ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

HENRI HEINICH

Vers un théorème de Skorohod simultané

Tome XVII, nº 3 (2008), p. 519-575.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2008_6_17_3_519_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVII, n° 3, 2008
pp. 519–575

Vers un théorème de Skorohod simultané(*)

Henri Heinich(1)

Résumé. — Nous étudions un théorème de Skorohod pour des mesures vectorielles à valeurs $I\!R^d$. En notant $X(I\!P)$ la mesure image de $I\!P$ par la variable aléatoire X, nous donnons des classes de mesures $I\!P$ et éventuellement de variables telles que, si la suite $\{X_n(I\!P)\}$ converge étroitement, il existe une suite $\{\phi_n\}, \phi_n(I\!P) = X_n(I\!P)$ qui converge en mesure, éventuellement p.s.
Le problème de Monge est abordé comme application. Soit $|I\!P|$ la mesure variation de $I\!P$, pour un couple $(I\!P, \mathbb{Q})$ et une fonction coût c, le problème de Monge est l'existence d'une fonction ϕ telle que $\phi(I\!P) = \mathbb{Q}$ et $E_{|I\!P|}[c(x, \phi(x))] = \inf\{E_{|(X,Y)(I\!P)|}[c],\ X(I\!P) = I\!P,\ Y(I\!P) = \mathbb{Q}\}$. Pour un coût quadratique et certaines mesures vectorielles, nous montrons que cette fonction existe.

Abstract. — We study the Skorohod's Theorem for vector-measure with $I\!R^d$ values. Let $X(I\!P)$ be the measure push-forward of $I\!P$ by X. For a class of vector-measure and possibly variables, we have : the sequence $\{X_n(I\!P)\}$ converges in distribution if and only if there is a sequence $\{\phi_n\}$ such that $\phi_n(I\!P) = X_n(I\!P)$ and $\phi_n \to \phi$ in measure, possibly a.s.
As application, if $|I\!P|$ is the variation of $I\!P$, $(I\!P, \mathbb{Q})$ be a couple and a cost function c, the Monge problem is the existence of a function ϕ, such that $\phi(I\!P) = \mathbb{Q}$ and $E_{|I\!P|}[c(x, \phi(x))] = \inf\Big\{E_{|(X,Y)(I\!P)|}[c],\ X(I\!P) = I\!P,\ Y(I\!P) = \mathbb{Q}\Big\}$. With a quadratic cost, we show that this function exists.

1. Introduction

Nous nous intéressons au théorème de Skorohod qui assure l'existence d'une suite de variables aléatoires convergeant presque sûrement à partir d'une suite convergeant en loi.

(*) Reçu le 18 juillet 2007, accepté le 25 février 2008
(1) INSA de Rouen, LMI, place E. Blondel, 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex, France.
heinich@insa-rouen.fr

En écrivant $\mathcal{L}(X)$ la loi de X, la version classique du théorème de Skorohod, *cf.* [4], [14] et [25], énonce :

Si $\{X_n\}$ est une suite de v.a. à valeurs dans un espace polonais convergeant en loi, il existe une suite de v.a. $\{Y_n\}$ telle que $\mathcal{L}(X_n) = \mathcal{L}(Y_n)$ et qui converge p.s.

C'est un outil précieux en probabilités et, plus généralement, en théorie de la mesure.

Pour une probabilité P diffuse, définie sur $[0,1]$, l'idée centrale de la preuve consiste à définir une sélection, c'est-à-dire une application S de $[0,1]$ dans l'ensemble des boréliens telle que $P(S(\alpha)) = \alpha$ et, si $B \subset A$, $P(B) = \beta$, $P(A) = \alpha$ alors, $S(\beta) \subset S(\alpha)$.

L'existence d'une sélection est évidente en prenant par exemple $S(\alpha) = [0,\alpha]$ ou $[1-\alpha,1]$.

Nous allons chercher des versions de ce théorème adaptées aux mesures vectorielles.

À cette fin, nous définissons de manière « canonique » des sélections qui associent, à une famille de boréliens un borélien de cette famille.

Cela ne suffit pas et nous devons adapter la relation d'inclusion du cas uni-dimensionnel.

De plus, dans le cas uni-dimensionnel, on sait qu'il suffit que la probabilité P soit diffuse pour que toute autre probabilité (sur la même tribu) soit l'image de P par une variable aléatoire adéquate. Cela s'avère faux pour des mesures vectorielles.

Finalement, nous obtenons des versions donnant la convergence en mesure, une pour la convergence p.s. et nous verrons au passage de nouvelles propriétés sur les mesures vectorielles.

Dans une seconde partie (paragraphe 8) et comme « application » des théorèmes de Skorohod obtenus, nous examinons le problème de Monge. Ce n'est que récemment que ce problème a reçu des solutions satisfaisantes dans le cadre des probabilités. Nous abordons l'aspect vectoriel et donnons les premiers résultats.

1.1. Notations et rappels

Soit $I\!P$ une mesure vectorielle définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B} \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{B}([0,1])$ et à valeurs dans un espace de Banach $I\!E$ réticulé, *cf.*[3]. On rappelle que $I\!P$ est à variation bornée s'il existe une mesure réelle positive bornée, notée $|I\!P|$, qui soit la plus petite mesure majorant $\|I\!P(\cdot)\|$ i.e. $\|I\!P(A)\| \leqslant |I\!P|(A)$. Nous adoptons ici la notation $|I\!P|$ contrairement à celle plus classique de $v(I\!P)$. Ainsi, dans le texte nous écrirons p.s. sans préciser si s'agit de $I\!P$-p.s. ou de façon équivalente de $|I\!P|$-p.s. Les références relatives aux mesures vectorielles sont nombreuses, contentons nous de citer [5], [12] et [13].

Si X est une variable aléatoire (v.a.) de $[0,1]$ dans $[0,1]$ la mesure image induite par cette v.a. est la mesure $Q\!\!\!Q = X(I\!P)$ ou, selon de nombreux auteurs $Q\!\!\!Q = I\!P_X$ ou $Q\!\!\!Q = X_{\#}I\!P$, définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}([0,1])$ par $Q\!\!\!Q(B) \stackrel{\Delta}{=} I\!P(X \in B)$. On écrit aussi, de manière probabiliste, $\mathcal{L}_{I\!P}(X) = Q\!\!\!Q$ ou plus simplement $\mathcal{L}(X) = Q\!\!\!Q$.

L'espérance d'une v.a. X par rapport à une mesure $I\!P$ est notée $E_{I\!P}[X]$ ou parfois $I\!P[X]$.

Soit C_b l'ensemble des fonctions réelles continues et bornées définies sur $[0,1]$, la suite de mesures vectorielles $\{I\!P_n\}$ définies sur $\mathcal{B}$ converge étroitement (ou par abus de langage, converge en loi) vers $I\!P$ si $E_{I\!P_n}[f] = \displaystyle\int f dI\!P_n \rightarrow E_{I\!P}[f]$, pour toute fonction $f \in C_b$. Une suite de v.a. $\{X_n\}$ converge en loi, relativement à $I\!P$, si la suite de mesures images $\{X_n(I\!P)\}$ converge étroitement.

Des compléments sur ces notions se trouvent dans [6], [12] et [19].

Nous limitons notre étude à $I\!E = I\!R^d$, cela suffit pour voir apparaître les principales difficultés. De plus, par souci de simplification, nous ne considérons dans la suite que des mesures positives i.e. $I\!P(\cdot) \geqslant 0$. Autant que possible, nous réservons l'écriture $I\!P$, $Q\!\!\!Q$ aux mesures vectorielles et P, Q pour les mesures réelles. En outre, λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}$ et Id est l'identité. Enfin, les fonctions considérées sont supposées mesurables.

Toujours pour réduire les problèmes, nous prenons sur $I\!R^d$ la norme $\|x = (x_i)\| = \sum\limits_1^d |x_i|$. La mesure variation est $|I\!P| = \sum\limits_1^d P_i$ où les P_i sont les mesures composantes de $I\!P$ (positive) et on a la propriété : $|X(I\!P)| = X(|I\!P|)$. Ceci simplifie considérablement les preuves et les résultats demeurent pour toute autre norme classique sur $I\!R^d$.

Rappelons le théorème de Lyapounov, dont nous ferons un usage fréquent, *cf.* [12] et [13].

« *Soit* $I\!\!P = (P_1, \cdots, P_d)$ *une mesure vectorielle à coordonnées positives et diffuses, alors l'image de* $I\!\!P$, *soit* $\mathcal{I}(I\!\!P) \stackrel{\Delta}{=} \{I\!\!P(A) \mid A \in \mathcal{B}(I\!\!R)\}$, *est un convexe compact de* $I\!\!R^d$.

De plus, on a l'identité $\mathcal{I}(I\!\!P) = \{E_{I\!\!P}[\phi],\ 0 \leqslant \phi \leqslant 1\}$. »

2. Sur les mesures vectorielles

Introduisons quelques unes des principales propriétés que nous utiliserons.

Le lemme suivant, qui est une extension du théorème 1, p. 265 de [12], joue en rôle crucial dans l'étude de $\mathcal{I}(I\!\!P)$.

LEMME 2.1. — *Soient* $I\!\!P$ *une mesure vectorielle diffuse définie sur* $\mathcal{B}$ *et* $\{\alpha_i\}$ *un ensemble dénombrable de points de* $\mathcal{I}(I\!\!P)$. *Si l'ensemble* $F = \left\{\phi \stackrel{\Delta}{=} \{\phi_i\}_i,\ 0 \leqslant \phi_i \leqslant \sum_1^\infty \phi_i \leqslant 1,\ E_{I\!\!P}[\phi_i] = \alpha_i\right\}$ *est non vide, alors ses points extrémaux sont de la forme* $\phi = \{1\!\!1_{A_i}\}$, *où les* A_i *sont disjoints et* $I\!\!P(A_i) = \alpha_i$.

Preuve.— L'ensemble F est un convexe compact pour la topologie induite par $\sigma(I\!\!L^\infty_{|I\!\!P|}, I\!\!L^1_{|I\!\!P|})$, i.e. $\phi^k \to \phi$ si et seulement si, pour tout i, ϕ_i^k converge pour cette topologie vers ϕ_i. Le théorème de Krein-Milman, *cf.*[5], affirme que F est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Montrons que les points extrémaux de F sont des partitions.

Procédons par négation. Soit $\phi = \{\phi_i\}$ un point extrémal et supposons qu'il existe $\epsilon > 0$, un indice noté 1 et $B \subset \{\epsilon < \phi_1 < 1-\epsilon\}$ tels que $I\!\!P(B) \neq 0$.

Soit $B_1 \subset B$ un borélien de mesure $I\!\!P(B_1) = \frac{1}{2} I\!\!P(B)$ et B_2 le complément à B de B_1.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

– Si $B \subset \sum_1^\infty \phi_i < 1-\epsilon$, posons

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \phi_1 1\!\!1_{B^c} + (\phi_1+\epsilon) 1\!\!1_{B_1} + (\phi_1-\epsilon) 1\!\!1_{B_2} \\ \text{et} \quad \phi^- &= \phi_1 1\!\!1_{B^c} + (\phi_1-\epsilon) 1\!\!1_{B_1} + (\phi_1+\epsilon) 1\!\!1_{B_2}. \end{aligned}$$

Les deux suites $\{\phi^+, \phi_2, \cdots\}$ et $\{\phi^-, \phi_2, \cdots\}$ appartiennent à F et leur demi somme donne $\{\phi_1, \phi_2, \cdots\}$ qui n'est pas extrémale.

– Cas où $I\!P\big(B \cap \{\sum_1^\infty \phi_i = 1\}\big) \neq 0$, sans perte de généralité, on peut supposer que B est contenu dans $\{\sum_1^\infty \phi_i = 1\}$. Choisissons ϵ suffisament petit de sorte qu'il existe $i \neq 1$ tel que $I\!P\big(B \cap \{\phi_i > \epsilon\}\big) \neq 0$. Pour simplifier les notations, prenons $i=2$ et posons

$$\begin{aligned} \phi_1^+ &= \phi_1 1\!\!1_{B^c} + (\phi_1+\epsilon) 1\!\!1_{B_1} + (\phi_1-\epsilon) 1\!\!1_{B_2} \\ \text{et} \quad \phi_2^+ &= \phi_2 1\!\!1_{B^c} + (\phi_2-\epsilon) 1\!\!1_{B_1} + (\phi_2+\epsilon) 1\!\!1_{B_2}; \\ \phi_1^- &= \phi_1 1\!\!1_{B^c} + (\phi_1-\epsilon) 1\!\!1_{B_1} + (\phi_1+\epsilon) 1\!\!1_{B_2} \\ \text{et} \quad \phi_2^- &= \phi_2 1\!\!1_{B^c} + (\phi_2+\epsilon) 1\!\!1_{B_1} + (\phi_2-\epsilon) 1\!\!1_{B_2}. \end{aligned}$$

Clairement les deux suites $\{\phi_1^\pm, \phi_2^\pm, \phi_3, \cdots\}$ appartiennent à F et, comme précédemment, on en déduit que $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots\}$ n'est pas extrémale. $\square$

Appliqué aux v.a. l'étude des points extrémaux permet d'obtenir le résultat qui suit.

Proposition 2.2. — *Si $I\!P$ est diffuse et $\big\{Q_n = X_n(I\!P)\big\}$ une suite de mesures à supports au plus dénombrables et qui converge étroitement vers une mesure Q à support au plus dénombrable. Alors, il existe une v.a. X telle que $Q = X(I\!P)$.*

Preuve.— Cas où le support de Q est fini.

Si $\{x_i^n\}_i$ est l'ensemble des valeurs de X_n, notons F_n le convexe compact, non vide, $\big\{\{\phi_i^n\}_i,\ 0 \leqslant \phi_i^n \leqslant \sum_j \phi_j^n \leqslant 1,\ E_{I\!P}[\phi_i^n] = \alpha_i^n \triangleq I\!P(X_n = x_i^n)\big\}$. Pour tout i, il existe une sous-suite $\{n_j\}$ telle que $\phi_i^{n_j}$ converge faiblement vers ϕ_i et $\alpha_i^{n_j} \to \alpha_i$. Il en résulte que l'ensemble $F = \big\{\{\phi_i\}_i,\ 0 \leqslant \phi_i \leqslant \sum_j \phi_j \leqslant 1,\ E[\phi_i] = \alpha_i\big\}$ est non vide. Le lemme 2.1 assure qu'il existe une partition $\{A_i\}$ telle que $I\!P(A_i) = \alpha_i$.

Si $\{x_i\}$ forme le support de Q, alors la v.a. $X = \sum x_i 1\!\!1_{A_i}$ vérifie $Q = X(I\!P)$.

En effet, pour chaque i, notons I_i un intervalle tel que $I_i \cap$ support$(Q) = \{x_i\}$. Comme $Q_n(I_i)$ tend vers $\alpha_i = I\!P(X = x_i)$ on a la convergence étroite de X_n vers X, $Q_n(I_i) \to Q(I_i)$ et $Q = X(I\!P)$.

Cas où le support de $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

On fixe un point x_i du support de $\mathbb{Q}$ et on considère deux suites $\{y_p^i\}$ et $\{z_p^i\}$ convergeant vers x_i, incluses dans le complémentaire de la réunion des supports des mesures $\mathbb{Q}_n$ et $\mathbb{Q}$ et telles que $y_{p-1}^i < y_p^i < x_i < z_p^i < z_{p-1}^i$. Quand $n \to \infty$, $\mathbb{Q}_n([y_p^i,\ z_p^i[) \to \mathbb{Q}([y_p^i,\ z_p^i[)$ et, quand $p \to \infty$, $\mathbb{Q}([y_p^i,\ z_p^i[) \to \mathbb{Q}(x_i) = \alpha_i$. Soit $I_p(i) = [y_p^i,\ z_p^i[$, il existe une sous-suite $\{n_p\}$ telle que $\mathbb{Q}_{n_p}(I_p(i)) \to \alpha_i$. Si ϕ_i est une valeur d'adhérence de la suite $\{\mathbb{1}_{\{X_{n_p} \in I_p(i)\}}\}$, alors $E_{\mathbb{P}}[\phi_i] = \alpha_i$. Lorsque i varie, par le procédé diagonal, il existe une sous-suite notée encore $\{n_p\}$ telle que $\mathbb{1}_{\{X_{n_p} \in I_p(i)\}}$ converge faiblement, pour p infini, vers ϕ_i et ceci pour tout i. Il est clair que $\sum_i \phi_i \leqslant 1$ car $\sum_1^k \phi_i = \lim \mathbb{1}_{\{X_{n_p} \in \bigcup_{i \leqslant k} I_p(i)\}}$, par conséquent l'ensemble $F = \Big\{\{\phi_i\}_i,\ 0 \leqslant \phi_i \leqslant \sum_j \phi_j \leqslant 1,\ E_{\mathbb{P}}[\phi_i] = \alpha_i\Big\}$ est non vide. Il existe donc une partition $\{A_i\}$ telle que $\mathbb{P}(A_i) = \alpha_i$. Nous avons vu que $\mathbb{Q}(x_i) = \alpha_i$, donc la v.a. $X = \sum x_i \mathbb{1}_{A_i}$ vérifie $\mathbb{Q} = X(\mathbb{P})$. □

Complétons nos notations :

– Lorsque la suite $\{\phi_n\}$ converge faiblement, i.e. pour $\sigma(\mathbb{L}^1_{\mathbb{P}}, \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{P}})$, on écrit $\phi_n \xrightarrow{\sigma}$.

– On dit qu'une suite de convexes, $\{C_n\}$, converge vers C et on écrit $C_n \to C$, si pour toute suite $\{x_n\}, x_n \in C_n$ qui converge vers x, alors $x \in C$ et, réciproquement, si tout point de C est limite d'une telle suite.

– On écrit $C_n \xrightarrow{*} C$, s'il existe une sous suite $\{n_i\}$ telle que $C_{n_i} \to C$. Nous utilisons les propriétés données dans [8] pour ces convergences.

– L'intérieur d'un ensemble A est noté $\overset{\circ}{A}$.

DÉFINITION 2.3. — *Soit φ une fonction mesurable telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, on désigne par $\mathcal{I}(\varphi)$ l'ensemble $\big\{\phi,\ E_{\mathbb{P}}[\phi],\ 0 \leqslant \phi \leqslant \varphi\big\}$. Lorsque $\varphi = \mathbb{1}_A$, on écrit $\mathcal{I}(A)$ et $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathbb{1}_{[0,1]}) = \mathcal{I}(\mathbb{P})$.*

On introduit aussi $F_\varphi = \big\{\psi,\ 0 \leqslant \psi \leqslant 1,\ E_{\mathbb{P}}[\psi] \in \mathcal{I}(\varphi)\big\}$ *et* $F_{\mathcal{I}(\varphi)} = \big\{\psi,\ \mathcal{I}(\psi) = \mathcal{I}(\varphi)\big\}$.

L'ensemble $F_{\mathcal{I}(\varphi)}$ est la classe d'équivalence de φ pour la relation d'égalité des images.

Enfin $\mathbf{F}_\varphi = \big\{\psi,\ \varphi \mathcal{R} \psi\big\}$ est la classe d'équivalence de φ pour la relation d'équivalence $\varphi \mathcal{R} \psi$ définie par : « Pour tout θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \psi$, il existe ϕ,

$0 \leqslant \phi \leqslant \varphi$ avec $\mathcal{I}(\phi) = \mathcal{I}(\theta)$ et réciproquement, pour tout ϕ, $0 \leqslant \phi \leqslant \varphi$, il existe θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \psi$ avec $\mathcal{I}(\phi) = \mathcal{I}(\theta)$.»

L'ensemble $\mathcal{I}(\varphi)$ est un convexe σ-compact de $\mathcal{I}(I\!\!P)$.

LEMME 2.4. — *Les ensembles $\mathbf{F}_\varphi$, $F_{\mathcal{I}(\varphi)}$ et F_φ sont convexes et les points extrémaux de F_φ sont des fonctions indicatrices.*

Preuve. — L'ensemble F_φ est convexe car si $\psi_i \in F_\varphi$ et si ϕ_i sont les fonctions associées i.e. $0 \leqslant \phi_i \leqslant \varphi$, $E_{I\!\!P}[\psi_i] = E_{I\!\!P}[\phi_i]$ alors $\sum c_i \psi_i$ est associée à $\sum c_i \phi_i$.

Ce convexe est non vide et compact pour $\sigma(I\!\!L^1_{|I\!\!P|}, I\!\!L^\infty_{|I\!\!P|})$. Dans le lemme 2.1 nous avons vu que si ψ n'est pas une fonction indicatrice, il existe ψ_i, $i = 1, 2$ telles que $0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$, $\psi = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ et $E_{I\!\!P}[\psi_1] = E_{I\!\!P}[\psi_2]$. Par conséquent, ψ n'est pas extrémale dans F_φ.

Montrons que l'ensemble $F_{\mathcal{I}(\varphi)} = \Big\{ 0 \leqslant \psi \leqslant 1,\ \mathcal{I}(\psi) = \mathcal{I}(\varphi) \Big\}$ est convexe.

Prenons $\psi = \sum c_i \psi_i$ une combinaison convexe de $\psi_i \in F_{\mathcal{I}(\varphi)}$, alors $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{I}(\psi)$.

En effet, un point de $\mathcal{I}(\varphi)$ s'écrit comme $E_{I\!\!P}[\theta]$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant \varphi$ et, comme ce point appartient à chaque $\mathcal{I}(\psi_i)$, il s'écrit aussi $E_{I\!\!P}[\chi_i]$ pour $0 \leqslant \chi_i \leqslant \psi_i$. Par conséquent, $E_{I\!\!P}[\theta] = \sum_i c_i E_{I\!\!P}[\chi_i] \in \mathcal{I}(\psi)$.

Pour l'inclusion inverse, on remarque que si $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2$ et $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, alors $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ avec $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$. En effet, il suffit de prendre $x_1 = x_2$ si $x \leqslant a_1$; $x_1 = a_1$ et $x_2 = 2x - a_1$ si $a_1 \leqslant x \leqslant \dfrac{a_1 + a_2}{2}$.

Cette procédure se généralise de la manière suivante :

Si $\{a_i\}$ est une suite croissante et $0 \leqslant x \leqslant \sum c_i a_i$ (combinaison convexe des a_i), alors $x = \sum c_i x_i$ avec $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$. Le choix étant bien fait, on peut passer aux v.a. :

Si $\{X_i\}$ est une suite de v.a. (à valeurs dans $[0, 1]$) et $0 \leqslant X \leqslant \sum c_i X_i$ (combinaison convexe), alors $X = \sum c_i Y_i$, $0 \leqslant Y_i \leqslant X_i$.

Revenons au lemme et supposons que $\psi = \sum c_i \psi_i$ soit une combinaison convexe de $\psi_i \in F_{\mathcal{I}(\varphi)}$. Un point de $\mathcal{I}(\psi)$ s'écrit comme $E_{I\!\!P}[\phi]$ pour $0 \leqslant \phi \leqslant \psi$. Ainsi, on a $\phi = \sum c_i \phi_i$, $0 \leqslant \phi_i \leqslant \psi_i$ et, par conséquent, $E_{I\!\!P}[\phi_i] \in \mathcal{I}(\varphi)$, d'où,

$E_{I\!P}[\phi] \in \mathcal{I}(\varphi)$. C'est inclusion inverse et on vient de voir au passage que $\mathcal{I}(\sum c_n\phi_n)=\sum c_n\mathcal{I}(\phi_n)$.

Ce convexe est borné donc ses fermetures faible et forte coïncident et $F_{\mathcal{I}(\varphi)}$ est clairement fortement fermé. C'est un compact pour la toplogie faible de $I\!L^1$.

Enfin, $\mathbf{F}_\varphi$ est convexe car si ψ_1 et ψ_2 sont équivalentes à φ et $\theta \leqslant \varphi$, il existe $\psi_i^* \leqslant \psi_i,\ i=1,2$ telle que alors $\mathcal{I}(\theta)=\mathcal{I}(\psi_i^*)=\frac{1}{2}\mathcal{I}(\psi^*=\frac{1}{2}(\psi_1^*+\psi_2^*))$. Et si $0 \leqslant \psi^* \leqslant \frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)$, on peut écrire $\psi^*=\frac{1}{2}(\psi_1^*+\psi_2^*),\ \psi_i^* \leqslant \psi_i$, donc il existe $\theta_1 \leqslant \varphi$ telles que $\mathcal{I}(\theta_i)=\mathcal{I}(\psi_i^*)$.

Et, par suite, $\mathcal{I}(\psi^*)=\mathcal{I}(\theta=\frac{1}{2}(\theta_1^*+\theta_2^*))$, ce qui prouve la convexité : $\varphi\mathcal{R}(\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2))$. $\square$

La recherche des points extrémaux de $F_{\mathcal{I}(\varphi)}$ et de $\mathbf{F}_\phi$ reste en suspend. Néanmoins, nous allons avancer dans cette direction. Commençons par le lemme suivant :

Lemme 2.5. — *Soient $\{I\!P_n\}$ une suite de mesures qui converge uniformément vers $I\!P$ et $\phi_n \xrightarrow{\sigma} \phi$. En notant $\mathcal{I}_n(\psi)$ – respectivement $\mathcal{I}(\psi)$ – l'ensemble relatif à ψ et $I\!P_n$ – resp. $I\!P$ -- alors les ensembles $\mathcal{I}_n(\phi_n) \xrightarrow{*} \mathcal{I}(\phi)$, en particulier, $\mathcal{I}(\phi_n) \to \mathcal{I}(\phi)$.*

De plus les convexes $\mathbf{F}_\phi,\ F_{\mathcal{I}(\phi)}$ et F_ϕ sont $\sigma(I\!L^1, I\!L^\infty)$-compacts.

Preuve. — Pour une sous suite montrons la convergence des images $\mathcal{I}_n=\mathcal{I}_n(\phi_n)$ vers $\mathcal{I}(\phi)$.

Pour une éventuelle sous-suite les $\mathcal{I}_n$ convergent vers un convexe $\mathcal{I}^*$, *cf.*[8] Lemma 2, alors $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}(\phi)$.

En effet, soit $\{\alpha_n\},\ \alpha_n \in \mathcal{I}_n$ une suite convergeant (éventuellement pour une sous-suite) vers $\alpha \in \mathcal{I}^*$. Pour chaque n, il existe $\psi_n,\ 0 \leqslant \psi_n \leqslant \phi_n$ telle que $I\!P_n[\psi_n]=\alpha_n$. On peut supposer que $\psi_n \xrightarrow{\sigma} \psi$ (pour $I\!P$), or $\|I\!P_n[\psi_n] – I\!P[\psi_n]\| \leqslant \varepsilon$, dès que $n \geqslant N(\varepsilon)$, ceci montre que $I\!P_n[\psi_n] \to I\!P[\psi]$. La relation $0 \leqslant \psi \leqslant \phi$ et $I\!P[\psi]=\alpha$, donnent $\alpha \in \mathcal{I}(\phi)$, i.e. $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}(\phi)$.

Montrons l'inclusion inverse : $\mathcal{I}(\phi) \subset \mathcal{I}^*$.

Soit $\alpha \in \mathcal{I}(\phi)$, par définition, il existe $\psi,\ 0 \leqslant \psi \leqslant \phi$ telle que $I\!P[\psi]=\alpha$. Pour chaque p, il existe une combinaison convexe $\{c_n^p\},\ n \in I_p$, telle que la suite $\{\phi^p=\sum_{I_p} c_n^p\phi_n\}$ converge fortement vers ϕ. La suite $\{\inf(\phi^p,\psi)\}$ converge fortement vers ψ et, on a vu dans la preuve du lemme 2.4, que

$\inf(\phi^p,\psi) = \sum_{n\in I_p} c_n^p\psi_n^p,\ 0\leqslant\psi_n^p\leqslant\phi_n$. Comme $I\!P_n[\psi_n^p]\in\mathcal{I}_n$ et que $\|I\!P[\sum_{n\in I_p} c_n^p\psi_n^p] - I\!P_n[\sum_{n\in I_p} c_n^p\psi_n^p]\|\leqslant\epsilon$ pour n grand, on en déduit $I\!P[\inf(\phi^p,\psi)]\in\sum_{n\in I_p} c_n^p\mathcal{I}_n$, ce qui exprime, en passant à la limite, que $\alpha\in\mathcal{I}^*$ i.e. $\mathcal{I}(\phi)\subset\mathcal{I}^*$.

Le cas particulier est évident.

La partie précédente assure la fermeture, donc la compacité pour $\sigma(I\!L^1, I\!L^\infty)$ de $\mathcal{I}(\phi)$.

Montrons qu'il en est de même pour $F_{\mathcal{I}(\phi)}$.

De toute suite $\{\psi_n\}\subset F_{\mathcal{I}(\phi)}$ on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement. Supposons donc que cette suite converge faiblement vers ψ, on vient de voir que $\mathcal{I}(\psi_n)\to\mathcal{I}(\psi)$. Et, comme $\mathcal{I}(\psi_n)=\mathcal{I}(\phi)$, on obtient $\mathcal{I}(\psi)=\mathcal{I}(\phi)$, c'est le résultat recherché.

Pour $\mathbf{F}_\phi$, considérons une suite $\{\psi_n\}$, $\psi_n\in\mathbf{F}_\phi$ dont une sous suite (omise) converge faiblement vers ψ. Il existe des combinaisons convexes $\psi^p = \sum_{I_p} c_p^n\psi_n$ telles que ψ^p converge fortement vers ψ. Comme $\mathbf{F}_\phi$ est convexe, chaque $\psi^p\in\mathbf{F}_\phi$.

Prenons une fonction $\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\psi$ et, pour chaque p définissons θ_p par $\theta_p=\inf(\theta,\psi^p)$. La suite $\{\theta_p\}$ converge vers $\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\psi$. Par hypothèse, pour chaque p, il existe $\rho_p,\ 0\leqslant\rho_p\leqslant\phi$ telle que $\mathcal{I}(\theta_p)=\mathcal{I}(\rho_p)$. Quitte à prendre éventuellement une sous-suite, supposons que $\{\rho_p\}$ converge faiblement vers $\rho,\ 0\leqslant\rho\leqslant\phi$. Comme $\mathcal{I}(\theta_p)\to\mathcal{I}(\theta)$ et que $\mathcal{I}(\rho_p)\to\mathcal{I}(\rho)$, on obtient la preuve de l'assertion suivante :

Pour toute fonction mesurable $\theta\leqslant\psi$, il existe une fonction $\rho\leqslant\phi$ telle que $\mathcal{I}(\theta)=\mathcal{I}(\rho)$.

En intervertissant les rôles de θ_p et de ρ_p on prouve le « même » résultat : pour toute fonction mesurable $\rho\leqslant\phi$, il existe une fonction $\theta\leqslant\phi$ telle que $\mathcal{I}(\theta)=\mathcal{I}(\rho)$. Ceci achève la preuve. $\square$

Pour une mesure diffuse, complétons la propriété classique assurant que

« *Pour tout borélien A, il existe $B\subset A$ tel que $I\!P(B)=\frac{1}{2}I\!P(A)$.* »

Lemme 2.6. — *Soit $I\!P$ une mesure diffuse, si $\mathcal{I}(A)=\mathcal{I}(B)$, respectivement $A\mathcal{R}B$, alors $\mathcal{I}(AB^c)=\mathcal{I}(A^cB)$ et $\mathcal{I}(B^c)=\mathcal{I}(A^c)$, respectivement $A\mathcal{R}B^c$ et $B^c\mathcal{R}A^c$.*

Preuve. — Pour une probabilité (ou une mesure positive bornée) diffuse, P, sur $[0,1]$, posons

$$e_P(A,B) \triangleq \sup_{E\subset A}\Big\{\inf_{F\subset B}\{|P(E)-P(F)|\}\Big\} + \sup_{F\subset B}\Big\{\inf_{E\subset A}\{|P(E)-P(F)|\}\Big\}$$

– adaptation de la distance entre $\mathcal{I}(A)$ et $\mathcal{I}(B)$ – et $e^*_P(A,B) \triangleq \sup_{E\subset A}\inf_{F\subset B} e_P(E,F) + \sup_{F\subset B}\inf_{E\subset A} e_P(E,F)$. Clairement, $e_P(A,B)=0$ est équivalent à $\mathcal{I}(A)=\mathcal{I}(B)$ et $A\mathcal{R}B$ équivaut à $e^*_P(A,B)=0$.

La preuve de l'inégalité $e_P(AB^c, A^cB) \leqslant e_P(A,B)$ est évidente et, par conséquent, on a $e^*_P(AB^c, A^cB) \leqslant e^*_P(A,B)$.

Lorsque $I\!\!P$ est une mesure simple i.e. à densité constante sur des intervalles disjoints I_k, remplaçons, dans la définition de e_P, les valeurs absolues par une norme sur $I\!\!R^d$. Alors, en écrivant $I\!\!P = \sum I\!\!P_{I_k}$ où $I\!\!P_{I_k}$ est la restriction de $I\!\!P$ à I_k, les mêmes inégalités sont valables pour $I\!\!P$ i.e. $e_{I\!\!P}(AB^c, A^cB) \leqslant e_{I\!\!P}(A,B)$ et $e^*_{I\!\!P}(AB^c, A^cB) \leqslant e^*_{I\!\!P}(A,B)$. Pour obtenir les mêmes relations avec une mesure vectorielle $I\!\!P$, il suffit de l'approcher par une suite de mesures simples qui converge uniformément. On obtient encore $e_{I\!\!P}(AB^c, A^cB) \leqslant e_{I\!\!P}(A,B)$ et $e^*_{I\!\!P}(AB^c, A^cB) \leqslant e^*_{I\!\!P}(A,B)$

Ceci montre que si $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)$, alors $\mathcal{I}(AB^c) = \mathcal{I}(A^cB)$ et si $A\mathcal{R}B$, alors $(AB^c)\mathcal{R}(A^cB)$.

En effet, soit $E \subset A^c$, on vient de voir qu'il existe $F \subset AB^c$ tel que $I\!\!P(F) = I\!\!P(EB)$, ainsi l'ensemble $EB^c + F$ a même mesure que E et est inclus dans $\mathcal{I}(B^c)$. Ceci implique $\mathcal{I}(A^c) \subset \mathcal{I}(B^c)$, d'où le résultat. La preuve est similaire pour la relation $A\mathcal{R}B$. $\square$

3. Première sélection

Une sélection est un choix « canonique » d'un borélien associé à une classe de boréliens.

Pour obtenir une version du théorème de Skorohod on recherche les propriétés suivantes :

– Si la suite $\{I\!\!P(A_n)\}$ converge alors la suite des sélections $\{\tilde{A}_n\}$ converge en mesure.

– Si X est une v.a. on peut définir une v.a. sélection $\tilde{X}$ de X telle que $\{\tilde{X} \geqslant x\}$ soit une sélection de $\{X \geqslant x\}$.

Dans cette partie nous allons définir une application S permettant un choix naturel d'un borélien. L'inconvénient de cette « sélection » est la difficulté du passage aux v.a, voir cependant le paragraphe 6.

L'application S est définie à travers une application, notée aussi S, de $\mathcal{I}(\mathbb{P})$ dans $\mathcal{B}([0,1])$ de sorte que $\mathbb{P}(S(\alpha))=\alpha$. À tout borélien A on associe $S(\mathbb{P}(A))$, ce qui s'interprète comme un choix « canonique » d'un borélien de mesure α. C'est l'analogue, dans le cas unidimensionnel, d'une des applications $\alpha \to [0,a]$ avec $P([0,a])=\alpha$ ou $\alpha \to [1-b,1]$ et $P([1-b,1])=\alpha$.

La définition suivante est un pas vers la possibilité d'un choix parmi les boréliens de mesure donnée. Ce choix se fait par l'intermédiaire de mesures auxiliaires à densité par rapport à $|\mathbb{P}|$.

Définition 3.1. — *Une fonction test f est une fonction strictement croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ avec $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Pour une telle fonction et $\mathbb{P}$ une mesure vectorielle positive sur $\mathcal{B}$, m_f est la mesure de densité f par rapport à $|\mathbb{P}|$ i.e. $m_f(A) \stackrel{\Delta}{=} E_{|\mathbb{P}|}[f(t)\mathbb{1}_A(t)]$.*

Le lemme suivant relie les convergences faibles par rapport à $\mathbb{P}$ et à m_f.

Lemme 3.2. — *Pour une suite $\{\phi_n\}$, $0 \leqslant \phi_n \leqslant 1$, on a l'équivalence des convergences faibles pour $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ et pour $\mathbb{L}^2(m_f)$.*

Preuve. — Commençons par établir que si ϕ_n converge faiblement pour la mesure $\mathbb{P}$, il en est de même pour m_f. Pour cela montrons qu'une suite $\{h_n\}$ est relativement compacte pour $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ si et seulement si elle l'est pour $\mathbb{L}^2(m_f)$. De plus, les valeurs d'adhérences pour les deux topologies sont identiques.

Supposons que $h_n \to h$ pour la topologie faible de $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$, donc pour celle de $\mathbb{L}^2(|\mathbb{P}|)$. Pour $g \in \mathbb{L}^2(|\mathbb{P}|)$, on a $f.g \in \mathbb{L}^2(|\mathbb{P}|)$ car l'application f est bornée, d'où la convergence de $m_f[g.h_n] = E_{|\mathbb{P}|}[f.g.h_n]$ vers $m_f[g.h] = E_{|\mathbb{P}|}[f.g.h]$ i.e. $h_n \to h$ pour la topologie faible de $\mathbb{L}^2(m_f)$. La convergence faible de h_n pour $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ vers h implique sa convergence faible pour $\mathbb{L}^2(m_f)$ vers la même limite.

La réciproque résulte de l'équivalence $g \in \mathbb{L}^2(m_f) \Longleftrightarrow g\sqrt{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})$, qui implique $f.g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})$. $\square$

L'introduction des mesures auxiliaires par des fonctions tests, permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 3.3. — *Pour toute mesure $\mathbb{Q}$ s'écrivant $\mathbb{Q} = \sum_1^\infty \alpha_i \delta_{y_i} = X(\mathbb{P})$ et pour toute fonction test f, il existe une fonction ϕ telle que $\mathbb{Q} =$*

$\phi(I\!P)$ *et* $E_{m_f}[\phi] \geqslant E_{m_f}[Y]$, *si* $Q = Y(I\!P)$. *En d'autres termes,* $\phi \in$ Argmax $\{E_{m_f}[Y],\ Q = Y(I\!P)\}$.

Preuve. — L'ensemble $F = \left\{\phi \triangleq \{\phi_i\},\ 0 \leqslant \phi_i \leqslant \sum_1^\infty \phi_i \leqslant 1,\ E_{I\!P}[\phi_i] = \alpha_i\right\}$ est non vide, il suffit de prendre $\phi_i = \mathbb{1}_{\{X = x_i\}}$.

Notons $\overline{m}_f$ l'application de F dans $I\!R_+$ définie par $\overline{m}_f[\phi] \triangleq \sum_1^\infty y_i m_f[\phi_i]$.

Montrons que cette application linéaire est continue.

Comme $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ et $0 \leqslant f \leqslant 1$ on a l'inégalité uniforme en ϕ :

$$|m_f[\phi] - \sum_1^N y_i m_f[\phi_i]| \leqslant \sum_N^\infty m_f[\phi_i] \leqslant \sum_N^\infty \left(E_{|I\!P|}[\phi_i] = \|\alpha_i\|\right) \leqslant \varepsilon, \text{ pour } N \text{ grand.}$$

De là, comme F est compact, il existe $\phi^0 \in F$ telle $\overline{m}_f[\phi^0] = s \triangleq \sup_F m_f[\phi]$.

L'ensemble $\{\overline{m}_f = s\}$ est un convexe compact non vide, il est donc l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Montrons que les points extrémaux de $\{\overline{m}_f = s\}$ *sont des points extrémaux de* F.

Par négation, soit ϕ^0 un point extrémal de $\{\overline{m}_f = s\}$ s'écrivant $\phi^0 = \frac{1}{2}(\phi^1 + \phi^2)$, ϕ^i extrémal dans F, pour $i = 1, 2$ (ou plus généralement, ϕ^0 est une combinaison convexe de points extrémaux de F). Nécessairement $\overline{m}_f[\phi^i] = s$, les ϕ^i appartiennent à $\{\overline{m}_f = s\}$ et sont donc extrémaux dans cet ensemble. Par conséquent $\phi^i = \phi^0$, ceci prouve notre assertion.

Ainsi, avec le lemme 2.1, il existe une partition $\{A_i\}$ telle que pour tout i, $I\!P(A_i) = \alpha_i$ et, pour toute autre partition $\{B_i\}$ avec $I\!P(B_i) = \alpha_i$, $\sum y_i m_f(A_i) \geqslant \sum y_i m_f(B_i)$. $\square$

Le théorème suivant permet de définir le choix, c'est à dire l'application S.

Théorème 3.4. — *Soient* $I\!P$ *une mesure vectorielle diffuse sur* $\mathcal{B}([0,1])$, f *une fonction test et* $\alpha \in \mathcal{I}(I\!P)$. *Alors les deux ensembles suivants sont égaux*

$$\mathcal{A}_f^\alpha \triangleq \text{Argmax}\left\{m_f(A),\ I\!P(A) = \alpha\right\}$$
$$\textit{et}\ \ \text{Argmax}\left\{m_f[\phi],\ 0 \leqslant \phi \leqslant 1,\ E_{I\!P}[\phi] = \alpha\right\}.$$

De plus, il existe un ensemble non dénombrable de fonctions tests f *pour lesquelles* $\mathcal{A}_f^\alpha$ *est un singleton* $I\!P$*-p.s. noté* $S_f(\alpha)$ *ou* $S_f(A)$.

Preuve. — La mesure vectorielle $(\mathbb{P}, m_f)$ est diffuse et le théorème de Lyapounov assure que l'ensemble $\{m_f(B),\ \mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)\}$ est un intervalle fermé non vide. Il existe donc un borélien A tel que $\mathbb{P}(A)=\alpha$ et $m_f(A)$ maximal.

– *Montrons l'égalité des ensembles.*

Le lemme 2.1 assure que les points extrémaux du convexe compact $F=\{\phi,\ 0\leqslant\phi\leqslant 1,\ E_{\mathbb{P}}[\phi]=\alpha\}$ sont des fonctions indicatrices. De même, comme dans la proposition 3.3, si $s\overset{\Delta}{=}\sup\{m_f[\phi],\ \phi\in F\}$, les points extrémaux de $\{\phi,\ 0\leqslant\phi\leqslant 1,\ E_{\mathbb{P}}[\phi]=\alpha,\ m_f[\phi]=s\}$ sont contenus dans ceux de F. Ceci prouve la première partie.

Soit $\mathcal{C}_f$ la classe des mesures diffuses $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{B}([0,1])$ vérifiant la propriété suivante :

$$\text{« Pour tout } A\in\mathcal{B},\ \mathbb{P}(A)\neq 0 \text{ il existe } B\subset A$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(A) \text{ et } m_f(B)\neq\frac{1}{2}m_f(A)\text{ ».}$$

Clairement $\mathbb{P}\in\mathcal{C}_f$ si et seulement si

Pour tout A, $\mathbb{P}(A)\neq 0$, il existe deux ensembles disjoints $A_i,\ i=1,2$ contenus dans

A tels que $\mathbb{P}(A_i)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(A)$ et $m_f(A_1)\neq m_f(A_2)$.

– *Montrons que la condition $\mathbb{P}\in\mathcal{C}_f$ assure que $\mathcal{A}_f^\alpha$ est réduit à un singleton.*

Supposons qu'il existe deux boréliens distincts A et B appartenant à $\mathcal{A}_f^\alpha$.

Notons $A_i,\ i=1,2$, deux ensembles disjoints, contenus dans $A\backslash B$, tels que $\mathbb{P}(A_i)=\frac{\mathbb{P}(A\backslash B)}{2}$ et $m_f(A_1)<m_f(A_2)$. En inversant les rôles de A et B, on obtient $B_i,\ i=1,2$, contenus dans $B\backslash A$, avec $\mathbb{P}(B_i)=\frac{\mathbb{P}(B\backslash A)}{2}=\frac{\mathbb{P}(A\backslash B)}{2}$ et $m_f(B_1)<m_f(B_2)$.

Comme $\mathbb{P}(E\overset{\Delta}{=}A\cap B+A_2+B_2)=\alpha$ et $m_f(A)<m_f(E)$ on a une contradiction.

Pour une mesure diffuse, la négation de la propriété $\mathbb{P}\in\mathcal{C}_f$ est :

Il existe A tel que $\mathbb{P}(A)\neq 0$ et si $B\subset A$ et $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(A)$, alors $m_f(B)=\frac{1}{2}m_f(A)$.

Dans ce cas on dit que A vérifie $(*f)$.

– *La propriété* $(*f)$ *est héréditaire*

Si A vérifie $(*f)$, alors tout borélien $B \subset A$ possède la même propriété i.e. si $C \subset B$ et $I\!P(C) = \frac{1}{2} I\!P(B)$ alors $m_f(C) = \frac{1}{2} m_f(B)$.

Procédons par négation. Supposons qu'il existe $C \subset B \subset A$ tels que $I\!P(C) = \frac{1}{2} I\!P(B)$ et $m_f(C) \neq \frac{1}{2} m_f(B)$. Prenons un borélien $E \subset A \backslash B$ tel que $(I\!P, m_f)(E) = \frac{1}{2}(I\!P, m_f)(A \backslash B)$, on obtient $I\!P(C+E) = \frac{1}{2} I\!P(B + A\backslash B) = \frac{1}{2} I\!P(A)$ et $m_f(C+E) \neq \frac{1}{2} m_f(A)$, ce qui est contradictoire.

Pour une mesure $I\!P$ diffuse donnée, examinons les fonctions tests f telles que $I\!P \notin \mathcal{C}_f$.

Pour $\alpha \in \mathcal{I}(I\!P)$, notons I_α l'intervalle $[\underline{m}_f(\alpha), \overline{m}_f(\alpha)]$ où

$\underline{m}_f(\alpha) = \inf\{m_f(A),\ I\!P(A) = \alpha\}$ et $\overline{m}_f(\alpha) = \sup\{m_f(A),\ I\!P(A) = \alpha\}$

Par hypothèse $I\!P \notin \mathcal{C}_f$, il existe A, $I\!P(A) \neq 0$, vérifiant $(*f)$.

Considérons la restriction de $I\!P$ à A et, pour simplifier les écritures, prenons $A = [0,1] = \mathbf{I}$. Ainsi l'égalité $I\!P(B) = \frac{1}{2} I\!P(\mathbf{I})$ implique $m_f(B) = \frac{1}{2} m_f(\mathbf{I})$.

– *Montrons que cela se traduit par* « *pour tout* $\alpha \in \mathcal{I}(I\!P)$, I_α *est un singleton.* »

On sait déjà que pour tout $\alpha \in [0, I\!P(\mathbf{I})]$, $I_\alpha = \{m_f(\cdot) = \alpha\ m_f(\mathbf{I})\}$ est un singleton.

Supposons qu'il existe $\beta \in \mathcal{I}(I\!P)$ tel que I_β ne soit pas réduit à un point. Le point $\gamma \in \mathcal{I}(I\!P)$ tel que $\beta + \gamma = I\!P(\mathbf{I})$ est dans le plan défini par le couple $(\beta, I\!P(\mathbf{I}))$ et les points β et γ sont situés de parts et d'autres de la ligne $[0,\ I\!P(\mathbf{I})]$. Soit α l'intersection des segments $[0, I\!P(\mathbf{I})]$ et $[\beta, \gamma]$, alors le convexe engendré par I_β et I_γ contient un intervalle ouvert non vide de la droite engendrée par $[\alpha, I_\alpha]$: I_α n'est pas réduit à un point, ce qui est contradictoire.

Donc pour tout $\beta \in \mathcal{I}(I\!P)$, I_β est réduit à un point, ce qui signifie que le convexe $\mathcal{I}(I\!P, m_f)$ est contenu dans un hyperplan.

Montrons que la relation $I\!P$ *diffuse,* $I\!P(A) = I\!P(B) \Longrightarrow m_f(A) = m_f(B)$ *implique* f *appartient localement à un espace vectoriel de dimension finie.*

Nous avons vu que si $\mathbb{P}=(P_1,\cdots,P_d)$ est diffuse et n'appartient pas à $\mathcal{C}_f$, il existe un borélien A_f, $\mathbb{P}(A_f)\neq 0$, tel que la trace de m_f sur A_f, s'écrit $m_f = \sum_1^d a_i^f P_i$ pour des constantes a_i^f, $i=1,\cdots,d$. Notons h_i la densité de P_i par rapport à $|\mathbb{P}| = \sum_1^d P_i$, $\sum_1^d h_i = 1$, la relation $m_f = f|\mathbb{P}| = \sum_1^d a_i^f P_i$ donne : $f(t)\mathbb{1}_{A_f}(t) = \Big(\sum_1^d a_1^f h_i(t)\Big)\mathbb{1}_{A_f}(t)$ $\mathbb{P}$-p.s.

Sur un ensemble non négligeable f appartient à l'espace vectoriel engendré par les h_i. Cet espace est de dimension inférieure à d. Comme il n'existe au plus un nombre dénombrable d'ensembles A_f non négligeables et disjoints pour lesquels $\mathbb{P}\not\in C_f$, ceci achève la preuve. $\square$

Nous supposons dans la suite que la fonction test f vérifie l'unicité du théorème 3.4 et, pour alléger les écritures, nous supprimons la référence à cette fonction test.

Lemme 3.5. — *Soient $\mathbb{P}$ une mesure diffuse et $\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ une suite convergeant vers ϕ pour $\sigma(\mathbb{L}^2,\mathbb{L}^2)$. Si $m[\phi]=m(S(\alpha))$, alors $\phi=\mathbb{1}_{S(\alpha)}$ et $\{A_n\}$ converge en mesure vers $S(\alpha)$.*

Preuve. — Soit A un borélien tel que $\alpha=\mathbb{P}(A)=E_{\mathbb{P}}[\phi]$, comme $m[\phi]=m(S(A)=S(\alpha))$, le théorème 3.4 assure que $\phi=\mathbb{1}_{S(\alpha)}$. Ceci prouve la converge faible dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ de la suite $\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ vers $\mathbb{1}_{S(A)}$. Avec le lemme 3.2 on en déduit la convergence forte de cette suite dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ et dans $\mathbb{L}^2(m)$ et donc sa converge en mesure. $\square$

3.1. Quelques compléments autour de $\mathcal{I}(\mathbb{P})$.

La preuve de la propriété suivante est laissée au lecteur.

Lemme 3.6. — *a) Soient C un convexe compact de $\mathbb{R}^{d+1}$ et $\{x_n\}$ une suite de $\mathbb{R}^d$ convergeant vers x. Notons $\inf_n(x_n)$ et $\sup_n(x_n)$ les extrémités de l'intervalle $I(x_n)\stackrel{\Delta}{=}\Delta_{x_n}\cap C$ où Δ_{x_n} est la droite $\{(x_n,y),\ y\in\mathbb{R}\}$. Alors $\sup_n(x_n)\to\sup(x)$.*

b) Soient $\{C_n\}$ une suite de convexes compacts décroissant vers C et Δ une droite passant par x, $x\in C$. Alors les intervalles $\Delta\cap C_n$ convergent vers l'intervalle $\Delta\cap C$.

c) Soient $\{C_n\}$ une suite de convexes compacts convergeant vers C, $x\in\overset{\circ}{C}$ et Δ une droite passant par x. Alors les intervalles $\Delta\cap C_n$ convergent vers l'intervalle $\Delta\cap C$.

Donnons maintenant un complément au lemme 3.5.

PROPOSITION 3.7. — *Pour une mesure diffuse $I\!P$, l'ensemble $\{S(\alpha),\ \alpha\in\mathcal{I}\}$ est compact pour la convergence en mesure.*

Preuve. — Il s'agit d'une simple application de la partie a) du lemme 3.6 ci-dessus. En effet les intervalles I_{α_n} intersection de $\mathcal{I}(I\!P)$ avec la droite orthogonale à $I\!R^d$ et issue du point α_n, convergent vers I_α. Donc $m\big(S(\alpha_n)\big) \to m\big(S(\alpha)\big)$ et il suffit d'appliquer le lemme 3.5 à la suite de terme général $A_n = S(\alpha_n)$ pour achever la preuve. $\square$

Notons ρ, éventuellement $\rho_{I\!P}$, l'application définie par $\rho(\alpha) = m\big(S(\alpha)\big)$, nous avons :

PROPOSITION 3.8. — *a) Pour une mesure $I\!P$ diffuse, l'application ρ est continue et on a l'équivalence entre ρ continue et $I\!P\big(S(\alpha^k)\Delta(S(\alpha)\big) \to 0$ si $\alpha^k \to \alpha$.*

Soit $\{I\!P_k\}$ une suite de mesures diffuses qui converge uniformément vers $I\!P$, alors

b) en posant $\rho_k = \rho_{I\!P_k}$, on a $\rho_k \to \rho$ sur $\mathring{\mathcal{I}}$, l'intérieur de $\mathcal{I}(I\!P)$.

c) pour $\alpha\in\mathcal{I}(I\!P)$, il existe une suite $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k\in\mathcal{I}(I\!P_k)$, telle que $\alpha_k \to \alpha$ et $\rho_k(\alpha_k) \to \rho(\alpha)$.

Preuve. — a) Pour $\alpha \in \mathcal{I}(I\!P)$, la section en α du convexe compact de $I\!R^{d+1}$, $\mathcal{I}(I\!P, m)$, est un intervalle de la forme $I(\alpha) = [\inf(\alpha), \sup(\alpha)] = \big\{x,\ (\alpha, x) \in \mathcal{I}(I\!P, m)\big\} = \big\{x,\ \exists\ A,\ I\!P(A) = \alpha \text{ et } m(A) = x\big\}$. Avec les notations précédentes, $\sup(\alpha) = \rho(\alpha)$.

Lorsque $\alpha_n \to \alpha$ les intervalles $I(\alpha_n)$ tendent vers $I(\alpha)$, lemme 3.6, donc $\sup(\alpha_n) \to \sup(\alpha)$.

Montrons que si $I\!P(S(\alpha^k)\Delta(S(\alpha)) \to 0$ lorsque $\alpha^k \to \alpha$, alors ρ est continue.

En effet, comme $\rho(\alpha^k) = m(S(\alpha^k))$ et que $I\!P(S(\alpha^k)\Delta(S(\alpha)) \to 0$, il en résulte que $m(S(\alpha^k)) \to m(S(\alpha))$ i.e. ρ est continue.

Réciproquement, supposons que ρ soit continue, donc que $m(S(\alpha^k)) \to m(S(\alpha))$. En particulier, avec la proposition 3.7, $S(\alpha^k) \to S(\alpha)$ en mesure, c'est la condition recherchée.

b) *Considérons maintenant le cas de la suite $\{I\!P_k\}$.*

Montrons que $\mathcal{I}_k \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{I}(I\!\!P_k, m_k) \to \mathcal{I} \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{I}(I\!\!P, m)$. Considérons $(I\!\!P, m)(A) = (\alpha, \beta) \in \mathcal{I}$ alors $(I\!\!P_k, m_k)(A) = (\alpha_k, \beta_k) \to (\alpha, \beta)$. Réciproquement, si $(I\!\!P_k, m_k)(A_k) = (\alpha_k, \beta_k) \to (\alpha, \beta)$, pour une sous-suite $1\!\!1_{A_k} \to \phi$ faiblement et $(I\!\!P, m)(\phi) = (\alpha, \beta)$ ainsi $(\alpha, \beta) \in \mathcal{I}$.

Si maintenant α appartient à $\overset{\circ}{\mathcal{I}}(I\!\!P)$, il existe un entier K tel que $\alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{I}}(I\!\!P_k)$ pour tout $k \geqslant K$, voir Lemma 3 de [8]. Pour un tel α, la partie c) du lemme 3.6, montre que les intervalles $I_n(\alpha) = \{m_n(A),\ I\!\!P_n(A) = \alpha\}$ convergent vers I_α. C'est la convergence de $m_n\big(S_n(\alpha)\big) = \rho_n(\alpha)$ vers $\rho(\alpha)$.

c) Pour $\alpha \in \mathcal{I}(I\!\!P)$, soit $S(\alpha)$ l'élément maximal pour $I\!\!P$ et α, posons $I\!\!P_k\big(S(\alpha)\big) = \alpha_k$.

La suite $\{\alpha_k\}$ converge vers α, notons $S_k(\alpha_k)$ l'élément maximal pour $I\!\!P_k$ et α_k i.e. le point de Argmax $\{m_k(A),\ I\!\!P_k(A) = \alpha_k\}$.

La suite $\{1\!\!1_{S_k(\alpha_k)}\}$ vérifie les hypothèses du lemme 3.5. En effet, la convergence uniforme de m_k vers m implique que $m_k\big(S(\alpha)\big) \to m\big(S(\alpha)\big)$ et donc $m_k\big(S_k(\alpha_k)\big) \to m(\phi)$.

L'inégalité $m_k\big(S_k(\alpha_k)\big) \geqslant m_k\big(S(\alpha)\big)$ donne à la limite $m(\phi) \geqslant m\big(S(\alpha)\big)$. Ainsi la suite $\{S_k(\alpha_k)\}$ converge en mesure vers $S(\alpha)$, d'où $\rho_k(\alpha_k) \to \rho(\alpha)$.
□

Remarquons que si la suite $\{\mathcal{I}(I\!\!P_k)\}$ est décroissante, la partie b) du lemme 3.6 donne la convergence uniforme de ρ_k vers ρ sur $\mathcal{I}(I\!\!P)$.

Le but de la partie suivante est d'établir l'existence d'une telle suite de mesures simples, $\{I\!\!P_k\}$, convergeant uniformément vers $I\!\!P$ et telle que $\mathcal{I}(I\!\!P) \subset \mathcal{I}(I\!\!P_k)$.

Lemme 3.9. — *Soient f et g deux fonctions positives intégrables telles que, pour tout $t \in [0,1]$, $F(t) = \int_0^t f(x)dx \leqslant G(t) = \int_0^t g(x)dx$, alors pour tout borélien A, il existe un borélien B tel que $F(A) = G(B)$. Par suite, si $I\!\!P = (f,1)\lambda$ il existe une fonction h telle que, si $Q\!\!\!\!Q = (g,h)\lambda$, alors $\mathcal{I}(I\!\!P) \subset \mathcal{I}(Q\!\!\!\!Q)$.*

Preuve. — Posons $F(A) = \int_A f(x)dx$, $A \in \mathcal{B}$, l'application $x \to F(A) - G(x)$ décroît de $F(A) \geqslant 0$ à $F(A) - G(1) \leqslant 0$. Il existe x tel que $F(A) = G(x)$. Enfin, sans perte de généralité, nous pouvons supposer F inversible, soit $H = F^{-1} \circ G(x)$, ainsi, pour tout t, il existe x tel que $\big(F(t), t\big) = \big(G(x), H(x)\big)$. Autrement dit les mesures $I\!\!P = (f,1)\lambda$ et $Q\!\!\!\!Q = (g,h)\lambda$, vérifient $\mathcal{I}(I\!\!P) \subset \mathcal{I}(Q\!\!\!\!Q)$.
□

Lemme 3.10. — *Soit $I\!P$ une mesure diffuse, alors il existe une suite $\{I\!P_n\}$ de mesures simples convergeant uniformément vers $I\!P$ et telles que $\mathcal{I}(I\!P)\subset\mathcal{I}(I\!P_n)$.*

Preuve. — a) *Cas des mesures bi-dimensionnelles à densité bornée.*

Soient f bornée et $\{f_n\}$ une suite de fonctions simples qui décroît vers uniformément (pour $I\!L^{\infty}_{|I\!P|}$) vers f. Notons P_n la mesure réelle de fonction de répartition $F_n^*(x)$ définie par le relation du lemme 3.9 i.e. $F_n^*(x)=F^{-1}\circ F_n(x)$, où $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$. La suite de mesures $\big\{I\!P_n=(f_n\lambda,P_n)\big\}$ converge uniformément vers $I\!P=(f,Id)\lambda$.

Le même lemme montre que $\mathcal{I}(I\!P)\subset\mathcal{I}(I\!P_n)$.

Plus généralement, si $I\!P=(f,h)\lambda$ et $H(x)=\displaystyle\int_0^x h(t)dt$, alors la suite $\big\{I\!P_n=(f_n\lambda,P_n)\big\}$ où P_n est la mesure de fonction de répartition $G=H\circ F^{-1}\circ F_n^*$, vérifie $F(t)=F_n^*(x)$, $H(t)=G(x)$ donc $\mathcal{I}(I\!P)\subset\mathcal{I}(I\!P_n)$ et les mesures $I\!P_n$ sont simples et convergent uniformément vers $I\!P$. C'est la propriété d'approximation par l'extérieur pour les mesures à densité bornée à valeurs $I\!R^2$.

b) *Cas des mesures vectorielles à densité.*

Par récurrence, on renouvelle ce procédé.

Ainsi pour $I\!P=f\lambda,\ f=(f_n), n\leqslant d$ et $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$. Approchons f_1 (bornée) par une suite décroissante de fonctions simples f_1^k et $F_1(x)\leqslant F_1^k(x)=\displaystyle\int_0^x f_1^k(t)dt$. Supposons, par récurrence, on ait des fonctions de répartions F_n^k telles que, pour tout t et tout $n\leqslant d-1$, il existe x avec $F_n(t)=F_n^k(x)$. Si, par exemple, F_1 est inversible, alors $t=F^{-1}\circ F_1^k(x)$ et donc $F_d(t)=F_d\circ F^{-1}\circ F_1^k(x)\overset{\Delta}{=}F_d^k(x)$. En posant $I\!P^k$ la mesure dont les coordonnées ont pour fonction de répartition F_n^k, alors $\mathcal{I}(I\!P)\subset\mathcal{I}(I\!P^k)$. Les $I\!P^k$ sont des mesures simples et la condition de convergence ne pose pas de difficulté. Ceci prouve le lemme pour les mesures à densité.

c) *Cas général.*

Pour achever la preuve il suffit de remplacer la mesure de Lebesgue par $|I\!P|$. Le lemme 3.9 demeure valide sous les hypothèses F et G continues. En particulier, si $I\!P=(f,Id)\mu$, il existe une mesure simple $Q\!\!\!\!Q=(g,h)\mu$ telle que $\mathcal{I}(I\!P)\subset\mathcal{I}(Q\!\!\!\!Q)$. Enfin les parties précédentes demeurent pour μ. $\square$

Remarques 3.11. — Le théorème 3.4 s'étend naturellement lorsque l'on remplace l'intervalle $[0,1]$ par un borélien B; ce qui donne un sens à l'égalité :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_f^{B,\alpha} &\triangleq \operatorname{Argmax}\{m_f(A),\ I\!\!P(A)=\alpha,\ A\subset B\}\\ &= \operatorname{Argmax}\{m_f[\phi],\ 0\leqslant\phi\leqslant 1\!\!1_B,\ E_{I\!\!P}[\phi]=\alpha\}.\end{aligned}$$

Et, comme précédemment, si ces ensembles ne sont pas vides, il existe une fonction test f telle que $\mathcal{A}_f^{B,\alpha}$ soit un singleton ($I\!\!P$-p.s.), noté $S_f(B,\alpha)$. Lorsque $B=S_f(\alpha)$, on écrit $S_f(\alpha,\beta)$. Néanmoins, même pour des mesures simples, on peut trouver A, $I\!\!P(A)=\alpha$ tel que $\mathcal{I}\big(S(\alpha)\big)$ soit strictement inclus dans $\mathcal{I}(A)$.

Ce fait permet de construire une v.a. de support A telle qu'il n'existe pas de v.a. de support $S(\alpha)$ ayant même loi.

– Comme dans la proposition 3.3, les points extrémaux de $\big\{(\phi_n)_{2\leqslant n}\ \big|\ \sum_2^\infty m_f[\phi_i]=s\big\}$ sont des points extrémaux de $F(B,\alpha_2,\cdots)$ et, par conséquent, il existe $B_2\subset B$ contenant une partition de mesures $\alpha_2,\cdots$ et $m_f(B_2)$ maximale parmi les ensembles vérifiant cette condition. A priori, rien assure que $B_2=\operatorname{Argmax}\ \big\{m_f(A),\ A\subset B,\ I\!\!P(A)=\sum_2^\infty\alpha_i\big\}$.

C'est aussi une différence avec le cas unidimensionnel.

Il n'est guère difficile de trouver un contre-exemple : une mesure $I\!\!P$ et deux boréliens $B_0\subset A_0$ tels que $I\!\!P(A_0)=\alpha$, $I\!\!P(B_0)=\beta$ et Argmax $\big\{m(B),\ I\!\!P(B)=\beta\big\}$ ne soit pas inclus dans Argmax $\big\{m(A),\ I\!\!P(A)=\alpha\big\}$, il suffit de prendre α extrémal dans $\mathcal{I}(I\!\!P)$.

Ainsi, contrairement au cas uni-dimensionnel, la relation $B\subset A$, $I\!\!P(B)=\beta$, $I\!\!P(A)=\alpha$, n'implique pas que $S(\beta)\subset S(\alpha)$.

– Nous avons vu que, sous conditions, l'on peut donner un sens à $S(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. Une condition nécessaire et suffisante est que pour tout i, $1<i\leqslant n$, $\alpha_i\in\mathcal{I}\big(S(\alpha_1\cdots,\alpha_{i-1})\big)$. Plus généralement, on peut définir $S(\alpha)$ où $\alpha=(\alpha_n)$ est une suite « décroissante » i.e. pour tout i, $\alpha_i\in\mathcal{I}\big(S(\alpha_1\cdots,\alpha_{i-1})\big)$, comme limite décroissante de la suite $\big\{S(\alpha_1\cdots,\alpha_n)\big\}$. Ceci permettrait de définir certaines v.a. Nous ne poursuivons pas cette étude.

4. Sélection pour la relation $\mathcal{R}$

Cette sélection est un cas très particulier de la sélection qui suit (troisième sélection). C'est pour cela que nous limitons cette partie, qui peut être lue après le paragraphe 5.

La proposition suivante complète la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Proposition 4.1. — *Pour une mesure $I\!P$ diffuse, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) Pour tout borélien A, il existe A_1 et A_2 disjoints tels que $A_1+A_2 = A$ et $A_1 \mathcal{R} A_2$.

ii) Les points extrémaux de $\mathbf{F}_\phi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, sont des fonctions indicatrices.

Preuve. — La preuve de l'implication $i) \Longrightarrow ii)$ est « semblable » à la partie correspondante dans la preuve de la proposition 5.1. Soit $\psi \mathcal{R} \phi$ et $I\!P\big(B = \{\psi \in [\epsilon, 1-\epsilon]\}\big) \neq 0$, définissons, comme dans le lemme 2.1, $\psi^{\pm} = \psi \pm \epsilon 1\!\!1_{B_1} \mp \epsilon 1\!\!1_{B_2}$ où $B = B_1 + B_2$, $B_1 \mathcal{R} B_2$.

Pour établir que $\psi^{\pm} \mathcal{R} \phi$, prenons $0 \leqslant \theta^+ \leqslant \psi^+$. Lorsque $\theta^+ \leqslant \psi$ on a $E_{I\!P}[\theta^+] \in \mathcal{I}(\psi)$. Supposons que $I\!P(A_1 = \{\theta^+ \geqslant \psi\}) \neq 0$, comme $A_1 \subset B_1$ il existe $A_2 \subset B_2$ avec $I\!P(A_1) = I\!P(A_2)$. On vérifie que la fonction $\theta \stackrel{\Delta}{=} \theta^+ - \epsilon 1\!\!1_{A_1} + \epsilon 1\!\!1_{A_2}$ satisfait aux conditions suivantes :

$0 \leqslant \theta \leqslant \psi$, ce qui entraîne que $\mathcal{I}(\psi^+) \subset \mathcal{I}(\psi)$. On montre de même que $\mathcal{I}(\psi^-) \subset \mathcal{I}(\psi)$ et on voit que cette construction fonctionne dans l'autre sens, ce qui permet d'en déduire que $\mathcal{I}(\psi^{\pm}) = \mathcal{I}(\psi)$ et, de là, $\psi^{\pm} \in \mathbf{F}_\phi$. La suite de la démonstration est semblable à celle de la proposition 5.1.

La réciproque est évidente. $\square$

Définition 4.2. — *Nous désignons par $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ l'ensemble des mesures vérifiant les assertions de la proposition 4.1.*

Si $I\!P \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, on a l'égalité $\mathbf{F}_\phi = \mathbf{F}_A$ i.e. $\phi \mathcal{R} 1\!\!1_A$, pour un borélien A contenu dans le support de ϕ, noté *supp*(ϕ).

Le lemme suivant, qui complète le lemme 2.5, joue un rôle essentiel dans la continuité de l'application ρ, voir paragraphe 5.

Lemme 4.3. — *Soient $I\!P \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ et $\phi_n \stackrel{\sigma}{\to} \phi$. Alors les ensembles $\mathbf{F}_n = \{\psi,\ \psi \mathcal{R} \phi_n\}$ convergent vers $\mathbf{F} = \{\psi,\ \psi \mathcal{R} \phi\}$.*

Preuve. — Pour une sous suite éventuelle $\{\mathbf{F}_n\}$ converge, notons $\tilde{\mathbf{F}}$ la fermeture (faible ou forte) du convexe limite. Pour $\psi \in \tilde{\mathbf{F}}$, il existe une suite $\{\psi_n\}$, $\psi_n \in \mathbf{F}_n$, telle que $\psi_n \xrightarrow{\sigma} \psi$.

Comme $\psi_n \mathcal{R} \phi_n$, si $\{\theta_n\}$ est une suite qui converge vers θ et telle que $0 \leqslant \theta_n \leqslant \psi_n$, il existe une suite $\{\rho_n\}$, convergeant vers ρ, telle que $0 \leqslant \rho_n \leqslant \phi_n$ et $\mathcal{I}(\theta_n) = \mathcal{I}(\rho_n)$.

En « inversant » les rôles de θ_n et de ρ_n, on voit avec le lemme 2.5 que $\mathcal{I}(\theta) = \mathcal{I}(\rho)$ i.e. $\psi \in \mathbf{F}$, donc $\tilde{\mathbf{F}} \in \mathbf{F}$.

Réciproque. Comme $\mathbf{F}_n$ converge vers $\tilde{\mathbf{F}}$, il en est de même pour la suite $\{C_n\}$ formée par les combinaisons convexes des $\mathbf{F}_p$, $p \geqslant n$. Quitte à remplacer la suite $\{\phi_n\}$ par des combinaisons convexes des ϕ_p, $p \geqslant n$ et prendre une sous suite, on peut supposer que $\{\phi_n\}$ converge presque sûrement vers ϕ. La condition $I\!\!P \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, assure de l'existence de A_n contenu dans le support de ϕ_n et tel que $1\!\!1_{A_n} \mathcal{R} \phi_n$, c'est la proposition 4.1.

Montrons la convergence des A_n vers A.

– Si ϕ est extrémale i.e $\phi = 1\!\!1_A$, la convergence de $\phi_n 1\!\!1_{A^c}$ vers 0 implique que $I\!\!P(A_n A^c) \to 0$. Comme $I\!\!P(A_n) \to I\!\!P(A)$, il en résulte que la suite $\{A_n\}$ converge en mesure vers A.

– Supposons que $\{\phi \in [\epsilon,\ 1-\epsilon]\}$ ne soit pas négligeable, pour n suffisamment grand il en est de même pour les ensembles $\{\phi_n \in [\epsilon,\ 1-\epsilon]\}$ qui convergent en mesure.

Pour $n \geqslant N(\epsilon)$, on a l'inclusion $A \stackrel{\Delta}{=} \{\phi \in [2\epsilon,\ 1-2\epsilon]\} \subset \{\phi_n \in [\epsilon,\ 1-\epsilon]\}$.

Notons $A = A_1 + A_2$ un découpage tel que $A_1 \mathcal{R} A_2$ et posons $\phi^\epsilon = \phi + \epsilon 1\!\!1_{A_1} - \epsilon 1\!\!1_{A_2}$. Toujours pour n suffisamment grand, soit $\phi^\epsilon_n = \phi_n + \epsilon 1\!\!1_{A_1} - \epsilon 1\!\!1_{A_2}$. La suite $\{\phi^\epsilon_n\}$ converge vers ϕ^ϵ et, pour chaque n, $\phi^\epsilon_n \mathcal{R} \phi_n$. Ainsi, pour chaque $\epsilon > 0$, $\phi^\epsilon \in \tilde{\mathbf{F}}$, en passant à la limite, nous obtenons une fonction indicatrice. Ceci prouve l'assertion.

Revenons à notre preuve.

Pour établir l'inclusion $\mathbf{F} \subset \tilde{\mathbf{F}}$, il suffit de montrer que les points extrémaux de $\mathbf{F}$ appartiennent à $\tilde{\mathbf{F}}$. C'est-à-dire que si $1\!\!1_B \in \mathbf{F}$ alors $1\!\!1_B \in \tilde{\mathbf{F}}$.

En notant $\mathbf{F}_A = \{\phi,\ \phi \mathcal{R} A\}$, montrons la propriété suivante :
Soient $I\!\!P \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ et deux boréliens disjoints A et B, alors $\mathbf{F}_{A+B} \subset \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_A$.

Il suffit de faire la preuve pour les points extrémaux de $\mathbf{F}_{A+B}$. Soit $E\mathcal{R}(A+B)$, alors il existe $E_1 \subset E$ tel que $E_1\mathcal{R}A$ et ainsi $(E\cap(E_1)^c)\mathcal{R}B$, ce qui prouve l'assertion.

Reprenons les notations précédentes, on a $\mathbf{F}_n \subset \mathbf{F}_{AA_n} + \mathbf{F}_{A^cA_n}$, il est aisé de voir que $\mathbf{F}_{A^cA_n} \to \{0\}$ i.e. $\sup\left\{E_{|\mathbb{P}|}[\phi],\ \phi\mathcal{R}A^cA_n\right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi il suffit d'établir la convergence de $\mathbf{F}_{AA_n}$ vers $\mathbf{F}$. Il faut donc prouver que si $B\mathcal{R}A$ et $A_n \subset A,\ A_n \to A$ en mesure, alors il existe une suite $\{B_n\}$ convergeant vers B et telle que $B_n\mathcal{R}A_n$. Cela est clair car les relations $A\mathcal{R}B$ et $A_n \subset A$ impliquent l'existence de $B_n \subset B$ avec $B_n\mathcal{R}A_n$. $\square$

Le théorème précédent, théorème 3.4, admet la version suivante pour la relation $\mathcal{R}$.

THÉORÈME 4.4. — *Soit $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ alors pour toute fonction de test f l'ensemble* Argmax $\left\{m_f(B),\ B\mathcal{R}A\right\} =$ Argmax $\left\{m_f[\phi],\ \phi\mathcal{R}\mathbb{1}_A\right\}$ *est $\mathbb{P}$-p.s. un singleton noté $A^{\mathcal{R}}$.*

Preuve. — L'égalité des deux Argmax résulte de la proposition 4.1.

Montrons l'unicité.

Notons I l'intervalle $[0,\ \frac{1}{2}]$ et A un ensemble tel que $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(A^c)$. L'hypothèse sur $\mathbb{P}$ assure qu'il existe $B \subset A^c$ tel que $\mathcal{I}(AI) = \mathcal{I}(B)$.

Supposons que $\mathbb{P}(B \cap I^c) \neq 0$. Il existe alors un borélien $E \subset A \cap I$ tel que $\mathcal{I}(E) = \mathcal{I}(B \cap I^c)$. Ceci implique $m_f(E) = m_f(B \cap I^c)$, ce qui est impossible car f est strictement croissante.

Par suite, $\mathcal{I}(AI) = \mathcal{I}(B),\ B \subset A^cI$. En faisant la « même procédure » avec AI^c, on trouve un ensemble $E \subset A^c \cap I^c$ tel que $\mathcal{I}(AI^c) = \mathcal{I}(E)$.

Les relations $\mathcal{I}(AI) = \mathcal{I}(B),\ B \subset A^cI$, $\mathcal{I}(AI^c) = \mathcal{I}(E),\ E \subset A^cI^c$ et $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(A^c)$ impliquent

$$\mathcal{I}(AI) = \mathcal{I}(A^cI) \text{ et } \mathcal{I}(AI^c) = \mathcal{I}(A^cI^c).$$

En remplaçant l'intervalle $[0,\ 1]$ par $[0,\ \frac{1}{2}]$ et I devenant $[0,\ \frac{1}{4}]$, de manière similaire, on obtient : $\mathcal{I}(A \cap [0,\ \frac{1}{4}]) = \mathcal{I}(A^c \cap [0,\ \frac{1}{4}])$ et $\mathcal{I}(A \cap [\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}]) = \mathcal{I}(A^c \cap [\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}])$.

On en déduit que pour tout couple de dyadiques $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \frac{1}{2}$, on a $\mathcal{I}(A \cap [r_1,\ r_2]) = \mathcal{I}(A^c \cap [r_1,\ r_2])$. De là, $\mathcal{I}(A \cap [x,\ y]) = \mathcal{I}(A^c \cap [x,\ y])$ pour tout couple $(x, y),\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

Cette dernière relation passe sans difficulté aux ouverts et aux boréliens i.e. si $B \subset [0,\ \frac{1}{2}]$, alors $\mathcal{I}(AB) = \mathcal{I}(A^c B)$, ce qui est absurde. $\square$

En omettant la référence à la fonction test, nous avons :

PROPOSITION 4.5. — *Pour une mesure $I\!\!P \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ l'application $\rho^{\mathcal{R}}$ qui a un borélien A associe $\rho^{\mathcal{R}}(A) = m(A^{\mathcal{R}})$ est continue i.e. si une suite $\{A_n^{\mathcal{R}}\}$ converge faiblement vers ϕ, alors $\phi = 1\!\!I_{A^{\mathcal{R}}}$ et la convergence est forte.*

Preuve. — C'est une conséquence du lemme 4.3. En effet la convergence de $\{\psi,\ \psi\mathcal{R}1\!\!I_{A_n^{\mathcal{R}}}\}$ vers $\{\psi,\ \psi\mathcal{R}\phi\}$ implique la convergence des intervalles images par m de ces ensembles. Les extrémités convergent vers les extrémités de l'intervalle limite, d'où le résultat. $\square$

Conformément au début de la section nous ne cherchons pas à développer cette étude vers une version du théorème de Skorohod.

5. Troisième sélection

Cette partie est consacrée aux développements de la relation d'équivalence $F_{\mathcal{I}(\phi)}$ i.e. l'ensemble des fonctions $\psi,\ 0 \leqslant \psi \leqslant 1$ telles que $\mathcal{I}(\psi) = \mathcal{I}(\phi)$.

L'adaptation de la proposition 4.1 est :

PROPOSITION 5.1. — *Pour une mesure $I\!\!P$ diffuse, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) Pour tout borélien A, il existe A_1 et A_2 disjoints tels que
$$A_1 + A_2 = A,\ \mathcal{I}(A_1) = \mathcal{I}(A_2) = \tfrac{1}{2}\ \mathcal{I}(A).$$

ii) Pour toute fonction mesurable $\phi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 1$, il existe A contenu dans le support de ϕ et tel que $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(\phi)$.

iii) Les points extrémaux de $F_{\mathcal{I}(\phi)}$ sont des fonctions indicatrices.

iv) Les points extrémaux de $F^*_{\mathcal{I}(\phi)} = \big\{\psi,\ \mathcal{I}(\psi) \subset \mathcal{I}(\phi),\ E[\psi] = E[\phi]\big\}$ sont de la forme $1\!\!I_A$.

Preuve. — Remarquons tout d'abord que si $E_i,\ i = 1, 2$ et E sont des convexes fermés positifs tels que $E_i \subset E$ et $\frac{1}{2}(E_1 + E_2) = E$, alors $E_i = E$.

En effet, par négation, supposons qu'il existe $e \in E$ et u une forme linéaire continue tels que $\sup_{E_1} u(e_1) < u(e)$. Alors $\sup\limits_{e_i \in E_i} u(\frac{1}{2}(e_1 + e_2)) < \sup_E u(e)$, ce qui est contradictoire.

Montrons l'équivalence de iii) et de iv).

iv) $\Longrightarrow$ *iii)*. Si la fonction $\psi\in F_{\mathcal{I}(\phi)}$, elle appartient à $F^*_{\mathcal{I}(\phi)}$ et, si elle n'est pas une fonction indicatrice, elle s'écrit comme $\psi=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2),\ \psi_i\in F^*_{\mathcal{I}(\phi)}$. Avec la remarque précédente, on en déduit que $\psi_i\in F_{\mathcal{I}(\phi)}$ et donc ψ n'est pas extrémale.

iii) $\Longrightarrow$ *iv)*. Il est clair que $F^*_{\mathcal{I}(\phi)}$ est la réunion des $F_{\mathcal{I}(\psi)}$ pour tous les fonctions ψ telles que $0\leqslant\psi\leqslant 1,\ E_{I\!P}[\psi]=E_{I\!P}[\phi]$ et $\mathcal{I}(\psi)\subset\mathcal{I}(\phi)$. Par séparabilité, $F^*_{\mathcal{I}(\phi)}$ est la fermeture d'une réunion dénombrable d'espaces $F_{\mathcal{I}(\psi_n)}$ pour une suite $\{\psi_n\}$ vérifiant les conditions précédentes. Notons C_n le convexe engendré par $\bigcup\limits_{p\leqslant n}F_{\mathcal{I}(\psi_p)}$, les points extrémaux de C_n sont contenus dans la réunion des points extrémaux des $F_{\mathcal{I}(\psi_p)}$. Avec la conditions *iii)* ce sont des fonctions indicatrices. Il en résulte que les points extrémaux de $F^*_{\mathcal{I}(\phi)}$ sont aussi des fonctions indicatrices.

Il suffit de prendre $\phi=\frac{1}{2}1\!\!1_A$ pour voir que *ii)* implique *i)*.

De même *iii)* $\Longrightarrow$ *ii)* car si $1\!\!1_A\in F_{\mathcal{I}(\phi)}$ alors A vérifie *ii)*.

Montrons que i) implique iii).

Soit $\psi\in F_{\mathcal{I}(\varphi)}$ telle qu'il existe $\epsilon>0$ et $B\subset\{\epsilon<\psi<1-\epsilon\}$ avec $I\!P(B)\neq 0$.

Avec l'hypothèse *i)* il existe $B_i\subset B,\ i=1,2$ disjoints tels que $\mathcal{I}(B_i)=\frac{1}{2}\mathcal{I}(B)$. Notons $\psi^{\pm}=\psi 1\!\!1_{B^c}+(\psi\pm\epsilon)1\!\!1_{B_1}+(\psi\mp\epsilon)1\!\!1_{B_2}=\psi\pm\epsilon 1\!\!1_{B_1}\mp\epsilon 1\!\!1_{B_2}$, on a $0\leqslant\psi^{\pm}\leqslant 1$.

Montrons que $\psi^{\pm}\in F_{\mathcal{I}(\varphi)}$.

Faisons la preuve pour ψ^+. Prenons $\theta^+,\ 0\leqslant\theta^+\leqslant\psi^+$ et notons $A_1\stackrel{\Delta}{=}\{\theta^+\geqslant\psi\}$, cet ensemble est inclus dans B_1. Si $I\!P(A_1)=0$ alors $\theta^+\leqslant\psi$ et $E_{I\!P}[\theta^+]\in\mathcal{I}(\psi)$.

Si $I\!P(A_1)\neq 0$, comme $\mathcal{I}(B_1)=\mathcal{I}(B_2)$, il existe $A_2,\ A_2\subset B_2,\ I\!P(A_1)=I\!P(A_2)$. La fonction $\theta=\theta^+-\epsilon 1\!\!1_{A_1}+\epsilon 1\!\!1_{A_2}$ vérifie les relations suivantes : sur $A_1,\ \theta=\psi$; sur $A_2,\ \theta=\theta^++\epsilon=\psi$ et sur $(A_1\cup A_2)^c$, qui est contenu dans $(A_1)^c,\ \theta=\theta^+\leqslant\psi$.

En définitive, $0\leqslant\theta\leqslant\psi$, on en déduit que $E[\theta]=E[\theta^+]\in\mathcal{I}(\psi)=\mathcal{I}(\phi)$. Ceci montre que $\mathcal{I}(\psi^+)\subset\mathcal{I}(\phi)$.

Réciproquement, montrons que $\mathcal{I}(\psi)\subset\mathcal{I}(\psi^+)$.

Soit θ telle que $0\leqslant\theta\leqslant\psi$, notons A_2 l'ensemble $\{\theta\geqslant\psi^+\}$. Cet ensemble est contenu dans B_2 et il existe $A_1 \subset B_1$ tel que $I\!\!P(A_1) = I\!\!P(A_2)$. On introduit la fonction $\theta^+ = \theta+\epsilon 1\!\!1_{A_1} - \epsilon 1\!\!1_{A_2}$, un raisonnement similaire au précédent permet de voir que $0\leqslant\theta^+\leqslant\psi^+$. Et, comme $E[\theta]=E[\theta^+] \in \mathcal{I}(\psi^+)$, on a $\mathcal{I}(\psi)\subset\mathcal{I}(\psi^+)$, d'où finalement, $\mathcal{I}(\psi)=\mathcal{I}(\psi^+)$ i.e. $\psi^+\in F_{\mathcal{I}(\varphi)}$.

De façon analogue, en prenant $0\leqslant\theta^-\leqslant\phi^-$, on obtient de même $\mathcal{I}(\phi)= \mathcal{I}(\psi^-)$.

Nous avons prouvé que $\psi^\pm \in F_{\mathcal{I}(\phi)}$ et comme $\frac{\psi^+ + \psi^-}{2} = \psi$, ψ n'est pas extrémale. Les points extrémaux de $F_{\mathcal{I}(\phi)}$ sont des $1\!\!1_A$.

Remarquons que si $I\!\!P$ vérifie $i)$ il en est de même pour $I\!\!P_A$, restriction de $I\!\!P$ à A. Ceci implique que si S est le support de ϕ, et $F^S_{\mathcal{I}(\phi)}=\big\{\psi,\ \mathcal{I}_{I\!\!P_S}(\psi)= \mathcal{I}(\phi)\big\}$, alors les points extrémaux de ce convexe, sont inclus dans S. Ainsi, il existe $A\subset S$ tel que $\mathcal{I}(A)=\mathcal{I}(\phi)$, ceci achève la preuve de $i)$ implique $iii)$ et par conséquent celle de la proposition. $\square$

Définition 5.2. — *On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures vérifiant une (donc toutes) des assertions de la proposition 5.1.*

On voit que les mesures simples appartiennent à cette classe et si f est une bijection bi-mesurable alors $f(I\!\!P)\in\mathcal{P}$ si et seulement si $I\!\!P\in\mathcal{P}$.

L'analogue des théorèmes 3.4 et 4.4 est :

Théorème 5.3. — *Soient $I\!\!P\in\mathcal{P}$ une mesure vectorielle sur $\mathcal{B}$ et f une fonction test. Alors les deux ensembles suivants sont identiques*

$\mathcal{A}_f(A) \stackrel{\Delta}{=} \text{Argmax}\ \big\{m_f(B),\ \mathcal{I}(A)=\mathcal{I}(B)\big\}$ *et* $\text{Argmax}\ \big\{m_f[\phi],\ 0\leqslant\phi\leqslant 1, \mathcal{I}(A)=\mathcal{I}(\phi)\big\}$.

De plus, il existe une fonction test (en fait, un ensemble non dénombrable) f, telle que pour tout A, $\mathcal{A}_f(A)$ est un singleton $I\!\!P$-p.s. noté $A^=_f$.

Preuve. — L'ensemble $\big\{m_f[\phi],\ \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(\phi)\big\}$ est convexe comme image linéaire d'un convexe compact, voir lemme 2.4, c'est donc un intervalle fermé. C'est aussi l'intervalle engendré par l'image des points extrémaux de $F_{\mathcal{I}(A)}$, ainsi Argmax est formé de fonctions indicatrices. Ceci donne l'égalité des ensembles.

Pour la seconde partie, nous devons montrer que $\mathcal{A}_f(A)$ est un singleton.

Considérons la classe $\mathcal{C}_f$ des mesures telles que

Tout A s'écrit $A_1 + A_2 = A$ avec $\mathcal{I}(A_1) = \mathcal{I}(A_2) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(A)$ et $m_f(A_1) \neq \frac{1}{2}m_f(A)$.

– Montrons que la condition $I\!\!P \in \mathcal{C}_f$ assure que $\mathcal{A}_f(\cdot)$ est réduit à un singleton.

Supposons qu'il existe deux boréliens distincts A et B appartenant à $\mathcal{A}_f(A_0)$. L'hypothèse sur $I\!\!P$ assure de l'existence de deux ensembles disjoints, $A_{i=1,2}$, contenus dans $A\backslash B$, tels que $\mathcal{I}(A_i) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(A\backslash B)$. Comme $I\!\!P \in \mathcal{C}_f$, supposons $m_f(A_1) < m_f(A_2)$. En inversant les rôles de A et B, on obtient B_i, $i=1,2$, contenus dans $B\backslash A$, avec $\mathcal{I}(B_i) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(B\backslash A) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(A\backslash B)$ (cette dernière égalité provient du lemme 2.6) et $m_f(B_1) < m_f(B_2)$.

L'ensemble $E \stackrel{\Delta}{=} A \cap B + A_2 + B_2$ vérifie $\mathcal{I}(E) = \mathcal{I}(A\cap B) + \mathcal{I}(A_2) + \mathcal{I}(B_2)$ donc $\mathcal{I}(E) = \mathcal{I}(A_0)$ et comme $m_f(A) < m_f(E)$ on a une contradiction.

La négation de la propriété $I\!\!P \in \mathcal{C}_f$ est :

Une mesure vectorielle $I\!\!P \in \mathcal{P}$, n'appartient pas à $\mathcal{C}_f$, si et seulement si, il existe A

avec $I\!\!P(A) \neq 0$ tel que si $B \subset A$ et $\mathcal{I}(B) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(A)$, alors $m_f(B) = \frac{1}{2}m_f(A)$.

Nous dirons que A vérifie $(*f)$.

– La propriété $(*f)$ est héréditaire

C'est-à-dire, si A vérifie $(*f)$, alors tout borélien $B \subset A$ vérifie la même propriété i.e. $C \subset B$ et $\mathcal{I}(C) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(B)$ impliquent $m_f(C) = \frac{1}{2}m_f(B)$.

Procédons par négation. Supposons qu'il existe C et B tels que $C \subset B \subset A$, $\mathcal{I}(C) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(B)$ et $m_f(C) > \frac{1}{2}m_f(B)$. Avec le lemme 2.6, prenons un borélien $E \subset A\backslash B$ tel que $\mathcal{I}(E) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(A\backslash B = AB^c)$, on peut supposer que $m_f(E) \geqslant \frac{1}{2}m_f(AB^c)$, sinon on remplace E par E^cAB^c. On obtient $\mathcal{I}(C+E) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(B + A\backslash B) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(A)$ et $m_f(C+E) \neq \frac{1}{2}m_f(A)$, ce qui est contradictoire avec la condition sur A.

Remarquons au passage que A vérifie $(*f)$ si et seulement si

« *$B \subset A$ et $\mathcal{I}(B) = r\mathcal{I}(A)$, impliquent $m_f(B) = rm_f(A)$, pour tout $r \in [0,1]$.* »

Si A_0 vérifie $(*f)$ en considérant la restriction de $I\!\!P$ à A_0, on peut supposer sans perte de généralité, que $A_0 = [0,1]$ et ainsi tout borélien A vérifie $(*f)$. S'il existe A et B tels que $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)$, $m(A) \neq m(B)$; par le lemme 2.6 nous avons $\mathcal{I}(AB^c) = \mathcal{I}(BA^c)$ et $m(AB^c) \neq m(BA^c)$.

L'ensemble $E = A\Delta B$ ne vérifie pas la relation $(*f)$ ce qui est contradictoire. Par conséquent, pour tout borélien A, l'intervalle $I_A = \big[\underline{m}_f(A), \overline{m}_f(A)\big]$ où $\underline{m}_f(A) = \inf\big\{m_f(B),\ \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)\big\}$ et $\overline{m}_f(A) = \sup\big\{m_f(B),\ \mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)\big\}$ est réduit à un point.

Ce qui signifie que le convexe $\mathcal{I}_{I\!P,m_f}([0,1])$ est contenu dans un hyperplan.

La suite de la preuve est similaire à celle du théorème 3.4. $\square$

Remarques 5.4. — Prenons comme fonctions tests des fonctions de la forme $f_x(t) = (f(t))^x$. Pour que l'ensemble $\{x \mid I\!P \notin \mathcal{C}_{f_x}\}$ soit au plus dénombrable, il suffit que

« Pour tout d-uplets $(x_1, \cdots, x_d)$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, les fonctions f^{x_j} sont linéairement indépendantes sur tout ensemble de mesure non nulle pour $I\!P$. »

La mesure $I\!P$ étant diffuse, on sait (ou on le voit aisément) que les fonctions $x_i : t \to t^{x_i}$ sont linéairement indépendantes sur A, $I\!P(A) \neq 0$, si les x_i sont tous différents. Nous obtenons qu'en dehors d'un ensemble au plus dénombrable de x, $I\!P \in \mathcal{C}_{f_x}$.

– La proposition 2.6 permet de voir que $(A_f^{=})^c$ appartient à l'ensemble Arginf $\big\{m_f(B),\ \mathcal{I}(B) = \mathcal{I}(A^c)\big\}$. Lorsque $\mathcal{A}_f(A)$ est un singleton, avec des notations évidentes et en supprimant la référence à la fonction test f, on a $(A^{=})^c = (A^c)_{=}$ et $(A_{=})^c = (A^c)^{=}$.

Dans la suite nous choisissons une fonction test f de sorte que $\mathcal{A}_f(A)$ soit réduit au singleton $A_f^{=}$, ce qui est loisible par le théorème 5.3. Pour simplifier l'écriture, nous omettons la référence à cette fonction test.

Lorsque que $I\!P \in \mathcal{P}$ montrons que la relation $B \subset A$ implique $B^{=} \subset A^{=}$, ce qui permet de passer aux variables aléatoires et donne un bon candidat à une sélection.

Proposition 5.5. — *Pour $I\!P \in \mathcal{P}$ on a : $B \subset A$ implique $B^{=} \subset A^{=}$.*

Preuve. — Cette relation est évidente pour les mesures simples. Prenons une suite $\{I\!P_n\}$ de telles mesures convergeant uniformément vers $I\!P$. La suite $\big\{\mathcal{I}_n(A) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{I}_{I\!P_n}(A)\big\}$ converge vers $\mathcal{I}(A) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{I}_{I\!P}(A)$ (lemme 2.5) et la suite de mesures $\{m_n\}$, où m_n est associée à $I\!P_n$ (la fonction test peut-être la même pour toutes les mesures et est omise) converge uniformément vers m associée à $I\!P$. On en déduit que les intervalles $m_n\big(\mathcal{I}_n(A)\big)$ convergent vers l'intervalle $m\big(\mathcal{I}(A)\big)$. En particulier les extrémités convergent, donc $m_n(A_n^{=}) \to m(A^{=})$

où $A_n^=$ est le singleton de $\mathcal{A}_{f,\mathbb{P}_n}(A)$, voir aussi la proposition 5.9 suivante. Ceci implique que si $\{\mathbb{1}_{A_n^=}\}$ converge faiblement (pour $\mathbb{P}$) vers ϕ, alors $\mathcal{I}(\phi) = \mathcal{I}(A)$ et, comme $m[\phi] = m(A^=)$, l'unicité du théorème 5.3 donne $\phi = \mathbb{1}_A$, par conséquent la suite $\{A_n^=\}$ converge en mesure vers $A^=$.

Si, maintenant $B \subset A$ alors, on sait que $B_n^= \subset A_n^=$ et nous venons de voir la convergence en mesure de ces ensembles, d'où $B^= \subset A^=$. $\square$

Le lemme suivant est l'amorce du théorème de Skorohod.

Lemme 5.6. — *Soient $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, une suite $\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ qui converge vers ϕ pour $\sigma(\mathbb{L}^2, \mathbb{L}^2)$ et A tel que $\mathcal{I}(\phi) = \mathcal{I}(A)$. Si $m(A_n) \to m[\phi] = m(A^=)$, alors $\phi = \mathbb{1}_{A^=}$ et $A_n \to A^=$ en mesure.*

Preuve. — Soient ϕ la limite faible de la suite $\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ et A un borélien tel que $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(\phi)$, proposition 5.1, et comme $m[\phi] = m(A^=)$, le théorème 5.3 assure que $\phi = \mathbb{1}_{A^=}$. Ceci prouve la converge faible dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ de la suite $\{\mathbb{1}_{A_n}\}$ vers $\mathbb{1}_{A^=}$. On en déduit la convergence forte dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ et dans $\mathbb{L}^2(m)$ par le lemme 3.2, d'où la convergence en mesure. $\square$

La proposition 5.5 donne un sens à la définition suivante :

Définition 5.7. — *Pour $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ et une v.a. X, il existe une unique v.a. notée $X^=$ et appelée version monotone de X définie par $\{X^= \geqslant x\} \stackrel{\Delta}{=} \{X \geqslant x\}^=$, $\forall x$ et ainsi $X(\mathbb{P}) = X^=(\mathbb{P})$.*

Contrairement au cas unidimensionnel, la version monotone de X dépend de X et non pas de la loi de X. Il se peut que $X(\mathbb{P}) = Y(\mathbb{P})$ et que $X^= \neq Y^=$.

Proposition 5.8. — *Pour une mesure $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ l'ensemble des versions monotones est un convexe fermé, réticulé et stable par limite $\mathbb{P}$-p.s.*

Preuve. — Soient ϕ et ψ deux fonctions $\mathbb{P}$-monotones, pour établir que le sup de ces deux fonctions est aussi une fonction monotone, introduisons les notations suivantes : $A \stackrel{\Delta}{=} \{\sup(\phi, \psi) \geqslant y\}$, $B \stackrel{\Delta}{=} \{\phi \geqslant y\}$ et $C \stackrel{\Delta}{=} \{\psi \geqslant y\}$). La proposition 5.5 donne $B \cup C \subset A^=$, ces deux ensembles ont même mesure, donc $A = A^=$ i.e. le sup est monotone.

Avec les notations $A = \{\inf(\phi, \psi) \geqslant y\}$, $B = \{\phi \geqslant y\}$ et $C = \{\psi \geqslant y\}$), on a $A \subset B$ donc $A^= \subset B^= = B$. En remplaçant B par C il vient $A^= \subset B \cap C = A$ d'où l'inf de deux fonctions monotones est monotone.

Passons aux limites :

Pour une suite $\{\phi_n\}$ de fonctions monotones croissant vers ϕ. Les ensembles $\{\phi_n > y\}$ croissent vers $\{\phi > y\}$ et, comme précédemment, on voit que $\{\phi_n > y\} \subset (\{\phi > y\})^=$ p.s. D'où $\{\phi > y\} = (\{\phi > y\})^=$ p.s. i.e. ϕ est monotone.

Soit $\{\phi_n\}$ une suite de fonctions monotones décroissant vers ϕ. Les ensembles $\{\phi_n \geqslant y\}$ décroissent vers $\{\phi \geqslant y\}$ et $\{\phi \geqslant y\}^= \subset \{\phi_n \geqslant y\}$ p.s. À la limite $\{\phi \geqslant y\}^= \subset \{\phi \geqslant y\}$ et comme ces deux ensembles ont même mesure, $\{\phi \geqslant y\}^= = \{\phi \geqslant y\}$ p.s., i.e. ϕ est monotone.

En définitive, la limite $I\!\!P$-p.s. d'une suite $\{\phi_n\}$ de fonctions monotones est elle aussi monotone.

Montrons que toute fonction monotone est limite croissante de fonctions monotones ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Soit φ une fonction monotone (à valeurs $[0,1]$), il existe une suite croissante de fonctions $\{\theta_n\}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs convergeant $I\!\!P$-p.s. vers φ i.e. $\theta_n \leqslant \theta_{n+1} \leqslant \varphi$. Il en résulte que $\{\theta_n \geqslant x\}^= = \{(\theta_n)^= \geqslant x\} \subset \{\theta_{n+1}^= \geqslant x\} \subset \{\varphi \geqslant x\}$. La suite $\{\theta_n^=\}$ est croissante, majorée par φ, de plus $I\!\!P(\theta_n^= \geqslant x) = I\!\!P(\theta_n \geqslant x) \to I\!\!P(\varphi \geqslant x)$ ce qui signifie que la suite croissante $\{\theta_n^=\}$ converge $I\!\!P$-p.s. vers φ.

Il suffit maintenant de montrer que l'ensemble des versions monotone est un convexe pour qu'il soit faiblement (ou fortement) fermé.

Or comme toute version monotones est approchable dans $I\!\!L^1$ par des versions monotones ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, il suffit de prouver que $\sum_1^N c_n 1\!\!1_{A_n^=}$, $0 < c_1 < \cdots < c_N$, $\sum_1^N c_n = 1$ est une version monotone. Cela résulte de la réticulation précédente. $\square$

5.1. Convergence simultanée

Pour une mesure $I\!\!P \in \mathcal{P}$ sur $[0,1]$, on note $\rho^=$ (ou $\rho^=_{I\!\!P}$) l'application définie sur $\mathcal{B}([0,1])$ par $\rho^=(A) \stackrel{\Delta}{=} m(A^=)$.

PROPOSITION 5.9. — *Pour $I\!\!P \in \mathcal{P}$ l'application $\rho^=$ est continue au sens où : si $1\!\!1_{(A^=)_n} \xrightarrow{\sigma} \phi$ et $\mathcal{I}(\phi) = \mathcal{I}(A)$, alors $m\big((A^=)_n\big) = \rho^=\big((A^=)_n\big) \to m(A^=) = \rho^=(A)$. Cette continuité équivaut à l'équivalence entre la convergence faible et forte pour les suites $\{(A^=)_n\}$.*

Preuve. — L'existence de A résulte de la proposition 5.1. En outre, si S est le support d'une version monotone $\phi^=$, alors $S=S^=$. Par conséquent, avec la proposition 5.5, si $A\subset \operatorname{supp}(\phi^=)$ alors $A^=\subset \operatorname{supp}(\phi^=)$.

Ainsi, les relations $A\subset \operatorname{supp}(\phi^=)$ et $\mathcal{I}(A)=\mathcal{I}(\phi^=)$ impliquent $A=A^=$.

Notons $A_n^= \overset{\Delta}{=} (A^=)_n$, la proposition 5.8 assure que la limite faible de la suite $\{\mathbb{1}_{A_n^=}\}$ est une version monotone que nous notons $\phi^=$. Avec la propriété précédente, on a $A^=\subset \operatorname{supp}(\phi^=)$ et $\mathcal{I}(A^=)=\mathcal{I}(\phi^=)$.

Dans la preuve de la proposition 5.1 nous avons vu qu'un élément extrémal est atteint comme limite de $\phi^\epsilon = \phi + \epsilon\mathbb{1}_{A_1} - \epsilon\mathbb{1}_{A_2}$ lorsque $\epsilon \to 0$. L'hypothèse $\mathbb{P}\in\mathcal{P}$ permet de choisir $m(A_1) \geqslant m(A_2)$ donc $m[\phi^\epsilon] \geqslant m[\phi]$.

En utilisant le fait que $A = A^=$ et en remplaçant ϕ par $\phi^=$, on obtient que $\mathbb{1}_{A^=}$ est la limite de $(\phi^=)^\epsilon$ et que $m(A^=) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} m\big[(\phi^=)^\epsilon\big] \geqslant m[\phi^=]$.

Par ailleurs comme $(\phi^=)^\epsilon \in \lim F_n$ avec $F_n = \big\{\psi,\ \mathcal{I}(\psi) = \mathcal{I}(A_n^=) = \mathcal{I}(A_n)\big\}$, il existe une suite $\{\psi_n\}$, $\psi_n \in F_n$, qui converge faiblement vers $\mathbb{1}_{A^=}$.

Le lemme 3.2 donne la convergence pour m et ainsi $m(A^=)=\lim m[\psi_n]\leqslant \underline{\lim}\ m(A_n^=)$. L'inégalité $\overline{\lim}\ m(A_n^=) \leqslant m(A^=)$ étant évidente, on obtient $m(A_n^=) \to m(A^=)$. Ceci permet d'affirmer que $\phi^= = \mathbb{1}_{A^=}$ et, par suite, la convergence forte de la suite $\{A_n^=\}$. $\square$

Nous sommes en mesure d'énoncer le résultat central :

THÉORÈME 5.10 (théorème de Skorohod). — *Soient $\mathbb{P}\in\mathcal{P}$ une mesure positive sur $\mathcal{B}([0,1])$ et $\{\mathbb{Q}_n = X_n(\mathbb{P})\}$ une suite convergeant étroitement vers $\mathbb{Q}$. Alors la suite $\{X_n^=\}$ des versions monotones associées converge en mesure vers la version monotone d'une v.a. de loi $\mathbb{Q}$.*

En particulier, l'ensemble des versions monotones est compact pour la convergence en mesure et l'ensemble des mesures de la forme $\mathbb{Q}=X(\mathbb{P})$ est fermé pour la convergence étroite.

Preuve. — Soient $X_n^=$ la version monotone de X_n, $\mathbb{Q}_n = X_n(\mathbb{P}) = X_n^=(\mathbb{P})$ et D un ensemble dénombrable dense de points de continuités de $\mathbb{Q}$.

Notons $A_n^=(x)$ l'ensemble $\{X_n^= \geqslant x\}$. Pour une sous suite éventuelle, on peut supposer que $\mathbb{1}_{A_n^=(x)} \xrightarrow{\sigma} \psi(x)$ et cela pour tout $x \in D$. La condition $\mathbb{P}\in\mathcal{P}$ montre que $\mathcal{I}(\psi(x))=\mathcal{I}(A(x))$ pour un borélien $A(x)$ convenable et, avec lemme 2.5, on a vu que $\mathcal{I}(A_n^=(x)) \to \mathcal{I}(A(x))$.

Les équivalences des convergences pour $\mathbb{P}$ et m, lemme 3.2, ainsi que la continuité de ρ, proposition 5.9, montrent que $m(A_n^=(x)) \to m(A^=(x))$. Enfin, le lemme 5.6 assure la convergence en mesure de $A_n^=(x)$ vers $A^=(x)$, et ceci pour tout $x \in D$.

Si $x < y$, les inclusions $A_n^=(y) \subset A_n^=(x)$ donnent à la limite, $A^=(y) \subset A^=(x)$. Ceci permet de définir une v.a. $X^=$ telle que $\{X^= \geqslant x\} = A^=(x)$ (voir aussi la partie Compléments). Il est clair que la suite $\{X_n^=\}$ converge en mesure vers $X^=$ et que $\mathbb{Q} = X^=(\mathbb{P})$.

Le reste de la preuve n'offre pas de difficulté et on complète aussi la proposition 5.9. $\square$

Remarquons qu'il est possible d'établir une version analogue lorsque $\mathbb{P}$ vérifie une des assertions de la proposition 4.1 relatives à la relation $\mathcal{R}$.

Nous pouvons compléter la proposition 3.3 :

Proposition 5.11. — *Pour une mesure $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, l'ensemble* $\operatorname{Argmax}\big\{m[X],\ X(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}\big\}$ *est réduit au singleton* $\{X^=,\ X(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}\}$.

Preuve. — Le théorème de Fubini donne $m[X] = \displaystyle\int_0^1 m(X \geqslant t)dt$ donc $m[X] \leqslant m[X^=]$.

La proposition 5.8 assure que l'ensemble des versions monotones est fermé pour la convergence faible. Par suite, si $m[X_n^=]$ croît vers $\sup\{m[X],\ X(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}\}$, pour une sous suite éventuelle, on peut supposer que $X_n^=$ converge faiblement vers $X^=$. On a vu que cette convergence est valable pour m et, par conséquent, $m[X^=] = \lim m[X_n^=]$.

Il reste à établir que si $X_n^=(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$ alors $X^=(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$. Cela résulte du théorème de Skorohod, théorème 5.10. Enfin, si $m[X] = m[X^=]$ alors $m\big(\{X \geqslant t\}\big) = m\big(\{X^= \geqslant t\}\big)$ d'où avec l'unicité, $\{X \geqslant t\} = \{X^= \geqslant t\}$ p.s. i.e. $X = X^=$, $\mathbb{P}$-p.s. $\square$

En particulier en prenant pour X une fonction indicatrice, la proposition précédente assure qu'il existe un borélien tel que $\mathbb{P}(A^=) = \alpha$ et $m[A^=] \geqslant m(E)$, $\mathbb{P}(E) = \alpha$. On retrouve la première sélection.

6. Quatrième sélection : S^*

Cette « sélection » qui reprend la première version du paragraphe 3, utilise de plus une relation sur les images. Elle permet d'obtenir, pour une certaine classe de v.a., un théorème de Skorohod de convergence p.s.

DÉFINITION 6.1. — *Une mesure* $I\!P$ *appartient à la classe* $\mathcal{P}^*$ *si*

a) Il existe une suite finie $\{a_i\} \subset [0,1]$, $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant 1$ *et pour chaque* i*, une famille d'intervalles disjoints :* $I_i(x) = [a_i - g_i(x), a_i + h_i(x)]$, $0 \leqslant \inf(g_i, h_i)$*, éventuellement du type* $[0,\ h_0(x)] \cup [1 - g_1(x), 1]$

b) Pour tout $\alpha \in \mathcal{I}(I\!P)$*, il existe un unique ensemble formé d'une union finie d'intervalles disjoints :* $S^*(\alpha) \stackrel{\Delta}{=} \bigcup_i I_i(x_i)$*, de mesure* $I\!P(S^*(\alpha)) = \alpha$ *vérifiant* $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(S^*(\alpha))$ *pour tout* A *de mesure* $I\!P(A) = \alpha$*.*

Rappelons qu'un borélien A est extrémal si $I\!P(A)$ est un point extrémal de $\mathcal{I}(I\!P)$. Si A est extrémal il en est de même pour A^c. Il est alors clair que pour un borélien extrémal A, on a $S^*(A) = A$.

Pour des mesures uni-dimensionnelles, les extrémaux sont $\emptyset$ et $[0,1]$. Néanmoins, pour la mesure de Lebesgue en choisissant, par exemple, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $I_1(x) = [0,x]$, $I_2(x) = [x,1]$, on peut énoncer $\lambda \in \mathcal{P}^*$ et redémontrer le théorème de Skorohod classique en utilisant la procédure qui suit.

Principalement pour des mesures à valeurs $I\!R^2$, de nombreux exemples se trouvent dans la partie 7.2.

6.1. Versions $*$-monotones et théorème de Skorohod

On remarque tout d'abord que la définition 6.1 reste valable lorsque remplace l'intervalle $[0,1]$ par un $S^*(A)$ obtenu à partir d'un borélien A. En outre, il se peut qu'il existe un couple $B \subset A$ tel que $S^*(B) \not\subset S^*(A)$.

Dans la partie 3 nous avons remarqué la difficulté de passer aux v.a. La relation d'inclusion des images permet de lever cet obstacle.

Dans certains des exemples de 7.2 où $I\!P \in \mathcal{P}^*$, il est aisé de voir que si X est une v.a. simple i.e. ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $\{0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant 1\}$ et pour tout i, $\{X = x_i\}$ est un intervalle, alors X est la seule v.a. de loi $Q\!\!\!Q = X(I\!P)$.

Ceci permet de construire des contre-exemples au théorème de Skorohod : des v.a. simples convergeant en loi vers la mesure $Q\!\!\!Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\delta_0 + \delta_1)$ et ne convergeant pas en mesure.

Cette situation nous conduit à adapter le cas uni-dimensionnel :

DÉFINITION 6.2. — *Une v.a.* Y *est* $*$*-monotone si elle vérifie* $\{Y \geqslant x\} = S^*(Y \geqslant x)$, $\forall x$*. Une v.a.* X*, ou la mesure* $Q\!\!\!Q = X(I\!P)$*, appartient à la classe*

$\mathcal{F}$ si elle a même loi qu'une v.a. $*$-monotone, appelée version $*$-monotone de X et notée $S^*(X)$.

Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 6.3 (théorème de Skorohod). — *Soient $I\!P \in \mathcal{P}^*$ et $\{Q_n = X_n(I\!P)\} \subset \mathcal{F}$ une suite qui converge en loi. Alors la suite $\{S^*(X_n)\}$ converge p.s. vers une v.a. S^* $*$-monotone.*

Preuve. — Pour un x de continuité, l'ensemble $S_n \stackrel{\Delta}{=} \{S^*(X_n) \geqslant x\}$ est de mesure $I\!P(S_n) = \alpha_n$ et écrivons $S_n = S^*(\alpha_n)$. Notons α la limite de $I\!P(S_n)$ et $S(x) = S^*(\alpha, x)$. Par hypothèse, les ensembles S_n et $S(x)$ sont des unions finies d'intervalles.

Toute sous-suite admet une sous-suite, notée pour simplifier $\{n_j\}$, telle que S_{n_j} converge p.s. vers un ensemble : $\tilde{S}$. Cet ensemble, de mesure α, est une union finie d'intervalles ; on a donc $\tilde{S} = S(x)$. Ceci exprime la convergence p.s. de la suite initiale vers $S(x) = S^*(\alpha, x)$.

Prenons un autre point de continuité y, $y > x$, comme $\{S^*(X_n) \geqslant y\} \subset \{S^*(X_n) \geqslant x\}$, le passage aux limites donne $S(y) \subset S(x)$.

Enfin, si Q est la loi limite de la suite $\{Q_n = X_n(I\!P)\}$, on a :

$Q(\{\geqslant x\}) = S(x)$.

La proposition 9.1 assure de l'existence d'une v.a. X de loi Q et $\{S^*(X) \geqslant x\} = S(x)$. D'où la convergence p.s. de $S^*(X_n)$ vers une v.a. $*$-monotone $S^*(X)$. $\square$

6.2. Compléments sur l'inclusion des images

La relation d'inclusion $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(S^*(A))$ a un rôle primordial dans la définition de v.a. de même loi. C'est pourquoi nous étudions ici une extension de la proposition 5.1 et ses conséquences.

PROPOSITION 6.4 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Tout borélien A se décompose en $A = A_1 + A_2$ avec $I\!P(A_1) = I\!P(A_2)$ et $\mathcal{I}(A_2) \subset \mathcal{I}(A_1)$.

b) Pour toute v.a. ψ, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, il existe A contenu dans le support de ψ et tel que $E_{I\!P}[\psi] = I\!P(A)$ et $\mathcal{I}(\psi) \subset \mathcal{I}(A)$.

c) Les points extrémaux du convexe σ-compact $\tilde{F}_\phi = \big\{\psi,\ E[\psi] = E[\phi],\ \mathcal{I}(\phi) \subset \mathcal{I}(\psi)\big\}$ sont des fonctions indicatrices.

Preuve. — En fait il nous suffit de prouver l'équivalence des deux premières assertions.

$b) \Longrightarrow a)$ Prenons $\psi = \frac{1}{2}\mathbb{1}_A$, l'hypothèse $b)$ donne l'existence d'un borélien $A_1 \subset A$ tel que $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A)$ et $\frac{1}{2}\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(A_1) \subset \mathcal{I}(A)$. En posant $A_2 = A \cap (A_1)^c$ on obtient $a)$.

Réciproque. Notons F le convexe $\{\phi \mid E[\phi] = E[\psi]$ et $\mathcal{I}(\psi) \subset \mathcal{I}(\phi)\}$. Pour $\phi \in F$ supposons que $B = \{\epsilon \leqslant \phi \leqslant 1-\epsilon\}$ soit non négligeable. Avec $a)$ écrivons $B = B_1 + B_2$ avec $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2)$ et $\mathcal{I}(B_2) \subset \mathcal{I}(B_1)$ et posons $\phi_1 = \phi + \epsilon\mathbb{1}_{B_1} - \epsilon\mathbb{1}_{B_2}$.

Montrons que $\phi_1 \in F$.

On a $E[\phi_1] = E[\phi] = E[\psi]$ et $0 \leqslant \phi_1 \leqslant 1$. Considérons $0 \leqslant \theta \leqslant \phi$, l'ensemble $A_2 = \{\theta > \phi_1\}$ est inclus dans B_2, donc il existe $A_1 \subset B_1$ tel que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Notons $\theta_1 = \theta + \epsilon\mathbb{1}_{A_1} - \epsilon\mathbb{1}_{A_2}$; sur A_2, $\theta_1 = \theta - \epsilon \leqslant \phi - \epsilon = \phi_1$ et, sur $(A_2)^c$, $\theta_1 \leqslant \phi_1$ i.e. $\theta_1 \leqslant \phi_1$ partout.

Comme $E[\theta_1] = E[\theta] \in \mathcal{I}(\phi_1)$ on en déduit que $\mathcal{I}(\phi) \subset \mathcal{I}(\phi_1)$ et, de plus, le support de ϕ_1 est contenu dans celui de ϕ.

Recommençons avec $B^1 = \{\epsilon \leqslant \phi_1 \leqslant 1-\epsilon\}$ à la place de B et ϕ_1 à la place de ϕ.

En renouvelant ce procédé, on détermine deux suites $\{\phi_n\}$ et $\{B_n\}$ telles que

$B^n \stackrel{\Delta}{=} \{\epsilon \leqslant \phi_n \leqslant 1-\epsilon\} \subset B^{n-1}$, $B^n = B_1^n + B_2^n$, $\mathbb{P}(B_1^n) = \mathbb{P}(B_2^n)$, $\mathcal{I}(B_2^n) \subset \mathcal{I}(B_1^n)$ et $\text{support}(\phi_n) \subset \text{support}(\phi_{n-1})$.

Les ensembles A_n complémentaires des B^n, $A_n = \{\phi_n \notin I_\epsilon \stackrel{\Delta}{=} (\epsilon, 1-\epsilon)\}$ sont croissants et se décomposent en $A_n = A_n^+ + A_n^-$ avec $A_n^+ = \{\phi_n > 1-\epsilon\}$ et $A_n^- = \{\phi_n < \epsilon\}$.

Notons A^+ la limite des A_n^+ et A^- celle des A_n^-. On a $\phi_{n+p}\mathbb{1}_{A_n^\pm} = \phi_n\mathbb{1}_{A_n^\pm}$. De plus, pour une sous suite éventuelle, ϕ_n converge faiblement vers $\bar{\phi}$ et donc $\displaystyle\int_{A_n^\pm} \phi_{n+p} \stackrel{p\to\infty}{\longrightarrow} \int_{A_n^\pm} \bar{\phi}$. Ceci donne la convergence de $E[\phi_n\mathbb{1}_{A_n^\pm}]$ vers $E[\bar{\phi}\mathbb{1}_{A^\pm}]$. On en déduit que sur A^+, $\bar{\phi}$ est supérieure à $1-\epsilon$ et sur A^-, $\bar{\phi} \leqslant \epsilon$.

On obtient aussi la convergence forte de ϕ_n vers $\bar{\phi}$, $\text{support}(\bar{\phi}) \subset \text{support}(\phi)$ et $\bar{\phi} \in F$.

En mettant des indices ϵ et en remplaçant $\bar{\phi}$ par ϕ^ϵ, nous avons une famille $\{\phi^\epsilon\}$ telle que support$(\phi^\epsilon)\subset$support(ϕ), $\mathcal{I}(\phi)\subset\mathcal{I}(\phi^\epsilon)$, $\phi^\epsilon>1-\epsilon$ sur $A^+(\epsilon)$ et $<\epsilon$ sur $A^-(\epsilon)=(A^+(\epsilon))^c$.

Faisons varier ϵ, soit $\epsilon^*<\epsilon$, l'ensemble $B^*=\{\epsilon^*\leqslant\phi\leqslant 1-\epsilon^*\}$ est inclus dans $B=\{\epsilon\leqslant\phi\leqslant 1-\epsilon\}$ et écrivons le découpage de même mesure, $B^*=B_1^*+B_2^*$ avec $\mathcal{I}(B_2^*)\subset\mathcal{I}(B_1^*)$.

Procédons de la même façon pour $B\setminus B^*=A_1+A_2$, $\mathcal{I}(A_2)\subset\mathcal{I}(A_1)$ et soit $B_i=A_i+B_i^*$, ces deux ensembles ont même mesure et $\mathcal{I}(B_2)\subset\mathcal{I}(B_1)$.

Notons $\phi_1^{\epsilon^*}$ la fonction construite avec B^* et ϕ_1^ϵ celle construite avec $B=B_1+B_2$.

On a, sur B_1^*, $\phi_1^{\epsilon^*}\geqslant\phi_1^\epsilon$ et, sur B_2^*, $\phi_1^{\epsilon^*}\leqslant\phi_1^\epsilon$.

À la $n^{\text{ième}}$ itération, $B_n^*=B_n^*(1)+B_n^*(2)$, sur $B_n^*(1)$, $\phi_n^{\epsilon^*}\geqslant\phi_n^\epsilon$ et sur $B_n^*(2)$, $\phi_1^{\epsilon^*}\leqslant\phi_1^\epsilon$.

En passant à la limite en n, il vient $\phi^{\epsilon^*}\mathbb{1}_{A^+(\epsilon^*)}\geqslant\phi^\epsilon\mathbb{1}_{A^+(\epsilon)}$ et $\phi^{\epsilon^*}\mathbb{1}_{A^-(\epsilon^*)}\leqslant\phi^\epsilon\mathbb{1}_{A^-(\epsilon)}$. Comme précédemment cela permet de voir que $\phi^\epsilon\to\mathbb{1}_A$ lorsque $\epsilon\to 0$. L'ensemble A vérifie l'assertion b). □

Pour ces mesures nous obtenons une version analogue au théorème 5.3 :

THÉORÈME 6.5. — *Pour une mesure $\mathbb{P}$ vérifiant la proposition 6.4 les deux ensembles suivants sont égaux :*

$$\mathcal{A}_{0,f}(A)\overset{\Delta}{=}\text{Argmax}\,\big\{m_f(B),\ \mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B),\ \mathcal{I}(A)\subset\mathcal{I}(B)\big\}\ \textit{et}$$

$$\text{Argmax}\,\big\{m_f[\phi],\ 0\leqslant\phi\leqslant 1,\ E_{\mathbb{P}}[\phi]=\mathbb{P}(A),\ \mathcal{I}(A)\subset\mathcal{I}(\phi)\big\}.$$

De plus, il existe une infinité non dénombrable de fonctions tests f telles que $\mathcal{A}_{0,f}(A)$ soit un singleton $\mathbb{P}$-p.s. noté $S_{0,f}(A)$.

Preuve. — La preuve de l'égalité des deux ensembles Argmax est semblable à celle du théorème 5.3. Il en de même pour l'unicité, en adaptant la définition de la classe $\mathcal{C}_f$, qui devient l'ensemble des mesures $\mathbb{P}$ telles que

« *tout A non négligeable s'écrit $A=A_1+A_2$, $\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_2)$, $\mathcal{I}(A_2)\subset\mathcal{I}(A_1)$ avec $m_f(A_2)\neq m_f(A_1)$* ». □

Comme auparavant, nous supprimons la référence à la fonction test f, en supposant qu'elle vérifie l'unicité du théorème 6.5 et on écrit $S_0(A)$ pour $S_{0,f}(A)$.

La proposition suivante exprime que pour un borélien A, $S_0(A)$ a l'image la plus « grosse » possible.

Proposition 6.6. — *Soient $I\!P$ une mesure vérifiant la proposition 6.4 et A un borélien, alors l'ensemble $S_0(A)$ vérifie*

$$\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(S_0(A)) \text{ pour tout borélien } B \text{ tel que } I\!P(A) = I\!P(B) \text{ et } \mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B).$$

Preuve. — Rappelons que si $\tilde{F}_A = \{\phi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 1,\ I\!P(A) = E_{I\!P}[\phi],\ \mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(\phi)\}$ alors $S_0(A) = \text{Argmax}\{m(B),\ 1\!\!1_B \in \tilde{F}_A\}$. Supposons qu'il existe une v.a. $\phi \in \tilde{F}_A$ telle que $\mathcal{I}(S_0(A)) \subset \mathcal{I}(\phi)$. Avec la proposition 6.4, il existe $B \subset \text{supp}(\phi)$, $I\!P(B) = I\!P[\phi]$ et $\mathcal{I}(\phi) \subset \mathcal{I}(B)$. Par conséquent $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(S_0(A)) \subset \mathcal{I}(S_0(B))$ et donc $1\!\!1_{S_0(B)} \in \tilde{F}_A$.

L'unicité donne l'égalité $S_0(A) = S_0(B)$ et $\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(S_0(A))$. □

Remarques 6.7. — La proposition 5.5 ne s'adapte pas pour S_0. Même pour des mesures simples, on peut trouver deux boréliens $B \subset A$ tels que $S_0(B)$ ne soit pas contenu dans $S_0(A)$.

– Lorsque $B \subset A$, la relation $\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(S_0(A))$ permet de donner un sens à l'ensemble $\{E \subset S_0(A),\ I\!P(B) = I\!P(E),\ \mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(E)\}$ et, de là, définir

$$\text{Argmax}\ \{m_f(E),\ E \subset S_0(A),\ I\!P(B) = I\!P(E),\ \mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(E)\}$$

que l'on note $S_0(S_0(A), B)$ ou plus concisément, $S_0(A, B)$.

– Par récurrence, si $\{A_n\}$ est une suite finie, décroissante, $A_{n+1} \subset A_n$, on donne un sens à la suite $\{S_{0,n} \stackrel{\Delta}{=} S_0(A_1, \cdots, A_n)\}$ où $S_{0,n} = \text{Argmax}$ $\{m_f(E),\ E \subset S_{0,n-1},\ I\!P(S_{0,n}) = I\!P(E) \text{ et } \mathcal{I}(A_n) \subset \mathcal{I}(E)\}$.

– Le passage aux suites décroissantes infinies ne posent pas de problème. Si A est la suite décroisante $\{A_n\}$, alors $S_0(A)$ est la limite décroisante des $S_0(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ et si $A = \lim A_n$ et $B \subset A$, alors $S_0(A, B) = S_0(A, A, B)$ a un sens. Le passage aux v.a. ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est aisé.

7. Exemples

7.1. Généralités pour $I\!P$ à densité

Soient $I\!P$ une mesure vectorielle à densité $g = (g_k)$, $1 \leqslant k \leqslant d$, par rapport à λ et f une fonction de test. Pour les différentes sélections on doit déterminer un borélien maximisant

$$m_f(B)=\int_B f(t).\big(\sum_1^d g_i(t)\big)dt$$

pour $S_f^*(A)$ on ajoute les contraintes $I\!P(B) = \displaystyle\int_B g(t)dt = I\!P(A)$ et $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B)$;

pour $A_f^=$, les contraintes deviennent : $I\!P(B) = I\!P(A)$ et $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B)$ et,

pour $S_f(A)$, les contraintes se réduisent à : $I\!P(B) = I\!P(A)$.

L'existence de solutions pour ces problèmes résulte de la proposition 2.1 et des théorèmes 6.5, 5.3 et 3.4.

Simplifions en prenant pour g_k des fonctions simples i.e. $g_k = \sum_{i\in J_k} a_i^k \mathbb{1}_{I_i^k}$, $1 \leqslant k \leqslant d$ et, pour tout k, les $\{I_i^k\}$, $i \in J_k$, étant une partition finie d'intervalles. En prenant une partition plus fine, on écrit $g_k = \sum_{i\in J} a_i^k \mathbb{1}_{I_i}$, $1 \leqslant k \leqslant d$, où I_i est un intervalle $(u_{i-1},\ u_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $u_0 = 0$, $u_n = 1$.

Pour le cas particulier $f(t) = t^y$ et, en posant $s_i \triangleq \sum_k a_i^k$, $S_{0,f}$ doit réaliser le maximum de

$$m_y(B) = \sum_{i=1}^n \Big[s_i \int_{B_i=BI_i} t^y dt\Big] \quad \text{sous les contraintes } B_i \subset I_i,\ \lambda(B_i) = x_i$$

et, pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant d$, $\sum\limits_{i=1}^n a_i^k x_i = P_k(A)$, $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(B)$.

Dans la suite, pour simplifier, la fonction test sera l'identité.

7.1.1. Cas des mesures simples à valeurs $I\!R^2$.

A. — Soient $I\!P = (g,1)\lambda$ une mesure à valeurs $I\!R^2$ définie sur la tribu borélienne de $[0,1]$ et g de la forme $g = \sum\limits_1^n a_i \mathbb{1}_{]u_{i-1},\ u_i]}$, $0 \leqslant a_i < a_{i+1}$, on pose $I_i =]u_{i-1},\ u_i]$.

Notons $dr(A)$ l'ensemble obtenu à partir du borélien A, le plus à droite possible i.e.

$$dr(A) \cap I_i =]u_i - z_i,\ u_i] \text{ où } z_i = \lambda(A \cap I_i).$$

Alors il est clair que $(dr(A))\mathcal{R}A$, donc $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(dr(A))$ et que $m(A) \leqslant m(dr(A))$.

En particulier $\quad A^= = dr(A)$

Algorithme permettant d'obtenir $S_0(A)$.

Commençons par remarquer que :

A est différent de $S_0(A)$ si et seulement si, il existe un couple (B, B^*) tel que $B \subset A$,

$B^* \subset A^c$, $I\!P(B) = I\!P(B^*)$, $\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(B^*)$ et $m(B) < m(B^*)$.

Continuons avec l'exemple précédent $I\!P = (g, 1)\lambda$ et un A tel que, pour tout i, $A \cap I_i$ soit un intervalle.

Considérons un triplet $j < i < k$ avec $a_j < a_i < a_k$ et $0 < \lambda(AI_l) < \lambda(I_l)$ pour $l = j, i, k$. Prenons un intervalle $I_x =]u_i - x, u_i]$ contenu dans AI_i. Posons $y = x\,\dfrac{a_i - a_j}{a_k - a_j}$, $I^1 = I_j \cap A^c$ et $I^2 = I_k \cap A^c$. Il suffit de choisir x suffisamment petit pour que l'on puisse trouver deux intervalles, $I_y \subset I^2$ et $I_{x-y} \subset I^1$, de longueurs respectives y et $x - y$ et $I\!P(I_x) = I\!P(I_y + I_{x-y})$.

Si $m(I_x) \geqslant m(I_y + I_{x-y})$, on pose $A_1 = A$ (on garde A),

sinon on pose $A_1 \triangleq dr\big((A \setminus I_x) + I_y + I_{x-y}\big)$.

Pour $A_1 \neq A$, on obtient : $I\!P(A) = I\!P(A_1)$ et $m(A) < m(A_1)$.

Ce qui nous conduit, par récurrence et en faisant varier i et les couples (j, k), à une suite $\{A_n\}$ qui, en un nombre fini d'étapes, converge vers un ensemble $\tilde{A}$.

Montrons que cet ensemble est $S_0(A)$.

À cette fin, commençons par établir que $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(A_1)$. Si $A_1 = A$ il n'y rien à prouver.

On suppose donc A_1 différent de A et examinons d'abord le cas $B \subset A \cap I_i$.

Avec les notations de la partie précédente, si $B \subset A \cap I_i \cap (I_x)^c$, il est clair que $\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(A_1)$.

Considérons le cas $B \subset I_x$. On a $I\!P(B) = r I\!P(I_x)$ pour $r \in [0, 1]$ et, comme

$I\!P(I_x) = I\!P(I_y + I_{x-y}) \in \mathcal{I}(A_1)$, on a prouvé que $I\!P(B) \in \mathcal{I}(A_1)$.

De là on en déduit que $\mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(A_1)$.

Cas général : $B \subset A$. Rappelons que $A_1 = (A \setminus I_x) + (I^* \triangleq I_y + I_{x-y})$, pour $I_x \in I_i$, introduisons les notations $B_x = B \cap I_x$, $A_i = A \cap I_i$ et $B_i = A_i \setminus B_x$, ainsi l'ensemble $B\cap(I_i)^c$ est contenu dans $A\setminus I_x$. Avec le cas ci-dessus, B_x a même mesure qu'un ensemble $B^*\subset I^*$ et B_i a même mesure que $I^*\setminus B^*$.

Par conséquent $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B\cap(I_i)^c)+\mathbb{P}(B^*)+\mathbb{P}(I^*\setminus B^*)\in\mathcal{I}(A_1)$.

Le bilan est : si $B\subset A$ alors $\mathcal{I}(B)\subset\mathcal{I}(A_1)$ i.e $\mathcal{I}(A)\subset\mathcal{I}(A_1)$ et, après itération, $\mathcal{I}(A)\subset\mathcal{I}(\tilde{A})$.

On voit avec la remarque au début de cette partie et, par construction même de $\tilde{A}$, que $\tilde{A}=S_0(A)$.

B. — Considérons le cas $\mathbb{P}=(g_1,g_2)\lambda$, lorsque g_1 et g_2 sont des fonctions simples.

En prenant une partition plus fine, $\big\{I_i=]u_{i-1},\ u_i]\big\}$, écrivons $g_1=\sum_1^n a_i\mathbb{1}_{I_i}$ et $g_2=\sum_1^n b_i\mathbb{1}_{I_i}$.

Remarquons que l'on a toujours $A^{=}=dr(A)$.

Il existe une permutation σ telle que $\dfrac{a_{\sigma(i)}}{b_{\sigma(i)}}$ soit croissant en i. Quitte à supposer toutes les valeurs différentes, on peut même supposer que cette suite croît strictement.

Pour simplifier, oublions la permutation : $\{\dfrac{a_i}{b_i}\}$ est une suite (finie) strictement croissante.

Avec les notations précédentes cherchons à remplacer un intervalle $I_x\subset I_i$ par la réunion de deux intervalles disjoints, I_y et I_z, avec les conditions

$$\mathbb{P}(I_x)=\mathbb{P}(I_y+I_z),\ I_y\subset I_k,\ I_z\subset I_j \text{ et } j<i<k.$$

Simplifions les écritures, en posant $a=a_i,\ \bar{a}=b_i,\ b=a_k,\ \bar{b}=b_k$ et $c=a_j,\ \bar{c}=b_j$.

Nous devons résoudre le système linéaire $ax=by+cz,\ \bar{a}x=\bar{b}y+\bar{c}z$, avec les conditions y et z positifs. La solution du système est $(a\bar{c}-\bar{a}c)x=(\bar{c}b-\bar{b}c)y$ et $(b\bar{a}-\bar{b}a)x=(\bar{c}b-\bar{b}c)z$.

Si $\bar{c}b-\bar{b}c$ est positif, i.e. $\dfrac{\bar{c}}{c}>\dfrac{\bar{b}}{b}$, on doit avoir $a\bar{c}-\bar{a}c>0$ et $b\bar{a}-\bar{b}a>0$, ce qui conduit aux relations : $\dfrac{\bar{c}}{c}>\dfrac{\bar{a}}{a}>\dfrac{\bar{b}}{b}$. En revenant à l'écriture initiale, cela donne : $\dfrac{a_j}{b_j}<\dfrac{a_i}{b_i}<\dfrac{a_k}{b_k}$, et c'est la condition de croissance.

Ainsi l'algorithme précédent s'adapte à la mesure considérée.

De plus, un raisonnement similaire permet de voir que $\mathcal{I}(B)\subset\mathcal{I}(A_1)$ et par conséquent, $\mathcal{I}(B)\subset\mathcal{I}(S_0(A))$.

Enfin, il est clair que la permutation σ^{-1} permet d'obtenir le même résultat pour la mesure initiale $I\!\!P=(g_1,g_2)\lambda$. Cela clôt le cas des mesures simples à valeurs $I\!\!R^2$.

7.1.2. Cas $I\!\!R^d$ et $I\!\!P$ simple.

La mesure est définie par la données de p fonctions simples g_i que l'on peut écrire

$$g_i=\sum_1^n a_i^k 1\!\!1_{I_k},\ 1\leqslant i\leqslant d,\ I_k=]u_{k-1},\ u_k].$$

Nous allons suivre la procédure établie lors de la dimension 2.

Pour *un* intervalle $I_x\subset I_j$, cherchons des intervalles $I_{y_k}\subset I_k$ tels que $I\!\!P(I_x)=I\!\!P(\sum\limits_k I_{y_k})$. Pour cela, nous devons résoudre le système linéaire avec les contraintes $y_k\geqslant 0$,

$$a_i^j x=\sum_1^n a_i^k y_k,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant i\leqslant p.$$

Et, plus particulièrement, lorsque l'inégalité $m(I_x)<m\big(\sum\limits_k I_{y_k}\big)$ est vérifiée.

Pseudo-algorithme pour obtenir $S_0(A)$.

Pour $B=\sum I_{x_i},\ I_{x_i}\subset\big(S_0(A)\big)^c\cap A\cap I_i$, cherchons les solutions des équations linéaires

$$\sum a_k^j x_j=\sum a_k^j y_j,\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

Considérons l'ensemble des solutions $\{y_k\}$ de ces équation telles que $I_{\{y_k\}}\subset S_0(A)\cap A^c$. Si cet ensemble est vide pour tout B, c'est que $A=S_0(A)$.

S'il n'est pas vide, pour une solution $\{y_k\}$, l'ensemble $E=\sum I_{\{y_k\}}$ dépend évidemment de $\{x_k\}$. Fixons un k_0 et faisons tendre x_k vers 0 pour $k\neq k_0$.

On a la convergence de $E(\{x_k\})$ vers un ensemble $E(x_{k_0})$ qui appartient à $S_0(A)\cap A^c$ et tel que $m\big(E(x_{k_0})\big)\geqslant m(I_{k_0})$.

L'égalité $m(E(x_{k_0}))=m(I_{k_0})$ est impossible, car elle implique

$m\big(S_0(A)\big)=m\big(I_{x_{k_0}}\cup(S_0(A)\backslash E(x_{k_0})\big)$, ce qui contredit l'unicité de $S_0(A)$.

Et, en définitive, $I\!P(I_{x_k})\in\mathcal{I}(S_0(A))$ d'où $\mathcal{I}(A)\subset\mathcal{I}(S_0(A))$.

7.1.3. Établissons un bilan

Soit $I\!P=g\lambda$ une mesure vectorielle dont la densité g est formée de fonctions simples.

Alors $A^{=}=dr(A)$ et $B\subset A\Longrightarrow B^{=}\subset A^{=}$; S_0 est une bonne sélection : $\mathcal{I}(A)\subset\mathcal{I}(S_0(A))$ et $I\!P(A_n)$ converge implique $S^*(A_n)$ converge en mesure. De plus, si $S_0(B)\subset A$ alors $S_0(B)\subset S_0(A)$.

En effet, reprenons les notations de l'algorithme permettant de déterminer $S_0(A)$.

Supposons que l'intervalle I_x soit contenu dans $I_i\cap A\cap(S_0(B))^c$, la méthode permettant d'obtenir A_1, éventuellement différent de A, laisse $S_0(B)$ inchangé, car si $I_x\subset I_i\cap S_0(B)$, on a $m(I_y)+m(I_{x-y})<m(I_x)$, $S_0(B)$ étant maximal.

Nous n'avons pas abordé la recherche d'un algorithme permettant de trouver $S(\alpha)$.

7.2. Exemples pour la quatrième sélection

Montrons que la mesure $I\!P=(1,f)\lambda$ où f est une fonction strictement monotone (croissante ou décroissante) appartient à la classe $\mathcal{P}^*$.

Pour cela, commençons par voir que les ensembles extrémaux sont des intervalles du type $[0,x]$ ou $[x,1]$. Par conséquent, que $a_1=0$ et $a_2=1$.

Prenons un borélien $A\subset[0,1]$ de mesure $\lambda(A)=a$ et posons $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt+\int_{1-a+x}^1 f(t)dt$.

Il existe un unique point $x_0\in[0,\ a]$ tel que $I\!P(I)=(a,F(x_0))$.

De même, avec une mesure auxiliaire convenable, on a : $m(A)\leqslant m\big([0,\ x_0]+[1-a+x_0,\ 1]\big)$.

Pour obtenir $I\!P\in\mathcal{P}^*$, il faut établir que $\mathcal{I}(A)\subset\mathcal{I}\big([0,\ x_0]+[1-a+x_0,\ 1]\big)$ et, par conséquent, $S^*(A)=[0,\ x_0]+[1-a+x_0,\ 1]$.

Montrons qu'une fonction strictement croissante et affine par morceaux g appartient à $\mathcal{P}^*$.

Ceci est aisé lorsque la fonction ne comporte que deux morceaux.

Le passage à trois morceaux $[0,a]$, $[a,b]$, $[b,1]$, se fait considérant les restrictions sur les intervalles $[0,b]$, $[a,1]$ et, sur chacun des ces intervalles, la fonction ne comporte que deux morceaux. Procédant ainsi et pas par pas, on prouve que $g \in \mathcal{P}^*$ et que $S^*(\cdot)$ est de la forme $[0,x] \cup [y,1]$.

Ensuite, on approche uniformément une fonction strictement croissante, f, par une suite $\{f_n\}$ de fonctions affines par morceaux. Chacune des fonctions f_n appartient à $\mathcal{P}^*$, le passage à la limite utilise le lemme 2.5 :

Notons $\mathcal{I}_n(A)$ l'image de A pour une mesure $I\!P_n$ de densité $(1, f_n)$ et $S_n^*(A) = [0, a_n] \cup [b_n, 1]$ – respectivement $S^*(A) = [0,a] \cup [b,1]$ – l'ensemble « maximal » correspondant à $I\!P_n$ -resp. à $I\!P$. On sait qu'alors $\mathcal{I}_n(A) \to \mathcal{I}(A)$ et comme $\mathcal{I}_n(A) \subset \mathcal{I}(S_n^*(A))$, on en déduit facilement que $\mathcal{I}(A) \subset \mathcal{I}(S^*(A))$. Finalement on arrive à $f \in \mathcal{P}^*$.

Remarquons aussi que pour ces exemples, $S^* = S_0$.

Pour la mesure $I\!P = (1, 2t)\lambda$, la version $*$-monotone de $X = 1\!\!1_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}$ est $S^*(X) = 1\!\!1_{[0, \frac{1}{4}]} + 1\!\!1_{[\frac{3}{4}, 1]}$.

Comme dans les exemples où $I\!P$ est une mesure simple, la relation $B \subset A$ n'implique pas nécessairement que $S^*(B) \subset S^*(A)$. Ainsi, avec la mesure précédente, c'est le cas pour $A = S^*(A) = [0, \frac{3}{4}]$, $B = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et $S^*(B) = [0, \frac{1}{4}] + [\frac{3}{4}, 1]$.

Citons aussi des cas où les éléments extrémaux n'ont pas la forme $[0,x]$ ou $[y,1]$:

$I\!P = (1, f)\lambda$ où $f(t) = 4t 1\!\!1_{[0, \frac{1}{2}]} + 4(1-t) 1\!\!1_{[\frac{1}{2}, 1]}$ ou encore $f(t) = 6t(1-t)$; les ensembles extrémaux sont $I = [\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} + x]$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ et I^c.

Enfin, donnons un exemple pour des mesures à valeurs $I\!R^3$. Soient $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqslant 1$ et $I\!P$ la mesure à densité $(1, 2t, f(t))$, où f est une fonction strictement décroissante affine sur chaque intervalles $[a_i, a_{i+1}]$; alors $I\!P \in \mathcal{P}^*$.

8. Problèmes de Monge

8.1. Généralités

Soit $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ un couple de mesures vectorielles positives définies respectivement sur les tribus boréliennes $\mathcal{B}(M)$ et $\mathcal{B}(N)$, M et N étant deux espaces polonais.

Notons $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ l'ensemble des mesures sur $\mathcal{B}(M \times N)$ dont les marges sont respectivement $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$. On écrit simplement Γ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.

Remarquons que, si (γ_i), $i = 1 \cdots d$ sont les mesures coordonnées de γ, alors $\gamma \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ si et seulement si pour tout i, $\gamma_i \in \Gamma(P_i, Q_i)$, P_i – respectivement Q_i – étant les coordonnées de $\mathbb{P}$ -resp. $\mathbb{Q}$-.

Une condition suffisante pour Γ non vide est qu'il existe une v.a. X telle que $\mathbb{Q} = X(\mathbb{P})$.

Lorsqu'il n'est pas vide, l'ensemble Γ est compact pour la convergence étroite.

En effet, il existe des compacts K_1 et K_2 tels que $|\mathbb{P}|(K_1^c) \leqslant \epsilon$ et $|\mathbb{Q}|(K_2^c) \leqslant \epsilon$, alors pour

$\gamma \in \Gamma$, $|\gamma|\big((K_1 \times K_2)^c\big) \leqslant |\gamma|\big(\{K_1^c \times N\} \cup \{M \times K_2^c\}\big) \leqslant const.(|\mathbb{P}|(K_1^c) + |\mathbb{Q}|(K_2^c)) \leqslant const.2\epsilon$.

La suite de la preuve est classique.

Pour une fonction de coût (continue) i.e. une application c continue de $M \times N \to \mathbb{R}_+$, on peut définir différentes fonctionnelles exprimant les coûts du transport de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$. Tout d'abord

$$c_1(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \inf\big\{E_{|\mathbb{P}|}[c(x, Y(x))],\ Y(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}\big\}. \tag{8.1}$$

Nous utilisons aussi la fonctionnelle

$$c_2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \inf\big\{E_{|(X,Y)(\mathbb{P})|}[c(x, y)],\ (X, Y)(\mathbb{P}) \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})\big\}. \tag{8.2}$$

Puis, l'analogue de la fonctionnelle de Kantorovich, *cf.* [22], [24] :

$$c_3(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \inf\big\{E_{|\gamma|}[c(x, y)],\ \gamma \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})\big\}. \tag{8.3}$$

Ces expressions supposent l'existence des v.a. considérées.

La fonctionnelle c_3 est atteinte, en effet Γ est compact pour la convergence étroite, voir aussi la proposition 8.3. Ceci reste non évident pour c_1 et c_2.

En outre, il est clair que $c_3 \leqslant c_2 \leqslant c_1$, lorsque ces expressions ont un sens.

En opposition au cas unidimensionnel, nous verrons que ces fonctionnelles sont en général différentes.

Remarques 8.1. — Il est possible de remplacer la continuité de la fonction de coût par une semi-continuité inférieure.

À titre indicatif indiquons d'autres possibilités de coûts :

– En considérant l'ordre naturel de $\mathbb{R}^d$, $\| \inf E_\mu[c(X,Y)] \|_{\mathbb{R}^d}$ est aussi un coût de transport.

– De même, on peut s'intéresser à un critère multidimensionnel, par exemple rechercher $\gamma_0 \in \Gamma$ telle qu'il n'existe pas de $\gamma \in \Gamma$ avec $E_\gamma[c(x,y)] < E_{\gamma_0}[c(x,y)]$. Une telle solution est dite *"admissible"* ou de Pareto. C'est l'analogue de la solution aux problèmes d'objectifs multicritères en optimisation ou statistique. •

La motivation de cette partie est le problème de Monge, *cf.* [21], qui s'énonce :

Pour un couple $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ existe-t-il une fonction ϕ telle que

$$\phi(\mathbb{P}) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad E_{|\mathbb{P}|}\big[c(x, \phi(x))\big] = c_2(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \ ?$$

Nous pouvons distinguer le *petit problème de Monge* :

Pour un couple $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ existe-t-il une fonction ϕ telle que

$$\phi(\mathbb{P}) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad E_{|\mathbb{P}|}\big[c(x, \phi(x))\big] = c_1(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \ ?$$

Une mesure γ appartenant à une classe est dite *optimale* pour c et cette classe, si $E_{|\gamma|}[c]$ réalise le minimum pour cette classe. Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on dit simplement optimale sans autre précision.

Une fonction est dite *optimale* ou *fonction de Monge*, respectivement *presque-optimale*, si elle est solution du problème de Monge, resp. solution du petit problème de Monge.

La mesure $\mathbb{P}$ vérifie la propriété du *transport optimal* (pour le coût c), respectivement la propriété du *transport presque-optimal*, si pour toute mesure vectorielle $\mathbb{Q}$ de la forme $X(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$, il existe, pour le couple $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, une fonction de Monge, resp. une fonction presque-optimale.

Nous verrons que, sauf cas exceptionnel, il n'existe pas de fonction ϕ telle que

$$\phi(\mathbb{P}) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad E_{|\mathbb{P}|}\big[c(x, \phi(x))\big] = c_3(\mathbb{P}, \mathbb{Q}).$$

Soit $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ un couple de mesures vectorielles positives, pour qu'il existe une fonction de Monge, il est nécessaire que $\mathbb{Q}$ soit l'image de $\mathbb{P}$ par une v.a. adéquate X, i.e. $\mathbb{Q} = X(\mathbb{P})$.

Dans le cas uni-dimensionnel, la condition P est une probabilité diffuse (ou continue) assure que toute autre probabilité, Q est l'image de P par une v.a. adéquate. Ce n'est pas le cas pour les mesures vectorielles ; d'où les définitions suivantes :

Définition 8.2. — *Soit $\mathbb{P}$ une mesure vectorielle positive définie sur $\mathcal{B}(M)$. Notons $*(\mathbb{P})$ l'ensemble des mesures de la forme $X(\mathbb{P})$ où X est une v.a. de M dans un autre espace polonais N. La fermeture de cet ensemble pour la topologie étroite est $\overline{*(\mathbb{P})}$.*

Nous désignons par $\Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ le sous ensemble $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \cap *(\mathbb{P})$ et $\overline{\Gamma^*}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ sa fermeture pour la convergence étroite.

Rappelons que pour une mesure $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ les ensembles $*(\mathbb{P})$ et $\Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ sont fermés.

En utilisant le procédé diagonal, il en est de même lorsque $\mathbb{P}$ est à support fini

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ soit non vide est que $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$.

Un théorème de Prohorov assure que si M est un espace polonais alors, pour la topologie étroite, l'ensemble des mesures positives bornées sur $\mathcal{B}(M)$ est aussi un espace polonais. Ainsi les ensembles compacts $\overline{\Gamma^*}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ et $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ sont métrisables et on peut se limiter aux suites pour l'étude de la convergence étroite.

Proposition 8.3. — *Pour toute mesure $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$, la fonctionnelle de Kantorovich*

$\mathcal{K}_{c,\overline{\Gamma^*}}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \overset{\Delta}{=} \inf\big\{E_{|\gamma|}\big[c(x, y)\big],\ \gamma \in \overline{\Gamma^*}\big\}$ *est atteinte. Autrement dit, il existe $\gamma \in \overline{\Gamma^*}$ telle que $\mathcal{K}_{c,\overline{\Gamma^*}}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = E_\gamma[c(x, y)]$.*

Preuve. — L'ensemble $\overline{\Gamma^*}$ est compact non vide et l'application $\gamma \to E_{|\gamma|}[c]$ est continue pour la convergence étroite, cela prouve l'assertion. □

Dans le cas uni-dimensionnel rappelons le théorème suivant qui permet de déterminer une fonction optimale, *cf.* [20] :

« *Soient P et Q deux probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de fonctions de répartitions respectives F et G. Soit c une fonction de coût de la forme $c(u,v)=h(u–v)$, h convexe paire $h(0)=0$; alors* $\inf_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma[c] = \int_0^1 h\big(F^{-1}(t)-G^{-1}(t)\big)dt.$ »

Dans cet énoncé F^{-1} et G^{-1} désignent les inverses continues à droite de F et de G.

Lorsque F est continue on obtient $\inf_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma[c] = E_P[h(x-\phi(x))]$ avec $\phi = G^{-1}\circ F$.

Une extension presque immédiate du cas classique des probabilités est :

Proposition 8.4. — *Soient $\mathbb{P}$ une mesure vectorielle sur $\mathbb{R}^d$ dont la densité $f=(f_k)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et c un coût de la forme $c(x,y)=h(x–y)$ où h est une fonction strictement convexe de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$. Alors $\mathbb{P}$ a la propriété du transport optimal unique. En d'autres termes, pour toute mesure vectorielle $\mathbb{Q}$ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathbb{Q}\in *(\mathbb{P})$ il existe une unique fonction ϕ telle que*

$$\mathbb{Q}=\phi(\mathbb{P}),$$
$$\inf_{\mathbb{Q}=X(\mathbb{P})}\Big\{E_{|\mathbb{P}|}\big[c(x,X(x))\big]\Big\}=E_{|\mathbb{P}|}\big[c(x,\phi(x))\big]=\inf_{\gamma\in\Gamma^*(\mathbb{P},\mathbb{Q})}\Big\{E_{|\gamma|}\big[c(x,X(x))\big]\Big\}.$$

Preuve. — Écrivons $f_k = \sum_{i=1}^n a^k \mathbb{1}_{A_i}$ et pour $\gamma\in\Gamma^*(\mathbb{P},\mathbb{Q})$ optimale, $\gamma_i(\cdot)\triangleq\gamma(\{A_i\times\mathbb{R}^d\cap\cdot\})$ i.e. γ_i est la trace de γ sur $A_i\times\mathbb{R}^d$. Pour chaque i, notons $\mathbb{P}_i$ la trace de $\mathbb{P}$ sur A_i, si $\mathbb{Q}$ s'écrit $\mathbb{Q}=X(\mathbb{P})$, ses coordonnées sont $\mathbb{Q}_i=X(\mathbb{P}_i)$. Le théorème classique, voir par exemple *cf.*[15], permet de trouver une fonction de Monge ϕ_i pour les mesures $(\mathbb{P}_i,\mathbb{Q}_i)$. Posons $\phi=\sum\phi_i$, en sommant par rapport à i les inégalités $E_{\mathbb{P}_i}\big[c(x,\phi_i(x))\big]\leqslant E_{\gamma_i}[c]$, on voit que $E_{|\mathbb{P}|}\big[c(x,\phi(x))\big]\leqslant E_{|\gamma|}[c]$ donc γ est la mesure $(Id,\phi)(\mathbb{P})$. □

8.2. Discussion autour de c_3

Nous avons vu que $\gamma=(\gamma_i)\in\Gamma(\mathbb{P},\mathbb{Q})$ si et seulement si $\gamma_i\in\Gamma(P_i,Q_i)$, pour tout i. Ainsi γ est optimale pour c_3 si et seulement si, pour tout i, γ_i

est optimale et donc

$$\operatorname*{Arg\,inf}_{\Gamma(\mathbb{P},\mathbb{Q})}\left\{E_{|\gamma|}\left[c(x,y)\right]\right\} = \left(\operatorname*{Arg\,inf}_{\Gamma(P_i,Q_i)}\left\{E_{\gamma_i}\left[c(x,y)\right]\right\}\right)_{i=1\cdots d}.$$

Cette relation montre, pour le problème de Monge, une différence fondamentale entre le cas unidimensionnel et le cas vectoriel. Il est peu vraisemblable qu'il existe une fonction ϕ, telle que $\gamma_i = \phi(P_i)$, pour tous les $i = 1, \cdots, d$.

Voyons cependant un tel cas.

Supposons que $\mathbb{P} = (P_i)$ soit une mesure positive à coordonnées étrangères, et que la fonction de coût soit de la forme $c(x,y) = h(x-y)$, h strictement convexe, paire et $h(0)=0$. Lorsque les P_i ont tous la propriété du transport optimal, par exemple $P_i \ll \lambda$, *cf.* [7], [10], la mesure optimale γ_i est l'image de P_i par (Id, ϕ_i) où ϕ_i est la fonction de Monge pour le couple (P_i, Q_i). La fonction $\phi = \sum_i \phi_i \mathbb{1}_{D_i}$ où les D_i sont les ensembles de Jordan i.e. $P_j(D_i) = 0$ si $j \neq i$ et $P_i(D_i) = 1$, est une fonction de Monge pour $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$.

Énonçons le résultat de ce cas -très- particulier.

Soit $\mathbb{P}$ une mesure vectorielle définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ dont les coordonnées sont étrangères et $\ll \lambda$; soit c une fonction de coût de la forme $c(x,y)= h(x-y)$, h strictement convexe, paire et $h(0) = 0$. Si $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ ont même masse, il existe une unique fonction de Monge pour le problème général, i.e. il existe ϕ telle que $\mathbb{Q} = \phi(\mathbb{P})$ et

$$\inf_{\Gamma(\mathbb{P},\mathbb{Q})}\left\{E_{|\gamma|}\left[c(x,y)\right]\right\} = \inf\left\{E_{|\mathbb{P}|}\left[c(x,X(x))\right], X(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}\right\} = E_{|\mathbb{P}|}\left[c(x,\phi(x))\right].$$

La difficulté, occultée par cet exemple, est que la condition $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ n'implique pas nécessairement qu'une mesure optimale pour Γ appartienne à $*(\mathbb{P})$.

Là est le problème soulevé par la fonctionnelle de Kantorovich c_3.

Pour amorcer cette question, supposons que la mesure $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ soit à support fini $\{y_k\}$. Pour une mesure $\gamma \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\gamma \in \Gamma^*$ est qu'il existe une partition (finie) $\{A_k\}$ telle que $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{Q}(y_k)$ et, si $\mathbb{P}_k$ est la restriction de $\mathbb{P}$ à A_k et γ_k la restriction de γ à $[0,1] \times \{y_k\}$, alors $\gamma_k \in *(\mathbb{P}_k)$.

Examinons de courts exemples.

Exemples 8.5. — Si $\mathbb{P} = \binom{0}{\frac14}\delta_1 + \binom{\frac12}{\frac14}\delta_2 + \binom{0}{\frac14}\delta_3 + \binom{\frac12}{\frac14}\delta_4$ et $\mathbb{Q} = \binom{\frac12}{\frac14}\delta_1 + \binom{\frac12}{\frac34}\delta_2$, on a $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ mais il n'existe pas de v.a. croissante X telle que $\mathbb{Q} = X(\mathbb{P})$.

– Dans le cas de mesures à supports finis et un coût quadratique, soient $\mathbb{P} = \binom{1}{2}\delta_0 + \binom{2}{1}\delta_1$ et $X(0)=1, X(1)=0$. Le couple $(\mathbb{P}, \mathbb{Q} \triangleq X(\mathbb{P}))$ a pour mesure optimale $\gamma = \binom{1}{2}\delta_{0,1} + \binom{2}{1}\delta_{1,0}$ dans Γ^* et $\gamma_1 = \binom{1}{1}\delta_{0,0} + \binom{0}{1}\delta_{0,1} + \binom{1}{1}\delta_{1,1} + \binom{1}{0}\delta_{1,0}$ dans Γ.

– Enfin, prenons $\mathbb{P} = (P_1, P_2)$ où $P_1 = \lambda$, $P_2 = \Big(\frac12 \mathbb{1}_{[0,\frac12[} + \frac32 \mathbb{1}_{[\frac12,1[}\Big)\lambda$ et $\mathbb{Q} = \binom{\frac12}{\frac12}\big(\delta_0 + \delta_1\big)$. Pour c_3, la mesure optimale pour un coût quadratique est $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1)$ avec

$$\gamma^0 = \Big(\tbinom{1}{\frac12}\mathbb{1}_{[0,\frac12[} + \tbinom{0}{\frac32}\mathbb{1}_{[\frac12,\frac23[}\Big)\lambda \quad \text{et} \quad \gamma^1 = \Big(\tbinom{1}{0}\mathbb{1}_{[\frac12,\frac23[} + \tbinom{1}{\frac32}\mathbb{1}_{[\frac23,1[}\Big)\lambda.$$

Il n'existe pas de fonction ϕ telle que $\gamma = (Id, \phi)(\mathbb{P})$ car γ n'appartient pas à $\overline{*(\mathbb{P})}$ à cause des 0. Il n'y a donc pas de solution au problème de Monge initial. Le coût quadratique de γ est 0.25 pour c_3 et celui de la fonction optimale dans Γ^*, $\phi = 1_{[1/4,1/2[\cup[2/3,1[}$, est $0,47$.

8.3. Mesures vectorielles à supports finis

Commençons par un rappel du transport de probabilités uniformes sur des ensembles finis.

Soient P et Q deux probabilités uniformément réparties, la première sur un ensemble A, l'autre sur B avec card(A) multiple de card(B) et c une fonction coût de $A \times B \to \mathbb{R}_+$. Alors $\inf \Big\{E_\gamma\big[c(x,y)\big],\ \gamma \in \Gamma(P,Q)\Big\}$ est atteint pour une probabilité γ_0 dont le support est un graphe i.e. $\gamma_0 = (Id, \phi)(P)$, *cf.* [17].

Pour A et B contenus dans $[0,1]$, résolvons le problème de l'unicité de la probabilité optimale γ_0 précédente. L'idée essentielle est que γ_0 est uniforme sur son graphe.

Ordonnons les ensembles $A = \{0 \leqslant x_1 < x_2 \cdots < x_n \leqslant 1\}$ et $B = \{0 \leqslant y_1 < y_2 \cdots < y_m \leqslant 1\}$ où $n = k.m$. Lorsque la fonction de coût est de la forme $c(u,v) = h(u-v)$, alors pour $x_i < x_j$ et $y_k < y_l$, on a classiquement : $c(x_i, y_k) + c(x_j, y_l) \leqslant c(x_i, y_l) + c(x_j, y_k)$.

Ceci montre que la fonction croissante $\phi : A \to B$ telle que $\phi(P) = Q$ est associée à γ_0 (son graphe est le support de γ_0). Ainsi, lorsque la fonction h est strictement convexe, on a l'unicité de ϕ et la mesure optimale est $(Id, \phi)(P)$.

Nous avons vu que dans ce cadre on a : $\Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \overline{\Gamma^*}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$.

Le théorème suivant résoud un problème de Monge dans le cas des mesures vectorielles à supports finis.

THÉORÈME 8.6. — *Soient $\mathbb{P}$ une mesure vectorielle positive à support fini et $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$. Alors, pour toute fonction de coût c, il existe une solution ϕ au problème de Monge :*

$$\phi(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}, \ E_{|\mathbb{P}|}\big[c(x, \phi(x))\big] = \inf_{\gamma \in \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})} \big\{E_{|\gamma|}[c]\big\}$$

Preuve. — L'existence d'une mesure optimale $\gamma \in \Gamma^*$ résulte de la proposition 8.3. Cette mesure s'écrit $\gamma = (X, Y)(\mathbb{P})$ où $X(\mathbb{P}) = \mathbb{P}, \ Y(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$. Soit $\{x_k\}_{k=1\cdots K}$ le support de $\mathbb{P}$ notons σ une bijection de $\{1 \cdots K\}$ telle que $\mathbb{P}(x_k) = \mathbb{P}\big(\{X(x_k) = x_{\sigma(k)}\}\big)$.

Découpons le support de $\mathbb{P}$ en cycles, tous les points d'un cycle ont même mesure et σ est une bijection sur ce cycle. De plus, si k et p appartiennent au même cycle alors $\gamma(x_{\sigma(k)}, y_k) = \gamma(x_{\sigma(p)}, y_p)$ et, comme $\sigma(k)$ et $\sigma(p)$ appartiennent aussi à ce cycle, il existe une bijection σ^* telle que $\gamma(x_k, y_{\sigma^*(k)}) = \gamma(x_{\sigma(k)}, y_k)$. Ce qui signifie que le support de γ est le graphe d'une fonction ϕ. $\square$

8.4. Convergence des fonctionnelles

Dans cette partie les mesures $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont définies sur $\mathcal{B}(M)$, M étant un espace polonais.

Comme dans le cas uni-dimensionnel, nous cherchons à approcher $\mathbb{P}$ par une suite $\{\mathbb{P}_n\}$ adéquate de mesures vectorielles à supports finis.

Ceci permet aussi de justifier divers algorithmes.

En notant c_* une des fonctionnelles c_1 ou c_2, il faut s'assurer que $c_*(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q}) \to c_*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ lorsque $\mathbb{P}_n$ converge étroitement vers $\mathbb{P}$.

C'est l'objet des deux propositions suivantes qui constituent un pivot pour la suite.

Proposition 8.7. — *Soient* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ *une mesure vectorielle à valeurs* $\mathbb{R}_+^d$ *et* $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ *à support fini. Il existe une suite* $\{\mathbb{P}_n\}$ *de mesures à supports finis, convergeant étroitement vers* $\mathbb{P}$ *telles que* $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P}_n)$ *et une suite de mesures optimales* $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n \in \Gamma_n^* \triangleq \Gamma^*(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q})$, *qui converge étroitement vers une mesure optimale* $\gamma \in \Gamma^* \triangleq \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$.

Preuve. — Soient $\gamma^* = Z(\mathbb{P}) \in \Gamma^*$ une mesure optimale et $\{y_p\}$ le support fini de $\mathbb{Q}$; par hypothèse on peut écrire $Z = (Z^1, Z^2) = \sum_p (Z^1, y_p) \mathbb{1}_{A_p}$

Pour chaque couple d'entiers (n, p), notons $\{A_p^k\}$ une partition de A_p en n boréliens de même mesure $\mathbb{P}(A_p^k) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(A_p)$. Puis choisissons dans chaque A_p^k un point x_p^k et soit $\mathbb{P}_n$ la loi de la v.a. $X_n = \sum_{k=1 \cdots n, p} x_p^k \mathbb{1}_{A_p^k}$. Pour obtenir l'existence d'une suite $\left\{Z_n = (Z_n^1, Z_n^2)\right\}$ qui converge en mesure vers Z et telle que $Z_n(\mathbb{P}) = \gamma_n^* \in \Gamma^*(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q})$ il suffit de prendre $Z_n \triangleq Z \circ (Id, Id) \circ X_n$.

Le théorème 8.6 assure de l'existence d'une mesure γ_n optimale dans $\Gamma_n^* = \Gamma^*(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q})$ qui est la mesure image de $\mathbb{P}_n$ par (Id, ϕ_n), i.e. $\gamma_n = (Id, \phi_n)(\mathbb{P}_n)$.

La suite $\{\gamma_n\}$ est relativement compacte pour la convergence étroite.

En effet, la suite $\{\mathbb{P}_n\}$ converge et la méthode assurant la compacité de $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ s'applique. En prenant éventuellement une sous-suite, on peut supposer que $\{\gamma_n\}$ converge étroitement vers γ qui, clairement, appartient à $\Gamma(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$. Or comme $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, il résulte du théorème de Skorohod que $\gamma \in \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$.

Les relations :

$$E_{|\gamma_n|}[c] \to E_{|\gamma|}[c], \; E_{|\gamma_n^*|}[c] \to E_{|\gamma^*|}[c] \; \text{ et } \; E_{|\gamma_n|}[c] \leqslant E_{|\gamma_n^*|}[c]$$

montrent que $E_{|\gamma|}[c] \leqslant E_{|\gamma^*|}[c]$. Avec l'optimalité de γ^*, on obtient $E_{|\gamma|}[c] = E_{|\gamma^*|}[c]$, autrement dit, la mesure γ est optimale. □

La proposition suivante est le « pendant » de la proposition 8.7 lorsque $\mathbb{Q}_n$ tend vers $\mathbb{Q}$.

Proposition 8.8. — *Soit* $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ *un couple de mesures vectorielles,* $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ *et* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$*. Il existe une suite de mesures à supports finis,* $\{\mathbb{Q}_n\} \subset *(\mathbb{P})$ *et une suite de mesures optimales* $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n \in \Gamma_n^* \triangleq \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q}_n)$, *qui converge étroitement vers une mesure optimale* γ *appartenant à* $\Gamma^* \triangleq \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$.

Preuve. — Soit $\gamma^* = Z(I\!\!P)$ une mesure optimale de $\Gamma^*(I\!\!P, \mathbb{Q})$, écrivons $Z=(Z^1, Z^2)$.

Il existe une suite de v.a. $\{Y_n\}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et telle que Y_n converge vers l'identité $|\mathbb{Q}|$-p.s.

Introduisons les mesures $\bar{\gamma}_n \stackrel{\Delta}{=} (Id, Y_n) \circ Z(I\!\!P) = (Id, Y_n)(\gamma^*)$ et $\mathbb{Q}_n = Y_n \circ Z^2(I\!\!P) = Y_n(\mathbb{Q})$.

Clairement, $\bar{\gamma}_n(A \times [0,1]) = \gamma^*(A \times [0,1]) = I\!\!P(A)$ et $\bar{\gamma}_n([0,1] \times \{y\}) = \gamma^*([0,1] \times \{Y_n = y\}) = \mathbb{Q}_n(y)$. On en déduit que $\bar{\gamma}_n \in \Gamma_n^*$ et que $\bar{\gamma}_n \to \gamma^*$.

Pour chaque n, prenons une mesure optimale γ_n dans Γ_n^*. Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite $\{\gamma_n\}$ converge étroitement vers γ. Il est évident que $\gamma \in \Gamma^*$, puis comme dans la proposition 8.7, on établit l'inégalité $E_{|\gamma|}[c] \leqslant E_{|\gamma^*|}[c]$. De la même façon on en conclut que γ est optimale, ce qui termine la preuve. □

8.5. Problème de Monge quadratique

Pour résoudre le problème de Monge, la première étape consiste à examiner le petit problème de Monge, puis de passer à la fonctionnelle c_2.

On se donne une fonction de coût c, un couple $(I\!\!P, \mathbb{Q})$ de mesures vectorielles positives définies sur $\mathcal{B}$, $I\!\!P$ diffuse et $\mathbb{Q} \in *(I\!\!P)$. Nous étudions l'existence de

$$\text{Arg inf } \Big\{E_{|I\!\!P|}\big[c(x, Y(x))\big]\Big\} \text{ sous la contrainte } \mathbb{Q} = Y(I\!\!P).$$

Dans le cas classique des probabilités, on a l'unicité des fonctions de Monge, lorsque la fonction de coût est de la forme $c(x,y)=h(x–y)$, $h(0)=0$, h paire et strictement convexe. Les fonctions de Monge sont croissantes pour des probabilités définies sur la tribu borélienne de $I\!\!R$ et cycliquement monotones lorsque les probabilités sont définies sur $\mathcal{B}(I\!\!R^p)$, *cf.* [15], [18] et [24].

Nous allons voir que, pour le cas quadratique, cette situation s'adapte aux mesures vectorielles positives de $\mathcal{P}$ ou de $\mathcal{P}^*$. Les versions monotones jouant le rôle des fonctions croissantes.

Lorsque que $c(x,y)=(x-y)^2$, le petit problème de Monge devient :

$$\text{Argmax } \Big\{E_{|I\!\!P|}\big[tY(t)\big]\Big\} \text{ sous la contrainte } Y(I\!\!P) = \mathbb{Q}.$$

Tandis que le problème de Monge est :

Trouver ϕ, $\phi(I\!\!P)=\mathbb{Q}$ telle que $E_{|I\!\!P|}\big[x\phi(x)\big] \geqslant E_{|\gamma|}[xy]$, $\gamma \in \Gamma(I\!\!P, \mathbb{Q})$

Énonçons le résultat principal de cette partie :

THÉORÈME 8.9. — *Soient* $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ *un couple de mesures vectorielles,* $\mathbb{P}$ *diffuse,* $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ *à support dénombrable et* c *un coût. Alors la fonctionnelle* c_1 *est atteinte.*

Lorsque $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, *la fonctionnelle* c_2 *est atteinte.*

Pour un coût quadratique, toute mesure vectorielle positive $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ *a la propriété du transport optimal unique. En d'autres termes, pour toute mesure vectorielle* $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ *définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *il existe une unique solution,* ϕ, *au problème de Monge :*

$$\mathbb{Q} = \phi(\mathbb{P}), \ E_{|\mathbb{P}|}\big[(x-\phi(x))^2\big] = \inf_{\gamma \in \Gamma^*(\mathbb{P},\mathbb{Q})} \Big\{E_{|\gamma|}\big[(x-y)^2\big]\Big\}.$$

De plus, cette solution est caractérisée par « ϕ est une version monotone de Y, $\mathbb{Q} = Y(\mathbb{P})$. »

Toujours pour un coût quadratique, si $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^*$ *et* $\mathbb{Q} = Y(\mathbb{P})$ *pour une v.a.* $Y \in \mathcal{F}$, *alors il existe aussi une solution au problème de Monge.*

Preuve. — Lorsque $\mathbb{Q} = \sum_1^\infty \alpha_i \delta_{y_i}$, en notant $f_i(x) = c(x, y_i)$, on doit résoudre le problème d'optimisation équivalent suivant :

$$\operatorname*{Arg\,inf}_{\Pi} \Big\{ \sum_1^\infty \int_{A_i} f_i(x) d|\mathbb{P}|(x) \Big\}$$
où les partitions $\Pi = (A_i)$ vérifient $\mathbb{P}(A_i) = \alpha_i$.

Il suffit d'adapter la proposition 3.3 en remplaçant $\overline{m}_f$ par $\underline{m}(\phi) = \sum E_{|\mathbb{P}|}[\phi_i c(x, y_i)]$ et le sup. par l'inf. On obtient une partition optimale $\Pi = (A_i)$, et la v.a. $Y = \sum y_i \mathbb{1}_{A_i}$ est de loi $\mathbb{Q}$. C'est une solution au petit problème de Monge pour le couple $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$, $\mathbb{P}$ diffuse et $\mathbb{Q}$ à support dénombrable.

Une adaptation simple de la proposition 3.3 nous assure que pour X fixé, il existe Y_X telle que $Y_X(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ et $E_{|\mathbb{P}|}\big[c(X, Y_X)\big] \leqslant E_{|\mathbb{P}|}\big[c(X, Y)\big]$, $Y(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$.

Prenons une suite $\{(X_n, Y_n)\}$ telle que $(X_n, Y_n)(\mathbb{P}) = \gamma_n \in \Gamma^*$ et $E_{|\mathbb{P}|}\big[c(X_n, Y_n)\big]$ décroît vers l'inf. L'argument précédent montre que l'on peut choisir $Y_n = Y_{X_n}$.

Supposons $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, le théorème de Skorohod s'applique : il existe une suite formée par (X'_n, Y'_n) de loi γ_n qui converge en mesure vers (X, Y) de loi $\gamma \in \Gamma^*$. Ce qui permet de voir que ce couple (X, Y) est optimal.

Passons au cas quadratique.

Lorsque $\mathbb{Q}$ est à support dénombrable, la solution au petit problème de Monge est la version monotone, voir les propositions 3.3 et 5.11.

Ainsi pour obtenir la solution au petit problème de Monge pour $\mathbb{Q} \in *(\mathbb{P})$ il suffit d'approcher $\mathbb{Q}$ par une suite $\{\mathbb{Q}_n\}$ à support dénombrable et considérons une suite de versions monotones solutions du petit problème de Monge.

Le théorème de Skorohod 5.10, assure la convergence en mesure de cette suite vers une version monotone ϕ de loi $\mathbb{Q}$. Cette v.a. est la solution au petit problème de Monge.

Il suffit maintenant de prouver que la solution au problème presque-optimal est solution au problème de Monge.

– Reprenons le cas $\mathbb{Q}$ à support fini.

Pour y appartenant au support de $\mathbb{Q}$, notons A_y l'ensemble $\{\phi = y\}$ où ϕ est presque-optimale pour le couple $(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$. On peut trouver une suite $\{X_n\}$ de v.a. ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, convergeant vers l'identité $|\mathbb{P}|$-p.s. et telles que $A_y = \{X_n \in A_y\}$, pour tout y. Il en résulte que $\phi \circ X_n = \phi$.

En considérant les mesures images, $\mathbb{P}_n \triangleq X_n(\mathbb{P})$, on obtient les relations $\mathbb{Q}(y) = \mathbb{P}(A_y) = \mathbb{P}_n\big(\{\phi = y\}\big)$ et donc $\mathbb{P}\big(\{\phi > y\}\big) = \mathbb{P}_n\big(\{\phi > y\}\big)$.

Ceci permet de voir que ϕ est une fonction presque-optimale pour $\mathbb{P}_n$.

En effet, si $\mathbb{Q} = Z(\mathbb{P}_n)$, alors $E_{|\mathbb{P}_n|}\big[c(x, \phi(x))\big] \leqslant E_{|\mathbb{P}_n|}\big[c(x, Z(x))\big]$.

Le théorème 8.6 assure que ϕ est optimale pour $\Gamma^*(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q})$ et nous avons vu l'égalité des deux ensembles $\Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ et $\overline{\Gamma^*}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$. Par ailleurs, avec la proposition 8.7, il existe $\gamma \in \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ optimale, limite étroite de mesures optimales $\gamma_n \in \Gamma^*(\mathbb{P}_n, \mathbb{Q})$.

Ainsi, avec les considérations précédentes, nous pouvons écrire :

$$\gamma_n = (Id, \phi)(\mathbb{P}_n) = (X_n, \phi \circ X_n)(\mathbb{P}) = (X_n, \phi)(\mathbb{P}).$$

La convergence p.s. des X_n permet de passer à la limite et d'obtenir $\gamma = (Id, \phi)(\mathbb{P})$, i.e. ϕ est optimale. Ceci termine la preuve pour une mesure $\mathbb{Q}$ à support fini.

– Levons la restriction sur le support de $\mathbb{Q}$.

La proposition 8.8 montre qu'il existe $\gamma \in \overline{\Gamma^*}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ optimale, limite de mesures optimales $\gamma_n \in \Gamma^*(\mathbb{P}, \mathbb{Q}_n)$, où $\mathbb{Q}_n$ est à support fini. Comme dans la partie précédente, écrivons $\gamma_n = (Id, \phi_n)(\mathbb{P})$ où ϕ_n est monotone. Le théorème de Skorohod, théorème 5.10, prouve que la suite $\{\phi_n\}$ converge $|\mathbb{P}|$-p.s. vers une fonction ϕ monotone. L'unicité de la version monotone justifie que ϕ est bien la fonction obtenue auparavant dans le cas presque-optimal. Ainsi, $\gamma = (Id, \phi)(\mathbb{P})$ et le support de cette mesure optimale est un graphe. Ceci achève la première partie du théorème.

La partie relative à $\mathcal{P}^*$ est une adaptation de la preuve précédente. $\square$

Remarques 8.10. — Ce théorème s'étend aux mesures définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Il nous suffit de monter que la preuve du transport presque-optimal reste valide pour $\mathbb{R}$.

La relation $\displaystyle\int_0^1 m(\{\phi \geqslant y\})dy = \mathbb{E}_{|\mathbb{P}|}\big[t\phi(t)\big]$, utilisée pour caractériser les fonctions presque-optimales nécessite $\phi \geqslant 0$. C'est le cas lorsque $\mathbb{Q}$ est définie sur $\mathcal{B}([0,1])$.

Le passage à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ ne pose pas de problèmes.

Lorsque le support de $\mathbb{Q}$ a une partie dans $\mathbb{R}_-$ on procède de la façon suivante :

Si le support de $\mathbb{Q}$ est fini, notons $\mathbb{Q}_a$ une mesure translatée de $\mathbb{Q}$ dont le support est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Les deux problèmes d'optimisations : Arginf $\Big\{E_{|\mathbb{P}|}\big[(x - Y(x))^2\big],\ \mathbb{Q} = Y(\mathbb{P})\Big\}$ et Arginf $\Big\{E_{|\mathbb{P}|}\big[(x - Y(x))^2\big],\ \mathbb{Q}_a = Y(\mathbb{P})\Big\}$, se déduisent l'un de l'autre par $\phi_a(x) = \phi(x) + a$.

Nous laissons au lecteur le soin de poursuivre, en adaptant la méthode utilisée juste avant.

– L'adaptation du théorème 8.9 aux mesures définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, $p > 1$ reste en suspend.

À ce sujet, rappelons que, pour le problème de Monge classique, lorsque les probabilités sont définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$, $p > 1$, la condition P diffuse est insuffisante. Il faut la remplacer par une condition plus stricte comme $P \ll \lambda$ ou P ne chargeant pas les hypersurfaces (qui est une condition nécessaire et suffisante), *cf.* [7] et [15].

9. Extensions et problèmes liés

9.1. Cas des espaces Polonais

L'adaptation des parties 2 à 6 aux espaces polonais se fait selon la procédure classique en utilisant « l'isomorphisme » entre un espace polonais et $[0,1]$, voir par exemple [11]. Ainsi les théorèmes 5.10 et 6.3 s'adaptent sans problèmes particuliers.

9.2. Mesures images

Nous avons vu les difficultés introduites par la « caractérisation » des mesures « images » i.e. reconnaitre si une mesure $\mathbb{Q}$ est l'image de $\mathbb{P}$ par une v.a. X.

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante à ce problème.

PROPOSITION 9.1. — *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures vectorielles positives à valeurs $\mathbb{R}^d$, toutes deux définies sur $\mathcal{B}([0,1])$. Il existe une v.a. $X : [0,1] \to [0,1]$ telle que $X(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$ si et seulement si, les mesures ont même masse et il existe une suite $\{a_n\}$ dense dans $[0,1]$, une suite $\{A_n\}$ de boréliens telles que si, $0 \leqslant a_n \leqslant a_m \leqslant 1$, alors $A_n \subset A_m$ et $\mathbb{Q}([0, a_n[) = \mathbb{P}(A_n)$.*

Preuve. — Lorsque $\mathbb{Q} = X(\mathbb{P})$ il suffit de prendre $A_n = \{X < a_n\}$ pour obtenir le résultat.

Réciproquement ; considérons le cas de la suite définie par $\{a_n\} = \{a_n^k\}$ où $a_n^k = \dfrac{k}{2^n}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, $1 \leqslant n$. Par hypothèse, il existe un borélien A_n^k tel que $\mathbb{Q}\big([0, \dfrac{k}{2^n}[\big) = \mathbb{P}(A_n^k)$. Notons I_n^k l'intervalle $[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}[$, $0 \leqslant k < 2^n$, on peut alors définir par récurrence une suite $\{B_k^n\}$ telle que :

$$B_k^n \bigcap B_j^n = \emptyset \text{ si } k \neq j \text{ et } \mathbb{Q}(I_k^n) = \mathbb{P}(B_k^n), B_n^k = B_{n+1}^{2k} \cup B_{n+1}^{2k+1}, \text{ tout } k \in [0, 2^n[.$$

La suite de variables $\Big\{X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \dfrac{k}{2^n} \mathbb{1}_{B_n^k}\Big\}$ est croissante et converge vers une v.a. X. Il est aisé de vérifier que $\big\{X_n(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}_n\big\}$, que cette suite de mesures vectorielles converge étroitement vers $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} = X(\mathbb{P})$.

Le cas général se déduit en remarquent que toute suite $\{a_n\}$ dense dans $[0,\ 1]$ s'écrit sous la forme $\{a_n^k\}$ avec $0 \leqslant k < 2^n$, $1 \leqslant n$, $a_n^k < a_n^{k+1}$, $a_{n+1}^{2k} = a_n^k$. En fait il s'agit d'une simple renumérotation convenable de la suite. La procédure appliquée à la suite « dyadique » s'applique et achève la preuve. □

La condition de la proposition précédente peut se formuler ainsi :

« *Il existe une famille de boréliens* $\{A_a\}$ *telle que si* $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, *alors* $A_a \subset A_b$ *et* $\mathbb{Q}([0,\ a]) = \mathbb{P}(A_a)$. »

Toujours dans la proposition 9.1, il est équivalent de dire :

« *Il existe une suite* $\{a_n\}$ *dense dans* $[0,1]$ » et « *Pour toute suite* $\{a_n\}$ *dense dans* $[0,1]$. »

9.3. Problèmes de Monge

La partie 8-5 utilise les simplifications du cas quadratique, grâce à la notion de version monotone. Même lorsque le coût est de la forme $c(x,y) = h(x–y)$, h strictement convexe paire, on ne peut pas adapter cette méthode : Le cas général est plus complexe.

– La caractérisation des fonctions de Monge est obtenue uniquement dans de cas d'un coût quadratique. Sauf dans des exemples simples, la détermination effective de ces fonctions parait difficilement accessible par algorithmes. C'est d'ailleurs le cas pour des probabilités définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$.

– Le passage au transport optimal (problème de Monge) reste ouvert, ainsi que la convergence $\mathbb{P}$-p.s. ou en mesure des fonctions presque-optimales.

– Une approche possible est d'envisager l'unicité de ϕ lorsque $c(x,y) = h(x-y)$, h paire et strictement convexe, ce qui permettrait d'utiliser le théorème de Skorohod.

– Une méthode consiste à utiliser une propriété de dualité analogue au cas réel :

$$\inf\Big\{E_\gamma[c],\ \gamma \in \Gamma(P,Q)\Big\} = \sup\Big\{E_P[f] + E_Q[g],\ f(x) + g(y) \leqslant c(x,y)\Big\}.$$

Dans le cas unidimensionnel, on déduit de cette relation qu'une fonction optimale est le gradient d'une fonction convexe et de là on obtient l'unicité, *cf.* [7], [9], [15], [23] et [24].

– L'article [6] donne une version vectorielle de ce théorème de dualité mais le cadre est bien éloigné de notre travail. Cela ne donne pas de renseignements complémentaires.

Poursuivre dans cette voie, même pour le cas quadratique, constitue un autre travail.

Bibliographie

[1] Arcudi (O.). — Convergence of conditional expectations given the radom variables of a Skorohod representation. Statistics & Probability Letters, 40, p. 1-8 (1998).

[2] Billingsley (P.). — Probability and Measure. Wiley, New York (1986).

[3] Birkhoff (G.). — Lattice theory. AMS Colloquim publ., 25 (1979).

[4] Blackwell (D.), Dubins (L.E.). — An extension of Skorohod's almost sure representation theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 89, p. 691-692 (1983).

[5] Bourbaki (N.). — Éléments de Mathématiques. Livres V et VI. Hermann (1983).

[6] Ballve (M. E.), Jimenez Guerra (P.), Muñoz (N. J.). — The Mass-Transfert Vector Problem. Applied Mathematics Letters, 13, p. 37-44 (2000).

[7] Belili (N.), Heinich (H.). — Mass transport problem and derivation. Appl. Mathematicae. 23, 3, p. 299-314 (1999).

[8] Belili (N.), Heinich (H.). — Approximation of distributions. Statistics & Probability Letters, 76, p. 298-303 (2006).

[9] Brenier (Y.). — Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 305, p. 329-343 (1987).

[10] Cuesta-Albertos (J. A.), Matrán (C.), Rachev (S.T.), Rüschendorf (L.). Mass transportation problems in probability theory. Math. Scientist, 21, p. 34-72 (1996).

[11] Dellacherie (C.), Meyer (P.A). — Probabilités et potentiel. Herman, Paris (1983).

[12] Diestel (J.), Uhl (J. J.). — Vector measures. A. M. S. Surveys 15 (1977).

[13] Dinculeanu (N.). — Vector measures. Pergamon Press (1967).

[14] Dudley (R. M.). — Distances of probability-measures and random variables. Ann. Math. Stat., 39, p. 1563-1572 (1968).

[15] Gangbo (W.), McCann (R. J.). — The geometry of optimal transportation. Acta. Math., 177, p. 113-161 (1996).

[16] Heinich (H.), Lootgieter (J.-C.). — Convergence des fonctions monotones. C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, 322, 869-874 (1996).

[17] Heinich (H.). — The Monge Problem in Banach spaces. Journal of Theoretical Probability. 19, p. 509-534 (2006).

[18] Knott (M.), Smith (C. S.). — On a generalization of cyclic monotonicity and distances among random vectors. Linear Algebra Appl., 199, p. 367-371 (1994).

[19] Lehman (E. L.). — Testing Statistical Hypotheses. Wiley, New-York (1959).

[20] Major (P.). — On the Invariance Principe for sums of I.I.D. random variables. Journal of Multivariate Analysis, 8, p. 487-517 (1978).

[21] Monge (G.). — Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. Histoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les mémoires de Mathématiques et de Physique, p. 257-263 (1781).

[22] Rachev (S. T.), Rüschendorf (L.). — Mass transportation problems. Springer, New York (1998).

[23] Rockafellar (R. T.). — Convex Analysis. Princeton University Press (1972).

[24] Rüschendorf (L.). — Fréchet-bounds and their applications. Advances in Probability Measures with given marginals. Eds G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti. Kluwer Acad. Publ. p. 151-188 (1991).

[25] Skorohod(A.V.). — Limit theorems for stochastic processes. Theory Probab. Appl., 1, p. 261-290 (1956).