Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 135 (2016), 63–89
DOI 10.4171/RSMUP/135-4

Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec le vent horizontal

H. Belhireche (∗) – M. Z. Aissaoui (∗∗) – F. Ellaggoune (∗∗∗)

Abstract – We consider the integro-differential equation describing the coagulation processus of water drops falling in the air in a three-dimensional domain with presence of a horizontal wind. Under suitable hypothesis and some conditions we prove the existence of the stationary solution and then the global solution using the techniques developed in [10] and [2].

Résumé – On considère l'équation integro-différentielle décrivant le processus de coagulation des gouttelettes en chute dans l'air dans un domaine tridimensionnel en présence d'un vent horizontal. Lors des hypothèses convenables et quelques conditions on montre l'existence de la solution stationnaire ainsi que la solution globale en utilisant les techniques développées dans [10] et [2].

Mathematics Subject Classification (2010). 35Q35, 76N10.

Keywords. Equation of air motion, integro-differential equation, global solution.

(∗) *Indirizzo dell'A.*: Hanane Belhireche, Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation, Université 8 mai 1945, Guelma, P.O. Box 401, Guelma 24000, Algérie
E-mail: hanane.belhireche@gmail.com

(∗∗) *Indirizzo dell'A.*: Mohamed Zine Aissaoui, Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation, Université 8 mai 1945, Guelma, P.O. Box 401, Guelma 24000, Algérie
E-mail: aissaouizine@gmail.com

(∗∗∗) *Indirizzo dell'A.*: Fateh Ellaggoune, Laboratoire de Mathématiques Appliquées et de Modélisation, Université 8 mai 1945, Guelma, P.O. Box 401, Guelma 24000, Algérie
E-mail: fellaggoune@gmail.com

1. Introduction

Nous considérons l'équation qui décrit le déplacement des gouttelettes par la force gravitationnelle et par le vent horizontal ainsi que le processus de coagulation. Du point de vue mathématique, il s'agit de l'équation de type Smoluchowski (voir [17], [13], [18]) avec le déplacement des gouttelettes déterminé par leur masse ; c'est une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue $\sigma = \sigma(m, t, x, y, z)$ représentant la densité (par rapport au volume de l'air) de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au temps t et au position $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le mouvement de l'air en considération est un vent horizontal dans la direction de l'axe x qui dépend de y (c'est-à-dire $\bar{v} = \bar{v}(y)$). Dans [10] les auteurs ont démontré l'existence de la solution stationnaire en présence d'un vent horizontal constant et dans [2] les auteurs ont démontré l'existence et l'unicité de la solution globale du même équation dans un domaine d'une dimension spatiale. Le présent travail est une généralisation des deux travaux ([10], [2]), plus précisement, on démontre l'existence et l'unicité de la solution globale dans un domaine de trois dimensions spatiales en présence d'un vent horizontal et avec des conditions initiales et des conditions aux limites (conditions d'entrées) dans des espaces convenables.

Du point de vue technique, ce travail utilise les techniques développées dans [10] et [2], en particulier l'introduction de la famille de courbes sur lesquelles on considère l'opérateur intégral de coagulation, et leurs propriétés, et sur la construction de "cône de dépendence" pour la solution.

2. Position du problème

Considérons le domaine $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, qui représente une région horizontale dans laquelle les gouttelettes se déplacent à cause de la force gravitationnelle et avec le vent. Désignons par $\sigma(m, t, x, y, z)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m au point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2\times]0, 1[$ à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous supposons que les gouttelettes subissent le processus de coagulation et en même temps se déplacent par la force gravitationnelle et le mouvement de lair dans lequel elles se trouvent tout en subissant l'effet de frottement avec ce dernier, ces considérations nous amènent à l'équation suivante (voir [1], [2], [15], [10])

$$\begin{aligned} &\partial_t \sigma(m, t, x, y, z) + \nabla_{(x,y,z)} \cdot (\sigma(m, t, x, y, z) u(m)) \\ &= \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m') \sigma(m', t, x, y, z) \sigma(m - m', t, x, y, z)\, \mathrm{d}m' \\ &\quad - m \int_0^\infty \beta(m, m') \sigma(m, t, x, y, z) \sigma(m', t, x, y, z)\, \mathrm{d}m', \end{aligned} \tag{2.1}$$

où

$$\nabla_{(x,y,z)} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z),$$

tandis que $\beta(m_1, m_2)$ représente la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m_1 et une gouttelette de masse m_2 et que $u(m)$ désigne la vitesse des gouttelettes de masse m. On suppose que

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \quad \beta(m_1, m_2) \geq 0, \quad \text{pour } (m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

$$\beta(m_1, m_2) = \beta(m_2, m_1)$$

et nous admettons que $u = u(m)$ est donnée par

$$u = u(m) = \left(\bar{v}(y), 0, -\frac{g}{\alpha(m)}\right) \tag{2.2}$$

avec $\bar{v}(y)$ est la vitesse de l'air, g est une constante positive représentant l'accélération gravitationnelle et $\alpha(m)$ est le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air. La relation (2.2) correspond, dans une bonne approximation, à la vitesse réelle des gouttelettes dans l'atmosphère (voir par exemple [16], [1], [15]).

Comme les petites gouttelettes s'évaporent immédiatement à cause de la courbure très élevée de leur surface (voir [14], [8]) par contre les gouttelettes très grandes se fragmentent à cause de la friction avec l'air environnant, nous considérons que les gouttelettes sont absentes en dehors d'un intervalle $]\overline{m}_a, \overline{m}_A[$. Par conséquent la fonction σ vérifie

$$\sigma(m) = 0 \quad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

Ceci nous permet de définir les fonctions $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot,\cdot)$ tels que

$$0 < \inf_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m) \leq \sup_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m) < \infty$$

et

$$\beta(m_1, m_2) = 0 \quad \text{pour } m_1 + m_2 > \overline{m}_A.$$

Nous posons

$$\bar{\alpha}_0 = \sup_{m \in \mathbb{R}_+} \alpha(m). \tag{2.3}$$

3. Solution stationnaire

On considère l'équation stationnaire issue de (2.1) suivante

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{(x,y,z)} \cdot (\sigma(m,x,y,z)u(m)) \\
&\quad = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',x,y,z)\sigma(m-m',x,y,z)\,\mathrm{d}m' \\
&\quad\quad - m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,x,y,z)\sigma(m',x,y,z)\,\mathrm{d}m'
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

avec la condition aux limites (condition d'entrée)

$$\sigma(m,x,y,1) = \bar{\sigma}(m,x,y). \tag{3.2}$$

3.1 – *Préliminaires*

Pour résoudre l'équation (3.1) avec la condition (3.2), nous allons la transformer en une équation différentielle ordinaire, en introduisant le changement de variables

$$(m,x,y,z) \longmapsto (\tilde{m},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$$

défini par

$$
\begin{cases}
\tilde{m} = m, \\
\xi = x - \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \\
\tilde{y} = y, \\
\tilde{z} = z
\end{cases} \tag{3.3}
$$

(ce changement est introduit par le fait qu'on considère la présence d'un vent horizontal dans la direction de l'axe des x) et définissons

$$\tilde{\sigma}(\tilde{m},\xi,\tilde{y},\tilde{z}) = \sigma(m,x,y,z) = \sigma\Big(m,\xi+\bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z),y,z\Big).$$

Dans la suite, on écrira simplement m, y, z et $\sigma(m,\xi,y,z)$ au lieu de $\tilde{m}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ et $\tilde{\sigma}(\tilde{m},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$; ainsi, l'équation (3.1) se transforme en

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\xi,y,z) \\
&\quad = -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta(m,m',\xi,y,z),y,z) \\
&\qquad\qquad \sigma(m-m',\eta(m,m-m',\xi,y,z),y,z)\,\mathrm{d}m' \\
&\quad\quad + \frac{m\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,\xi,y,z)\sigma(m',\eta(m,m',\xi,y,z),y,z)\,\mathrm{d}m',
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

où

$$\eta(m, m', \xi, y, z) = \xi + \bar{v}(y)\frac{\alpha(m) - \alpha(m')}{g}(1 - z)$$

et la condition (3.2) se transforme en

$$\sigma(m, \xi, y, 1) = \bar{\sigma}(m, \xi, y). \tag{3.5}$$

Par conséquent nous allons réformuler l'équation (3.4) en une équation différentielle ordinaire dans un espace de Banach à définir (où dans un espace de Fréchet). Pour traiter l'opérateur intégral dans un cadre fonctionnel convenable, nous introduisons, pour chaque $y \in \mathbb{R}$ et $z \in [0, 1]$ fixés, la famille de courbes

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau,y,z} = \left\{(m, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \;\middle|\; \xi = \tau - \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1 - z)\right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Cette famille de courbes γ_τ est analogue à celle utilisée dans [10]. Cependant ces dernières dépondent de y.

De manière analogue à [10] on définit une mesure μ_γ sur les courbes γ_τ. Plus précisément, en désignant par $P_{\mathbb{R}_+}$ la projection de γ_τ sur $\mathbb{R}_+$, on définit les ensembles mesurables de γ_τ et la mesure μ_γ sur γ_τ par les relations :

i) $A' \subset \gamma_\tau$ est mesurable si et seulement si $P_{\mathbb{R}_+} A'$ est mesurable selon Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,

ii) $\mu_\gamma(A') = \mu_{L,\mathbb{R}_+}(P_{\mathbb{R}_+} A')$, où $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme les courbes γ_τ, $\tau \in \mathbb{R}$, sont parallèles, on voit que la projection $P_{\mathbb{R}_+}$ et la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ ne dépendent pas de $\tau \in \mathbb{R}$.

On rappelle que la mesure $\mu_\gamma(\cdot)$ a des propriétés analogues à celles démontrées dans [10]. En effet on a les lemmes :

Lemme 3.1. *Soit A un ensemble mesurable* (*selon Lebesgue*) *de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. *On pose*

$$A_\tau = \{m \in \mathbb{R}_+ \mid \textit{il existe } \xi \in \mathbb{R} \textit{ tel que } (m, \xi) \in \gamma_\tau \cap A\},$$

$$A_m = \{\tau \in \mathbb{R} \mid \textit{il existe } \xi \in \mathbb{R} \textit{ tel que } (m, \xi) \in \gamma_\tau \cap A\}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\mu_{L,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}(A) &= \tilde{\mu}(A)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mu_\gamma(A_\tau)\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{\gamma_0}\mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\mu_\gamma(\mathrm{d}m)\\ &= \int_0^\infty \mu_{L,\mathbb{R}}(A_m)\,\mathrm{d}m\end{aligned}$$

(*ici et dans la suite, on note par* $\mathrm{d}m$, $\mathrm{d}\tau$, $\mathrm{d}\xi$ *etc. au lieu de* $\mu_{L,\mathbb{R}_+}(\mathrm{d}m)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(\mathrm{d}\tau)$, $\mu_{L,\mathbb{R}}(\mathrm{d}\xi)$ *etc.*).

LEMME 3.2. *Soit* $\sigma(m,\xi)\in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. *Alors, pour presque tout* $\tau\in\mathbb{R}$ *la restriction de* $\sigma(m,\xi)$ *à* γ_τ *appartient à* $L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$.

LEMME 3.3. *Soit* $\sigma(m,\xi)\in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$. *Alors on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}\sigma(m,\xi)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}\sigma(m,\xi)\,\mathrm{d}\tilde{\mu}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\gamma_\tau}\sigma(m,\xi)\mu_\gamma(\mathrm{d}m)\right)\mathrm{d}\tau\\ &= \int_{\gamma_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(m,\xi(m,\tau))\,\mathrm{d}\tau\right)\mu_\gamma(\mathrm{d}m)\\ &= \int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(m,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}m\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^\infty\sigma(m,\xi)\,\mathrm{d}m\right)d\xi,\end{aligned}$$

où

$$\xi(m,\tau) = \tau - \bar{v}(y)\,\frac{\alpha(m)}{g}(1-z).$$

LEMME 3.4. *Soient* f *et* g *deux fonctions appartenant à* $L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$. *On pose*

$$(f*g)(m) = \int_{\gamma_\tau} f(m-m')g(m')\mu_\gamma(\mathrm{d}m').$$

Alors on a $f*g\in L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)$ *et*

$$\|f*g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)} \le \|f\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}\|g\|_{L^1(\gamma_\tau,\mu_\gamma)}.$$

Pour la démonstration de ces lemmes voir [10].

On pose

$$\tau(m,\xi,y,z) = \xi + \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \quad \gamma_\tau^{[0,m]} = \gamma_\tau \cap [0,m]\times\mathbb{R}. \tag{3.7}$$

On peut alors écrire l'équation (3.4) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F(\sigma(z)), \quad \sigma(z) = \sigma(\cdot,\cdot,\cdot,z) \tag{3.8}$$

avec

(3.9)

$$\begin{aligned}
F(\sigma(z)) &= F(\sigma(z))(m,\xi,y) \\
&= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,y,z)}} \beta(m-m',m')\sigma(m',\eta',y,z) \\
&\qquad\qquad \sigma(m-m',\eta'',y,z)\mu_\gamma(\mathrm{d}m') \\
&\quad + \frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,y,z)}} \beta(m,m')\sigma(m',\eta',y,z)\sigma(m,\xi,y,z)\mu_\gamma(\mathrm{d}m'),
\end{aligned}$$

où η' et η'' sont tels que

$$(m',\eta') \in \gamma_{\tau(m,\xi,y,z)}, \quad (m-m',\eta'') \in \gamma_{\tau(m,\xi,y,z)}.$$

3.2 – *Existence et unicité de la solution stationnaire dans L^1*

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.8) avec la condition (3.5), nous supposons que

$$\bar{\sigma}(\cdot,\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)\cap L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2), \tag{3.10}$$

$$\bar{\sigma}(m,\xi,y) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2, \tag{3.11}$$

$$\mathrm{supp}(\bar{\sigma}) \subset [\bar{m}_a,\bar{m}_A]\times\mathbb{R}^2, \tag{3.12}$$

$$\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\bar{m}_A-\bar{m}_a)}, \tag{3.13}$$

où

$$M_1 = \sup_{\substack{2\bar{m}_a\leq m\leq\bar{m}_A \\ \bar{m}_a\leq m'\leq m-\bar{m}_a}} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'). \tag{3.14}$$

L'inégalité (3.13) signifie que la masse source est petite ce qui est justifié physiquement par le fait que, selon les physiciens, dans un mètre cube on a au plus un gramme d'eau.

On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Si $\bar\sigma(m,\xi,y)$ satisfait aux conditions (3.10)–(3.13), alors l'équation (3.8) avec la condition (3.5) admet unique solution σ vérifiant*

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]). \tag{3.15}$$

Comme dans l'équation (3.8) ni la dérivée ni l'intégrale par rapport à y ne se présentent, l'équation pour chaque $y \in \mathbb{R}$ fixé peut être résolue indépendamment, ce qui nous permet d'envisager le problème (3.8), (3.5) séparément pour chaque $y \in \mathbb{R}$. On pose $\sigma(m,\xi,z) = \sigma(m,\xi,y,z)$, $\bar\sigma(m,\xi) = \bar\sigma(m,\xi,y)$ et on considère $\sigma(\cdot,\cdot,z)$ comme une fonction de z à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ comme pour la proposition 5.1 dans [10]. Donc, pour démontrer la proposition 3.1, il nous convient d'examiner directement l'approximation successive avec laquelle on construit la solution $\sigma(m,\xi,z)$.

Posons

$$\sigma^{[0]}(m,\xi,z) = \bar\sigma(m,\xi)$$

et définissons $\sigma^{[n]}$, $n = 1,2,\cdots$, par les relations

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{[n]} = F(\sigma^{[n-1]}), \quad \sigma^{[n]}(m,\xi,1) = \bar\sigma(m,\xi), \tag{3.16}$$

où $F(\cdot)$ est l'opérateur défini dans (3.9). De (3.16), on déduit que

$$\sigma^{[n]}(m,\xi,z) = \bar\sigma(m,\xi) - \int_z^1 F(\sigma^{[n-1]}(m,\xi,z'))\,\mathrm{d}z'. \tag{3.17}$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie dans la classe*

$$\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \quad 0 \le z \le 1$$

et on a

$$\operatorname{supp}(\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A] \times \mathbb{R} \quad \textit{pour } 0 \le z \le 1,$$

et

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \le \frac{\|\bar\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}}{1-(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\bar\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}(1-z)},$$

pour

$$\frac{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\bar\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}-1}{(M_1+M_2)(\overline{m}_A-\overline{m}_a)\|\bar\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}} < z \le 1,$$

où

$$M_2 = \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m').$$

DÉMONSTRATION. Voir [10]. □

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1. La proposition se démontre de la même manière à la proposition 5.1 dans [10]. □

3.3 – *Existence et unicité de la solution stationnaire dans L^∞*

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.8), (3.5) dans le cas générale, nous allons utiliser la propriété de "cône de dépendance".

Soit ω de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ un ensemble mesurable tel que $0 < \mathrm{mes}(\omega) < \infty$, on définit

$$D[\omega] = \bigcup_{(m,\xi,y)\in\omega} D_{(m,\xi,y)}, \tag{3.18}$$

où

(3.19)

$$\begin{aligned} D_{(m,\xi,y)} &= \bigcup_{0\le z\le 1} \Big(\bigcup_{\tau_-(m,\xi,y,z)\le\tau\le\tau_+(m,\xi,y)} \gamma_{\tau,y,z} \Big) \\ &= \Big\{ (m',\eta',y',z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1] \;\Big|\; \eta' = \tau - \bar v(y')\frac{\alpha(m')}{g}(1-z'), \\ &\qquad y' = y, \\ &\qquad \tau_-(m,\xi,y,z') \le \tau \\ &\qquad\qquad \le \tau_+(m,\xi,y) \Big\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \tau_+(m,\xi,y) = \tau(m,\xi,y,0) = \xi + \bar v(y)\dfrac{\alpha(m)}{g}, \\ \tau_-(m,\xi,y,z) = \tau_+(m,\xi,y) - \bar v(y)\dfrac{\bar\alpha_0}{g}z = \xi + \bar v(y)\dfrac{\alpha(m)}{g} - \bar v(y)\dfrac{\bar\alpha_0}{g}z \end{cases} \tag{3.20}$$

(pour $\bar\alpha_0$ voir (2.3)). On définit également $D_\omega(z)$ par

$$\begin{aligned} D_\omega(z) &= \bigcup_{(m,\xi,y)\in\omega} \Big(\bigcup_{\tau_-(m,\xi,y,z)\le\tau\le\tau_+(m,\xi,y)} \gamma_{\tau,y,z} \Big) \\ &= \{ (m',\eta',y',z') \in D[\omega] \mid z' = z \} \end{aligned} \tag{3.21}$$

c'est-à-dire $D_\omega(z_1)$ est l'intersection de $\bigcup_{(m,\xi,y)\in\omega} D_{(m,\xi,y)}$ et du plan $z = z_1$.

D'après la définition de l'ensemble $D_{(m,\xi,y)}$ on remarque que

$$(m',\eta',y',z') \in D_{(m,\xi,y)} \implies \gamma_{\tau(m',\eta',y',z'),y',z'} \subset D_{(m,\xi,y)},$$
$$\tau(m_1,\xi_1,y,0) = \tau(m_2,\xi_2,y,0) \implies D_{(m_1,\xi_1,y)} = D_{(m_2,\xi_2,y)};$$

par conséquent, si (m_1,ξ_1) et (m_2,ξ_2) se trouvent sur une courbe $\gamma_{\tau,y,0}$, alors ils définissent le même ensemble.

La propriété de "cône de dépendance" est donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.6. *Soient $\bar\sigma^{[1]}$ et $\bar\sigma^{[2]}$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$ satisfaisant aux conditions de la proposition 3.1. Soit $\sigma^{[1]}$ (resp. $\sigma^{[2]}$) la solution de (3.8), (3.5) avec $\bar\sigma = \bar\sigma^{[1]}$ (resp. $\bar\sigma = \bar\sigma^{[2]}$). Si on a*

$$\bar\sigma^{[1]} = \bar\sigma^{[2]} \quad \textit{sur } D_\omega(1), \tag{3.22}$$

alors

$$\sigma^{[1]} = \sigma^{[2]} \quad \textit{p.p. dans } D[\omega].$$

Démonstration. On intègre l'équation (3.8) par rapport à z, on a

$$\begin{aligned}
&\sigma^{[i]}(m,\xi,y,z)\\
&\quad= \bar\sigma^{[i]}(m,\xi,y)\\
&\qquad+ \frac{m\alpha(m)}{2g}\int_z^1\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}} \beta(m-m',m')\sigma^{[i]}(m',\eta',y,z')\\
&\qquad\qquad\qquad \sigma^{[i]}(m-m',\eta'',y,z')\mu_\gamma(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z'\\
&\qquad- \frac{m\alpha(m)}{g}\int_z^1\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}} \beta(m,m')\sigma^{[i]}(m',\eta',y,z')\\
&\qquad\qquad\qquad \sigma^{[i]}(m,\xi,y,z')\mu_\gamma(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z',
\end{aligned}$$

pour $i=1,2$. En faisant la différence de ces équations pour $i=1$ et $i=2$, on a

$$\begin{aligned}
&|\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z) - \sigma^{[2]}(m,\xi,y,z)|\\
&\quad\le |\bar\sigma^{[1]}(m,\xi,y) - \bar\sigma^{[2]}(m,\xi,y)|\\
&\qquad + C_\beta\Big(\int_z^1\int_{\gamma^{[0,m]}_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}} \mathfrak{S}_1\mu_\gamma(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z'\\
&\qquad\qquad + \int_z^1\int_{\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'}} \mathfrak{S}_2\mu_\gamma(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z'\Big),
\end{aligned}$$

où

$$C_\beta = \max\Big[\sup_{0<m'<m<\infty} \frac{m\alpha(m)}{2g}\beta(m-m',m'), \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} \frac{m\alpha(m)}{g}\beta(m,m')\Big]$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 = {} & |\sigma^{[1]}(m-m',\eta'',y,z') - \sigma^{[2]}(m-m',\eta'',y,z')|\sigma^{[2]}(m',\eta',y,z') \\ & + |\sigma^{[1]}(m',\eta',y,z') - \sigma^{[2]}(m',\eta',y,z')|\sigma^{[1]}(m-m',\eta'',y,z'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 = {} & |\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z') - \sigma^{[2]}(m,\xi,y,z')|\sigma^{[2]}(m',\eta',y,z') \\ & + |\sigma^{[1]}(m',\eta',y,z') - \sigma^{[2]}(m',\eta',y,z')|\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z').\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}|\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z) - \sigma^{[2]}(m,\xi,y,z)| \le {} & |\bar\sigma^{[1]}(m,\xi,y) - \bar\sigma^{[2]}(m,\xi,y)| \\ & + C_\beta\Big(\int_z^1 \mathfrak{S}_3\,\mathrm{d}z' + \int_z^1 \mathfrak{S}_4\,\mathrm{d}z'\Big),\end{aligned} \tag{3.23}$$

où

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_3 = {} & \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')} \\ & \quad \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')} \\ & + \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')} \\ & \qquad \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4 = {} & \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')} \\ & \quad \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')} \\ & + (\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')} \\ & \qquad \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,y,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,y,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z')},y,z')}.\end{aligned}$$

Considérons maintenant un point générique (m,ξ,y,z) de $D[\omega]$; en vertu de (3.19)–(3.20) il existe $(m_0,\xi_0,y_0) \in \omega \subset \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}\xi_0 + \bar v(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g} - \bar v(y_0)\frac{\bar\alpha_0}{g}z = {} & \tau_-(m_0,\xi_0,y_0,z) \\ & \le \xi + \bar v(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z) \\ & \le \tau_+(m_0,\xi_0,y_0) \\ & = \xi_0 + \bar v(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g},\end{aligned}$$

et

$$y = y_0.$$

Cette inégalité, jointe à l'inégalité

$$\bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g} \le \bar{v}(y)\frac{\bar{\alpha}_0}{g} < 0,$$

implique que, pour $0 \le z \le z' \le 1$, on a

$$\begin{aligned} \xi_0 + \bar{v}(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g} - \bar{v}(y_0)\frac{\bar{\alpha}_0}{g}z' &\le \xi + \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z') \\ &\le \xi_0 + \bar{v}(y_0)\frac{\alpha(m_0)}{g}, \end{aligned}$$

et

$$y = y_0;$$

en vertu de (3.7) et (3.20), on a

$$\begin{cases} \tau_-(m_0, \xi_0, y_0, z') \le \tau(m, \xi, y, z') \le \tau_+(m_0, \xi_0, y_0), \\ y = y_0, \end{cases}$$

ce qui, d'après la définition (3.21) de l'ensemble $D_\omega(z)$, montre que

$$\gamma_{\tau(m,\xi,y,z'),y,z'} \subset D_\omega(z') \quad \text{pour } 0 \le z \le z' \le 1.$$

On rappelle que l'on a en outre, pour $i = 1, 2$,

$$\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,y,z)\|_{L^1(\gamma_{\tau(m,\xi,y,z),y,z};\mu_\gamma)} \le (\overline{m}_A - \overline{m}_a)\|\sigma^{[i]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))}$$

pour presque tout $(m, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$.

De (3.23) on déduit que

$$\begin{aligned} &\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z) - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))} \\ &\quad \le \|\bar{\sigma}^{[1]} - \bar{\sigma}^{[2]}\|_{L^\infty(D_\omega(1))} \\ &\qquad + C\int_z^1 (\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))} + \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}) \\ &\qquad\qquad \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\,\mathrm{d}z', \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de z ; en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

(3.24)
$$\begin{aligned}&\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))}\\ &\quad\le \|\bar\sigma^{[1]}-\bar\sigma^{[2]}\|_{L^\infty(D_\omega(1))}\exp\Big(C\int_z^1(\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))}\\ &\qquad\qquad + \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(D_\omega(z'))})\,\mathrm{d}z'\Big).\end{aligned}$$

Or, en vertu de l'hypothèse (3.22) on a

$$\|\bar\sigma^{[1]}-\bar\sigma^{[2]}\|_{L^\infty(D_\omega(1))}=0,$$

ce qui nous permet de déduire de (3.24) que

$$\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)-\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z)\|_{L^\infty(D_\omega(z))}\le 0$$

et, compte tenu de la relation

$$D[\omega]=\bigcup_{0\le z\le 1}D_\omega(z),$$

on a

$$\sigma^{[1]}(m,\xi,y,z)=\sigma^{[2]}(m,\xi,y,z)\quad \text{p.p. dans } D[\omega].$$

Le lemme est démontré. □

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal.

Théorème 3.1. *Si* $\bar\sigma\in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)$ *satisfait aux conditions*

$$\bar\sigma(m,\xi,y)\ge 0\quad \textit{p.p. sur } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2, \tag{3.25}$$

$$\bar\sigma(m,\xi,y)=0\quad \textit{pour } m\in[0,\overline{m}_a]\cup[\overline{m}_A,\infty[, \tag{3.26}$$

$$\|\bar\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)}<\frac{1}{M_1(\overline{m}_A-\overline{m}_a)}, \tag{3.27}$$

alors l'équation (3.8) *avec la condition* (3.5) *admet unique solution* σ *vérifiant*

$$\sigma\in L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times[0,1])$$

avec

$$\sigma(m,\xi,y,z)\ge 0\quad \textit{p.p. dans } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\times[0,1],$$

$$\sigma(m,\xi,y,z)=0\quad \textit{pour } m\in[0,\overline{m}_a]\cup[\overline{m}_A,\infty[.$$

Démonstration. On considère une famille d'ensembles mesurables et bornés ω_i, $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, définis par

$$\omega_i = \{(m, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,\ -i \leq \xi \leq i,\ -i \leq y \leq i\}. \tag{3.28}$$

La définition (3.18) de $D[\omega]$ nous permet de définir un nombre N tel que

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \overline{m}_a \leq m \leq \overline{m}_A,\\ -i - N \leq \xi \leq i + N,\ -i - 1 \leq y \leq i + 1\}.$$

On considère une fonction $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi_i \geq 0$, telle que

$$\psi_i(\xi, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq i + N \text{ et } |y| \leq i + 1, \\ 0 & \text{si } |\xi| \geq i + N + 1 \text{ et } |y| \geq i + 2, \end{cases}$$

on a alors

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \psi_i(\xi, y) = 1\} \quad \text{pour } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{3.29}$$

Soit la famille d'équations

$$\partial_z \sigma^{[i]}(m, \xi, y, z) = F(\sigma^{[i]}(z))(m, \xi, y), \quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{3.30}$$

(avec $F(\cdot)$ définie dans (3.8)), complétées par la condition

$$\bar{\sigma}^{[i]} = \psi_i\, \bar{\sigma} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2. \tag{3.31}$$

D'après la proposition 3.1, le problème (3.30)–(3.31) admet une solution unique

$$\sigma = \sigma^{[i]} \in C([0, 1]; L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]),$$

telle que

$$\sigma^{[i]} \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1],$$

$$\sigma^{[i]}(m, \xi, y, z) = 0 \quad \text{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

D'autre part, d'après la définition (3.28) des ensembles ω_i, on a

$$D[\omega_i] \subset D[\omega_{i'}] \quad \text{pour } i \leq i',$$

donc en vertu du lemme 3.6 et de (3.31), on a

$$\sigma^{[i]} = \sigma^{[i']} \quad \text{p.p. dans } D[\omega_i] \quad \text{pour } i \leq i'.$$

En définissant σ par

$$\sigma = \begin{cases} \sigma^{[1]} & \text{dans } D[\omega_1], \\ \sigma^{[i]} & \text{dans } D[\omega_i] \backslash D[\omega_{i-1}], \ i = 2, \cdot, \cdot, \cdot, \end{cases}$$

alors on a

$$\sigma = \sigma^{[i]} \quad \text{p.p. dans } D_{\omega_i}(1) \text{ pour } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

et, en vertu de (3.29), de (3.30) et (3.31) on obtient

$$\begin{aligned} \partial_z \sigma(m, \xi, y, z) = F(\sigma(z))(m, \xi, y) \quad & \text{dans } D[\omega_i] \text{ pour } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ \sigma = \sigma^{[i]} = \bar{\sigma} \quad & \text{sur } D_{\omega_i}(1). \end{aligned}$$

En rappelant les relations

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \bigcup_{i=1}^{\infty} D[\omega_i]$$

et

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{\omega_i}(1)$$

qui résultent de la définition de ω_i, $D[\omega_i]$, $D_{\omega_i}(1)$, on peut conclure qu'il existe une solution de (3.8), (3.5) dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1])$. Pour démontrer l'unicité, considérons deux solutions σ_1 et σ_2 avec $\sigma_1 \neq \sigma_2$ sur un ensemble de mesure strictement positive, alors on peut choisir un ensemble mesurable ω tel que

$$0 < \text{mes}(\omega) < \infty$$

et

$$\text{mes}(\{(m, \xi, y, z) \in D[\omega] \mid \sigma_1 \neq \sigma_2\}) > 0.$$

Comme σ_1 et σ_2 sont des solutions de (3.8), (3.5), on a

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\}$$

et en particulier

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1\} \bigcap D[\omega];$$

par conséquent, d'après le lemme 3.6, on a $\sigma_1 = \sigma_2$ dans $D[\omega]$, ce qui prouve qu'il n'est pas possible d'avoir deux solutions σ_1 et σ_2 qui se diffèrent sur un ensemble de mesure strictement positive. L'unicité de la solution est démontrée. □

Pour l'existence et l'unicité de la solution dans les coordonnées (m, x, y, z), on a le théorème suivant.

Théorème 3.2. *Si* $\bar{\sigma} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ *satisfait aux conditions*

$$\bar{\sigma}(m, x, y) \geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,$$

$$\bar{\sigma}(m, x, y) = 0 \quad \textit{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[,$$

$$\|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2)} < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

alors l'équation (3.1) *avec la condition* (3.2) *admet solution unique* σ *vérifiant*

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]),$$

telle que

$$\sigma(m, x, y, z) \geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1],$$

$$\bar{\sigma}(m, x, y, z) = 0 \quad \textit{pour } m \in [0, \overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A, \infty[.$$

Démonstration. On associe au problème (3.1)-(3.2), où la fonction inconnue à chercher est σ, le problème (3.8), (3.5) par une application bijective définis par le changement de variables

$$(m, x, y, z) \longmapsto (\tilde{m}, \xi, \tilde{y}, \tilde{z})$$

introduit dans (3.3) avec

$$\sigma(m, x, y, z) = \tilde{\sigma}\Big(m, \xi + \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1 - z), y, z\Big).$$

Si $\tilde{\sigma}(m, \xi, y, z)$ est la solution du problème (3.8), (3.5) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 3.1, alors, on obtient l'existence et l'unicité de la solution σ du problème (3.1)-(3.2) vérifiant les mêmes conditions. □

4. Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute avec un vent horizontal

Nous allons chercher une fonction $\sigma(m, t, x, y, z)$, qui vérifie l'équation (2.1) avec

$$(m, t, x, y, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$$

avec la conditions aux limites (condition d'entrée) et la condition initiale suivantes

$$\sigma(m,t,x,y,1) = \bar{\sigma}_1(m,t,x,y), \tag{4.1}$$

$$\sigma(m,0,x,y,z) = \bar{\sigma}_0(m,x,y,z). \tag{4.2}$$

De manière analogue au cas stationnaire pour résoudre l'équation (2.1) avec les conditions (4.1)-(4.2), nous allons la transformer en une équation différentielle ordinaire, en introduisant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} \tilde{m} = m, \\ \xi = x - \bar{v}(y)\dfrac{\alpha(m)}{g}(1-z), \\ \tilde{y} = y, \\ \tilde{z} = z, \\ \tilde{t} = t - \dfrac{\alpha(m)}{g}(1-z) \end{cases} \tag{4.3}$$

et la fonction à chercher serait

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{m},\tilde{t},\xi,\tilde{y},\tilde{z}) &= \sigma(m,t,x,y,z) \\ &= \sigma\Big(m, \tilde{t} + \frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \xi + \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), y, z\Big), \end{aligned}$$

on notera par m, y, z et $\sigma(m,\tilde{t},\xi,y,z)$ au lieu de $\tilde{m}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ et $\tilde{\sigma}(\tilde{m},\tilde{t},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$; l'équation (2.1) se transforme en

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(m,\tilde{t},\xi,y,z) = -\frac{m\,\alpha(m)}{2g}\int_0^m \mathfrak{S}_5\,\mathrm{d}m' + \frac{m\,\alpha(m)}{g}\int_0^\infty \mathfrak{S}_6\,\mathrm{d}m', \tag{4.4}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_5 = \beta(m-m',m')&\sigma(m',\tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z),\eta(m,m',\xi,y,z),y,z) \\ &\sigma(m-m',\tilde{t}^*(m,m-m',\tilde{t},z),\eta(m,m-m',\xi,y,z),y,z), \end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}_6 = \beta(m,m')\sigma(m,\tilde{t},\xi,y,z)\sigma(m',\tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z),\eta(m,m',\xi,y,z),y,z),$$

où

$$\begin{cases} \tilde{t}^*(m,m',\tilde{t},z) = \tilde{t} + \dfrac{\alpha(m)-\alpha(m')}{g}(1-z), \\ \eta(m,m',\xi,y,z) = \xi + \bar{v}(y)\dfrac{\alpha(m)-\alpha(m')}{g}(1-z). \end{cases}$$

Nous introduisons pour chaque $y \in \mathbb{R}$ et $z \in [0, 1]$ fixés, la famille de courbes

$$\gamma_{\tau,\zeta} = \gamma_{\tau,\zeta,y,z} = \Big\{(m, \tilde{t}, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \;\Big|\; \tilde{t} = \tau - \frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \quad \xi = \zeta - \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\Big\} \tag{4.5}$$

avec $\tau, \zeta \in \mathbb{R}$.

Soient τ, ζ, $\gamma_{\tau,\zeta}^{[0,m]}$ telle que

$$\tau(m, \tilde{t}, z) = \tilde{t} + \frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \quad \zeta(m, \xi, y, z) = \xi + \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z),$$

$$\gamma_{\tau,\zeta}^{[0,m]} = \gamma_{\tau,\zeta} \cap [0, m] \times \mathbb{R}^2.$$

On pose

$$\kappa = (\tau, \zeta), \quad \vartheta = (\tilde{t}, \xi), \quad q = q(y) = (1, \bar{v}(y))^T.$$

Alors les courbes définies dans (4.5) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\gamma_\kappa = \gamma_{\kappa,y,z} = \Big\{(m, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \;\Big|\; \vartheta = \kappa - q(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z)\Big\} \tag{4.6}$$

avec

$$\kappa(m, \vartheta, y, z) = \vartheta + q(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), \quad \gamma_\kappa^{[0,m]} = \gamma_\kappa \cap [0, m] \times \mathbb{R}^2.$$

La famille de courbes γ_κ est similaire à celle définie dans (3.6) dans le cas stationnaire, donc de la même manière, on définit une mesure μ_γ sur les courbes γ_κ et l'équation (4.4) devient

$$\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z) = F(\sigma(z)), \; \sigma(z) = \sigma(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, z), \tag{4.7}$$

où

$$\begin{aligned} F(\sigma(z)) &= F(\sigma(z))(m, \vartheta, y) \\ &= -\frac{m\alpha(m)}{2g}\int_{\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}^{[0,m]}} \mathfrak{S}_7 \mu_\gamma(\mathrm{d}m') + \frac{m\alpha(m)}{g}\int_{\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}} \mathfrak{S}_8 \mu_\gamma(\mathrm{d}m') \end{aligned} \tag{4.8}$$

avec

$$\mathfrak{S}_7 = \beta(m-m', m')\sigma(m', \vartheta', y, z)\sigma(m-m', \vartheta'', y, z),$$
$$\mathfrak{S}_8 = \beta(m, m')\sigma(m', \vartheta', y, z)\sigma(m, \vartheta, y, z),$$

et ϑ' et ϑ'' sont définis par les relations

$$(m', \vartheta') \in \gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}, \quad (m-m', \vartheta'') \in \gamma^{[0,m]}_{\kappa(m,\vartheta,y,z)}.$$

On remarque que cette équation est du même type que l'équation (3.8) dans le cas stationnaire et que l'opérateur intégrale figurant dans (4.8) vérifie les mêmes propriétés des lemmes 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4.

De manière analogue, les conditions aux limites et initiale se transforment en

$$\sigma(m, \tilde{t}, \xi, y, 1) = \bar{\sigma}_1^*(m, \tilde{t}, \xi, y) = \bar{\sigma}_1^*(m, \vartheta, y) \tag{4.9}$$

et

$$\sigma\Big(m, \frac{\alpha(m)}{g}(z-1), \xi, y, z\Big) = \bar{\sigma}_0^*(m, \xi, y, z), \tag{4.10}$$

où $\bar{\sigma}_0^*$ et $\bar{\sigma}_1^*$ sont les fonctions obtenues de $\bar{\sigma}_0$ et $\bar{\sigma}_1$ par le changement de variables introduit dans (4.3).

4.1 – *Solution avec condition d'entrée de classe L^1*

Nous définissons le domaine dans lequel nous allons considérer l'équation (4.7) à savoir

(4.11)
$$\Omega = \bigcup_{\substack{\kappa\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\\ y\in\mathbb{R},\\ 0<z<1}} \gamma_{\kappa,y,z}$$
$$= \Big\{(m, \vartheta, y, z) = (m, \tilde{t}, \xi, y, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times]0,1[\;\Big|\; \tilde{t} > \frac{\alpha(m)}{g}(z-1).\Big\}$$

On pose

$$\Gamma_a = \left\{(m,\vartheta,y,z) = (m,\tilde{t},\xi,y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times [0,1] \;\middle|\; \tilde{t} = \frac{\alpha(m)}{g}(z-1)\right\},$$

$$\Gamma_b = \{z=1\} \cap \overline{\Omega}.$$

Les conditions (4.9)–(4.10) peuvent être écrites dans la forme

$$\sigma = \bar{\sigma}_1^* \text{ sur } \Gamma_b, \quad \sigma = \bar{\sigma}_0^* \text{ sur } \Gamma_a. \tag{4.12}$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soient $\bar{\sigma}_{(a)} \in L^1(\Gamma_a) \cap L^\infty(\Gamma_a)$ et $\bar{\sigma}_{(b)} \in L^1(\Gamma_b) \cap L^\infty(\Gamma_b)$ telles que*

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{(a)}(m,\vartheta,y,z) &\geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \Gamma_a,\\
\bar{\sigma}_{(b)}(m,\vartheta,y) &\geq 0 \quad \textit{p.p. sur } \Gamma_b,\\
\bar{\sigma}_{(a)}(m,\vartheta,y,z) = \bar{\sigma}_{(b)}(m,\vartheta,y) &= 0 \quad \textit{pour } m \in [0,\overline{m}_a] \cup [\overline{m}_A,\infty[.
\end{aligned}$$

Si

$$\max(\|\bar{\sigma}_{(a)}\|_{L^\infty(\Gamma_a)}, \|\bar{\sigma}_{(b)}\|_{L^\infty(\Gamma_b)}) < \frac{1}{M_1(\overline{m}_A - \overline{m}_a)},$$

alors il existe une solution unique σ de l'équation (4.7) satisfaisant aux conditions

$$\sigma = \bar{\sigma}_{(b)} \quad \textit{sur } \Gamma_b, \quad \sigma = \bar{\sigma}_{(a)} \quad \textit{sur } \Gamma_a \tag{4.13}$$

avec

$$\sigma \in C([0,1]; L^1(\Omega_z)) \cap L^\infty(\Omega), \tag{4.14}$$

où

$$\Omega_z = \left\{(m,\vartheta,y) = (m,\tilde{t},\xi,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \;\middle|\; \tilde{t} > \frac{\alpha(m)}{g}(z-1)\right\}. \tag{4.15}$$

Démonstration. Dans (4.7) et (4.8), on remarque l'absence de la dérivée et de l'intégrale par rapport à y, comme dans (3.8), ce qui implique que l'équation (4.7) peut être envisager séparément pour chaque $y \in \mathbb{R}$.

On définit pour chaque point $(m, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ le nombre $\zeta_1(m, \vartheta) \in [0, 1]$ telle que

$$\zeta_1(m, \vartheta) = \zeta_1(m, \tilde{t}, \xi) = \zeta_1(m, \tilde{t}) = \begin{cases} \max\left(0, 1 + \dfrac{\tilde{t}}{\alpha(m)} g\right) & \text{si } \tilde{t} \leq 0, \\ 1 & \text{si } \tilde{t} > 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

on a évidemment

$$(m, \vartheta, y, \zeta_1(m, \vartheta)) \in \Gamma_b \cup \Gamma_a \quad \text{pour } (m, \vartheta, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},\ \tilde{t} \geq -\frac{\alpha(m)}{g},$$

ce qui nous permet de remplacer $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ par l'axe du temps, ainsi on retrouve les conditions de la démonstration de la proposition 4.1 de [2], par conséquent en reconduisant les étapes de la preuve de cette dernière, la proposition est démontrée. □

4.2 – *Existence et unicité de la solution globale en temps avec un vent horizontal*

De manière analogue au cas stationnaire, pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution globale avec un vent horizontal dans le cas général, on utilise la propriété de "cône de dépendence" et la proposition 4.1.

On considère un ensemble ω de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tel que $0 < \text{mes}(\omega) < \infty$ et on définit

$$D[\omega] = \bigcup_{(m,\vartheta,y)\in\omega} D_{(m,\vartheta,y)}, \tag{4.17}$$

où

$$\begin{aligned} D_{(m,\vartheta,y)} &= \bigcup_{0\leq z\leq 1} \Big(\bigcup_{\kappa_-(m,\vartheta,y,z)\leq\kappa\leq\kappa_+(m,\vartheta,y)} \gamma_{\kappa,y,z} \Big) \\ &= \Big\{ (m', \vartheta', y', z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times [0, 1] \ \Big| \\ &\qquad \vartheta' = \kappa - q(y') \frac{\alpha(m')}{g} (1 - z'), \\ &\qquad y' = y, \\ &\qquad \kappa_-(m, \vartheta, y, z') \leq \kappa \leq \kappa_+(m, \vartheta, y) \Big\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec

(4.19)
$$\begin{cases} \kappa_+(m,\vartheta,y)=\kappa(m,\vartheta,y,0)=\vartheta+q(y)\dfrac{\alpha(m)}{g}, \\ \kappa_-(m,\vartheta,y,z)=\kappa_+(m,\vartheta,y)-q(y)\dfrac{\bar{\alpha}_0}{g}z=\vartheta+q(y)\dfrac{\alpha(m)}{g}-q(y)\dfrac{\bar{\alpha}_0}{g}z. \end{cases}$$

On définit $D_\omega(z)$ par

$$\begin{aligned} D_\omega(z) &= \bigcup_{(m,\vartheta,y)\in\omega}\Big(\bigcup_{\kappa_-(m,\vartheta,y,z)\le\kappa\le\kappa_+(m,\vartheta,y)}\gamma_{\kappa,y,z}\Big) \\ &= \{(m',\vartheta',y',z')\in D[\omega]\mid z'=z\}. \end{aligned}$$

On remarque que $D[\omega]$ dans le cas d'évolution est définie d'une manière similaire au cas stationnaire (voir (3.18), (3.19), (3.20) et (3.21)). Ainsi on a le lemme suivant.

LEMME 4.1. *Soient $\bar{\sigma}^{[1]}_{(a)}$ et $\bar{\sigma}^{[2]}_{(a)}$ deux fonctions définies sur Γ_a, $\bar{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ et $\bar{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ deux fonctions définies sur Γ_b. On suppose que $\bar{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\bar{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\bar{\sigma}^{[1]}_{(b)}$, $\bar{\sigma}^{[2]}_{(b)}$ satisfont aux conditions de la proposition 4.1. Soit $\sigma^{[1]}$(resp. $\sigma^{[2]}$) la solution de l'équation (4.7) avec la condition (4.13) et $\bar{\sigma}_{(a)}=\bar{\sigma}^{[1]}_{(a)}$, $\bar{\sigma}_{(b)}=\bar{\sigma}^{[1]}_{(b)}$ (resp. $\bar{\sigma}_{(a)}=\bar{\sigma}^{[2]}_{(a)}$, $\bar{\sigma}_{(b)}=\bar{\sigma}^{[2]}_{(b)}$). Si on a*

(4.20)
$$\bar{\sigma}^{[1]}_{(b)}=\bar{\sigma}^{[2]}_{(b)}\quad sur\ \Gamma_b\cap D[\omega],\qquad \bar{\sigma}^{[1]}_{(a)}=\bar{\sigma}^{[2]}_{(a)}\quad sur\ \Gamma_a\cap D[\omega],$$

alors
$$\sigma^{[1]}=\sigma^{[2]}\quad p.p.\ dans\ D[\omega].$$

DÉMONSTRATION. On intègre l'équation (4.7) par rapport à z, on a

$$\begin{aligned} \sigma^{[i]}(m,\vartheta,y,z) &= \sigma^{[i]}(m,\vartheta,y,\zeta_1(m,\vartheta)) \\ &\quad + \frac{m\alpha(m)}{2g}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma^{[0,m]}_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'}}\mathfrak{S}_9(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z' \\ &\quad - \frac{m\alpha(m)}{g}\int_z^{\zeta_1}\int_{\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'}}\mathfrak{S}_{10}(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z', \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{S}_9=\beta(m-m',m')\sigma^{[i]}(m',\vartheta',y,z')\sigma^{[i]}(m-m',\vartheta'',z')\mu_\gamma,$$

$$\mathfrak{S}_{10}=\beta(m,m')\sigma^{[i]}(m',\vartheta',y,z')\sigma^{[i]}(m,\vartheta,y,z')\mu_\gamma,$$

pour $i = 1, 2$. Il résulte des conditions (4.9)-(4.10) que

$$\sigma^{[i]}(m, \vartheta, y, \zeta_1(m, \vartheta)) = \begin{cases} \bar{\sigma}^{[i]}_{(a)} & \text{sur } \Gamma_a, \\ \bar{\sigma}^{[i]}_{(b)} & \text{sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

où $\zeta_1(m, \vartheta)$ étant le nombre défini dans (4.16).

En faisant la différence de ces équations pour $i = 1$ et $i = 2$, on a

$$\begin{aligned} &|\sigma^{[1]}(m, \vartheta, y, z) - \sigma^{[2]}(m, \vartheta, y, z)| \\ &\quad \leq |\sigma^{[1]}(m, \vartheta, y, \zeta_1) - \sigma^{[2]}(m, \vartheta, y, \zeta_1)| \\ &\quad\quad + C_\beta \bigg(\int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma^{[0,m]}_{(m,\vartheta,y,z'),y,z'}} \mathfrak{S}_{11} \mu_\gamma(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z' \\ &\quad\quad\quad + \int_z^{\zeta_1} \int_{\gamma_{(m,\vartheta,y,z'),y,z'}} \mathfrak{S}_{12} \mu_\gamma(\mathrm{d}m')\,\mathrm{d}z' \bigg), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{11} &= |\sigma^{[1]}(m-m', \vartheta'', y, z') - \sigma^{[2]}(m-m', \vartheta'', y, z')|\sigma^{[2]}(m', \vartheta', y, z') \\ &\quad + |\sigma^{[1]}(m', \vartheta', y, z') - \sigma^{[2]}(m', \vartheta', y, z')|\sigma^{[1]}(m-m', \vartheta'', y, z'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{12} &= |\sigma^{[1]}(m, \vartheta, y, z') - \sigma^{[2]}(m, \vartheta, y, z')|\sigma^{[2]}(m', \vartheta', y, z') \\ &\quad + |\sigma^{[1]}(m', \vartheta', y, z') - \sigma^{[2]}(m', \vartheta', y, z)|\sigma^{[1]}(m, \vartheta, y, z'), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} &|\sigma^{[1]}(m, \vartheta, y, z) - \sigma^{[2]}(m, \vartheta, y, z)| \\ &\quad \leq |\sigma^{[1]}(m, \vartheta, y, \zeta_1) - \sigma^{[2]}(m, \vartheta, y, \zeta_1)| \\ &\quad\quad + C_\beta \bigg(\int_z^1 \mathfrak{S}_{13}\,\mathrm{d}z' + \int_z^1 \mathfrak{S}_{14}\,\mathrm{d}z' \bigg), \end{aligned} \tag{4.21}$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{13} &= \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})} \\ &\qquad\qquad \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})} \\ &\quad + \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})} \\ &\qquad\qquad \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{14} = \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})} \\ \|\sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^1(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})} \\ + (\bar{m}_A - \bar{m}_a)\|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})} \\ \|\sigma^{[1]}(\cdot,\cdot,\cdot,z') - \sigma^{[2]}(\cdot,\cdot,\cdot,z')\|_{L^\infty(\gamma_{\kappa(m,\vartheta,y,z'),y,z'})}.\end{aligned}$$

On remarque que cette inégalité est analogue a l'inégalité (3.23) dans la démonstration du lemme 3.6, donc de manière similaire on obtient le résultat. □

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème principal.

Théorème 4.1. *Si $\bar{\sigma}_0^* \in L^\infty(\Gamma_a)$ et $\bar{\sigma}_1^* \in L^\infty(\Gamma_b)$ satisfont aux conditions*

$$\bar{\sigma}_0^*(m,\xi,y,z) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_a, \quad \bar{\sigma}_1^*(m,\vartheta,y) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_b, \tag{4.22}$$

$$\bar{\sigma}_0^*(m,\xi,y,z) = \bar{\sigma}_1^*(m,\vartheta,y) = 0 \quad \text{pour } m \in [0,\bar{m}_a] \cup [\bar{m}_A,\infty[, \tag{4.23}$$

$$\max(\|\bar{\sigma}_0^*\|_{L^\infty(\Gamma_a)}; \|\bar{\sigma}_1^*\|_{L^\infty(\Gamma_b)}) < \frac{1}{M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)}, \tag{4.24}$$

alors l'équation (4.7) avec la condition (4.12) admet une solution unique σ vérifiant

$$\sigma \in L^\infty(\Omega)$$

avec

$$\sigma(m,\vartheta,y,z) \geq 0, \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

$$\sigma(m,\vartheta,y,z) = 0, \quad \text{pour } m \in [0,\bar{m}_a] \cup [\bar{m}_A,\infty[.$$

Démonstration. On considère une famille d'ensembles mesurables et bornés ω_i, $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, définis par

$$\begin{aligned}\omega_i = \Big\{(m,\vartheta,y) = (m,\tilde{t},\xi,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \;\Big|\; & \bar{m}_a \leq m \leq \bar{m}_A, \\ & -\frac{\alpha(m)}{g} \leq \tilde{t} \leq i, \\ & -i \leq \xi \leq i, \\ & -i \leq y \leq i\Big\} \\ = \Omega_0 \cap \{(m,\vartheta,y) \\ = (m,\tilde{t},\xi,y) \in [\bar{m}_a,\bar{m}_A] \times \mathbb{R}^3 \mid \tilde{t} \leq i,\ -i \leq \xi \leq i,\ -i \leq y \leq i\},\end{aligned}$$

où Ω_0 est l'ensemble défini dans (4.15) avec $z = 0$. La définition de $D[\omega]$ (voir (4.17)) nous permet de définir un nombre N tel que

$$D_{\omega_i}(1) \subset \Big\{(m, \vartheta, y) = (m, \tilde{t}, \xi, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \;\Big|\; \bar{m}_a \le m \le \bar{m}_A,\ \tilde{t} \le i + N,\ -i - N \le \xi \le i + N,\ -i - 1 \le y \le i + 1\Big\}$$

et on considère une fonction $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$, $\psi_i \ge 0$, telle que

$$\psi_i(\vartheta, y) = \psi_i(\tilde{t}, \xi, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{t} \le i + N,\ |\xi| \le i + N,\ |y| \le i + 1, \\ 0 & \text{si } \tilde{t} \ge i + N + 1,\ |\xi| \ge i + N + 1,\ |y| \ge i + 2. \end{cases}$$

On a alors

$$D_{\omega_i}(1) \subset \{(m, \vartheta, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mid \psi_i(\vartheta, y) = 1\} \quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{4.25}$$

Le théorème se démontre d'une manière analogue au théorème 5.1 de [2] (voir aussi le théorème 3.1 du cas stationnaire) avec les mêmes étapes. □

L'existence et l'unicité de la solution dans les coordonnées (m, t, x, y, z) sont données dans le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. *Si* $\bar{\sigma}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1])$ *et* $\bar{\sigma}_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ *satisfont aux conditions*

$$\bar{\sigma}_0(m, x, y, z) \ge 0 \quad \textit{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1],$$

$$\bar{\sigma}_1(m, t, x, y) \ge 0 \quad \textit{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2,$$

$$\bar{\sigma}_0(m, x, y, z) = \bar{\sigma}_1(m, t, x, y) = 0 \quad \textit{pour } m \in [0, \bar{m}_a] \cup [\bar{m}_A, \infty[,$$

$$\max(\|\bar{\sigma}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times [0,1])}; \|\bar{\sigma}_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)}) < \frac{1}{M_1(\bar{m}_A - \bar{m}_a)},$$

alors l'équation (2.1) *avec les conditions* (4.1)-(4.2) *admet unique solution* σ *vérifiant*

$$\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times]0, 1[\,),$$

où

$$\sigma(m, t, x, y, z) \ge 0 \quad \textit{p.p. dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times]0, 1[,$$

$$\sigma(m, t, x, y, z) = 0 \quad \textit{pour } m \in [0, \bar{m}_a] \cup [\bar{m}_A, \infty[.$$

Démonstration. Au problème (2.1), (4.1),(4.2), où la fonction inconnue à chercher est σ, on associe le problème (4.7), (4.12) par une application bijective définie par le changement de variable $(m,t,x,y,z) \mapsto (\tilde{m},\tilde{t},\xi,\tilde{y},\tilde{z})$ introduit dans (4.3) avec

$$\sigma(m,t,x,y,z) = \tilde{\sigma}\Big(m, t - \frac{\alpha(m)}{g}(1-z), x + \bar{v}(y)\frac{\alpha(m)}{g}(1-z), y, z\Big).$$

Si $\tilde{\sigma}(m,\tilde{t},\xi,y,z)$ est la solution du problème (4.7), (4.12) dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le théorème 4.1, alors, on aura l'existence et l'unicité de la solution σ du problème (2.1), (4.1), (4.2) vérifiant les mêmes conditions. $\square$

Références

[1] H. Belhireche – M. Z. Aissaoui – H. Fujita Yashima, *Équations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau,* Sci. Techn. Univ. Constantine - A **31** (2011), pp. 9–17.

[2] H. Belhireche – M. Z. Aissaoui – H. Fujita Yashima, *Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute,* Ren. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino **70** (2012), no. 3, pp. 261–278.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle,* Théorie et applications, Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1987.

[4] M. Escobedo – S. Mischler – B. Perthame, *Gelation in coagulation and fragmentation models,* Comm. Math. Phys. **231** (2002), pp. 157–188.

[5] M. Escobedo – J. J. L. Velazquez, *On the fundamental solution of a linearized homogeneous coagulation equation,* Comm. Math. Phys. **297** (2010), pp. 759–816.

[6] M. Escobedo – S. Mischler – M. Rodriguez Ricard, *On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **22** (2005), pp. 99–125.

[7] H. Fujita Yashima – V. Campana – M. Z. Aissaoui, *Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère,* Ann. Math. Afr. **2** (2011), pp. 66–92.

[8] A. K. Kikoïne – I. K. Kikoïne, *Physique moléculaire,* traduit du russe, Mir, Moscou, 1979.

[9] A. N. Kolmogorov – S. V. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionelle,* traduit du russe, Mir, Moscou, 1974.

[10] M. Merad – H. Belhireche – H. Fujita Yashima, *Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal.* Rend. Sem. Mat. univ. Padova **129** (2013), pp. 225-244.

[11] S. Mischler, *Contributions à l'étude mathématique de quelques modèles issus de la physique hors équilibre,* Thèse d'habilitation, Univ. Versailles Saint-Quentin, 2001.

[12] S. Mischler – M. Rodriguez Ricard, *Existence globale pour l'équation de Smoluchowski continue non homogène et comportement asymptotique des solutions,* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math. **336** (2003), pp. 407–412.

[13] H. Müller, *Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation.* Kolloidchem. Beib. **27** (1928), pp. 223–250.

[14] F. Prodi – A. Battaglia, *Meteorologia,* Parte **II**, Microfisica, Grafica Pucci, Roma, 2004. Voir aussi le site
http://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html

[15] S. Selvaduray – H. Fujita Yashima, *Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati: gassoso, liquido e solido,* Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V, **35** (2011), pp. 37-69.

[16] P.-X. Sheng – J.-T. Mao – J.-G. Li – A.-C. Zhang – J.-G. Sang – N.-X. Pan, *Physique de l'atmosphère* (en chinois), Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.

[17] M. Smoluchowski, *Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen*, Phys. Zeits. **17** (1916), pp. 557–585.

[18] V. M. Voloshchuk, *Théorie cinétique de coagulation* (en russe), Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 dicembre 2013.