

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

ELIE COMPOINT, ANNE DUVAL

Groupe de Galois différentiel local et représentation adjointe

Tome XVI, n° 2 (2007), p. 229-246.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_2_229_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Groupe de Galois différentiel local et représentation adjointe^(*)

ÉLIE COMPOINT⁽¹⁾, ANNE DUVAL⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Dans cet article on s'intéresse à la représentation adjointe du tore exponentiel sur l'algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel local. Nous proposons un algorithme pour réduire les sous-espaces poids de dimension supérieure à 1 à des sous-espaces de racines. Ce faisant, on construit un tore (en général) maximal qui contient le tore exponentiel. Au cours de ce travail on est amené à étudier la régularité du tore exponentiel dans le groupe de Galois local.

ABSTRACT. — In this article we study the adjoint representation of the exponential torus on the Lie algebra of the local differential Galois group. We develop an algorithm to reduce the weight subspaces of dimension higher than 1 to root subspaces. To this purpose, we construct a (generally) maximal torus containing the exponential torus. We also study the regularity of the exponential torus in the local differential Galois group.

1. Introduction

Soit $Y' = AY$ un système différentiel linéaire à coefficients dans le corps $k = \mathbf{C}(\{z\})$ des séries méromorphes convergentes et soit G son groupe de Galois différentiel (local). Un théorème de J.-P. Ramis ([7] Th. 6 ou [11] Th.8.10) assure que G est l'adhérence de Zariski du groupe engendré par le tore exponentiel T_e , la monodromie formelle et les opérateurs de Stokes. On dispose aussi (mêmes références) d'une description de l'action adjointe du tore T_e sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Cependant, même dans le cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple, cette description ne permet pas de caractériser \mathfrak{g} car en général le tore exponentiel n'est pas un tore maximal de G . En particulier les sous-espaces poids \mathfrak{g}_a ($a \in X(T_e)$ et $a \neq 1$) qui interviennent dans cette décomposition peuvent avoir une dimension strictement plus grande que 1. Dans cet article nous nous proposons, dans

(*) Reçu le 5 septembre 2005, accepté le 9 février 2006.

(1) Laboratoire Paul Painlevé, UMR-CNRS 8524, U.F.R. de Mathématiques, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
compoint@math.univ-lille1.fr, duval@math.univ-lille1.fr

le cas semi-simple, de «faire grossir» le tore exponentiel de façon à «casser» les sous-espaces poids (pour T_e) en somme directe de sous-espaces poids de dimension 1 (pour le plus gros tore). Au bout d'un nombre fini p d'étapes on obtient une sous-algèbre abélienne \mathfrak{h}_p contenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(T_e)$ du tore exponentiel et dont la représentation adjointe s'écrit : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(\mathfrak{h}_p) \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}$ où chaque \mathfrak{g}_{α} est un sous-espace de racine de \mathfrak{g} , et est donc de dimension 1. En général $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{h}_p)$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} sauf éventuellement dans une configuration particulière (voir remarque 3.4 section 3). On aura ainsi obtenu, en général, la représentation adjointe d'une algèbre de Cartan de \mathfrak{g} qui caractérise l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Si le tore exponentiel est un tore régulier de G , on est certain d'éviter le cas particulier évoqué ci-dessus, et à l'issue du processus on obtient donc la représentation adjointe d'une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On est donc naturellement amené à étudier la régularité du tore exponentiel dans le groupe de Galois local. On donne une condition nécessaire et suffisante portant sur les éléments de \mathfrak{g} pour que le tore exponentiel soit régulier dans G (proposition 4.7). On obtient en particulier que si les facteurs déterminants du système différentiel sont deux à deux distincts, alors le tore exponentiel est un tore régulier de G .

L'une des motivations de ce travail se trouve dans la recherche de générateurs du groupe de Weyl W de G . Soit T un tore maximal de G contenant le tore exponentiel T_e et soit R le système de racines de \mathfrak{g} relatif au tore T . On sait que si \mathfrak{g}_{α} est un sous-espace de racine de \mathfrak{g} , associé à la racine $\alpha \in R$, on peut effectivement déterminer un élément w_{α} de G tel que w_{α} appartienne au normalisateur $N_G(T)$ de T dans G , et dont l'image \bar{w}_{α} dans le quotient $\frac{N_G(T)}{T} \simeq W$ s'identifie à la réflexion par rapport à α ([4] ex.23.22). On obtient de la sorte un système de générateurs du groupe de Weyl : $W = \langle \bar{w}_{\alpha} \rangle_{\alpha \in R}$. D'où l'intérêt d'obtenir des sous-espaces poids de dimension 1 pour l'action adjointe sur \mathfrak{g} du tore exponentiel «grossi» si nécessaire.

Si l'on veut appliquer concrètement notre méthode, il faut connaître les générateurs du groupe de Galois différentiel donnés par le théorème de Ramis. Le tore exponentiel et la monodromie formelle se calculent aisément mais, en général, on ne sait pas calculer les opérateurs de Stokes. Pour certaines familles d'opérateurs ce calcul a pu être mené à son terme : [3] et [8] s'ajoutent aux cas classiques des équations d'Airy, de Bessel ou de Kummer. Cependant, même lorsque les matrices de Stokes sont déterminées et donc une famille complète de générateurs topologiques de G connue, l'identification précise de \mathfrak{g} est loin d'être immédiate. Aussi la règle du jeu que nous adoptons, à savoir la connaissance des générateurs topologiques de G , ne fait pas du jeu qu'est la détermination de la représentation adjointe de \mathfrak{g} , un jeu sans intérêt.

Enfin toute avancée dans le problème direct, i.e. le calcul du groupe de Galois G , ou dans l'étude de la structure du groupe de Galois ou de son algèbre de Lie, peut offrir des perspectives intéressantes pour le problème inverse. On notera à ce sujet que la stratégie de [2] pour le problème inverse ne permet pas de résoudre certains cas qui concernent des algèbres de Lie semi-simples (de type B_l , E_8 , F_4 ou G_2).

C'est sous cette hypothèse de semi-simplicité que nous nous plaçons dans tout cet article. Nous ne connaissons pas de critère permettant de déterminer si, dans le cas local, une équation différentielle linéaire admet une algèbre de Lie semi-simple. En revanche la proposition 3.2 de [2] permet de déterminer si l'équation différentielle admet pour algèbre de Lie, une algèbre de Lie semi-simple donnée. Dans le cas local, il n'existe même aucun critère permettant de décider si \mathfrak{g} est réductive, à la différence du cas global (où le corps de base est le corps $\mathbf{C}(z)$ des fractions rationnelles) pour lequel il existe des algorithmes permettant de décider si \mathfrak{g} est réductive ([10]). La résolution de cette question de la réductivité de \mathfrak{g} dans le cas local aurait des conséquences déterminantes, aussi bien pour le problème direct que pour le problème inverse ([2]).

Le plan de l'article est le suivant. Dans une première partie nous décrivons la représentation adjointe du tore exponentiel sur l'algèbre de Lie en nous basant sur des résultats de Ramis. Dans la seconde partie nous présentons une méthode pour «grossir» l'algèbre de Lie du tore exponentiel afin de réduire les sous-espaces poids en somme directe de sous-espaces de racines de \mathfrak{g} . Enfin dans la troisième partie nous étudions la régularité du tore exponentiel T_e dans le groupe de Galois différentiel G .

EXEMPLE 1.1. — Nous illustrerons les résultats sur l'exemple de l'équation hypergéométrique confluyente $D_{6,2}$ qui fait partie de la famille étudiée dans [3] et [8] :

$$D_{6,2} = x\left(x\frac{d}{dx} + \mu_1\right)\left(x\frac{d}{dx} + \mu_2\right) - \prod_{j=1}^6\left(x\frac{d}{dx} + \nu_j - 1\right)$$

où les paramètres complexes $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ et $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_6)$ sont supposés vérifier les deux conditions : $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbf{Z}$ (condition de non résonance) et

$|\underline{\nu}| = \sum_{j=1}^6 \nu_j \in \mathbf{Z}$. Cette équation à coefficients rationnels a deux singularités :

0 qui est une singularité régulière et ∞ qui est une singularité irrégulière. On constate alors que le groupe de Galois différentiel (sur le corps $\mathbf{C}(x)$) coïncide avec le groupe de Galois local en ∞ . C'est ce groupe local qui nous sert d'illustration en faisant le changement de variable $z = \frac{1}{x}$. La condition

imposée à \underline{y} assure que le groupe de Galois est un sous-groupe algébrique de $SL(6, \mathbf{C})$.

2. Représentation adjointe de l'algèbre de Lie de G

On suppose le lecteur familier avec la théorie de Galois différentielle, et l'on renvoie à [11] pour les définitions et les propriétés des principaux objets de cette théorie. Rappelons, en particulier, que l'on peut au choix partir d'un système différentiel $Y' = AY$ où $A \in M_n(k)$ ou d'une équation différentielle linéaire d'ordre n , $Ly = 0$, à coefficients dans le corps k . On note G son groupe de Galois différentiel et on suppose que son algèbre de Lie \mathfrak{g} est semi-simple.

Le système différentiel $Y' = AY$ admet une matrice fondamentale de solutions (formelles) du type :

$$Y = F(z)z^L e^{Q(t)} \quad (\star)$$

où $F \in GL_n(\mathbf{C}((z)))$ est une matrice inversible de séries formelles, $L \in gl_n(\mathbf{C})$ est une matrice à coefficients constants, t est une ramification de la variable z , i.e. il existe $\nu \in \mathbf{N}^*$ tel que $t^\nu = z$ et $Q(t) = \text{diag}(q_1(t), \dots, q_n(t))$ est une matrice diagonale où chaque $q_i(t)$ est un polynôme en $\frac{1}{t}$ sans terme constant. L'ensemble $\mathcal{D} = \{q_i\}$ est de cardinal inférieur ou égal à n (les q_i peuvent être répétés) et ses éléments sont les *facteurs déterminants* du système différentiel.

EXEMPLE 2.1. — A partir des résultats de [3] on montre que $D_{6,2}$ admet une base de solutions (écrite en ligne) donnée par

$$(f_1(x), \dots, f_6(x)) = (\hat{h}_1(x), \dots, \hat{h}_6(x))x^L e^{Q(t)}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{h}_1(x) &= {}_6F_1(1 + \mu_1 - \nu_1, \dots, 1 + \mu_1 - \nu_6; 1 + \mu_1 - \mu_2; \frac{1}{x}) \\ \hat{h}_2(x) &= {}_6F_1(1 + \mu_2 - \nu_1, \dots, 1 + \mu_2 - \nu_6; 1 + \mu_2 - \mu_1; \frac{1}{x}) \\ \hat{h}_3(x) &= c_0 + \sum_{m \geq 0} (c_{4m} - i c_{4m+3} - c_{4m+2} + i c_{4m+1}) x^{-(m+1)} \\ \hat{h}_4(x) &= c_0 + \sum_{m \geq 0} (c_{4m} + c_{4m+3} + c_{4m+2} + c_{4m+1}) x^{-(m+1)} \\ \hat{h}_5(x) &= c_0 + \sum_{m \geq 0} (c_{4m} + i c_{4m+3} - c_{4m+2} - i c_{4m+1}) x^{-(m+1)} \\ \hat{h}_6(x) &= c_0 + \sum_{m \geq 0} (c_{4m} - c_{4m+3} + c_{4m+2} - c_{4m+1}) x^{-(m+1)} \end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{8} & -\frac{i+1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{i-1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{i-1}{8} & \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{8} & -\frac{i+1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{i-1}{8} & \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{8} & -\frac{i+1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{i+1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{i-1}{8} & \frac{\lambda}{4} + \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$Q(t) = \text{diag}(0, 0, 4it, -4t, -4it, 4t)$$

où $t = x^{\frac{1}{4}}$, $\lambda = \frac{5}{2} + \mu_1 + \mu_2 - |\underline{z}|$ et $e^{-4t} t^\lambda \sum_{m \geq 0} c_m t^{-m}$ est le développement asymptotique à l'infini dans le secteur $\{\arg t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\}$ de $G_0(t^4)$ où G_0 est la G -fonction de Meijer définie par

$$G_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\prod_{j=1}^6 \Gamma(1 - \nu_j - s)}{\Gamma(1 - \mu_1 - s)\Gamma(1 - \mu_2 - s)} x^s ds$$

où γ est un chemin joignant $-i\infty$ à $+i\infty$ en laissant à sa droite les points $-\nu_j + m$, $j = 1 \cdots 6$ et $m \in \mathbf{N}$.

2.1. Tore exponentiel et monodromie formelle

On suppose fixée une fois pour toutes une base de solutions de la forme (\star) . Le groupe G peut alors être identifié à un sous groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ et \mathfrak{g} à une sous-algèbre de Lie de $gl_n(\mathbf{C})$. On note V le \mathbf{C} -espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice Y (espace des solutions formelles du système ou de l'équation). Si $q \in \mathcal{D}$, on désigne par V_q le sous-espace vectoriel de V formé par les solutions dont le terme exponentiel est e^q . On a donc

$$V = \bigoplus_{q \in \mathcal{D}} V_q. \quad (*)$$

On note $r_q = \dim V_q$.

La *monodromie formelle* γ permute les facteurs déterminants, et agit donc sur l'ensemble des V_q par $:\gamma(V_q) = V_{\gamma(q)}$. Dans la base (\star) elle se représente par la matrice $M = e^{2i\pi L}$ qui vérifie

$$Q(e^{2i\pi/\nu} t) = M^{-1} Q(t) M.$$

Pour décrire l'action du *tore exponentiel* T_e sur V , appelons σ le rang du \mathbf{Z} -module $\bigoplus_{q \in \mathcal{D}} \mathbf{Z}q$. Relativement à la décomposition $(*)$, un élément $\tau \in T_e$ s'écrit :

$$\tau = \bigoplus_{q \in \mathcal{D}} \lambda_q I_{r_q}$$

où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et où les λ_q sont des éléments non nuls de \mathbf{C}^* , parmi lesquels σ sont arbitraires et les autres en sont des fonctions monomiales.

EXEMPLE 2.2. — Le sous-espace V_0 est de dimension 2 et les sous-espaces associés à chacun des 4 autres facteurs déterminants sont de dimension 1. La monodromie laisse fixe le facteur 0 et permute circulairement les autres, autrement dit l'action de γ est donnée par : $\gamma(q)(t) = q(it)$. Dans la base $(f_j(x))$, la matrice de monodromie est

$$M = e^{-2i\pi\mu_1} E_{11} + e^{-2i\pi\mu_2} E_{22} + e^{i\pi\frac{\lambda_1}{2}} (E_{36} + E_{43} + E_{54} + E_{65})$$

et cette matrice vérifie $Q(it) = M^{-1}Q(t)M$.

Le tore exponentiel est de dimension 2 et, toujours dans la même base, s'écrit

$$T_e = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6) \mid \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_5 = \lambda_3^{-1}, \lambda_6 = \lambda_4^{-1}\}$$

Le tore exponentiel T_e agit sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} par adjonction puisque pour tout $\tau \in T_e$ et tout $X \in \mathfrak{g}$, $\tau X = \tau X \tau^{-1} \in \mathfrak{g}$. Sous cette action \mathfrak{g} se décompose en somme directe de sous-espaces poids pour T_e :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(T_e) \oplus \bigoplus_{a \in \chi(T_e) \setminus \{1\}} \mathfrak{g}_a(T_e)$$

où $\mathfrak{g}_0(T_e)$ est le centralisateur de T_e dans \mathfrak{g} , aussi noté $C_{\mathfrak{g}}(T_e)$, et où

$$\mathfrak{g}_a(T_e) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall \tau \in T_e, \tau X \tau^{-1} = a(\tau)X\}$$

est le sous-espace poids associé au caractère non trivial a de T_e .

Comme \mathfrak{g} est supposée semi-simple, on a $\dim \mathfrak{g}_a(T_e) = \dim \mathfrak{g}_{a^{-1}}(T_e)$.

Posons $\mathcal{Q} = \{q = q_i - q_j \mid q_i, q_j \in \mathcal{D}, q_i \neq q_j\}$. Selon [7] p. 361, \mathcal{Q} s'identifie à $\chi(T_e)$ en associant à $q = q_i - q_j \in \mathcal{Q}$, le caractère de T_e défini par

$$\tau = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto a(\tau) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$$

On fera généralement cette identification et on notera \mathfrak{g}_q le sous-espace poids correspondant à $q \in \mathcal{Q}$.

Pour $q \in \mathcal{Q}$, notons $I_q = \{(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid q_i - q_j = q\}$. Le résultat suivant est clair.

LEMME 2.3. — *Pour tout $q \in \mathcal{Q}$, l'espace vectoriel \mathfrak{g}_q est de dimension inférieure ou égale au cardinal de I_q .*

2.2. Les dérivées étrangères

Tout réel d définit une direction, encore notée d , de la surface de Riemann du logarithme. Une direction d est dite *singulière* s'il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que e^q ait une décroissance maximale dans la direction d . On écrit alors $d \in Fr(q)$. Si d est une direction singulière $d + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) est également une direction singulière. Modulo 2π il y a un nombre fini de directions singulières. A toute direction singulière d est associée une *matrice de Stokes* $St_d = (c_{ij})$ ([7] lemme 17 et théorème 16). Cette matrice vérifie $c_{ii} = 1$ et, si $i \neq j$, $c_{ij} \neq 0$ implique $q_i - q_j = q \in \mathcal{Q}$ et $d \in Fr(q)$. C'est une matrice unipotente dont le logarithme $st_d = (s_{ij})$ est un élément nilpotent de \mathfrak{g} , également appelé *dérivée étrangère* dans la direction d et noté $\dot{\Delta}_d$.

Pour $d \in Fr(q)$, posons $\dot{\Delta}_{d,q} = (\delta_{ij})$ avec $\delta_{ij} = s_{ij}$ si $(i, j) \in I_q$ et $\delta_{ij} = 0$ si $(i, j) \notin I_q$.

Pour $d \notin Fr(q)$, posons $\dot{\Delta}_{d,q} = 0$. Avec ces notations, on a

$$\dot{\Delta}_d = \bigoplus_{q \in \mathcal{Q}} \dot{\Delta}_{d,q}.$$

Pour tout $\tau = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in T_e$, on a, si $q = q_i - q_j \in \mathcal{Q}$,

$$\tau \dot{\Delta}_{d,q} \tau^{-1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \dot{\Delta}_{d,q}$$

de sorte que $\dot{\Delta}_{d,q}$, appelée dérivée étrangère de poids q dans la direction d , appartient à \mathfrak{g}_q . Si elle est non nulle, c'est un vecteur propre pour l'action adjointe de T_e sur \mathfrak{g} .

La monodromie γ agit aussi sur \mathcal{Q} par $\gamma(q_i - q_j) = \gamma(q_i) - \gamma(q_j)$. On en déduit $\gamma(Fr(d)) = Fr(d - 2\pi)$ et ([11] p.267) :

$$M \dot{\Delta}_{d,q} M^{-1} = \dot{\Delta}_{d-2\pi, \gamma(q)}. \quad (m)$$

EXEMPLE 2.4. — Les directions singulières sont $d = k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. On a $Fr(0) = \{-4t, -8t\}$ et les formules explicites de [3] pour S_0 et S_π permettent d'établir

$$\dot{\Delta}_0 = \dot{\Delta}_{0,-4t} + \dot{\Delta}_{0,-8t}$$

avec

$$\dot{\Delta}_{0,-4t} = \alpha_1 E_{41} + \alpha_2 E_{42} + \beta_1 E_{16} + \beta_2 E_{26} \quad \text{et} \quad \dot{\Delta}_{0,-8t} = u E_{46}$$

où les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et u en fonction des paramètres sont données dans [3]. Remarquons que $D_{6,2}$ est irréductible si et seulement si $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \neq 0$.

De même, $Fr(\pi) = \{4(i-1)t\}$ et, pour des constantes A_1 et B_1 données dans [3], on a

$$\dot{\Delta}_\pi = \dot{\Delta}_{\pi,4(i-1)t} = A_1 E_{45} + B_1 E_{36}.$$

Les autres dérivées étrangères s'en déduisent par la formule (m). On constate que $\dot{\Delta}_{2\pi,8it} = uE_{35}$, $\dot{\Delta}_{4\pi,8t} = uE_{64}$, $\dot{\Delta}_{6\pi,-8it} = uE_{53}$ et que $\dot{\Delta}_{3\pi,4(i+1)t} = A_1 E_{34} + B_1 E_{65}$, $\dot{\Delta}_{5\pi,-4(i-1)t} = A_1 E_{63} + B_1 E_{54}$ et $\dot{\Delta}_{7\pi,-4(i+1)t} = A_1 E_{56} + B_1 E_{43}$. Pour ces poids les autres directions singulières redonnent ensuite ces mêmes valeurs.

D'autre part

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{2\pi,4it} &= \alpha_1 \theta_1^{-1} E_{31} + \alpha_2 \theta_2^{-1} E_{32} + \beta_1 \theta_1 E_{15} + \beta_2 \theta_2 E_{25} \\ \dot{\Delta}_{4\pi,4t} &= \alpha_1 \theta_1^{-2} E_{61} + \alpha_2 \theta_2^{-2} E_{62} + \beta_1 \theta_1^2 E_{14} + \beta_2 \theta_2^2 E_{24} \\ \dot{\Delta}_{6\pi,-4it} &= \alpha_1 \theta_1^{-3} E_{51} + \alpha_2 \theta_2^{-3} E_{52} + \beta_1^3 \theta_1 E_{13} + \beta_2 \theta_2^3 E_{23} \end{aligned}$$

avec

$$\theta_1 = e^{i\pi(2\mu_1 + \frac{1}{2})} \quad \text{et} \quad \theta_2 = e^{i\pi(2\mu_2 + \frac{1}{2})}.$$

Mais cette fois, sous l'action de M , on obtient, génériquement, d'autres dérivées étrangères puisque, si $Fr(2n\pi) = \{q_n, 2q_n\}$, alors

$$\dot{\Delta}_{2n\pi,q_n} = \alpha_1 \theta_1^{-n} E_{r_n 1} + \alpha_2 \theta_2^{-n} E_{r_n 2} + \beta_1 \theta_1^n E_{1s_n} + \beta_2 \theta_2^n E_{2s_n}$$

où, en notant \bar{n} (resp. $\bar{\bar{n}}$) le représentant dans $\{0, 1, 2, 3\}$ (resp. $\{-2, -1, 0, 1\}$) de la classe de n modulo 4, on a $r_n = 4 - \bar{\bar{n}}$ et $s_n = 6 - \bar{n}$.

Pour $q \in \mathcal{Q}$, notons \mathfrak{e}_q le sous-espace de \mathfrak{g}_q engendré par les $\dot{\Delta}_{q,d}$ avec $d \in Fr(q)$. On voit facilement que,

1. si $u \neq 0$, alors pour $q \in \{-8t, 8it, 8t, -8it\}$, $\mathfrak{e}_q = \mathfrak{g}_q$ est de dimension 1,
2. si A_1 ou B_1 n'est pas nul, alors pour $q \in \{4(i-1)t, 4(i+1)t, -4(i-1)t, -4(i+1)t\}$, \mathfrak{e}_q est de dimension 1 alors que $\dim \mathfrak{g}_q \leq 2$,
3. génériquement si $q \in \{-4t, 4it, 4t, -4it\}$, $\mathfrak{e}_q = \mathfrak{g}_q$ et c'est un espace de dimension 4. C'est par exemple le cas si la condition (Θ) suivante est réalisée :

$$(\theta_2^4 - \theta_1^4)(\theta_1^{-4} - \theta_2^4)(\theta_2^{-4} - \theta_1^{-4})(\theta_1^{-4} - \theta_1^4)(\theta_2^{-4} - \theta_2^4)(\theta_2^{-4} - \theta_1^4) \neq 0.$$

2.3. Le tore de monodromie et le tore formel

Soient M_s et M_u les parties semi-simple et unipotente de la monodromie formelle : $M = M_s M_u = M_u M_s$. Soit $m_u \in \mathfrak{g}$ le logarithme de M_u . Soit $D = \overline{\langle M_s \rangle}$ le sous-groupe algébrique de G engendré par M_s . Le groupe D est diagonal et donc s'écrit sous la forme : $D = T_m \times F$ où T_m est le tore égal à la composante neutre de D , et F est un sous-groupe cyclique fini de D ([5] p.104). Soit $M_s = bc = cb$ la décomposition de M_s correspondante, $b \in T_m$ et $c \in F$.

Le sous-groupe $\langle b \rangle$ engendré par b est Zariski dense dans le tore T_m , et le groupe fini $\langle c \rangle$ est isomorphe au quotient G/G^0 de G par sa composante neutre G^0 (Proposition 16 de [7]).

EXEMPLE 2.5. — La matrice de monodromie formelle M de l'équation D_{62} est semi-simple (parce qu'on a supposé $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbf{Z}$). Donc $M_s = M$, $M_u = I$ et $m_u = 0$. D'autre part, compte-tenu de l'hypothèse faite sur $\underline{\lambda}$ et de la valeur de λ , on a

$$M^4 = e^{-8i\pi\mu_1} E_{11} + e^{-8i\pi\mu_2} E_{22} + e^{2i\pi(\mu_1+\mu_2)} (E_{33} + E_{44} + E_{55} + E_{66}).$$

Si μ_1 , μ_2 et $\mu_1 + \mu_2$ sont non rationnels tous les trois, on en déduit que T_m est le tore de dimension 2 :

$$T_m = \{diag(s_1, s_1^{-1} s_2^{-4}, s_2, s_2, s_2, s_2) \mid s_1, s_2 \in \mathbf{C}^*\}.$$

Si parmi les trois nombres μ_1 , μ_2 et $\mu_1 + \mu_2$ exactement deux sont non rationnels, le tore T_m est de dimension 1 égal à

- $\{diag(s_1, s_1^{-1}, 1, 1, 1, 1) \mid s_1 \in \mathbf{C}^*\}$ si $\mu_1 + \mu_2 \in \mathbf{Q}$,
- $\{diag(s_2^{-4}, 1, s_2, s_2, s_2, s_2) \mid s_2 \in \mathbf{C}^*\}$ si $\mu_2 \in \mathbf{Q}$,
- $\{diag(1, s_2^{-4}, s_2, s_2, s_2, s_2) \mid s_2 \in \mathbf{C}^*\}$ si $\mu_1 \in \mathbf{Q}$

Enfin si μ_1 et μ_2 sont tous deux rationnels, T_m est trivial.

2.4. Le centralisateur du tore exponentiel

Commençons par rappeler la version « algèbre de Lie » du théorème de Ramis. Soit $\mathfrak{L}(T_m)$ l'algèbre de Lie du tore T_m et $\mathfrak{L}(T_e)$ l'algèbre de Lie du tore exponentiel T_e . Soit $T_f = T_m \times T_e$ le *tore formel*, dans la terminologie de Ramis ([9] et notes inédites) et soit $\mathfrak{L}(T_f) = \mathfrak{L}(T_m) + \mathfrak{L}(T_e)$ son algèbre de Lie. On note \mathfrak{R} la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par les dérivées étrangères $(\dot{\Delta}_{d,q})_{q \in \mathbf{Q}, d \in Fr(q)}$. Elle est appelée *algèbre résurgente* dans [7], en référence aux travaux de J. Ecalle.

PROPOSITION 2.6 (RAMIS). —

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(T_m) + \mathfrak{L}(T_e) + \mathbf{C}m_u + \mathfrak{R} = \mathfrak{L}(T_f) + \mathbf{C}m_u + \mathfrak{R}$$

EXEMPLE 2.7. — Ajoutons aux informations données précédemment que $\mathfrak{L}(T_f) = \mathfrak{L}(T_m) \oplus \mathfrak{L}(T_e)$. Lorsque T_m est de dimension 2, $\mathfrak{L}(T_f) = \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \rangle$ avec $\tau_1 = E_{11} - E_{22}$, $\tau_2 = E_{33} - E_{55}$, $\tau_3 = E_{44} - E_{66}$ et $\tau_4 = E_{33} + E_{44} - 2E_{22}$. Lorsque T_m est de dimension 1, on a en posant aussi $\tau'_4 = E_{33} + E_{44} - 2E_{11}$,

$$\mathfrak{L}(T_f) = \begin{cases} \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, \rangle & \text{si } \mu_1 + \mu_2 \in \mathbf{Q} \\ \langle \tau_2, \tau_3, \tau_3, \tau'_4 \rangle & \text{si } \mu_2 \in \mathbf{Q} \\ \langle \tau_2, \tau_3, \tau_4 \rangle & \text{si } \mu_1 \in \mathbf{Q} \end{cases}$$

Le résultat suivant donne une description, en termes des objets introduits ci-dessus, du centralisateur dans \mathfrak{g} du tore exponentiel et servira de point de départ à la construction proposée au paragraphe suivant.

PROPOSITION 2.8. —

$$\mathfrak{g}_0(T_e) = \mathfrak{L}(T_m) + \mathfrak{L}(T_e) + \mathbf{C}m_u + \sum_{q \in \mathcal{Q}} [\mathfrak{g}_q, \mathfrak{g}_{-q}]$$

Démonstration [D'après Ramis]. — Le tore T_e étant abélien, on a $\mathfrak{L}(T_e) \subset \mathfrak{g}_0(T_e)$. Comme M est un élément du normalisateur $N_G(T_e)$ du tore exponentiel dans G ([8] lemme 1.9), on a également $M_s \in N_G(T_e)$ et $M_u \in N_G(T_e)$ ([5] p.99). Il existe un entier non nul ℓ tel que $M_u^\ell \in N_G(T_e)^0 = C_G(T_e)^0 = C_G(T_e)$ ([5] p.106 et p.140). Comme M_u est unipotente, on a $\overline{\langle M_u \rangle} = \overline{\langle M_u^\ell \rangle} (=1 \text{ ou } \mathbf{C})$ ([5] p.96). Par conséquent $M_u \in C_G(T_e)$ et $m_u \in \mathfrak{g}_0(T_e)$. De même il existe un entier ℓ' non nul tel que $M_s^{\ell'} \in C_G(T_e)$. Soit $D' = \overline{\langle M_s^{\ell'} \rangle}$. On a $D' \subset D^0$ et $D' \subset C_G(T_e)$. Comme D' est d'indice fini dans D^0 , et que D' et D^0 sont connexes on a $D^0 = D' \subset C_G(T_e)$. Ainsi $\mathfrak{L}(T_m) \subset \mathfrak{g}_0(T_e)$. Si q et q' sont deux caractères non triviaux du tore exponentiel (identifiés à deux éléments de \mathcal{Q}), alors $[\mathfrak{g}_q, \mathfrak{g}_{q'}] \subset \mathfrak{g}_{q+q'}$, d'où $[\mathfrak{g}_q, \mathfrak{g}_{-q}] \subset \mathfrak{g}_0(T_e)$. Ceci prouve l'inclusion $\mathfrak{L}(T_m) + \mathfrak{L}(T_e) + \mathbf{C}m_u + \sum_{q \in \mathcal{Q}} [\mathfrak{g}_q, \mathfrak{g}_{-q}] \subset \mathfrak{g}_0(T_e)$.

Prouvons à présent l'inclusion inverse. Soit $h \in \mathfrak{g}_0(T_e)$ et soit

$$h = t + \lambda m_u + r$$

avec $t \in \mathfrak{L}(T_f)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $r \in \mathfrak{R}$ sa décomposition selon la proposition 2.6. Comme t et m_u appartiennent à l'algèbre $\mathfrak{g}_0(T_e)$, on en déduit que

$r \in \mathfrak{g}_0(T_e)$. Or le crochet $[X, Y]$ de deux éléments, $X \in \mathfrak{g}_q$ et $Y \in \mathfrak{g}_{q'}$, est un élément de $\mathfrak{g}_0(T_e)$ si et seulement si $q' = -q$; donc l'élément r de \mathfrak{R} appartient à $\mathfrak{g}_0(T_e)$ si et seulement si $r \in \sum_{q \in \mathcal{Q}} [\mathfrak{g}_q, \mathfrak{g}_{-q}]$. \square

3. Des sous-espaces poids aux sous-espaces de racines

Le tore exponentiel n'est pas toujours un tore *maximal* du groupe de Galois. C'est le cas en particulier chaque fois que le tore formel est strictement plus gros que le tore exponentiel : dans l'exemple de l'équation $D_{6,2}$, $T_f \neq T_e$ sauf si μ_1 et μ_2 sont rationnels. La non-maximalité de T_e peut se traduire d'une autre façon. Les sous-espaces poids \mathfrak{g}_q ($q \in \mathcal{Q}$) n'ont aucune raison d'être de dimension 1. C'est ce qui se passe dans l'exemple $D_{6,2}$, sauf peut-être, pour des valeurs particulières des paramètres, lorsque $q \notin \{\pm 8t, \pm 8it\}$. On présente maintenant une procédure pour décomposer ces sous-espaces poids en somme directe de sous-espaces de racines de \mathfrak{g} . Nous énonçons le résultat pour la représentation adjointe $Ad : S \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$ d'un tore S de G sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} : Ad(s)(X) = sXs^{-1}$. Le même résultat s'applique à la représentation adjointe $ad : \mathfrak{h} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ d'une sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g} : ad(H)(X) = [H, X]$.

PROPOSITION 3.1. — *Soit T un tore de G , soit a un poids non trivial pour la représentation adjointe de T sur \mathfrak{g} , et soit $\mathfrak{g}_a(T)$ le sous-espace poids correspondant. On suppose que \mathfrak{g} est semi-simple et que $\dim \mathfrak{g}_a > 1$. Alors il existe un élément semi-simple H_a dans $[\mathfrak{g}_a(T), \mathfrak{g}_{a^{-1}}(T)]$ dont la restriction à $\mathfrak{g}_a(T)$ admet deux valeurs propres distinctes.*

Démonstration. — Chaque sous-espace poids, intervenant dans la décomposition de \mathfrak{g} sous l'action adjointe de T , est stable sous le centralisateur $C_{\mathfrak{g}}(T)$ de T dans \mathfrak{g} . En particulier $\mathfrak{g}_a(T)$ est stable sous l'action adjointe de la sous-algèbre $[\mathfrak{g}_a(T), \mathfrak{g}_{a^{-1}}(T)]$, dont on démontre comme dans la Proposition 2.8 qu'elle est incluse dans $C_{\mathfrak{g}}(T)$. Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(T)$ de T . On a : $\mathfrak{L}(T) \subset \mathfrak{h} \subset C_{\mathfrak{g}}(T)$. On note \bar{a} le poids de l'algèbre $\mathfrak{L}(T)$ correspondant au poids a du groupe T . C'est un élément non nul du dual $\mathfrak{L}(T)^*$ de $\mathfrak{L}(T)$, et pour tout X de $\mathfrak{g}_a(T)$ et pour tout $t \in \mathfrak{L}(T)$ on a : $[t, X] = \bar{a}(t)X$. Le sous-espace $\mathfrak{g}_a(T)$ est donc stable sous l'action adjointe de \mathfrak{h} , et comme \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan, ce sous-espace se décompose en une somme directe de sous-espaces de racines de \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g}_a(T) = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_r}$$

où $r = \dim \mathfrak{g}_a(T)$, les α_i sont des éléments du système de racines $R(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{g} associé au choix de la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et \mathfrak{g}_{α_i} désigne le sous-espaces

de racine associé à la racine α_i . Comme $\mathfrak{L}(T) \subset \mathfrak{h}$ on a, par définition des sous-espaces poids, $\alpha_1|_{\mathfrak{L}(T)} = \dots = \alpha_r|_{\mathfrak{L}(T)} = \bar{a}$, où $\alpha_i|_{\mathfrak{L}(T)}$ représente la restriction de α_i à la sous-algèbre $\mathfrak{L}(T)$ de \mathfrak{h} . Comme \bar{a} est non nul, on en déduit que si $i \neq j$ alors $\alpha_i \neq -\alpha_j$ et on a par définition $\alpha_i \neq \alpha_j$. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$ on désigne par H_{α_i} l'unique élément de la droite vectorielle $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}]$ tel que $\alpha_i(H_{\alpha_i}) = 2$, et on choisit $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ et $Y_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ de sorte que la sous-algèbre $\{X_{\alpha_i}, H_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i}\}$ soit un sl_2 -triplet ([4] p.200). Comme $\alpha_i \neq \pm\alpha_j$, on en déduit ([4] p.320) que $\alpha_i(H_{\alpha_j}) \neq 2$ ou $\alpha_j(H_{\alpha_i}) \neq 2$.

Supposons par exemple que $\alpha_j(H_{\alpha_i}) \neq 2$. Alors $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{g}_a(T)$ et $X_{\alpha_j} \in \mathfrak{g}_{\alpha_j} \subset \mathfrak{g}_a(T)$ sont deux vecteurs propres pour H_{α_i} associés à des valeurs propres $\alpha_i(H_{\alpha_i}) = 2$ et $\alpha_j(H_{\alpha_i}) \neq 2$ qui sont distinctes. L'élément $H_{\alpha_i} \in [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] \subset [\mathfrak{g}_a(T), \mathfrak{g}_{a^{-1}}(T)]$ convient donc. \square

Cette proposition, utilisée récursivement, conduit à la procédure algorithmique que nous décrivons ci-dessous.

PROCÉDURE

Soit T un tore dont on fait agir l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}(T)$ sur \mathfrak{g} par adjonction.

Étape 0. On écrit la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(T) \bigoplus_{a \in \chi(T) \setminus \{1\}} \mathfrak{g}_a(T).$$

1. Si pour tout $a \in \chi(T) \setminus \{1\}$, $\dim \mathfrak{g}_a(T) = 1$, la procédure s'arrête.
2. S'il existe a tel que $\dim \mathfrak{g}_a(T) = r > 1$ on passe à l'étape suivante qui sera éventuellement exécutée plusieurs fois.

Étape 1. Soit $a \in \chi(T) \setminus \{1\}$ tel que $\dim \mathfrak{g}_a(T) > 1$. On choisit $H_a \in [\mathfrak{g}_a(T), \mathfrak{g}_{a^{-1}}(T)]$ comme dans la proposition 3.1. On pose

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}(T) \oplus \mathbf{C}H_a$$

et on fait agir par adjonction cette sous-algèbre abélienne sur \mathfrak{g} . Cette action laisse stable chaque sous-espace poids pour l'action de T . Le sous-espace (stable) $\mathfrak{g}_a(T)$ se décompose en une somme directe de $m > 1$ sous-espaces poids pour \mathfrak{L}_1 :

$$\mathfrak{g}_a(T) = \mathfrak{g}_{b_1}(\mathfrak{L}_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{b_m}(\mathfrak{L}_1)$$

où $b_1|_{\mathfrak{L}(T)} = \cdots = b_m|_{\mathfrak{L}(T)} = \bar{a}$ et $1 \leq \dim \mathfrak{g}_{b_i}(\mathfrak{L}_1) < \dim \mathfrak{g}_a(T)$.

La représentation adjointe de \mathfrak{L}_1 sur \mathfrak{g} s'écrit donc sous la forme :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_1) \bigoplus_{b \in \mathfrak{L}_1^*} \mathfrak{g}_b(\mathfrak{L}_1)$$

avec $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_1) \subset \mathfrak{g}_0(T)$ et chaque sous-espace poids de la décomposition précédente se décompose en une somme directe de sous-espaces poids $\bigoplus_b \mathfrak{g}_b(\mathfrak{L}_1)$ pour la « nouvelle » sous-algèbre \mathfrak{L}_1 . Pour l'un au moins des sous-espaces poids de l'étape précédente (à savoir $\mathfrak{g}_a(T)$), on a une décomposition en somme directe avec au moins deux composantes. Si tous les sous-espaces poids $\mathfrak{g}_b(\mathfrak{L}_1)$ sont de dimension 1, alors ce sont des sous-espaces de racines de \mathfrak{g} , et la procédure s'arrête. Sinon on recommence l'étape 1, en utilisant la version « sous-algèbre » de la proposition 3.1.

Comme à chaque étape la dimension de l'un au moins des sous-espaces poids diminue, on est certain d'obtenir au bout d'un nombre fini p d'étapes une décomposition de \mathfrak{g} sous la forme :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_p) \bigoplus_{b \in L_p^*} \mathfrak{g}_b(L_p)$$

avec $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_p) \subset \mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_{p-1}) \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_0(T)$ et chaque sous-espace poids $\mathfrak{g}_b(\mathfrak{L}_p)$ est de dimension 1 et est donc un sous-espace de racine \mathfrak{g}_α de \mathfrak{g} , avec $\alpha \in R(\mathfrak{h})$. On a ainsi pu « casser » les sous-espaces poids initiaux $\mathfrak{g}_a(T)$ en somme directe de sous-espaces de racines.

Nous appliquons cette procédure au tore exponentiel T_e car nous disposons, grâce aux dérivées étrangères, d'une description des sous-espaces poids correspondants. A l'étape 0, la décomposition de départ est

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(T_e) \bigoplus_{q \in \mathcal{Q}} \mathfrak{g}_q.$$

Si $\dim \mathfrak{g}_q > 1$, on peut essayer pour H_q un élément de la forme :

$$[\hat{\Delta}_{d,q}, \hat{\Delta}_{d',-q}] \text{ avec } d \in Fr(q) \text{ et } d' \in Fr(-q).$$

Remarque 3.2. — On peut commencer le procédé en partant du tore formel $T_f = T_m \times T_e$, mais nous ne connaissons pas d'interprétation des vecteurs propres de l'action de T_f sur \mathfrak{g} .

Remarque 3.3. — Dans la procédure décrite, après le premier passage de l'étape 1, on a travaillé sur l'algèbre de Lie plutôt que sur le groupe G , car

rien ne garantit, a priori, que l'on obtienne ainsi des sous-algèbres de Lie algébriques. Par exemple, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}(T_e) \oplus \mathbf{C}H_a$ n'a aucune raison a priori d'être l'algèbre de Lie d'un tore $S \supset T_e$ de G . Cependant il suffit pour cela que l'algèbre de Lie $\mathbf{C}H_a$ soit l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique de G ([1] corollaire 7.7 page 108). Or ici les valeurs propres de H_a sont des entiers ([4] p.200), et on peut en déduire que l'algèbre de Lie $\mathbf{C}H_a$ est algébrique ([1] II.7.3 et corollaire 7.7 page 108). Par conséquent toutes les algèbres de Lie obtenues par le procédé décrit sont algébriques : ce sont les algèbres de Lie de tores qui contiennent le tore exponentiel. La procédure peut donc aussi s'interpréter comme une façon de grossir le tore exponentiel lorsqu'il n'est pas maximal.

A l'issue de la procédure on a décomposé chaque sous-espaces poids pour le tore exponentiel, \mathfrak{g}_q avec $q \in \mathcal{Q}$, en somme directe de sous-espaces de racines. Si $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_p)$ est une sous-algèbre de Cartan (égale à \mathfrak{h}), alors la décomposition obtenue, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_p) \bigoplus_{\alpha \in R(\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$ est la représentation adjointe d'une sous-algèbre de Cartan agissant sur son algèbre de Lie, et on a ainsi obtenu l'ensemble des sous-espaces de racines. On est alors en mesure de décrire le groupe de Weyl. En revanche si $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_p)$ n'est pas une sous-algèbre de Cartan et contient alors \mathfrak{h} strictement, on n'obtient qu'une partie des espaces de racines \mathfrak{g}_α : exactement ceux associés aux racines α qui ne sont pas triviales sur \mathfrak{L}_p (voir section suivante). Cependant ceci ne peut se produire que pour une configuration particulière des racines de \mathfrak{g} . En effet, soit $\beta \in R(\mathfrak{h})$ une racine telle que $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_p)$ et soit $\alpha \in R(\mathfrak{h})$ une racine non triviale sur \mathfrak{L}_p . La restriction de β à \mathfrak{L}_p étant triviale, si $\alpha + \beta$ (respectivement si $\alpha - \beta$) était une racine de \mathfrak{g} , alors les deux sous-espaces de racines $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ et \mathfrak{g}_α (respectivement $\mathfrak{g}_{\alpha-\beta}$ et \mathfrak{g}_α) seraient dans le même sous-espace poids $\mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{L}_p)$. Par définition de p tous les sous-espaces poids obtenus sont de dimension 1, donc $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ ne sont pas racines de \mathfrak{g} . On en déduit que les racines α et β sont orthogonales ([4] p.324). Si L désigne l'ensemble des racines β qui sont triviales sur L_p , alors L est un sous-système de racines de $R(\mathfrak{h})$ tel que $L \perp (R(\mathfrak{h}) \setminus L)$. Ceci ne peut se produire que si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie non simple. Alors :

$$R(\mathfrak{h}) = \bigoplus_{1 \leq i \leq m}^{\perp} R_i$$

où chaque R_i est un système de racines irréductible. Et dans ce cas L doit précisément correspondre, après une éventuelle renumérotation des R_i , à un sous-système du type : $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} R_i$, où $1 \leq r < m$.

Remarque 3.4. — Remarquons enfin que si $\mathfrak{g}_0(T_e)$ est une sous-algèbre de Cartan (alors égale à \mathfrak{h}), on aura nécessairement $\mathfrak{g}_0(\mathfrak{L}_p) = \mathfrak{h}$. On est

donc naturellement amené à étudier le cas où $\mathfrak{g}_0(T_e)$ est une sous-algèbre de Cartan, c'est-à-dire à étudier le cas où le tore exponentiel est *régulier* dans le groupe de Galois différentiel. C'est l'objet du prochain paragraphe.

4. Régularité du tore exponentiel

Dans cette partie G désigne toujours le groupe de Galois différentiel d'une équation différentielle $Ly = 0$ ou d'un système $Y' = A(x)Y$, \mathfrak{g} son algèbre de Lie que l'on suppose semi-simple, et V le \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension n des solutions (formelles) de l'équation ou du système. Pour la commodité du lecteur on rappelle les définitions et quelques propriétés des tores réguliers et singuliers.

DÉFINITION 4.1. — *Un tore S de G est dit régulier si son centralisateur $C_G(S)$ dans G est un tore maximal. Un tore singulier est un tore non régulier.*

Remarque 4.2. — Le centralisateur d'un tore S étant un groupe connexe qui contient tout tore maximal contenant S ([5] p.140), le tore S est régulier dans G si et seulement si son centralisateur $C_G(S)$ est un groupe diagonal.

Soit S un tore singulier de G et soit T un tore maximal de G contenant S . On désigne par R le système de racines de \mathfrak{g} associé au tore maximal T , et par $\mathfrak{L}(T)$ son algèbre de Lie, qui est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

PROPOSITION 4.3. — *Soit G un groupe algébrique et S un tore de G .*

1. ([5] p. 159) *Si G est réductif, $C_G(S)$ est un groupe algébrique réductif.*
2. ([1] p.165) *Le tore S est singulier si et seulement s'il existe une racine $\beta \in R$ telle que $S \subset (\ker \beta)^\circ$.*

On suppose que le tore S est singulier, et on désigne par L l'ensemble des racines qui sont triviales sur S : $L = \{\beta \in R \mid S \subset (\ker \beta)^\circ\}$. Cet ensemble forme un sous-système de racines de R et l'on a le résultat suivant.

PROPOSITION 4.4. — *On suppose toujours G réductif. Si le tore S est singulier, alors*

$$C_{\mathfrak{g}}(S) = \mathfrak{L}(T) \bigoplus_{\beta \in L} \mathfrak{g}_{\beta} \text{ et } S = \bigcap_{\beta \in L} (\ker \beta)^\circ = Z(C_G(S))$$

On donne maintenant une condition suffisante pour que le tore exponentiel soit régulier.

PROPOSITION 4.5. — *Si les facteurs déterminants q_1, \dots, q_n sont deux à deux distincts, alors le tore exponentiel est régulier dans G .*

Démonstration. — On reprend les notations de la section 2 et on désigne par $v = (v_1, \dots, v_n)$ une base de l'espace des solutions V adaptée à la décomposition : $V = \bigoplus_{i=1}^r V_{q_i}$, c'est-à-dire, puisque les q_i sont deux à deux distincts, que $V_{q_i} = \mathbf{C}v_i$.

Soit T un tore maximal de G contenant le tore exponentiel T_e . Comme T et T_e commutent, on a $T(V_{q_i}) = V_{q_i}$. On peut donc choisir une base adaptée v qui diagonalise le tore maximal T . Dans cette base, les éléments de T s'écrivent sous la forme : $diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$ où les μ_i sont des scalaires et ceux de T_e sous la forme $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i , deux à deux distincts, sont des fonctions monomiales de $\sigma = \dim T_e$ d'entre eux. Soient χ_1, \dots, χ_n les fonctions coordonnées définies sur l'ensemble des matrices diagonales : $\chi_i(diag(c_1, \dots, c_n)) = c_i$. Les poids de T agissant sur $sl(V)$ sont les $\chi_{ij} := \frac{\chi_i}{\chi_j}$. Par conséquent les racines de \mathfrak{g} relativement au tore maximal T sont parmi les χ_{ij} , $i \neq j$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, pour toute racine $\alpha = \chi_{ij}$ de \mathfrak{g} on a $\alpha|_{T_e} \neq 1$ et, d'après le 2) de la proposition 4.3, le tore T_e est régulier dans G . \square

Remarque 4.6. — Si le tore exponentiel est régulier, alors $\mathfrak{g}_0(T_e) = C_{\mathfrak{g}}(T_e)$ est une sous-algèbre de Cartan, et donc tous ses éléments doivent être semi-simples. En particulier, on doit avoir $M_u = 1$. Ainsi un tore exponentiel régulier entraîne une monodromie formelle semi-simple. C'est le cas dans l'exemple de l'équation $D_{6,2}$ bien que la condition nécessaire ci-dessus ne soit pas remplie. Pour les équations hypergéométriques confluentes D_{qp} , la condition est réalisée si et seulement $p = 0$ ou 1 . Dans le cas de l'équation $D_{6,2}$, la condition (Θ) assure que $\mathfrak{g}_{-4t} = Vect(E_{41}, E_{42}, E_{16}, E_{26})$ et $\mathfrak{g}_{4t} = Vect(E_{14}, E_{24}, E_{61}, E_{62})$, de sorte que $\mathfrak{g}_0(T_e)$ contient par exemple l'élément non semi-simple $E_{12} = [E_{16}, E_{62}]$. A fortiori, le tore T_e n'est donc pas régulier.

PROPOSITION 4.7. — *Le tore exponentiel T_e est régulier si et seulement s'il existe une base de $V = \bigoplus_{i=1}^s V_{q_i}$ adaptée à cette décomposition dans laquelle toute matrice de \mathfrak{g} , écrite $X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}$ où, si on pose $r_i = \dim V_{q_i}$, la matrice X_{ij} est de taille $r_i \times r_j$, vérifie : les s matrices X_{ii} sont diagonales.*

Démonstration. — Supposons T_e régulier. Soit alors $T = C_G(T_e)$ le tore maximal contenant T_e . Si les facteurs déterminants sont distincts, chaque V_{q_i} est de dimension 1 et il n'y a rien à prouver. Supposons donc par exemple que $\dim V_{q_1} = 2$, le cas général se traiterait de façon analogue. On choisit une base adaptée qui diagonalise T . On va montrer que, s'il existait un élément $Y = (c_{ij}(Y)) \in \mathfrak{g}$ avec $c_{12}(Y) \neq 0$, alors il existerait un élément Z non nul de \mathfrak{g} pour lequel $c_{12}(Z) \neq 0$, et tel que pour tout $\tau \in T$, $\tau Z \tau^{-1} = \chi_{12}(\tau)Z$. Cet élément Z ne peut alors appartenir au tore T dont les éléments sont tous diagonaux dans la base considérée, donc en particulier $c_{12}(t) = 0$ pour tout $t \in T$. On en déduit que χ_{12} n'est pas trivial sur T (sans quoi $Z \in C_{\mathfrak{g}}(T) = T$), et donc χ_{12} est une racine de \mathfrak{g} . Comme T_e agit scalairement sur V_{q_1} , on a : $T_e \subset \ker \chi_{12}$. On obtiendra ainsi la contradiction cherchée d'après la proposition 4.3.

Soit donc $Y = \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij} E_{ij}$ un élément de \mathfrak{g} vérifiant $c_{12} \neq 0$.

Sur son algèbre de Lie, l'action adjointe de T s'écrit :

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(T) \bigoplus_{(u,v)} \mathfrak{g}_{uv}$$

où \mathfrak{g}_{uv} est l'espace de racine associé à la racine χ_{uv} . Puisque c_{12} est non nul, l'écriture de Y associée à cette décomposition comporte un vecteur X_{12} propre pour T et associé au poids χ_{12} . Plus précisément on a

$$X_{12} = \bigoplus_{\{(i,j) \mid \frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\}} c_{ij} E_{ij}$$

Si la restriction de χ_{12} au tore T était triviale, alors le vecteur non nul X_{12} commuterait avec T , et par maximalité du tore T , X_{12} serait un élément de l'algèbre de Lie de T , ce qui n'est pas le cas puisque l'algèbre de Lie de T est constituée d'éléments diagonaux dans la base choisie. Donc χ_{12} n'est pas trivial sur le tore T , et c'est donc une racine de \mathfrak{g} relativement à T . Comme annoncé en début de preuve, on obtient la contradiction voulue grâce à la proposition 4.3 et en remarquant que $T_e \subset \ker \chi_{12}$.

Réciproquement, le centralisateur $C_{\mathfrak{g}}(T_e)$ de T_e dans \mathfrak{g} laisse stable les sous-espaces propres V_{q_1}, \dots, V_{q_s} de T_e . L'hypothèse signifie donc qu'il existe une base adaptée à la décomposition correspondante de V , dans laquelle les éléments de $C_{\mathfrak{g}}(T_e)$ sont diagonaux : le groupe $C_{\mathfrak{g}}(T_e)$ est un groupe diagonal, et le tore T_e est donc un tore régulier de G (Remarque 4.6). \square

On pourrait aussi déduire de cette proposition la non régularité du tore exponentiel de l'équation $D_{6,2}$ sous la condition (Θ) .

Remarque 4.8. — Si W est un sous-espace de V on désigne par $Stab_G(W)$ le stabilisateur dans G de W . On vérifie aisément que

$$C_G(T_e) = \bigcap_{i=1}^s Stab_G(V_{q_i})$$

On en déduit, à l'aide de la *Remarque 4.6*, la conséquence suivante.

COROLLAIRE 4.9. — *Le tore exponentiel est régulier si et seulement si le groupe $\bigcap_{i=1}^s Stab_G(V_{q_i})$ est diagonal.*

Remerciements : Pendant une partie de la préparation de cet article le premier auteur était invité à l'Institut de Mathématiques de Jussieu (Paris), dans l'équipe de Théorie des Nombres.

Bibliographie

- [1] BOREL (A.). — Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag, Second Edition, 1991.
- [2] COOK (W.J.), MITSCHI (C.), SINGER (M.F.). — On the Constructive Inverse Problem In Differential Galois Theory, *Comm. in Algebra*, 33/10, p. 3639-3665 (2005).
- [3] DUVAL (A.), MITSCHI (C.). — Matrices de Stokes et groupe de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées, *Pacific J. Math.*, 138, p. 25-56 (1989).
- [4] FULTON (W.), HARRIS (J.). — Representation Theory, Springer, New-York, 1991.
- [5] HUMPHREYS (J.E.). — Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag, Berlin, Third Printing, 1987.
- [6] LODAY-RICHAUD (M.). — Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 44, p. 849-906 (1994).
- [7] MARTINET (J.), RAMIS (J.-P.). — Elementary acceleration and multisummability *Ann. I.H.P., série A, Physique théorique*, 54, p. 1-71 (1991).
- [8] MITSCHI (C.). — Differential Galois groups of confluent generalized hypergeometric equations: an approach using Stokes multipliers, *Pacific J. Math.*, 176, p. 365-405 (1996).
- [9] RAMIS (J.-P.). — About the inverse problem in differential Galois theory: the differential Abhyankar conjecture, in Braaksma and al. ed., *the Stokes Phenomenon and Hilbert 16th Problem*, der Put ed., World Scientific, 1996.
- [10] SINGER (M.F.). — Testing Reducibility of Linear Differential Operators: A Group Theoretic Perspective, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 7, p. 77-104 (1996).
- [11] VAN DER PUT (M.), SINGER (M.F.). — Galois Theory of Linear Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 2003.