y), on a :

$$X^\alpha Y_\alpha = -X_L Y_{\underline{L}}/2 - X_{\underline{L}} Y_L/2 + \sum_{i=1}^{n} X_{S_i Y_{S_i}}.$$

• Soient $(U_1, U_2) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ et k et un 2-tenseur, on note $k_{U_1 U_2} = k(U_1, U_2) = k_{\alpha\beta} U_1^\alpha U_2^\beta$.

En particulier, on a, pour tout $i, j = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} m_{LL} = m_{\underline{L}\underline{L}} = m_{LS_i} = m_{\underline{L}S_i} &= 0, \\ m_{L\underline{L}} = m_{\underline{L}L} &= -2, \\ m_{S_i S_j} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

• On définit les familles $\mathcal{T} = \{L, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$, $\mathcal{L} = \{L\}$ et $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$.

• Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux des familles $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{S}$, p un 1-tenseur et k un 2-tenseur, on définit :

$$|p|_{\mathcal{V}} = \sum_{V \in \mathcal{V}} |p_\alpha V^\alpha|, \tag{10.4}$$

$$|\partial p|_{\mathcal{V}} = \sum_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}} |\partial_\mu p_\alpha U^\mu V^\alpha|, \tag{10.5}$$

$$\left|\bar{\partial} p\right|_{\mathcal{V}} = \sum_{T \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{V}} |\partial_\mu p_\alpha T^\mu V^\alpha|, \tag{10.6}$$

$$|k|_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \sum_{V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}} \left|k_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta\right|, \tag{10.7}$$

$$|\partial k|_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \sum_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}} \left|\partial_\mu k_{\alpha\beta} U^\mu V^\alpha W^\beta\right|, \tag{10.8}$$

$$\left|\bar{\partial} k\right|_{\mathcal{V}\mathcal{W}} = \sum_{T \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}} \left|\partial_\mu k_{\alpha\beta} T^\mu V^\alpha W^\beta\right|. \tag{10.9}$$

10.4. Énergies à poids

- On définit :

$$\mathcal{E}_N^{Maxwell}(t) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \sum_{Z \in \mathcal{Z}, |I| \leqslant N} \int_{\Sigma_\tau} (|\partial Z^I h^1|^2 + |\partial Z^I A|^2) w(q) d^n x, \tag{10.10}$$

$$\mathcal{S}_N^{Maxwell}(t) = \sum_{Z \in \mathcal{Z}, |I| \leqslant N} \int_0^t \int_{\Sigma_\tau} (|\bar{\partial} Z^I h^1|^2 + |\bar{\partial} Z^I A|^2) w'(q) d^n x \, d\tau, \tag{10.11}$$

où

$$w(q) = \begin{cases} 1 + (1+|q|)^{1+2\gamma}, & q > 0 \\ 1 + (1+|q|)^{-2\mu}, & q < 0 \end{cases} \tag{10.12}$$

avec $q = r - t$, $\mu > 0$ et $0 < \delta < \gamma < \alpha$, et

$$h^1_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - h^0_{\mu\nu}, \tag{10.13}$$

où $h^0_{\mu\nu}(t) = \begin{cases} \chi(r/t)\chi(r)\frac{2M}{r}\delta_{\mu\nu} & \text{pour } n = 3, \\ 0 \quad n \geqslant 4. \end{cases}$

$\chi \in C^\infty$, $\chi(s)$ valant 1 quand $s \geqslant 3/4$ et 0 quand $s \leqslant 1/2$.

• Enfin, on reprend ici quelques conditions utilisées dans cet article :

$$\begin{aligned} 0<\delta<\frac{1}{4}, \\ 0<\gamma<1, \\ 0<\gamma'<\gamma-\delta, \\ 0<\delta<\mu'<\frac{1}{2}, \\ 0<\mu<\frac{1}{2}-\mu'. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Bibliographie

[1] Bizoń (P.), Chmaj (T.), and Schmidt (B.G.). — Critical behavior in vacuum gravitational collapse in 4+1 dimensions, Phys. Rev. Lett. 95, 071102, gr-qc/0506074 (2005).

[2] Choquet-Bruhat (Y.). — Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Acta Math. 88, p. 144-225 (1952).

[3] Christodoulou (D.). — Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data, Commun. Pure Appl. Math. 39, p. 267-282 (1986). MR MR820070 (87c:35111)

[4] Christodoulou (D.) and Klainerman (S.). — The global nonlinear stability of the Minkowski space, Princeton UP, (1993).

[5] Emparan (R.) and Reall (H.S.). — Black rings, hep-th/0608012, (2006).

[6] Hollands (S.) and Ishibashi (A.). — Asymptotic flatness and Bondi energy in higher dimensional gravity, Jour. Math. Phys. 46, 022503, 31, gr-qc/0304054 (2005). MR MR2121709 (2005m:83039)

[7] Hollands (S.) and Wald (R.M.). — Conformal null infinity does not exist for radiating solutions in odd spacetime dimensions, Class. Quantum Grav. 21, p. 5139-5145, gr-qc/0407014, (2004). MR MR2103245 (2005k:83039)

[8] Hörmander (L.). — Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations,Springer, (1986).

[9] Hörmander (L.). — On the fully nonlinear Cauchy problem with small data. II, Microlocal analysis and nonlinear waves (Minneapolis, MN, 1988-1989), IMA Vol. Math. Appl., vol. 30, Springer, New York, 1991, pp. 51-81. MR MR1120284 (94c:35127)

[10] Klainerman (S.). — Global Existence for Nonlinear Wave Equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXIII, p. 43-100 (1980).

[11] Klainerman (S.). — Uniform Decay Estimates and the Lorentz Invariance of the Classical wave Equation.Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXVIII, p. 321-332 (1985).

[12] Klainerman (S.). — The null condition and global existence to nonlinear wave equations. Lectures in Applied Mathematics 23, p. 293-326 (1986).

[13] Lindblad (H.) and Rodnianski (I.). — Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates. Commun. Math. Phys. 256, p. 43-110 (2005).

[14] Lindblad (H.) and Rodnianski (I.). — The global stability of Minkowski spacetime in harmonic gauge. ArXiv:math.AP/0411109.

[15] Ta-Tsien Li and Yun Mei Chen. — Global classical solutions for nonlinear evolution equations, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 45, Longman Scientific & Technical, Harlow (1992). MR MR1172318 (93g:35002)