MÉMOIRES DE LA S. M. F.

BERNARD PERROT

Sur un problème de convergence en bornologie

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 271-277
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__271_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 271-277.

SUR UN PROBLÈME DE CONVERGENCE EN BORNOLOGIE

par

Bernard PERROT

— Une difficulté en bornologie provient du fait que l'adhérence bornologique d'une partie A n'est pas nécessairement b-fermée ; un point de la b-fermeture de A n'est pas toujours limite bornologique d'une suite de points de A ; on rencontre ce phénomène en particulier dans l'étude de l'approximation en bornologie [2] . Le problème naturel qui se pose alors est de caractériser les espaces bornologiques qui vérifient la "propriété de la b-fermeture", c'est-à-dire ceux pour lesquels la b-adhérence d'une partie quelconque est b-fermée. Malgré des considérations antérieures sur ce problème G. Koëthe, L. Waelbroeck, etc.., il n'existait pas jusqu'à ce jour d'études systématiques, le travail présent est consacré à cette question ; les résultats sans démonstrations ont déjà été annoncés dans [5] ; la terminologie et les notations sont en général conformes à [3].

LEMME 0. — Soit E un evb, E ne possède pas la propriété de la b-fermeture si et seulement si il existe une suite $(x_m)_m$ qui converge bornologiquement en 0 et pour tout m il existe une suite $(x_n^m)_n$ qui converge bornologiquement vers x_m et telle qu'aucune sous-suite de l'ensemble $\{x_n^m\}_{\substack{m\geqslant 0\\ n\geqslant 0}}$ ne converge bornologiquement en 0 .

A. — Liaison entre la propriété de la b-fermeture et la forme des bornivores.

PROPOSITION 1. — Un evb possède la propriété de la b-fermeture si et seulement si les parties bornivores forment un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie de la b-fermeture τ .

On obtient ceci en remarquant qu'une partie G est un voisinage de 0 pour τ si et seulement si le vecteur 0 n'appartient pas à la b-fermeture de $\complement_G$; G est bornivore si et seulement si le vecteur 0 n'appartient pas à l'adhérence bornologique $\complement_G$.

— Cette proposition montre que les bornivores ne sont pas en général des voisinages de 0 pour τ , cependant nous allons donner une construction effective d'un système fondamental de voisinages de 0 pour τ à partir des bornivores : soit P un bornivore, à tout élément x de P on associe un bornivore quelconque $P(x)$ et on appellera bornivore d'ordre 2 une partie formée de la manière suivante :

$P^2 = \bigcup_{x \in P} x + P(x)$ on définit ainsi par récurrence les bornivores d'ordre n

$P^n = \bigcup_{x \in P^{n-1}} x + P(x)$ ce qui nous donne une suite de bornivores tels que le bornivore d'ordre n soit fabriqué à partir du bornivore d'ordre n-1 de la suite, on appellera : "chaîne cohérente" la réunion des bornivores d'une telle suite ; nous avons introduit le terme "cohérente", car on peut être amené dans certains cas, en particulier, pour nier des propriétés d'approximation, à former des chaînes "non-cohérentes" de la manière suivante : on considère une suite $(P_n)_n$ de bornivores distincts et suffisamment décroissante ; on forme à partir du bornivore P_k un bornivore d'ordre k noté P_k^k et on fabrique ainsi la chaîne $\bigcup_{k \geqslant 0} P_k^k$. Les chaînes cohérentes forment un système fondamental de voisinages de 0 pour τ, car on vérifie aisément que toute suite qui converge bornologiquement vers un point de la chaîne, a presque tous ses termes dans la chaîne.

- Les considérations précédentes nous montrent qu'un espace vectoriel E muni de la bornologie vectorielle séparée minimale, (qui s'obtient en prenant comme bornés les parties dont la trace sur tout sous-espace vectoriel de dimension finie est bornée), possède la propriété de la b-fermeture, car un bornivore G contient tout E sauf, au plus, un sous-espace vectoriel de dimension finie, et sa trace sur celui-ci est un voisinage de 0 ; alors les bornivores sont des voisinages de 0 pour τ.

- On dira qu'une topologie est de type C_1 si l'adhérence séquentielle de toute partie est fermée ; c'est l'analogue en topologie de la propriété de la b-fermeture.

PROPOSITION 2. - Un evb séparé E possède la propriété de la b-fermeture si et seulement si τ est de type C_1.

C'est une conséquence immédiate d'un théorème de Kisynski [4] qui nous dit que si une suite converge vers 0 pour τ on peut en extraire une sous-suite qui converge bornolgiquement en 0. Cette proposition nous permet d'obtenir un certain nombre de caractérisations de la propriété de la b-fermeture en considérant le fait que τ soit de type C_1 nous renvoyons alors aux auteurs qui ont étudié ce problème dans le cadre topologique : Kowalsky, Franklin, etc.., mais ici il faut noter que la topologie τ n'est pas très maniable en général.

B. - Comportement de certaines classes d'evb par rapport à la propriété de la b-fermeture.

On dit qu'un evb est de type M_1 ou qu'il vérifie la première condition de dénombrabilité de Mackey, si pour toute suite de bornés $(B_n)_n$ il existe une suite de réels strictement positifs $(\gamma_n)_n$ telle que $\bigcup_{n \geqslant 0} \gamma_n B_n$ soit bornée.

PROPOSITION 1. - Un evb de type M_1 possède la propriété de la b-fermeture.

En fait, il semble bien que la condition M_1 soit proche de la propriété de la b-fermeture, comme le montre le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Soit E un espace vectoriel réticulé, tel que, muni de sa bornologie de l'ordre, il existe au moins une droite non bornée (en particulier dans le cas presque archimédien), alors E possède la propriété de la b-fermeture si et seulement si il est de type M_1.

Les propositions 1 et 2 s'obtiennent par application du lemme 0. L'hypothèse "il existe au moins une droite non bornée" est bien nécessaire dans la proposition 2 car si toute droite est bornée, alors l'adhérence bornologique de toute partie non vide est E donc une telle bornologie possède la propriété de la b-fermeture, mais elle n'est pas nécessairement de type M_1.

Exemple : $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ où on définit une relation d'ordre en prenant comme cône des éléments positifs 0 et l'ensemble des termes dont la dernière composante non nulle est positive ; alors toute droite est bornée pour la bornologie de l'ordre, mais E n'est pas de type M_1 car aucun borné ne peut absorber la suite de bornés $(\mathbb{R}^n)_n$.

- Les bornologies métrisables sont de type M_1 et ainsi on retrouve le fait déjà connu qu'elles possèdent la propriété de la b-fermeture, mais il en est de type M_1 et non métrisable, par exemple, la bornologie de l'ordre sur l'espace des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'une partie dénombrable.

En général, même dans le cas séparé, la propriété de la b-fermeture n'implique pas la condition M_1.

Exemple : Soit E un espace vectoriel dont une base algébrique $(e_i)_{i \in I}$ a la puissance du continu, on le munit de la bornologie vectorielle séparée minimale, il possède la propriété de la b-fermeture d'après A ; mais il n'est pas de type M_1.

On appelle λ la bijection de I sur $\Lambda\infty$ = l'ensemble des suites de réels positifs strictement croissantes tendant vers ∞, considérons la suite de bornés suivante $(B_n)_n$ où B_n = l'ensemble des points de E dont pour tout $i \in I$ la composante sur $\underline{e}_i$ est majorée en valeur absolue par $(\lambda(i))_n$, alors il ne peut exister de suite $(\gamma_n)_n$ telle que $\bigcup_{\mathbb{N}} \gamma_n B_n$ soit bornée.

PROPOSITION 3. - Soit (E, t) un evt séparé de type C_1, $\mathbb{B}E$ l'evb canonique associé et τ la topologie de la b-fermeture, alors $t = \tau$ et $\mathbb{B}E$ possède la propriété de la b-fermeture.

Une démonstration d'Averbuck et Smolyanov [1] montre que de toute suite qui converge pour t on peut extraire une sous-suite qui converge bornologiquement, alors le théorème de Kisynski déjà employé dans 2 A, et la proposition 2A, donnent le résultat.

PROPOSITION 4. - Tout quotient d'un evb qui possède la propriété de la b-fermeture possède cette propriété.

On démontre ceci en appliquant le lemme 0 dans $\frac{E}{F}$ et en relevant des suites modulo des éléments de F.

PROPOSITION 5. - Soit $E = \bigoplus_I E_i$ un evb somme directe d'une famille infinie d'evb.

E possède la propriété de la b-fermeture si et seulement si toute droite est bornée.

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire ; soit $\mathbb{R}\, x_0$ une droite non bornée, I infini contient une partie $\mathbb{N}$ dénombrable, les E_i étant différents de $\{0\}$ il existe pour chaque i un élément $x_i \neq 0$ dans E_i.

On pose :

$$y_n^m = (y_n^m(i))_{i \in I} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} y_n^m(m) = \dfrac{x_m}{n} \\ \\ y_n^m(i) = 0 \quad i \neq m \end{cases}$$

$$x^m = \frac{1}{m}\ x_o\ .$$

$x_n^m = y_n^m \pm x^m$ (en prenant + ou - de manière à ce que x_n^m n'appartienne pas à l'adhérence bornologique de 0) .

Le résultat désiré s'obtient en appliquant le lemme 0 à la partie $\{x_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}^{m\in\mathbb{N}}$ on ne peut extraire de sous-suite $x_{n(\ell)}^{m(\ell)}$ qui converge bornologiquement en 0 , car $m(\ell)$ devrait prendre une infinité de valeurs, mais alors la suite $(x_{n(\ell)}^{m(\ell)})_\ell$ n'est même pas bornée, car on a des composantes dans une infinité de E_i .

COROLLAIRE. - <u>Toute bornologie séparée, somme directe d'une famille infinie de bornologies ne possède pas la propriété de la b-fermeture</u>.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> $E = \pi_I E_i$ <u>un evb produit d'une famille d'evb</u>. <u>Si il existe une partie</u> J <u>de</u> I <u>de cardinal supérieur ou égal au continu telle que pour tout</u> $j\in J$ <u>on ait une droite non bornée dans</u> E_j <u>alors</u> E <u>ne possède pas la propriété de la b-fermeture.</u>

Nous allons simplement construire la partie $\{x_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}^{m\in\mathbb{N}}$ qui donnera le résultat par application du lemme 0. Pour tout $j\in J$ on a une droite non bornée $\mathbb{R}\,y_j$ dans E_j ; J de cardinal supérieur ou égal au continu, il existe une surjection λ de J sur $\Lambda\infty$.

On pose :

$$y_n^m = (y_n^m\ (i))_{i\in I} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} y_n^m\ (i) = 0 & \text{pour } i\notin J \\ y_n^m\ (j) = \frac{1}{n}\,(\lambda_{(i)})_m\ yj & \text{pour } j\in J \end{cases}$$

$$x^m = (x^m(i))_{i\in I} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} x^m(i) = 0 & \text{pour } i\notin J \\ x^m(j) = \frac{1}{m}\ yj & \text{pour } j\in J \end{cases}$$

$$x_n^m = y_n^m + x^m$$

De $\{x_n^m\ {}_{n\in\mathbb{N}}^{m\in\mathbb{N}}\}$ on ne peut extraire de sous-suite $(x_{n(\ell)}^{m(\ell)})_\ell$ qui converge bornologiquement vers 0 car $m(\ell)$ devrait prendre une infinité de valeurs, mais alors il existe $j \in J$ pour lequel $(\lambda_{(j)})_{m(\ell)}$ est une suite qui croît plus vite que $n(\ell)$.

COROLLAIRE. - Toute bornologie séparée produit d'une famille, de cardinal supérieur ou égal au continu, de bornologies ne possède pas la propriété de la b-fermeture.

C. - Cas particulier des bornologies à base dénombrable.

PROPOSITION. - Un evb à base dénombrable E possède la propriété de la b-fermeture si et seulement si E possède un borné bornivore ou si toute droite est bornée.

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Si on n'a pas de borné bornivore, il existe une suite fondamentale de bornés $(B_m)_m$ tel que B_m n'absorbe pas B_{m+1} pour tout m ; soit il existe des éléments y_n^m tels que :

$$y_n^m \in B_{m+1} \qquad \text{et} \qquad y_n^m \notin n\, B_m$$

On pose :

$$x^m = \frac{1}{m} x_o \quad \text{où} \quad \mathbb{R}\, x_o \quad \text{désigne la droite non bornée}$$

$$x_n^m = \frac{1}{n} y_n^m \pm x^m$$

Comme pour la démonstration de la proposition 5C on prend le signe $+$ ou $-$ de manière à ce que x_n^m n'appartienne pas à l'adhérence bornologique de 0 et la démonstration se poursuit d'une manière analogue.

COROLLAIRE. - Un ebc à base dénombrable E possède la propriété de la b-fermeture si et seulement si E est semi-normé ou si toute droite est bornée.

COROLLAIRE. - Les seuls ebc séparés à base dénombrable qui possèdent la propriété de la b-fermeture sont les espaces normés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AVERBUCK (V.) et SMOLYANOV (O.). - The various definitions of the derivative in linear spaces [Russian Math. Surveys, Vol. 23, n° 4 (1968) 99-100].

[2] FERRIER (J.P.). - Séminaire sur les algèbres complètes (Berlin, Springer-Verlag, Lectures Notes in Mathematics, n° 164).

[3] HOGBE-NLEND (H.). - Théorie des bornologies et applications (Berlin, Springer-Verlag, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 213).

[4] KISYNSKI (J.). - Convergence de type L (Colloquium Mathematicum, Vol. 7, fasc. 2 (1960), 205-211).

[5] PERROT (B.). - Sur le problème de la M-fermeture dans les espaces bornologiques (C. R. A. S., t. 271, p. 832-834, (1970)).

Université de Bordeaux-I
Département de Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE (France)