GUY RENAULT

Étude des sous-modules compléments dans un module

Mémoires de la S. M. F., tome 9 (1967)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1967__9__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 9, 1967, 79 p.

ETUDE DES SOUS-MODULES COMPLEMENTS DANS UN MODULE

par

Guy RENAULT (*)

***

TABLE des MATIERES

Pages

(*) <u>Thèse Sc. Math. Paris-Orsay 1966</u>

CHAPITRE III

INTERSECTION DE SOUS-MODULES COMPLEMENTS

CHAPITRE IV

COEUR GENERALISE D'UN MODULE

CHAPITRE V

ETUDE DE CERTAINS ANNEAUX INTRODUITS PAR

LA NOTION DE COEUR GENERALISE

***

INTRODUCTION

***

Soit M un module à gauche sur un anneau unitaire A ; un sous-module X de M est appelé <u>sous-module complément</u> dans M , s'il existe un sous-module X' de M tel que X soit un élément maximal de l'ensemble des sous-modules P de M vérifiant $P \cap X' = (0)$. Cette notion de complément a été introduite par Honda [5] dans les groupes abéliens, par R.E. Johnson [8] dans les treillis modulaires et par P. Gabriel [6] dans les catégories abéliennes.

Une étude fine des sous-modules compléments dans certains anneaux permit à L. Lesieur et R. Croisot de prouver qu'un anneau premier noethérien à gauche admet un anneau de fractions qui est un anneau simple [10] ; A.W. Goldie démontra plus généralement qu'un anneau noethérien à gauche sans idéaux nilpotents non nuls possède un anneau de fractions qui est semi-simple [7] ; et il posait la question suivante :
dans un module M n'admettant pas de sommes directes infinies, l'intersection de deux sous-modules compléments est-il un sous-module complément ? La réponse est négative comme le montraient L. Lesieur et R. Croisot dans [11] , et ils introduisaient un sous-module remarquable C(M) d'un module M , le coeur de M , tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans C(M) est un sous-module complément.

Le point de départ de cette thèse est un exposé de Robert Croisot [1] qui prouvait la propriété suivante : pour que X soit un sous-module complément dans M , il faut et il suffit que X n'admette pas d'extension essentielle propre dans M ; cette proposition explique le rôle prépondérant, dans le travail qui suit, de la théorie des modules injectifs.

Au chapitre I, nous étudions les sous-modules compléments dans M en utilisant une enveloppe injective E de M , et on démontre en particulier que les sous-modules compléments dans M sont les traces sur M des sous-modules injectifs de E . Diverses applications sont traitées au chapitre II : les anneaux semi-simples sont caractérisés au moyen des sous-modules compléments dans les modules de type fini ; une classe d'anneaux est introduite, les C-anneaux, ils sont définis par la propriété suivante : si N est un sous-module propre essentiel d'un module M sur un C-anneau, le socle de M/N est non nul ; ils permettent de généraliser les "Neat subgroups" de Honda [5] .

Les trois chapitres suivants sont consacrés à l'étude des modules M tels que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

Au chapitre III, l'étude des intersections de sous-modules injectifs au moyen de famille d'homomorphisme nous conduit en particulier au résultat suivant : dans un A-module injectif isotypique de type E_o , pour que l'intersection de deux sous-modules injectifs soit un sous-module injectif, il faut et il suffit, que l'anneau des endomorphismes de E_o soit un corps. Une étude "interne" nous a permis de caractériser les modules tels qu'il existe deux sous-modules compléments dont l'intersection n'est pas un sous-module complément, au moyen du critère suivant d'un usage très commode : Pour qu'un module M possède la propriété précédente, il faut et il suffit qu'il existe deux éléments non nuls x et y tels que :

(i) $Ax \cap Ay = (0)$

(ii) $A_s/\mathrm{Ann}(x)$ est extension essentielle de ${}^{\mathrm{Ann}(x)}/\mathrm{Ann}(y)$

Au chapitre IV est mis en évidence un sous-module remarquable d'un module injectif E , que l'on note $\Gamma(E)$; $E = \Gamma(E)$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intersection de deux sous-modules injectifs de E soit un sous-module injectif. Il se pose naturellement la question suivante : si M est tel que l'intersection de deux sous-modules compléments est un sous-module complément, M est-il un sous-module de $\Gamma(E)$ où E est une enveloppe injective de M ? Cela n'est pas vrai en général ; pour l'étude de ce problème au chapitre V , on est amené à considérer une classe d'anneaux, les Γ-anneaux : un anneau A est un Γ-anneau si tout A-module est engendré par ses sous-modules co-irréductibles, mais nous n'avons pu les étudier en détail que dans le cas commutatif. Enfin nous caractérisons les anneaux commutatifs noethériens qui donnent une réponse satisfaisante au problème précédent.

Une partie de ce travail a été résumée dans des notes aux comptes-rendus [14] , [15] , [16] .

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. L. LESIEUR, dont les conseils m'ont été d'un grand secours pour l'élaboration de mon travail et sa rédaction définitive, à M. H. DELANGE qui a bien voulu me proposer le deuxième sujet de ma thèse, à M. P. SAMUEL qui a bien voulu s'intéresser à mon travail en qualité de délégué du département de Mathématiques.

Je tiens à remercier également Monsieur P. DUBREIL et Madame M.L. DUBREIL-JACOTIN dont le séminaire d'Algèbre m'a été d'une grande utilité, ainsi que Monsieur C. CHEVALLEY qui a été mon parrain de recherches au C.N.R.S.

Qu'il me soit permis enfin de rendre hommage à la mémoire de Robert CROISOT dont l'enseignement à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud et la bienveillance amicale m'ont encouragé à entreprendre et à poursuivre des recherches mathématiques.

***

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES SOUS-MODULES COMPLEMENTS

***

1 - ENVELOPPE INJECTIVE D'UN MODULE.

Soit A un anneau unitaire ; on dit qu'un A-module M est <u>extension essentielle</u> d'un sous-module N , si pour tout sous-module P non nul de M , $P \cap N$ est un sous-module différent de (0) .

On sait que tout module M se plonge dans une extension essentielle maximale de M qui est un A-module injectif, appelé <u>enveloppe injective de</u> M et qui sera noté E(M) . (Pour une étude détaillée de cette notion, on pourra se reporter à l'ouvrage de L. LESIEUR et R. CROISOT [12]).

2 - SOUS-MODULES COMPLEMENTS DANS UN A-MODULE M .

<u>Définition 1</u>. [11'] . Soit N un sous-module de M et soit X un sous-module de M pour lequel $X \cap N = (0)$, X étant maximal pour cette propriété. X sera appelé un <u>complément relatif de</u> N et l'on appellera <u>sous-module complément</u> dans M , un sous-module X pour lequel il existe un sous-module N dont X est complément relatif.

Les sous-modules compléments dans un A-module M sont caractérisés par la propriété suivante :

<u>Proposition 1</u>. [11] <u>Pour qu'un sous-module</u> X <u>de</u> M <u>soit un sous-module complément dans</u> M , <u>il faut et il suffit qu'il n'admette pas d'extension essentielle propre dans</u> M .

La condition est nécessaire : si X' est une extension essentielle de X et N un sous-module de M , la relation $X' \cap N = (0)$ équivaut à $X \cap N = (0)$; réciproquement, soit N un sous-module complément relatif de X et soit X' un sous-module complément de N contenant X ; si Y est un sous-module de X' tel que $Y \cap X = (0)$ alors $X \cap (Y \oplus N) = (0)$, en tenant compte de la définition de N , on en déduit $Y = (0)$ et par suite $X = X'$.

Nous allons donner une autre caractérisation des sous-modules compléments dans un A-module M :

<u>Proposition 2.</u> <u>Soit</u> X <u>un sous-module de</u> M ; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) X <u>est un sous-module complément dans</u> M .

(ii) <u>Quels que soient</u> M_o <u>et</u> N <u>sous-modules de</u> M <u>contenant</u> X , <u>avec</u> M_o <u>extension essentielle de</u> N , M_o/X <u>est extension essentielle de</u> N/X .

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit X_o une extension essentielle de X dans M , alors X_o/X est extension essentielle de (0) et par suite $X = X_o$, X est un sous-module complément dans M d'après la proposition 1.1.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) S'il existe deux sous-modules M_o et N avec M_o extension essentielle propre de N , tels que M_o/X ne soit pas extension essentielle de N/X , il existe alors un sous-module non nul P/X de M_o/X tel que $P/X \cap N/X = (0)$, soit encore $P \cap N = X$ avec P contenant strictement X . Si X_o est un sous-module complément relatif de X dans M le sous-module $Y_o = P \cap X_o$ est non nul et on a les relations : $X = P \cap N \supset (X \oplus Y_o) \cap N \supset X$; il en résulte que $(X \oplus Y_o) \cap N = X$ et $Y_o \cap N = (0)$, ce qui contredit le fait que M_o soit extension essentielle de N .

3 - RELATIONS ENTRE LES SOUS-MODULES COMPLEMENTS DANS M ET LES SOUS-MODULES INJECTIFS DE E(M) .

<u>Théorème 1.</u> <u>Pour qu'un sous-module</u> X <u>de</u> M <u>soit un sous-module complément dans</u> M <u>il faut et il suffit que</u> X <u>soit la trace sur</u> M <u>d'un sous-module injectif de</u> E(M) .

Ce théorème sera une conséquence de la proposition plus précise suivante :

<u>Proposition 3.</u> <u>Soit</u> M_o <u>une extension essentielle de</u> M ; <u>pour qu'un sous-module</u> X <u>de</u> M <u>soit un sous-module complément dans</u> M <u>il faut et il suffit que</u> X <u>soit la trace sur</u> M <u>d'un sous-module complément dans</u> M_o .

Soient X un sous-module complément dans M et X_o une extension essentielle maximale de X dans M_o ; d'après la proposition 1.1, X_o est un sous-module complément dans M_o et $X = X_o \cap M$. Réciproquement, soit X_o un sous-module complément dans M_o et soit X' une extension essentielle de $X_o \cap M$ dans M ; si N est un sous-module complément relatif de X_o dans M_o on a $N \cap X' = 0$: en effet, $N \cap X_o = 0 \Longrightarrow (N \cap X') \cap (X_o \cap M) = 0 \Longrightarrow N \cap X' = 0$ puisque X' est extension essentielle de $X_o \cap M$; d'autre part $N \cap X' = (0) \Longrightarrow N \cap [X' + (X_o \cap M)] = (0)$ soit $N \cap (X' + X_o) \cap M = (0)$ puisque $X' \subset M$ et finalement on a $N \cap (X' + X_o) = (0)$, ce qui entraîne $X' + X_o \subset X_o$ c'est-à-dire $X' \subset X_o$ et $X' = X_o \cap M$.

En remarquant que les sous-modules compléments dans $E(M)$ sont les sous-modules injectifs, on prouve le théorème 1.1. Nous allons donner diverses applications de ce résultat.

Théorème 2. Soient M un A-module et X un sous-module de M ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est un sous-module complément minimal.

(ii) X est un sous-module complément co-irréductible (i.e (0) est $\cap$-irréductible dans X).

Remarquons tout d'abord que le théorème 1.1, donne la caractérisation suivante des sous-modules compléments : pour qu'un sous-module X de M soit un sous-module complément dans M il faut et il suffit que tout sous-module complément dans X soit un sous-module complément dans M.

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Soit $E(X)$ une enveloppe injective de X contenue dans $E(M)$; d'après le théorème 1.1 ; un sous-module complément dans X est de la forme $I \cap X$ où I est un sous-module injectif de $E(M)$ contenu dans $E(X)$ et l'on a $I \cap X = I \cap M \cap E(X) = I \cap M$; d'où le résultat. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) d'après la remarque précédente, si X est un sous-module complément minimal, il n'existe pas de sous-modules compléments propres dans X,

$E(X)$ est alors un module injectif indécomposable et X est un module co-irréductible.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) car alors $E(X)$ est injectif indécomposable, et X n'admet pas de sous-modules compléments propres.

Rappelons qu'un A-module M est dit de <u>dimension finie</u> n, si son enveloppe injective est somme directe d'un nombre fini n de modules injectifs et indécomposables.

<u>Proposition 4.</u> <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module de dimension finie</u> n ; <u>les chaînes maximales de sous-modules compléments ont pour longueur</u> n .

En effet, d'après le théorème 1.1 , il suffit de se placer dans le cas où M est un A-module injectif de dimension n et la propriété est alors immédiate.

Le théorème 1.2 et la proposition 1.4 répondent à une question de R. CROISOT posée dans [1].

<u>Théorème 3.</u> <u>Soit</u> X <u>un sous-module complément maximal dans un</u> <u>A-module</u> M ; <u>alors</u> $E(M/X)$ <u>est isomorphe à un sous-module injectif et indécomposable de</u> $E(M)$ <u>et</u> X <u>est un sous-module</u> $\cap$ -<u>irréductible minimal</u>.

Remarquons tout d'abord que si I et J sont deux sous-modules injectifs de $E(M)$ avec $I \supset J$, alors $I \cap M \supset J \cap M$: en effet, on peut écrire I sous la forme $J \oplus K$ où K est injectif non nul et $I \cap M \supset (J \cap M) \cap (K \cap M)$ avec $K \cap M \neq (0)$; il s'en suit, en appliquant le théorème 1.1 , que, pour que X soit un sous-module complément maximal dans M il faut et il suffit que $E(X)$ soit un sous-module injectif maximal de $E(M)$. Si X' désigne un complément relatif de X dans M on a $E(M) = E(X) \oplus E(X')$ avec $E(X')$, sous-module injectif indécomposable ; d'autre part M/X est extension essentielle de X' par suite $E(M/X)$ est isomorphe à $E(X')$ et X est un sous-module $\cap$ -irréductible ; le fait que X est minimal résultera du lemme évident suivant :

<u>Lemme.</u> <u>Soit</u> N <u>un sous-module de</u> M ; <u>si</u> X <u>est un sous-module complément dans</u> M <u>contenant</u> N , <u>alors</u> X/N <u>est un sous-module complément dans</u> M/N .

Remarques :

1) Soit M un A-module ; il n'existe pas toujours de sous-modules compléments minimaux (resp. maximaux) dans M, ou, ce qui est équivalent d'après les théorèmes 1.1 et 1.3, il existe des modules ne contenant aucun sous-module co-irréductible.

En effet, soient K un corps commutatif et N l'ensemble des entiers positifs ; si A désigne l'anneau produit K^N, A est un anneau absolument plat (ou régulier) et en particulier tout idéal $\cap$-irréductible est maximal ; si S désigne le socle de A, le A-module $M = A/S$ a un socle nul et ne contient par suite, aucun sous-module co-irréductible.

2) La réciproque du théorème 1.3 est inexacte : si X est un sous-module $\cap$-irréductible minimal, X n'est pas nécessairement un sous-module complément ; en effet, soit A un anneau commutatif régulier, on sait que les idéaux $\cap$-irréductibles sont les idéaux maximaux et par suite tout idéal $\cap$-irréductible est minimal, mais si A n'est pas un anneau semi-simple (par exemple K^N), il existe des idéaux maximaux essentiels dans A.

Exemple de détermination de sous-modules compléments :

D'après un résultat dû à Honda ([5] . p. 92) les sous-modules compléments X dans un $\mathbb{Z}$-module G vérifient la condition suivante : si pour tout nombre premier p et pour tout x_0 élément de X, l'équation $p\,x = x_0$ admet une solution dans G, alors elle admet une solution dans X ; on montrera ultérieurement (théorème 1 chap. II) que si un sous-module X de G vérifie cette condition, alors c'est un sous-module complément dans G.

Nous allons déterminer l'ensemble des sous-modules compléments du $\mathbb{Z}$-module $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$; c'est un $\mathbb{Z}$-module de dimension 2 et par suite, les sous-modules compléments dans M, non triviaux, sont co-irréductibles. Soit donc X un sous-module complément dans M et soit $x = (n, \bar{m})$, un élément non nul de X.

a) $n \neq 0$: $\mathbb{Z}x \cap \mathbb{Z}/(2) = (0)$ et X qui est extension essentielle de $\mathbb{Z}x$ est un complément relatif de $\mathbb{Z}/(2)$; on notera $(x_i, \bar{m}_i)$ $i \in I$, l'ensemble des éléments non nuls de X, avec $n_i \neq 0$ pour tout $i \in I$. Soit $n_0 = \inf_{i \in I} (n_i)$;

il est facile de montrer que $X = \mathbb{Z}\, x_o$ où $x_o = (n_o, \overline{m}_o)$. Si $\overline{m}_o = 0$ alors $X = \mathbb{Z}$, supposons $\overline{m}_o \neq 0$.

- si n_o est impair alors $x_o = n_o \; (1, \overline{1})$ et $X = \mathbb{Z}\,(1, \overline{1})$

- si n_o est pair, posons $n_o = 2^k q_o$ avec q_o impair, on a $x_o = q_o \; (2^k, \overline{1})$ et $X = \mathbb{Z}\,(2^k, \overline{1})$

b) $n = 0$: par hypothèse $\overline{m} = 1$ et $\mathbb{Z}\, x \cap \mathbb{Z} = (0)$ avec $\mathbb{Z}\, x = \mathbb{Z}/(2)$ d'où $X = \mathbb{Z}/(2)$.

En résumé : les sous-modules compléments dans le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$, sont les sous-modules $\mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\,(2^k, \overline{1})$ avec $k \geqslant 0$. En particulier cela montre qu'un sous-module complément n'est pas nécessairement un facteur direct.

4 - MODULES QUASI-INJECTIFS.

<u>Définition 3</u>. Un sous-module X d'un A-module M sera appelé un <u>facteur direct absolu</u>, si pour tout sous-module complément relatif Y de X on a $M = X \oplus Y$.

Un sous-module X d'un A-module M peut être un facteur direct de M sans être un facteur direct absolu ; dans l'exemple ci-dessus du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(2)$ est facteur direct mais n'est pas facteur direct absolu car $\mathbb{Z}(2^k, 1)$ est un complément relatif de $\mathbb{Z}/(2)$ et l'élément $(1, 0)$ n'appartient pas au module $\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}\,(2^k, \overline{1})$.

Nous allons généraliser une propriété des groupes abéliens due à Fuchs [5] .

<u>Proposition 5. Pour qu'un sous-module</u> X <u>d'un</u> A-<u>module</u> M <u>soit un facteur direct absolu, il faut et il suffit que, pour tout sous-module complément</u> X' <u>dans</u> M <u>avec</u> $X \cap X' = (0)$, $X \oplus X'$ <u>soit un sous-module complément dans</u> M .

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire : Soit Y un complément relatif de X contenant X' ; on a par hypothèse

$M = X \oplus Y$, si E_1, E_2, E_3 désignent des enveloppes injectives de X, X', Y, contenues dans E(M) avec $E_2 \subset E_3$, on a $E_3 = E_2 \oplus F$ où F est un module injectif et $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus F$.

Soit $x \in M$, $x = e_1 + e_2 + f$ où $e_1 \in M \cap E_1$, et $e_2 + f \in M \cap E_3$; si $y \in (E_1 \oplus E_2) \cap M$, on a $y = e'_1 + e'_2$ où $e'_1 \in E_1$ et $e'_2 \in E_2$, comme $e'_1 \in E_1 \cap M$, on en déduit $e'_2 \in M \cap E_2$ et on obtient $(E_1 \oplus E_2) \cap M \subset X \oplus X'$ d'où finalement

$(E_1 \oplus E_2) \cap M = X \oplus X'$ et l'assertion résulte du théorème 1.1.

Soit M un A-module ; pour que tout sous-module complément dans M soit un facteur direct absolu, il faut et il suffit que M soit stable par tout endomorphisme idempotent de E(M) . Cela permet de déterminer un plus petit module M* , contenant M et contenu dans E(M) , tel que tout sous-module complément dans M* soit un facteur direct absolu : il suffit de considérer le A-module $M^* = \sum_{P_i} P_i(M)$ où P_i désigne un produit fini de projecteurs.

Soit C la catégorie dont les objets sont les sous-modules d'un A-module M et les morphismes, les homomorphismes habituels ; quels sont les objets injectifs de cette catégorie ? Si X est un objet injectif de C , il est facile de voir que X est facteur direct de M , en particulier c'est un sous-module complément dans M ; réciproquement on a le résultat suivant :

<u>Lemme</u>. <u>Soient</u> X <u>un sous-module complément dans</u> M <u>et</u> I <u>une enveloppe injective de</u> X <u>contenue dans</u> E(M) ; <u>pour que</u> X <u>soit un objet injectif de</u> C <u>il faut et il suffit que</u> M <u>soit stable par tout élément de</u> Hom [E(M), I] .

La condition est suffisante : soient P un sous-module de X et f une application linéaire de P dans X , f se prolonge en un homomorphisme g de E(M) dans I dont la restriction f' à M est telle que $f'(M) \subset I \cap M = X$.

Réciproquement soit $f \in \mathrm{Hom}\,[E(M), I]$; on désignera par X' l'ensemble des éléments x de M , tels que $f(x) \in X$. La restriction de f à X' se prolonge en un homomorphisme g de M dans X' et on a $\ker\,(f/_M - g) = X'$; si $M \neq X'$, il existe un élément $x \in M - X'$ tel que $(f/_M - g)\,(x) \in I - \{0\}$. I est extension essentielle de X' par suite il existe $a \in A$ tel que

$a(f/_M - g)(x) = (f/_M - g)(ax) \in X' - \{0\}$ avec $ax \notin X'$ et $f/_M(ax) = g(ax)$ est un élément de M ce qui contredit la définition de X' .

D'après le lemme précédent, si M est un objet injectif de C , M est stable par tout endomorphisme de E(M) et tout sous-module complément dans M est un objet injectif de C . Rappelons la définition suivante :

Définition 4 [9] . Un A-module M est dit quasi-injectif, si pour tout sous-module N de M et tout homomorphisme f de N dans M , f se prolonge en un endomorphisme de M .

On a la caractérisation suivante :

Proposition 6. Les A - modules M tels que tout sous-module complément est un objet injectif sont les modules quasi-injectifs.

Donnons des exemples de tels modules M : soit B l'anneau des endomorphismes de E(M) , le A-module $M^* = \sum_{f \in B} f(M)$ est quasi-injectif ; si Λ est un idéal bilatère de B , le A-module $N = \bigcap_{f \in \Lambda} \ker f$ est quasi-injectif.

Si M est un A-module quasi-injectif, tout sous-module complément dans M est facteur direct ; la réciproque de cette propriété est inexacte ; en effet, soit A un anneau commutatif noetherien tel que $(0) = P_1 \cap P_2$, où P_1 et P_2 sont deux idéaux premiers non maximaux tous les deux et vérifiant de plus $P_1 + P_2 = A$. A admet pour seuls idéaux compléments non triviaux P_1 et P_2 et tout sous-module complément dans A est facteur direct. Soit S l'ensemble des éléments réguliers de A , $S^{-1}A$ est un anneau semi-simple enveloppe injective de A avec $S^{-1}A \neq A$ (car P_1 et P_2 ne sont pas tous deux maximaux) ; il existe donc $x \in A$, $s \in S$ tels que $\frac{x}{s} \in S^{-1}A$, $\frac{x}{s} \notin A$, soit φ l'homomorphisme de Ax dans $A\frac{x}{s}$, défini par $\varphi(x) = \frac{x}{s}$, φ se prolonge en un endomorphisme φ' de $S^{-1}A$ et $\varphi'(A) \not\subset A$: A n'est pas quasi-injectif.

5 - REMARQUES SUR LES COMPLEMENTS RELATIFS D'UN MEME SOUS-MODULE.

1. Soient M un A-module et X un sous-module de M ; si X_1 et X_2 sont deux compléments relatifs de X , ils ne sont pas nécessairement isomorphes.

Dans le cas général on peut seulement montrer qu'il existe deux sous-modules de X_1 et de X_2 , contenant strictement $X_1 \cap X_2$, et qui sont isomorphes à savoir $(X \oplus X_1) \cap X_2$ et $(X \oplus X_2) \cap X_1$. Si M est tel que tout sous-module complément est facteur direct, alors deux sous-modules compléments relatifs d'un même sous-module sont isomorphes ; d'après ce que l'on a vu précédemment le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$ vérifie également cette propriété ; bien qu'il existe des sous-modules compléments non facteurs directs.

2. Deux extensions essentielles maximales d'un même sous-module X de M ne sont pas nécessairement isomorphes ; le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$, les A-modules injectifs sont tels que deux extensions essentielles maximales d'un même sous-module sont isomorphes ; on montrera plus tard que si M est stable par tout endomorphisme essentiel de E(M) , M vérifie cette propriété.

Illustrons les remarques précédentes par l'exemple suivant : soit G le groupe abélien $G = (a) \oplus (b)$ avec $\mathrm{Ann}(a) = p^3$, $\mathrm{Ann}(b) = p$, où p est un nombre premier. Si X est le sous-groupe engendré par $p\,a + b$, X est un sous-groupe complément relatif de (b) . X et (a) sont des sous-groupes non isomorphes car $\mathrm{Ann}(a) = p^3$, $\mathrm{Ann}(p\,a + b) = p^2$, d'autre part ce sont également des extensions essentielles maximales du sous-groupe $(p^2\,a)$.

6 - UNE AUTRE CARACTERISATION DES SOUS-MODULES COMPLEMENTS.

Soient M un A-module et E une enveloppe injective de M ; pour tout sous-module N de E , on notera Λ_N l'idéal à gauche des endomorphismes de E qui annulent N et on posera :

$$N_E = \bigcap_{f \in \Lambda_N} \ker f$$

<u>Proposition 7. Pour tout sous-module</u> N <u>de</u> E , N_E <u>est extension essentielle de</u> N .

Soit S un sous-module de N_E tel que $S \cap N = (0)$; il existe un sous-module injectif I de E contenant S avec $E = E(N) \oplus I$. Soit q la projection de E sur I parallèlement à E(N) ; ker q = E(N) et l'endomorphisme q qui annule N , annule aussi N_E , donc S ; or $\ker q \cap S = (0)$, ce qui implique $S = (0)$. Soit X un sous-module complément dans M ; d'après le théorème 1.1, il existe un sous-module injectif I de E tel que $I \cap M = X$. Si K est un supplémentaire de I dans E , on appellera p la projection de E sur K parallèlement à I . Soit φ un endomorphisme de E dont le noyau contient X ; on a $X = \ker p \cap M \subset \ker \varphi \cap M$, il existe donc une application linéaire $\bar{h}$ de M dans E telle que $\varphi = \bar{h}op$; $\bar{h}$ se prolonge en un endomorphisme h de E et on a $\varphi - hop \in \Lambda_M$, ce qui montre que $\Lambda_X \subset Bp + \Lambda_M$, où B est l'anneau des endomorphismes de E . Comme d'autre part tout élément de $Bp + \Lambda_M$ annule X , on a $\Lambda_X = Bp + \Lambda_M$.

Proposition 8. Soit M un A-module d'enveloppe injective E ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est un sous-module complément dans M .

(ii) a) $X = X_E \cap M$

b) $\Lambda_X = Bp + \Lambda_M$ où p est un projecteur de E .

On a déjà montré que (i) $\Longrightarrow$ (ii) , établissons la réciproque : observons tout d'abord que, d'après leur définition, $\Lambda_X = \Lambda_{X_E}$; la condition b) entraîne que $X = X_E \cap M = \ker p \cap M$, p est un projecteur de E , $\ker p$ est donc un sous-module injectif de E , d'après le théorème 1.1, X est un sous-module complément dans M .

Corollaire. Les sous-modules compléments dans M_E , sont les sous-modules X_E , où X parcourt l'ensemble des sous-modules compléments dans M .

Si X est un sous-module complément dans M , $X_E \subset M_E$; d'autre part on a $\Lambda_{X_E} = \Lambda_X$, $\Lambda_{M_E} = \Lambda_M$, par suite $\Lambda_{X_E} = Bp + \Lambda_{M_E}$ et d'après la proposition 1.8, X_E est un sous-module complément dans M_E .

Réciproquement, soit X' un sous-module complément dans M_E , on a $X' = X'_E$, $\Lambda_{X'} = Bp + \Lambda_M$ et $X' \cap M = \ker p \cap M$, en particulier on en déduit $\Lambda_{X' \cap M} = Bp + \Lambda_M$ d'où $(X' \cap M)_E = X'$.

Remarque :

Soit X un sous-module complément minimal d'un A-module M tel que Λ_M soit un idéal bilatère de B anneau des endomorphismes de $E(M)$ (ce sera le cas si M est quasi-injectif) ; le caractère minimal se traduit dans l'anneau quotient B/Λ par le fait que l'image de Λ_X dans cet anneau est un B/Λ-module simple.

***

CHAPITRE II
APPLICATIONS

***

1 - CARACTERISATION DES ANNEAUX SEMI-SIMPLES.

Soit A un anneau semi-simple ; on sait que tout A-module M est injectif et tout sous-module complément dans M est facteur direct absolu : cette dernière propriété caractérise les anneaux semi-simples ; de façon précise on a le résultat suivant.

Théorème 1. Soit A un anneau unitaire ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est un anneau semi-simple.

(ii) Si M est un A-module de type fini ; tout sous-module complément dans M est facteur direct absolu.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) car tout A-module est injectif.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) pour cela nous allons démontrer successivement les propriétés suivantes : A est un anneau régulier, et A ne contient pas une infinité d'idempotents orthogonaux deux à deux.

Lemme 1. Si un anneau A vérifie la condition (ii) il est régulier.

Soit a un élément non nul de l'anneau A ; considérons le A-module $A = A_s \times A_s/\mathrm{Ann}(a)$, si $x \in A$, $\overline{x}$ désignera l'image canonique de x dans $A_s/\mathrm{Ann}(a)$. Si on pose $x_o = (a, \overline{1})$, on a $A\,x_o \cap A_s/\mathrm{Ann}(a) = (0)$ car la relation $\alpha\, x_o \in A_s/\mathrm{Ann}(a)$ équivaut à $\alpha\, a = 0$, d'où $\alpha \in \mathrm{Ann}(a)$ et $\alpha\, x_o = 0$. Si X est un complément relatif de $A_s/\mathrm{Ann}(a)$ dans M contenant $A\,x_o$, on a par hypothèse $M = X \oplus A_s/\mathrm{Ann}(a)$; il existe donc une égalité de la forme $(1, 0) = (x, \overline{y}) + (0, \overline{y_1})$ où (x, y) est un élément de X ; on en déduit $x = 1$, $y_o = (1, \overline{y})$ élément de X . Le sous-module X contient $x_o - ay_o = (0, \overline{1 - ay})$; par construction $X \cap A_s/\mathrm{Ann}(a) = (0)$ et il vient donc $\overline{1 - ay} = 0$, c'est-à-dire $1 = ay + \alpha$ avec $\alpha \in \mathrm{Ann}(a)$, on en déduit $a = aya$ et l'anneau est régulier.

Lemme 2. Si un anneau vérifie la condition (ii) il ne contient pas une infinité d'idempotents orthogonaux deux à deux.

Soit N l'ensemble des entiers positifs et soit $(e_n)_{n \in N}$ une famille dénombrable d'idempotents orthogonaux deux à deux ; si I désigne l'idéal $\bigoplus_{n \in N} A e_n$ nous allons montrer que le A-module A/I ne vérifie pas la condition (ii) en utilisant une construction due à B. OSOFSKY [13] .

Propriété 1. Soit K un sous-ensemble dénombrable de N , il existe un idempotent E_K vérifiant les conditions suivantes :

1) $A E_K$ est l'extension essentielle maximale de $\bigoplus_{n \in K} A e_n$

2) a) $e_i E_K = e_i$ pour $i \in K$

b) $e_i E_K = E_K e_i = 0$ pour $i \notin K$

D'après le lemme 2.1 l'anneau A est régulier et d'après un résultat bien connu, qui sera redémontré au chapitre III, le A-module $\bigoplus_{n \in K} A e_n$ admet une seule extension essentielle maximale qui est facteur direct par hypothèse ; on a donc $A = A E_K + A(1 - E_K)$, où E_K est un idempotent tel que $A(1 - E_K)$ contienne l'ensemble des e_i avec $i \in N - K$; si $i \in K$ on a $e_i = \lambda E_K$ et $e_i E_K = e_i$ (assertion 2.a). Supposons $i \in N - K$, on peut écrire $e_i = \lambda(1 - E_K)$ d'où $e_i E_K = 0$. Pour démontrer la seconde relation de 2.b, on s'appuiera sur le fait que si x est un élément non nul d'un anneau régulier A , Ann(x) n'est pas essentiel dans A . L'ensemble S des éléments $a \in A$ tels que $a E_K \in I$ est un idéal essentiel dans A . Si $e_i \in N - K$ on a $S E_K e_i \subset I e_i = 0$ et par suite $E_K e_i = 0$. On dira que E_K est un idempotent associé à l'ensemble K .

Propriété 2. Soit $(K_j)_{j \in J}$ une famille de sous-ensembles de N vérifiant la propriété suivante : pour tout $i \in J$ et pour tout sous-ensemble fini

J' de J ne contenant pas i , $K_i \cap (\cup K_j)_{j \in J'}$ est un ensemble fini ; les idempotents associés E_j sont alors indépendants modulo I .

Sinon il existe une relation de la forme :

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{s} \lambda_j E_j = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p e_p , \quad \text{où} \quad \lambda_j E_j \in I \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq s$$

Soit k un entier avec $1 \leq k \leq s$; montrons que l'ensemble K des e_j tels $\lambda_k E_k e_j \neq 0$ est fini.

a) si $j \notin K_k$ on sait que $E_K e_j = 0$

b) si $j \in K_k \cap (\complement_N \bigcup_{i \in I_1} K_i)$ avec $I_1 = [1, p] - \{k\}$,

on a $\lambda_k E_k e_j \neq 0 \Longrightarrow 1 \leq j \leq n$

c) l'ensemble $K_k \cap (\cup K_i)_{i \in I_1}$ est fini.

Ces considérations montrent que K est un ensemble fini. Si on pose $E = \sum_{j \in K} e_j$, on a $E_k = a E + E_1$, où $a E$ et E_1 sont des idempotents orthogonaux. Si $j \notin K_k$, $E_k e_j = E_1 e_j$; nous allons montrer que $\lambda_k E_k E_1$ est nul. Sinon, il existe $b \in A$ tel que, $x = b \lambda_k E_k E_1$ est un élément non nul du module $\bigoplus_{j \in J_1} A e_j$ avec $J_1 = K_k - K$; on peut donc trouver e_j avec $j \in J_1$, tel que $x e_j \neq 0$; Comme $E_1 e_j = E_k e_j$ on en déduit $b\lambda_k E_k e_j \neq 0$ avec $j \notin K$, ce qui est contraire au choix de K et $\lambda_k E_k \in I$, ce qui contredit (1) .

Pour tout $i \in N$, soit P_i le ième nombre premier et soit K_i l'ensemble des puissances positives de P_i ; la famille S_o des idempotents E_{K_i} est indépendante modulo I (propriété 2). Soit S un ensemble maximal d'idempotents E_K indépendants modulo I avec $S \supset S_o$; $\overline{E}_K$ désignera l'image canonique de E_K dans A/I . On pose $X = \bigoplus_i A \overline{E}_{K_i}$ avec $E_{K_i} \in S_o$; X admet une extension essentielle X_o qui est un facteur direct absolu ; on appellera Y_o un complément relatif de X_o contenant les $\overline{E}_K$ appartenant à $S - S_o$. $A/I = \overline{X}_o \oplus \overline{Y}_o$; il existe a et b , éléments de A tels que $1 = a + b(I)$, on en déduit les relations :

$$E_{K_i} - E_{K_i} a \in I \quad \text{pour} \quad E_{k_i} \in S_o$$

$$E_K a \in I \qquad \text{pour} \quad E_K \in S - S_o$$

compte-tenue de la propriété 1, ces relations deviennent :

α) $e_n = e_n a e_n$ pour tout $n \in K_i$ sauf pour un nombre fini.

β) $e_n a e_n = 0$ pour tout $n \in K$ sauf pour un nombre fini.

Soit T le sous-ensemble de N défini ainsi : c'est l'ensemble des j, $j \in K_j$, avec $e_j = e_j a e_j$; $S \cup E_T$ forme un ensemble d'idempotents dépendants modulo I ; d'après la propriété 2 il existe $K_1, \dots K_n \in S$ tels que $K_i \not\supset T$ avec $T \cap \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ infini.

D'après la construction de T, les K_i appartiennent à $S - S_o$, la condition β), d'autre part, montre qu'il existe des $j \in T$ tels que $e_j a e_j = 0$ ce qui contredit le choix de T.

<u>Corollaire</u> [13] . <u>Un anneau</u> A <u>est semi-simple si et seulement si tout A-module de type fini est injectif (resp. quasi-injectif)</u>.

Car dans un A-module injectif (resp. quasi-injectif) tout sous-module complément est facteur direct absolu. Ce dernier résultat généralise un théorème de C. Faith et Y. Utumi, qui ont montré qu'un anneau A est semi-simple $\Longleftrightarrow$ tout A-module est quasi-injectif [3] .

2 - ETUDE DES SOUS-MODULES COMPLEMENTS DANS UN A-MODULE M AU MOYEN DES IDEAUX A GAUCHE MAXIMAUX DE A .

a) <u>Sous-module quasi-pur</u>.

<u>Définition 1</u>. Soit M un A-module ; un sous-module X de M sera dit <u>quasi-pur</u>, s'il vérifie la propriété suivante :

Si P est un idéal à gauche maximal de A et f une application linéaire de P dans X , qui se prolonge en une application linéaire de A_s dans M , alors f se prolonge en une application linéaire de A_s dans X .

Proposition 1. Tout sous-module complément X dans un A-module M est un sous-module quasi-pur.

Soient P un idéal à gauche maximal de A et f une application linéaire de P dans X qui se prolonge en une application linéaire g de A_s dans M ; il existe donc $x_o \in M$ tel que $g(a) = ax_o$ pour tout $a \in A$. Soit I une enveloppe injective de X contenue dans $E(M)$; on sait que $I \cap M = X$ (Th. 1.1.), et qu'il existe une application linéaire g' de A_s dans I qui prolonge f , on a donc $g'(a) = ax_1$, pour tout $a \in A$, où x_1 est un élément de I . Si $x_o = x_1$, alors $x_1 \in X$ et la proposition est démontrée, sinon $\mathrm{Ann}\,(x_o - x_1) = P$ et par suite $x_o - x_1$ appartient au socle de $E(M)$ donc à M qui est essentiel et finalement $x_1 \in M$.

Nous allons imposer à l'anneau A la condition suivante :

(C) L'anneau A est tel que, pour tout sous-module propre N essentiel dans un A-module M le socle de M/N est non nul.

L'anneau Z des entiers vérifie en particulier cette condition.

Définition 2. On appellera C-anneau un anneau vérifiant la condition précédente.

Théorème 2. Soient A un C-anneau et M un A-module ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est un sous-module complément dans M

(ii) X est un sous-module quasi-pur de M

(i) $\Longrightarrow$ (ii) cela résulte de la proposition 2.1.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit X un sous-module quasi-pur de M et soit X' une extension essentielle de X dans M ; si $X' \neq X$, le socle de X'/X est non nul, il existe donc un idéal à gauche maximal P de A et un élément x_o de X' avec $x_o \notin X$ tels que $P\,x_o \subset X$. Soit f l'application linéaire de P dans

X définie ainsi : $f(p) = p\,x_0$ pour tout $p \in P$; f se prolonge de façon évidente en une application linéaire de A_s dans M ; on peut donc trouver $x_1 \in X$ tel que $f(p) = p\,x_1$ pour tout $p \in P$ et on a $\mathrm{Ann}\,(x_0 - x_1) = P$, $x_0 - x_1$ appartient au socle de X', donc de X et $x_0 \in X$ contrairement à l'hypothèse, par suite $X = X'$ et le sous-module X qui n'admet pas d'extension essentielle propre dans M est un sous-module complément.

Lorsque A est l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers, la définition 2.1 prend la forme suivante : X est un sous-groupe quasi-pur d'un groupe abélien G, si pour tout nombre premier p et tout élément x_0 de X l'équation $px = x_0$ a une solution dans G, alors elle a une solution dans X. La notion de sous-groupe quasi-pur (appelé Neat subgroup) a été introduite par Honda ([5]. p. 92), qui dans ce cas a seulement démontré la proposition 2.1.

<u>Proposition 2.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau ne vérifiant pas la condition</u> (C) , <u>il existe un module</u> M <u>et un sous-module quasi-pur</u> X <u>de</u> M , <u>tels que</u> X <u>ne soit pas un sous-module complément dans</u> M .

Si A ne vérifie pas la condition C, il existe un module M et un sous-module propre X essentiel tels que le socle de M/X est nul ; X n'est évidemment pas un sous-module complément dans M, mais c'est un sous-module quasi-pur. En effet, soit f une application linéaire d'un idéal à gauche maximal P dans X qui se prolonge en une application linéaire de A_s dans M ; il existe $x_0 \in M$ tel que $P\,x_0 \subset X$, le socle de M/X est nul, donc $x_0 \in X$.

<u>Exemple d'anneau ne vérifiant pas (C)</u> :

Soient K un corps commutatif et N l'ensemble des entiers naturels ; considérons l'anneau produit $A = K^N$, si l'on pose $e_i = (k_j)_{j \in N}$ avec $k_j = 0$ pour $j \neq i$ et $k_i = 1$, le socle de K^N est le A-module $S = \bigoplus_i A\,e_i$; S est un idéal essentiel dans A, nous allons prouver que le socle de A/S est nul et pour cela, on montrera que si $\bar{x}$ désigne l'image d'un élément x de A avec $\bar{x} \neq 0$, il existe $\bar{y} \in A/S - \{0\}$ tel que $\mathrm{Ann}\,(\bar{x}) \subsetneq \mathrm{Ann}\,(\bar{y})$.

Si $\bar{x} \neq 0$, l'élément $x = (x_i)_{i \in N}$ admet une infinité de composantes non nulles. Soit I l'ensemble des i tels que $x_i \neq 0$. On peut écrire $I = I_1 \cup I_2$

où I_1 et I_2 sont des exemples infinis disjoints, si l'on pose $y = (y_i)_{i \in N}$, où $y_i = 0$ si $i \notin I_1$ et $y_i = x_i$, si $i \in I_1$, l'image $\bar{y}$ de y dans A/S est telle que $\mathrm{Ann}\,(\bar{y}) \supset \mathrm{Ann}\,(\bar{x})$ et de plus l'élément $a = (a_i)_{i \in N}$, avec $a_i = 0$ si $i \notin I_2$, $a_i = 1$ si $i \in I_1$, appartient à $\mathrm{Ann}\,(\bar{y})$ et $a \notin \mathrm{Ann}\,(\bar{x})$.

b) <u>Etude des C-anneaux.</u>

Nous allons tout d'abord donner quelques propriétés générales :

<u>Proposition 3.</u> <u>Pour qu'un anneau</u> A <u>soit un</u> C-<u>anneau, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche</u> J <u>essentiel dans</u> A_s, <u>le socle de</u> A_s/J <u>soit non nul</u>.

Il est clair que la condition est nécessaire. Réciproquement, soit M un sous-module propre essentiel d'un A-module E et soit x un élément non nul de E/M ; $\mathrm{Ann}\,(x) = J$ est un idéal à gauche essentiel dans A, il existe donc $\alpha \in A$, $\alpha \notin J$ et un idéal à gauche maximal P tel que $P\alpha \subset J$, en particulier $\mathrm{Ann}\,(\alpha x) = P$ et le socle de E/M est non nul.

<u>Remarque</u> :

Soit M un sous-module propre essentiel d'un A-module E où A est un C-anneau ; d'après ce qui précède, si $x \in E/M - \{0\}$, il existe $\alpha \in A$ avec $\alpha x \neq 0$, tel que αx soit un élément du socle S de E/M, on en déduit que S est essentiel dans E/M.

<u>Proposition 4.</u> <u>Tout anneau quotient d'un</u> C-<u>anneau</u> A, <u>est un</u> C-<u>anneau</u>.

Soit $A' = A/a$, où a est un idéal bilatère de A, et soit J/a un idéal à gauche essentiel dans A ; A est extension essentielle de J, il existe donc $x \notin J$ et un idéal à gauche maximal P tels que $Px \subseteq J$, $P \supset a$; si $\bar{x}$ est l'image de x dans A', on a $P/a\ \bar{x} \subseteq J/a$, $\bar{x} \notin J/a$, la proposition 2.3 permet de conclure.

<u>Proposition 5.</u> <u>Si</u> (A_i) $1 \leq i \leq n$ <u>est une famille finie de</u> C-<u>anneaux</u>, <u>l'anneau produit</u> $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ <u>est un</u> C-<u>anneau</u>.

Il suffit de démontrer la proposition pour $n = 2$, c'est-à-dire pour

$A = A_1 \times A_2$. Soit J un idéal à gauche essentiel dans A ; $J \cap A_1$ est un idéal à gauche essentiel dans A_1 , il existe donc un idéal à gauche maximal P_1 de A_1 et $x \in A_1$, $x \notin J \cap A_1$, tels que $P_1\, x \in J \cap A_1$. On en déduit $(P_1 \times A_2)\; x \subseteq J$, or $P_1 \times A_2$ est un idéal à gauche maximal de A d'où le résultat compte-tenu de la proposition 2.3.

Lorsque la famille $(A_i)_{i \in I}$ est infinie la propriété précédente est mise en défaut : on a vu que si K est un corps commutatif l'anneau produit K^N n'est pas un C-anneau.

Remarque :

Soient A un C-anneau et M un A-module ; pour que M soit un module injectif, il faut et il suffit que tout homomorphisme d'un idéal à gauche maximal P de A_s dans M se réalise par une homothétie ; car en effet, un tel module M est sous-module complément dans toute extension.

Nous allons consacrer un paragraphe spécial pour une étude plus détaillée des C-anneaux.

3 - DECOMPOSITION TERTIAIRE DANS LES MODULES SUR UN C-ANNEAU.

a) Idéaux bilatères premiers associés à un module.

Soit A un anneau unitaire quelconque, nous allons adapter certains résultats de N. Bourbaki (Algèbre commutative chap. IV) au cas non commutatif.

Définition 3. Soit M un A-module ; on dira qu'un idéal bilatère premier P de A est associé à M s'il existe un élément non nul x de M tel que pour tout $ax \neq 0$, $a \in A$, $\mathrm{Ann}\,(Aax) = P$. On notera $\mathrm{Ass}\,(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M .

Proposition 6. Soient A un anneau, M un A-module, N un sous-module de M on a :

$$\mathrm{Ass}\,(N) \subset \mathrm{Ass}\,(M) \subset \mathrm{Ass}\,(N) \cup \mathrm{Ass}\,(M/N)$$

Corollaire 1. Si $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, on a $\mathrm{Ass}\,(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}\,(M_i)$

Les démonstrations de la proposition 2.6 et de son corollaire 1 sont analogues à celles faites dans le cas commutatif.

Corollaire 2. Soient M un A-module ; $(Q_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-modules de M ; si $\bigcap_{i \in I} Q_i = (0)$ on a :

$$\mathrm{Ass}\,(M) \subset \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}\,(M/Q_i)$$

M se plonge dans le A-module $\bigoplus_{i \in I} (M/Q_i)$ et le corollaire 1 entraîne l'assertion. Lorsque la famille des $(Q_i)_{i \in I}$ est infinie, la conclusion du corollaire 2 est vraie lorsque $\prod_{i \in I} (M/Q_i)$ est extension essentielle de $\bigoplus_{i \in I} (M/Q_i)$, on vérifie facilement que $\mathrm{Ass} \bigoplus_{i \in I} (M/Q_i) = \bigcup \mathrm{Ass}\,(M/Q_i)$, en utilisant le corollaire 1 .

Proposition 7. Soient M un A-module, P un idéal bilatère premier associé à M . Il existe alors un sous-module N de M tel que $\mathrm{Ass}\,(M/N) = \{P\}$ et $\mathrm{Ass}\,(N) = \mathrm{Ass}\,M - \{P\}$.

Soit N un élément maximal de l'ensemble T des sous-modules S vérifiant $\mathrm{Ass}\,(S) \subset \mathrm{Ass}\,(M) - \{P\}$. M/N contient un sous-module F/N tel que $\mathrm{Ass}\,(F/N) = P'$, où P' est un élément quelconque de $\mathrm{Ass}\,(M/N)$.

D'après la proposition 2.7 $\mathrm{Ass}\,(F) \subset \mathrm{Ass}\,(N) \cup \{P'\}$. Comme N est maximal dans T , on a $F \notin T$, donc $P' = P$ et $\mathrm{Ass}\,(M/N) = P$.

b) Décomposition tertiaire.

Soit A un C-anneau, si N est un sous-module propre essentiel dans un A-module M , le module quotient M/N vérifie la condition suivante :

(E) pour tout x , élément non nul de M/N , il existe $a \in A$, avec $ax \neq 0$ tel que l'annulateur de tout sous-module propre de A ax soit un idéal premier.

En effet, si $x \in M/N - \{0\}$, on sait qu'il existe $a \in A$ tel que A ax soit un A-module simple.

Cette condition a été introduite par J. FORT [4], qui a montré les résultats suivants :

<u>Proposition 8. Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module vérifiant la condition</u> (E) ; <u>on a</u> :

(i) <u>Le radical tertiaire de</u> (0) <u>existe, c'est l'intersection des idéaux bilatères premiers associés à</u> M .

(ii) <u>Pour que</u> (0) <u>soit tertiaire, il faut et il suffit que</u> $\mathrm{Ass}\,(M) = \{P\}$; <u>on a alors</u> $R(0) = P$.

Introduisons maintenant la condition plus forte suivante :

(F) <u>le</u> A-<u>module</u> M <u>vérifie la condition</u> (E) <u>et si</u> N <u>est un sous-module propre de</u> M , M/N <u>vérifie également</u> (E) .

Nous allons poursuivre l'étude de J. FORT en étudiant la décomposition tertiaire dans les modules vérifiant (F) .

<u>Théorème 3. Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module vérifiant la condition</u> (F) ; <u>on a</u> :

$$(0) = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}\,(M)} N(P)$$

<u>où pour tout</u> $P \in \mathrm{Ass}\,(M)$, $N(P)$ <u>est un sous-module</u> P-<u>tertiaire ; cette décomposition est sans éléments superflus</u>.

Pour tout $P \in \mathrm{Ass}\,(M)$, d'après la proposition 2.7 , il existe un sous-module $N(P)$ tel que $\mathrm{Ass}\,(M/N(P)) = P$ et $\mathrm{Ass}\,(N(P)) = \mathrm{Ass}\,(M) - P$; $M/N(P)$ vérifie la condition (E) , la proposition 2.8 montre que $N(P)$ est P-tertiaire ; soit $a = \bigcap_{P \in \mathrm{Ass}\,(M)} N(P)$; si $a \neq (0)$, la condition (E) implique $\mathrm{Ass}\,(a) \neq \emptyset$; or $\mathrm{Ass}\,(a) \subset \bigcap_P \mathrm{Ass}\,(N/P) = \emptyset$ et $a = (0)$. Montrons que cette décomposition est sans éléments superflus. Sinon on aurait :

$$(0) = \bigcap_P N(P) \quad \text{ou } P \in \mathrm{Ass}\,(M) - P_o \qquad P_o \in \mathrm{Ass}\,(M)$$

le corollaire 2 de la proposition 2.6 entraîne :

$$\mathrm{Ass}\,(M) \subset \bigcup_P \mathrm{Ass}\,(M/N(P)) \quad ; \; P \in \mathrm{Ass}\,(M) - P_o$$

ce qui prouverait que $P_o \notin \mathrm{Ass}\,(M)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire. Soit A un C-anneau ; si N est un sous-module propre essentiel d'un module M il se décompose en une intersection sans éléments superflus de sous-modules tertiaires.

Le module quotient M/N vérifie la condition (F) ; le théorème 2.3 permet de conclure.

Le corollaire s'applique en particulier, pour les idéaux à gauche essentiels dans M , ce qui va nous permettre de donner la caractérisation suivante :

Théorème 4. Soit A un anneau ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est un C-anneau.

(ii) a) Tout idéal à gauche essentiel est intersection sans éléments superflus d'idéaux tertiaires.

b) Pour tout idéal Q tertiaire essentiel, le socle de A_s/Q est non nul.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) cela résulte du corollaire du théorème 2.3.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) en vertu de la proposition 2.3, il suffit de prouver que si J est un idéal à gauche essentiel dans A , le socle de A_s/J est non nul.

D'après (ii) on a $J = \bigcap_{i \in I} Q_i$, où les Q_i sont P_i-tertiaires ; soit $x \in A$ avec $x \notin Q_{i_o}$, $x \in \bigcap_i Q_i$ pour $i \in I - \{i_o\}$; l'ensemble Q des éléments a tels que $ax \in Q_{i_o}$ est un idéal P_{i_o}-tertiaire, si P_{i_o} est le radical tertiaire de Q_{i_o} et d'après b) on peut trouver $\beta \in A$, $\beta \notin Q$ tel que $Q \,{}^{\bullet}\!.\, \beta = P$ où P est un idéal à gauche maximal, on en déduit : $J \,{}^{\bullet}\!.\, \beta x = (J \,{}^{\bullet}\!.\, x) \,{}^{\bullet}\!.\, \beta = Q \,{}^{\bullet}\!.\, \beta = P$ et le socle de A_s/J est non nul.

Nous allons imposer au C-anneau A la condition suivante

[H] : Pour tout idéal à gauche maximal essentiel P de A , il existe un nombre fini d'éléments x_i de As/P , $1 \leq i \leq n$, tels que :

$$\mathrm{Ann}\,(As/(P)) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\,(x_i)$$

Proposition 9. Soit A un C-anneau vérifiant [H] ; tout idéal bilatère premier essentiel est maximal (en tant qu'idéal bilatère).

Soit P un idéal bilatère premier essentiel ; il existe $x \in As/P$ tel que Ax soit un A-module simple, avec $\mathrm{Ann}\,(Ax) = P$. D'après [H] , on peut trouver n éléments non nuls de Ax , $x_1, \dots, x_n$, avec $P = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\,(x_i)$; Soit C un idéal bilatère de A , avec $C \not\subseteq P$, on a $Ax = Cx$:

Lemme [12] . Il existe $c \in C$, tel que $x_i = c\, x_i$ $1 \leq i \leq n$.

En effet, on a $A\,x_1 = C\,x_1$ et il existe c_1 , tel que $x_1 = c_1\, x_1$, supposons pour $1 \leq i \leq n-1$, il existe $c_o \in C$ avec $x_i = c_o\, x_i$; si $x_n = c_o\, x_n$ la propriété est vraie, sinon il existe $c' \in C$ tel que $x_n - c_o\, x_n = c'(x_n - c_o\, x_n)$; on posera $c = c_o + c' - c'c$ et on a $x_i = c\, x_i$ $1 \leq i \leq n$.
On en déduit $1 - c \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\,(x_i) = P$ et $C \not\supset P$.

Lorsque l'anneau A vérifie [H] , on peut expliciter les composants tertiaires d'un idéal à gauche essentiel à : Pour tout idéal bilatère premier P associé à As/a , on notera $a(P)$ l'ensemble des éléments x de A , tels que $a \cdot . (Ax) \not\subset P$. Il est facile de vérifier que a est l'intersection des idéaux $a(P)$ lorsque P parcourt $\mathrm{Ass}\,(As/a)$ cette intersection étant sans éléments superflus. Nous allons prouver que $\mathrm{Ass}\,(A/a(P)) = P$; Remarquons que la condition [H] entraîne que P est un idéal essentiel, la proposition 2.9 implique que P est un idéal bilatère maximal. D'après la définition de $a(P)$, si $P' \in \mathrm{Ass}\,(A/a(P))$, nécessairement $P' \subset P$, la proposition 2.9 entraîne $P = P'$ et $a(P)$ est P-tertiaire.

Proposition 10. Soit A un anneau noethérien à gauche ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est un C-anneau

(ii) Pour tout idéal à gauche essentiel J , As/J est un A-module de longueur finie.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Car si J est un idéal à gauche essentiel, le A-module A_s/J vérifie la condition de chaine descendante et contient donc des A-modules simples.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit J un idéal à gauche essentiel ; nous allons construire une suite de Jordan-Holder du module $M = A_s/J$; on pose $M_o = (0)$; $M_1 = J_1/J$ sera un A-module simple qui existe par hypothèse. De proche en proche on construit une suite strictement croissante de modules M_i , tels que M_i/M_{i-1} soit un A-module simple, cette suite est finie et A_s/J est de longueur finie.

Corollaire. Soit A un C-anneau noethérien ; si P est un idéal bilatère premier essentiel, l'anneau A/P est simple.

D'après la proposition 2.10, A/P est un anneau premier artinien, donc simple. Ce corollaire entraîne que si P est un idéal bilatère premier essentiel, alors P est un idéal bilatère maximal.

On suppose maintenant que l'anneau noethérien A vérifie la condition suivante :

[H'] Si M est un A-module de type fini il existe un nombre fini d'éléments de M tels que $\mathrm{Ann}\ (M) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\ (x_i)$

Théorème 5. Soit A un anneau noethérien à gauche vérifiant [H'] , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est un C-anneau.

(ii) Tout idéal bilatère premier essentiel est primitif.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) si P est un idéal bilatère premier essentiel, le A-module A/P contient un A-module simple.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit J un idéal à gauche essentiel dans A ; la condition [H'] montre que les idéaux bilatères premiers associés au module A_s/J sont essentiels, donc primitifs. D'après un résultat de P. Gabriel [6] on sait qu'il y a correspondance biunivoque entre idéaux bilatères premiers et types d'injectifs indécomposables ; cette correspondance entraîne que le socle de A_s/J est non nul. On se reportera à [6] pour des exemples d'anneaux A vérifiant [H'] ; en particulier pour qu'un anneau commutatif noethérien, soit un C-anneau il faut et il suffit que tout idéal premier essentiel soit maximal, les anneaux artiniens commutatifs ou non, les anneaux de Dedekind sont des C-anneaux.

Remarque sur les idéaux bilatères premiers :

On a déjà vu que si P est un idéal bilatère premier essentiel, il est primitif ; supposons P non primitif A_s/P est un A-module de socle nul et P n'admet pas d'extension essentielle propre : c'est un sous-module complément dans A . Lorsque A est commutatif noethérien, si P est un idéal premier non maximal, c'est le seul idéal P-primaire, il est facile de prouver que $P = P^2$ et que P est un facteur direct dans A . Donnons un exemple de C-anneau non noethérien (Bourbaki) :

Soient K un corps commutatif, V un espace vectoriel de dimension infinie sur K ; $A = K \oplus V$ sera l'anneau dont la multiplication est donnée par :

$$(a, x) \circ (a', x') = (aa', ax' + a'x)$$

de la relation $(a, x)^n = (a^n, n\, a^{n-1} x)$, on déduit que la racine de (0) est V , c'est un idéal maximal tel que $V^2 = (0)$ et A est un C-anneau.

***

CHAPITRE III

INTERSECTIONS DE SOUS-MODULES COMPLEMENTS

***

Soit M un A-module ; si X_1 et X_2 sont deux sous-modules compléments dans M , $X_1 \cap X_2$ n'est pas en général un sous-module complément. Nous allons tout d'abord étudier les intersections de sous-modules injectifs d'un A-module injectif E , ensuite nous caractériserons des modules M tels que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

1 - INTERSECTIONS DE SOUS-MODULES INJECTIFS.

Nous allons rappeler diverses propriétés de l'anneau des endomorphismes d'un module injectif.

Proposition 1. Le radical de Jacobson R(B) de l'anneau des endomorphismes B d'un A-module injectif E est l'ensemble des endomorphismes essentiels de E ; l'anneau quotient $B/_{R(B)}$ est un anneau régulier.

Soit φ un endomorphisme essentiel de E : c'est un endomorphisme dont le noyau est un sous-module essentiel dans E . Pour tout f appartenant à B , f o φ est un endomorphisme essentiel ; montrons que φ est un élément de R(B) . Pour cela, nous allons prouver que l'endomorphisme $1 - \varphi$ est une injection quelque soit l'endomorphisme essentiel φ . Soit x , élément de E , tel que $x = \varphi(x)$; si x n'appartient pas à ker φ , il existe a , élément de A , tel que $ax \in \ker \varphi - \{0\}$; on aurait donc $ax = \varphi(ax) = 0$, il y a contradiction et $\ker (1 - \varphi) = (0)$.

$1 - \varphi$ est une surjection : en effet, si $F = \mathrm{Im}\,(1 - \varphi)$ est un sous-module injectif différent de E on a $E = F \oplus F'$, où F' est un sous-module injectif non nul ; soit x un élément de $F' - \{0\}$; ker φ est un sous-module essentiel de E , il existe donc $a \in A$, avec $ax \neq 0$ tel que $ax \in \ker \varphi$, on a $ax = (1 - \varphi)(ax)$ et ax est un élément non nul de F ce qui est contraire à l'hypothèse.

Réciproquement, soit φ un élément de R(B) ; φ n'est pas inversible et par suite $\ker \varphi \neq (0)$. Supposons le sous-module $\ker \varphi$ non essentiel dans E ; on désignera par I un supplémentaire de l'enveloppe injective $E(\ker \varphi)$ de $\ker \varphi$ dans E et par p (resp. q) la projection canonique de E sur $E(\ker \varphi)$ (resp. I) parallèlement à I (resp. $E(\ker \varphi)$). L'endomorphisme $\varphi \circ p$ est essentiel, il appartient donc à $R(B)$, par suite $\varphi \circ q = \varphi - \varphi \circ p$ appartient à $R(B)$. De la relation $\ker \varphi \circ q = \ker p$, on déduit l'égalité des idéaux $B\varphi \circ q$ et Bp et $p \in R(B)$, ce qui est impossible car on a $p(1-p) = 0$ et $1-p$ n'est pas inversible.

Soit f un élément non inversible de B n'appartenant pas à $R(B)$; on a $E = E(\ker f) \oplus I$ et $f = f \circ p + f \circ q$ (mêmes notations que ci-dessus). De l'inégalité $\ker q \supset \ker f$ on déduit l'existence d'un endomorphisme g tel que $q = g \circ f$ et $f = f \circ p + f \circ g \circ f$ avec $f \circ p \in R(B)$ et l'anneau quotient $R/R(B)$ est régulier.

<u>Lemme 1. Soit</u> M <u>un sous-module d'un</u> A-<u>module injectif</u> E ; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) M <u>est l'intersection d'une famille de sous-modules injectifs de</u> E .

(ii) M <u>est l'intersection d'une famille d'enveloppes injectives de</u> M <u>contenues dans</u> E .

En effet, il suffit de remarquer que si F est un sous-module injectif de E contenant M , alors F contient une enveloppe injective de M .

Soit $M = \bigcap_{i \in I} E_i$, un sous-module de F , où E_i est une enveloppe injective de M pour tout i . Si E_o est une enveloppe injective particulière de M , on appellera F_o un supplémentaire de E_o dans E et p la projection canonique de E sur F_o parallèlement à E_o . Pour tout i , il existe un isomorphisme f_i de E_o sur E_i qui est l'identité sur $E_o \cap E_i$, l'application $h_i = p \circ f_i$ est un homomorphisme de E_o dans F_o de noyau $E_o \cap E_i$ et on a $M = \bigcap_{i \in I} \ker h_i$. Réciproquement, soit M un A-module, tel qu'il existe une famille d'homomorphismes h_i de E_o dans F_o avec $M = \bigcap_{i \in I} \ker h_i$, où E_o est une enveloppe injective de M contenue dans E et F_o un supplémentaire de E_o dans E ; on désignera par q la projection canonique de E sur E_o parallèlement à F_o. Si on pose $\varphi_i = h_i \circ q$, on a $\ker \varphi_i = F_o \oplus \ker h_i$ et φ_i est un endomorphisme essentiel de E ; d'après la proposition 3.1 ; $(1 - \varphi_i)$ est une injection. Si on note E_i, le sous-module $(1 - \varphi_i)(E_o)$ on a $E_o \cap E_i = \ker h_i$ et finalement $M = E_o \cap \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right)$ d'où :

<u>Théorème 1</u>. <u>Soit</u> M <u>un sous-module d'un</u> A-<u>module injectif</u> E ; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) M <u>est l'intersection d'une famille de sous-modules injectifs de</u> E.

(ii) <u>Il existe une famille d'homomorphismes</u> h_i <u>d'une enveloppe injective</u> E_o <u>de</u> M <u>contenue dans</u> E <u>dans un supplémentaire de</u> E_o <u>dans</u> E <u>telle que</u> :

$$M = \bigcap_{i \in I} \ker h_i$$

Nous allons appliquer ce théorème aux modules injectifs, somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables.

<u>Lemme 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un</u> A-<u>module injectif somme directe de deux sous-modules injectifs indécomposables</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>tel que l'intersection de deux sous-modules injectifs de</u> E <u>soit un sous-module injectifs</u> ; <u>si</u> f <u>est un homomorphisme de</u> E_1 <u>dans</u> E_2 <u>on a</u> $f = 0$ <u>ou</u> $\ker f = 0$.

Si f est un homomorphisme non nul de E_1 dans E_2, d'après le théorème 3.1 $\ker f$ est une intersection de sous-modules injectifs et $\ker f = 0$.

On en déduit que si les sous-modules E_1 et E_2 ne sont pas isomorphes, alors $\hom(E_1, E_2) = (0)$.

Soit E_o un sous-module injectif et indécomposable d'un module injectif E, on dit que E est <u>isotypique de type</u> E_o, s'il est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables isomorphes à E_o.

<u>Théorème 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un</u> A-<u>module injectif isotypique de type</u> E_o ; <u>pour que toute intersection de sous-modules injectifs de</u> E <u>soit un sous-module injectif, il faut et il suffit que l'anneau des endomorphismes de</u> E_o <u>soit un corps</u>.

Pour montrer que la condition est nécessaire, il suffit de considérer le cas d'un module injectif de dimension 2 , $E = E_o \oplus E_1$; on désignera par φ un isomorphisme de E_o sur E_1 . Soit f un endomorphisme non nul de E_o ; le sous-module $\ker \varphi \circ f$, différent de E_o , est une intersection de sous-modules injectifs d'après le théorème 3.1 ; par suite $\ker \varphi \circ f = (0)$ et $\ker f = (0)$: l'anneau des endomorphismes de E_o est un corps.

Réciproquement, soit E un A-module injectif isotypique de type E_o , tel que l'anneau des endomorphismes de E_o soit un corps. Supposons qu'il existe un sous-module N de E , non injectif, qui est intersection de sous-modules injectifs ; on peut trouver alors un sous-module injectif indécomposable d'une enveloppe injective de N contenue dans E avec $E_1 \not\subset N$ et $E_1 \cap N$ est un sous-module co-irréductible intersection de sous-modules injectifs : on peut donc supposer N co-irréductible d'enveloppe injective E_1 . Si F est un supplémentaire de E_1 dans E , d'après le théorème 3.1 , il existe des homomorphismes h_i de E_1 dans F tels que $N = \bigcap_i \ker h_i$; on peut supposer $h_i \neq 0$ pour tout i . Si h_i est un homomorphisme particulier ; il existe un sous-module injectif indécomposable E'_1 de F tel que $E'_1 \cap h_i(E_1) \neq (0)$; si l'on désigne par p la projection canonique de F sur E'_1 parallèlement à un supplémentaire de E'_1 dans F et par φ l'isomorphisme de E'_1 sur E_1 , l'homomorphisme $f = \varphi \circ p \circ h_i$ est un endomorphisme de E_1 non nul et non inversible et l'anneau des endomorphismes de E_1 n'est pas un corps.

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ <u>un</u> <u>A-module injectif somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables ; pour que toute intersection de sous-modules injectifs de</u> E <u>soit un sous-module injectif, il faut et il suffit, que pour tout couple</u> (E_i, E_j) <u>l'une des conditions suivantes soit satisfaite</u> :

a) $\mathrm{Hom}(E_i, E_j) = (0)$

b) <u>si</u> $\mathrm{Hom}(E_i, E_j) \neq (0)$; <u>alors</u> E_i <u>et</u> E_j <u>sont isomorphes et</u> $\mathrm{Hom}(E_i, E_i)$ <u>est un corps</u>.

C'est une conséquence facile du lemme 3.2 , et du théorème 3.2 . Nous allons montrer que, moyennant certaines conditions, il existe "beaucoup" de sous-modules d'un A-module injectif E , intersection de sous-modules injectifs.

On se bornera, dans ce qui suit, à l'étude des modules injectifs sur un anneau A vérifiant la condition suivante :

[H] : Si P est un idéal à gauche maximal contenant un idéal à gauche essentiel J , il existe $x \in A$, $x \notin J$ tel que $Px \subseteq J$.

L'anneau A est un C-anneau (Chap. II) ; compte-tenu du théorème 2.4 , il est facile de montrer le résultat suivant : un C-anneau commutatif A vérifie [H] $\Longleftrightarrow$ tout idéal essentiel est intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires. Les C-anneaux commutatifs noethériens vérifient [H] .

Lemme 3. Soit M un A-module tel que pour tout $x \in M$, Ann (x) soit un idéal à gauche essentiel ; si N est un sous-module non nul de M , alors l'ensemble des types d'isotypie du socle de M/N est contenu dans l'ensemble des types d'isotypie du socle de M .

Soit x un élément de $M - N$ avec $Px \subseteq N$, où P est un idéal à gauche maximal de A ; Ann $(x) = J$ est un idéal à gauche essentiel et $P \supset J$. Par hypothèse, il existe $a \in A$, $a \notin J$ tel que $P\,ax = 0$ et ax appartient au socle de M .

Si M est un A-module, on notera S(M) le socle de M .

Proposition 2. Soit M un sous-module non injectif d'un A-module injectif E ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) M est l'intersection d'une famille de sous-modules injectifs de E .

b) Si E_o désigne une enveloppe injective de M contenue dans E et F_o un supplémentaire de E_o dans E , l'ensemble des types isotypie de $S(E_o/M)$ est contenu dans l'ensemble des types d'isotypie de $S(F_o)$.

Soit N un sous-module simple de E_o/M ; d'après le théorème 3.1 , il existe un homomorphisme g de E_o/M dans F_o avec $g(N) \neq (0)$ et g(N) est un sous-module simple de F_o isomorphe à N , ce qui montre que (a) $\Longrightarrow$ (b) .

(b) $\Longrightarrow$ (a) . Posons $S(E_o/M) = \bigoplus_{j \in J} S_j$, où les S_j sont des A-modules simples. Par hypothèse, pour tout $j \in J$, il existe un sous-module simple S'_j de F_o isomorphe à S_j ; si φ_j désigne l'isomorphisme de S_j sur S'_j et P_j la projection canonique de $S(E_o/M)$ sur S_j parallèlement aux autres facteurs, l'application $\varphi_j \circ P_j$ de $S(E_o/M)$ sur S'_j se prolonge en un homomorphisme $\bar{h}_j$ de E_o/M dans F_o qui est un A-module injectif. On en déduit immédiatement une application h_j de E_o dans F_o et on a $M = \bigcap_{j \in J} \ker h_j$; le théorème 3.1 permet de conclure.

On peut remarquer que cette proposition est valable pour les modules sur un C-anneau, car on a simplement utilisé le fait que le socle de E_o/M est non nul.

Corollaire 1. Si M est un module vérifiant les conditions de la proposition 3.2 , tout sous-module P tel que $M \subset P \subset E_o$ est intersection de sous-modules injectifs.

D'après le lemme 3.3 , l'ensemble des types d'isotypie du socle du module quotient $E_o/M / P/M$ est contenu dans l'ensemble des types d'isotypie de E_o/M , donc de F_o (proposition 3.2) et E_o/P est isomorphe à $E_o/M / P/M$ d'où le corollaire.

Lemme 4. Soient $M \subset P$ deux sous-modules propres essentiels dans un module injectif E_o sur un anneau A commutatif ; l'ensemble des types d'isotypie de $S(E_o/p)$ est égal à l'ensemble des types d'isotypie de $S(E_o/M)$, lorsque P/M ne contient pas de sous-modules injectifs.

En vertu du lemme 3.3 il suffit de prouver que l'ensemble des types d'isotypie de $S(E_o/M)$ est contenu dans l'ensemble des types d'isotypie de $S(E_o/P)$, car E_o/p est isomorphe au module quotient $E_o/M / P/M$. Soit G une enveloppe injective de E_o/M contenant P/M et soit $x \in E_o/M$, $x \neq 0$ tel que Ann (x) soit un idéal maximal R ; si E(Ax) est une enveloppe injective de Ax contenue dans G , il existe $y \in E(Ax)$, $y \notin P/M$; l'idéal $J = (P/M \,^{\bullet}.\, y)$ est un idéal essentiel contenu dans R , A vérifie la condition [H] , il existe donc $a \in A$, $a \notin J$ tel que $R\, ay \subseteq P/M$ d'où le résultat.

Corollaire 2. Soit M un sous-module d'un A-module injectif E , où A est un anneau commutatif, tel que M soit intersection de sous-modules injectifs ; si P est un sous-module de M admettant une extension essentielle maximale X dans M et si X/P ne contient pas de sous-modules injectifs, alors P est intersection de sous-modules injectifs de E .

Si P est un sous-module essentiel de M , la propriété est vraie d'après le lemme 3.4 et la proposition 3.2. Supposons P non essentiel, soit X une extension essentielle maximale de P dans M ; d'après le théorème 1.1, X est intersection de sous-modules injectifs et le lemme 3.2 entraîne l'assertion.

Applications aux sous-modules compléments dans un A-module M .

Soit M un A-module d'enveloppe injective E ; on sait (théorème 1.1) que les sous-modules de M , intersection de sous-module compléments dans M sont les traces sur M des intersections de sous-modules injectifs de E , le corollaire 3.1, se généralise de la façon suivante :

Corollaire 1'. Soient $Q \subset P$ deux sous-modules propres distincts essentiels dans un sous-module complément X dans M ; si Q est intersection de sous-modules compléments dans M , alors P possède également cette propriété.

On a $Q = Q_o \cap M$, où Q_o est intersection de sous-modules injectifs de E . Soit E_o une enveloppe injective de X contenant Q_o et P , si $P_o = Q_o + P$ on a : $P_o \cap M = P$ et $Q_o \subset P_o$, d'après le corollaire 3.1 P_o est intersection de sous-modules injectifs et P est intersection de sous-modules compléments.

Exemples :

Soit M le $\mathbb{Z}$-module $M = \mathbb{Z} \oplus \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/(p) \right)$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers ; nous allons montrer que tout sous-module de $\mathbb{Z}$ est intersection de sous-modules compléments dans M . Pour cela, il suffit de prouver que $\mathbb{Z}\, p^n$ est intersection de sous-modules compléments pour tout $n > 0$;
$\mathbb{Z}\, p^n = \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}\,(p^{n-1}, \bar{1})$ où $\bar{1}$ est l'image canonique de 1 dans $\mathbb{Z}/(P)$ et $\mathbb{Z}\,(p^{n-1}, \bar{1})$ est un sous-module complément dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p)$ donc dans M , pour le démontrer on procède de la même façon qu'au chapitre I , paragraphe III.

Soit A un C-anneau noethérien à gauche ; tout A-module M est intersection de sous-modules injectifs d'un certain module injectif E contenant M .

Soit E_o une enveloppe injective de M ; le socle S de E_o/M est de la forme $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$ où les S_i sont des A-modules simples et on a $E(S) = \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$ car l'anneau A est noethérien. Posons $E = E_o \oplus E(S)$, d'après la proposition 3.2, M est l'intersection d'une famille de sous-modules injectifs de E .

2 - CARACTERISATION DES MODULES M , TELS QUE TOUTE INTERSECTION DE SOUS-MODULES COMPLEMENTS DANS M EST UN SOUS-MODULE COMPLEMENT .

Les anneaux considérés dans cette seconde partie sont quelconques.

Théorème 3. Soit M un A-module ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(ii) Pour que X , sous-module de M , soit un sous-module complément, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :

(I) $x \notin X \Longrightarrow$ il existe $a \in A$ avec $ax \neq 0$ tel que $Aax \cap X = (0)$

(iii) Toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si M est un sous-module co-irréductible c'est évident.

Supposons que M ne soit pas co-irréductible ; soit X un sous-module complément dans M ayant la propriété suivante : il existe $x \notin X$ tel que pour tout $a \in A$ avec $ax \neq 0$, $Aax \cap X \neq (0)$. Si Ax est essentiel dans M , on peut trouver $b \in A$, avec $bx \notin X$ tel que A b x ne soit pas essentiel et l'élément bx a la même propriété que x : on peut donc supposer Ax non essentiel dans M . Soit X' une extension essentielle maximale de Ax dans M , l'hypothèse faite sur x entraîne que X' est extension essentielle de $X' \cap X$ et par suite $X' = X' \cap X$ et $x \in X$ ce qui est contraire au choix de x .

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules compléments dans M et soit $X = \bigcap_i X_i$; si $x \notin X$ il existe $i \in I$ tel que $x \notin X_i$; on peut donc trouver $a \in A$ avec $ax \neq 0$ vérifiant $Aax \cap X_i = (0)$ et à fortiori $Aax \cap X = (0)$. Le sous-module X ne peut donc admettre d'extension essentielle propre ; c'est donc un sous-module complément dans M (prop. 1.1)

(iii) $\Longrightarrow$ (i) évident.

Le théorème précédent nous conduit à la définition suivante :

<u>Définition 1</u>. Soit M un A-module ; un sous-module X de M sera dit <u>fermé</u> s'il possède la propriété suivante :

Pour tout $x \notin X$, il existe $a \in A$ avec $ax \neq 0$ tel que $Aax \cap X = (0)$.

Un sous-module fermé est en particulier un sous-module complément. Si X' est un complément relatif du sous-module fermé X , X' n'est pas nécessairement fermé comme le montre l'exemple suivant : soit M le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$; $(0) \times \mathbb{Z}/(2)$ est un sous-module fermé : si $(x, y) \notin (0) \times \mathbb{Z}/(2)$ alors $x \neq 0$ et on a $\mathbb{Z}\, 2(x, y) \cap (0) \times \mathbb{Z}/(2) = (0)$; le sous-module $\mathbb{Z} \times (0)$ est un complément relatif non fermé, en effet, si $(x, y) \in M$ avec x et y non nuls, on a quel que soit l'entier n .

$$\mathbb{Z}\, n\, (x, y) \cap \mathbb{Z} \times (0) \neq (0)$$

<u>Exemples</u> :

Soit A un anneau commutatif intègre ; si M est un A-module, le sous-module de torsion de M est un sous-module fermé.

Si A est un anneau commutatif noethérien sans éléments nilpotents, les idéaux compléments dans A sont les idéaux premiers minimaux : ce sont des idéaux fermés.

Si X est un sous-module d'un module M , pour tout $x \in X$ on notera $X^{\cdot}.\, x$ l'idéal à gauche des éléments $a \in A$ tels que $ax \in X$.

Proposition 3. Soit M *un* A-*module ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Toute intersection de sous-modules compléments dans* M *est un sous-module complément.*

(ii) *Pour tout sous-module complément* X *dans* M *et tout* $x \in M$, $x \notin M$, $X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}(x)$ *est un sous-module fermé de* $A/\mathrm{Ann}(x)$.

Si $\alpha \in A$, on notera $\bar{\alpha}$ l'image de α dans $A/\mathrm{Ann}(x)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) soit $\bar{\alpha} \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}(x)$, alors $\alpha \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ et $\alpha x \notin X$. X est un sous-module fermé, il existe $a \in A$ avec $a \alpha x \neq 0$ tel que $A a \alpha x \cap X = (0)$ et $A a \alpha \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x$ est contenu dans $\mathrm{Ann}(x)$ d'où $A a \bar{\alpha} \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}(x) = (0)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) soit X un sous-module complément dans M et soit $x \notin X$; $X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}(x)$ est un sous-module fermé dans $A/\mathrm{Ann}(x)$, il existe donc $\bar{a} \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}(x)$ tel que $A \bar{a} \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}(x) = (0)$, soit $A a \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x \subset \mathrm{Ann}(x)$ et par suite $Aax \cap X = (0)$; X est un sous-module fermé et le théorème 3.3 permet de conclure.

L'assertion (iii) du théorème 3.3 montre que si un A-module M est tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément, alors pour tout sous-module N de M , il existe un plus petit sous-module complément $\bar{N}$ contenant N , à savoir l'intersection de tous les sous-modules compléments contenant N : cette propriété est caractéristique.

Proposition 4. Pour un A-*module* M , *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *toute intersection de sous-modules compléments dans* M *est un sous-module complément.*

(ii) *Pour tout sous-module* X *de* M , *il existe un plus petit sous-module complément* $\bar{X}$ *contenant* X .

On a déjà vu que (i) $\Longrightarrow$ (ii)

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soient X_1 et X_2 deux sous-modules compléments dans M ; on a les inclusions suivantes : $\overline{X_1 \cap X_2} \subset \overline{X_1} = X_1$; $\overline{X_1 \cap X_2} \subset X_2$.
Et par suite $\overline{X_1 \cap X_2} = X_1 \cap X_2$.

Dans un A-module M , deux sous-modules N et N' de M seront dits équivalents ($N \rho N'$) s'ils ont même ensemble de compléments relatifs.

Lemme 5. Pour que deux sous-modules N et N' de M soient équivalents il faut et il suffit qu'ils soient extensions essentielles de $N \cap N'$.

Soit S un sous-module de N' tel que $S \cap (N \cap N') = (0)$; en particulier $S \cap N = (0)$ et S est contenu dans un complément relatif de N donc de N' et par suite $S = (0)$. Réciproquement si N et N' sont extensions essentielles de $N \cap N'$, la relation $S \cap N = (0)$, équivaut à $S \cap (N \cap N') = (0)$ donc à $S \cap N' = (0)$. Nous allons maintenant généraliser un théorème de A.W GOLDIE [7] p. 220.

Théorème 4. Pour un A-module M , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(ii) Si N, N', P, P' sont des sous-modules de M , alors les relations :

$$N \rho N' \text{ et } P \rho P' \Longrightarrow (N + P) \rho (N' + P') \qquad (I)$$

Remarquons tout d'abord que la condition (I) ci-dessus est équivalente à la condition (II) suivante :

$$\left.\begin{array}{l} N \subset S \\ N \rho N' \end{array}\right. \Longrightarrow (N' + S) \rho S$$

(I) $\Longrightarrow$ (II) c'est évident

(II) $\Longrightarrow$ (I) prenons $S = N + P$, on a donc $(N' + N + P) \rho (N + P)$, de même la relation $N' \subset N' + P$ entraîne $(N' + N + P) \rho (N' + P)$ et finalement $(N + P) \rho (N' + P)$; en faisant jouer à P et P' le rôle de N et

N' on démontrerait la relation $(N' + P) \rho (N' + P')$ d'où $(N + P) \rho (N' + P')$.

Etablissons maintenant le théorème :

(i) $\Longrightarrow$ (II) : soient N , et N' , P des sous-modules de M vérifiant :

$N \subset P$; $N \rho N'$, le lemme 3.5 et la proposition 3.4 entraînent les relations suivantes : $\overline{N} = \overline{N'} = \overline{N \cap N'} \subset \overline{P}$; on en déduit que les sous-modules P et $P + N'$ sont essentiels dans $\overline{P}$ et $P \rho (N' + P)$.

(II) $\Longrightarrow$ (i) : Soit N un sous-module de M ; nous allons montrer qu'il existe un seul sous-module complément $\overline{N}$ extension essentielle de N .

Soient X_1 et X_2 deux sous-modules compléments extensions essentielles de N on a : $N \subset X_2$; $N \rho X_1$, la condition (II) entraîne $(X_1 + X_2) \rho X_2$; d'après le lemme 3.5 $X_1 + X_2$ est extension essentielle de X_2 et par suite

$$X_1 + X_2 = X_2 \qquad \text{et} \qquad X_1 = X_2 \ .$$

Nous allons caractériser les A-modules M tels que toute intersection de sous-modules compléments dans M soit un sous-module complément en donnant des conditions ne faisant pas intervenir les sous-modules compléments, pour cela, nous allons étudier les sous-modules compléments non fermés dans un module M quelconque.

Soit X un sous-module complément non fermé dans un A-module M ; il existe donc $x \notin X$ tel que pour tout $a \in A$ avec $ax \neq 0$, on a $A\,ax \cap X \neq (0)$ il s'en suit que $X \,^{\bullet}\!.\, x$ est un idéal à gauche essentiel dans A : en effet soit $\alpha \notin X \,^{\bullet}\!.\, x$, il existe $a \in A$ avec $a \alpha x \neq 0$ tel que $a \alpha x \in X$ et $a \alpha \in X \,^{\bullet}\!.\, x - \{0\}$.

<u>Lemme 6.</u> <u>Si</u> X <u>est un sous-module de</u> M , <u>l'ensemble des éléments</u> x <u>de</u> M <u>tels que</u> $X \,^{\bullet}\!.\, x$ <u>soit essentiel dans</u> A <u>est un sous-module</u> X' <u>contenant</u> X . <u>En effet on a les relations</u> :

$$X \,^{\bullet}\!.\, (x + y) \supset (X \,^{\bullet}\!.\, x) \cap (X \,^{\bullet}\!.\, y)$$

$$X \,^{\bullet}\!.\, ax = (X \,^{\bullet}\!.\, x) \,^{\bullet}\!.\, a$$

Quels que soient, x, y éléments de M et $a \in A$. Il suffit donc de montrer que si J est un idéal à gauche essentiel dans A, $J \,^{\bullet}.\, a$ est un idéal essentiel pour tout $a \in A$, ce qui est facile.

Si X est un sous-module complément non fermé dans M on a $X' \supset X$ avec $X' \neq X$ et si Y est un complément relatif de X dans M, $X' \cap Y$ est un sous-module non nul ; si $x \in X' \cap Y$ on a : $X \,^{\bullet}.\, x = \mathrm{Ann}(x)$ d'où :

Proposition 5. Tout complément relatif d'un sous-module complément non fermé dans un A-module M contient un élément non nul dont l'annulateur est un idéal à gauche essentiel dans A.

Rappelons la définition suivante : si M est un A-module, on appelle sous-module singulier de M, l'ensemble des éléments x de M tels que $\mathrm{Ann}(x)$ soit un idéal à gauche essentiel dans A.

Corollaire 1. Si X est un sous-module complément contenant le sous-module singulier $j(M)$ d'un A-module M, alors X est un sous-module fermé et $j(M)$ admet une seule extension essentielle maximale dans M.

Si X_1 et X_2 sont deux extensions essentielles maximales de $j(M)$ dans M ce sont des sous-modules fermés et $X_1 \cap X_2$ est un sous-module complément contenant $j(M)$ et $X_1 = X_2 = \overline{j(M)}$, en utilisant la proposition 1.2 on voit immédiatement que dans le module quotient $M/j(M)$, l'intersection de deux sous-modules compléments est un sous-module complément.

Corollaire 2. (R.E. JOHNSON) Dans un A-module M dont le sous-module singulier est nul, toute intersection de sous-modules compléments est un sous-module complément.

Les anneaux commutatifs sans éléments nilpotents, les anneaux réguliers sont des anneaux dont l'idéal singulier est nul ; ces anneaux ont la propriété importante d'admettre comme enveloppe injective des anneaux réguliers.

Lemme 7. Soit X un sous-module complément non fermé dans un module M ; il existe un élément non nul y de M tel que $Ay \cap X = (0)$ et un élément x *non nul de* X *tels que* $A(x + y)$ *soit extension essentielle de* $A(x + y) \cap X$.

Il existe $z \in M$, $z \notin X$ tel que pour tout $a \in A$ avec $az \neq 0$ on ait $Aaz \cap X \neq (0)$ et $z \notin X'$ où X' est un complément relatif de X dans M . $X + Az$ est un sous-module contenant strictement X , le sous-module $(X + Az) \cap X'$ est donc non nul ; soit y un élément non nul de X' et x un élément de X tels que $y + x = bz$; $bz \neq 0$; x est différent de zéro car sinon on aurait $Abz \cap X = (0)$ contrairement au choix de z et pour tout $\alpha \in A$ avec $\alpha(x + y) \neq 0$ on a $A \alpha (x + y) \cap X \neq (0)$ et $A(x + y)$ est extension essentielle de $A(x + y) \cap X$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 5. Soit M *un* A-*module ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un sous-module complément dans* M *non fermé.*

(ii) *il existe deux éléments non nuls* x *et* y *de* M *tels que :*

a) $A\,x \cap A\,y = (0)$.

b) $A/\mathrm{Ann}(y)$ *est extension essentielle de* $\mathrm{Ann}(x) / \mathrm{Ann}(y)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Soit X un sous-module complément dans M extension essentielle de Ay ; $Ax \cap X = (0)$ et on a d'autre part $X \,^{\bullet}.\, (x + y) = A \,^{\bullet}.\, x = \mathrm{Ann}(x)$.

La relation b) s'écrit : $A/\mathrm{Ann}(x + y)$ extension essentielle de $X \,^{\bullet}.\, (x + y) / \mathrm{Ann}(x + y)$ et d'après le lemme 3.3 , X n'est pas un sous-module fermé.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Soit X un sous-module complément non fermé dans M ; d'après le lemme 3.7 , il existe deux éléments non nuls $x, y, y \in X$ avec $Ax \cap X = (0)$, et $A(x + y)$ extension essentielle de $A(x + y) \cap X$. Si $\beta \in \mathrm{Ann}(y)$ on a : $\beta(x + y) = \beta x$ et $A\beta x \cap X = (0)$ d'où $\beta x = 0$ et $\mathrm{Ann}(x) \supset \mathrm{Ann}(y)$. $A(x + y)$ est isomorphe au module quotient $A/\mathrm{Ann}(y)$; $A(x + y) \cap X$ est isomorphe à $X \,^{\bullet}.\, (x + y)/\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(y)$ d'où (ii) .

Exemples :

1) Soit A un anneau ; si I est un idéal à gauche essentiel dans A, on désignera par $\bar{1}$, l'image de l'élément unité 1 de A dans le module A/I. Considérons le A-module $M = A \times A/I$, posons $x = (1, 0)$, $y = (0, \bar{1})$ on a $A\,x \cap A\,y = 0$, $\mathrm{Ann}(x) = 0$, $\mathrm{Ann}(y) = I$;

Le théorème précédent montre qu'il existe dans M des sous-modules compléments non fermés.

2) Le $\mathbb{Z}$-module injectif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Q}$ est le corps des rationnels est tel que toute intersection de sous-modules injectifs est un module injectif : en effet la relation $Ax \cap Ay = (0)$ entraîne que les idéaux $\mathrm{Ann}(x)$ et $\mathrm{Ann}(y)$ ne sont pas comparables. Comme on le voit facilement en décomposant $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en injectifs indécomposables.

<u>Proposition 6.</u> <u>Si</u> A <u>est un anneau unitaire ; les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) A <u>est un anneau semi-simple</u>.

(ii) <u>Pour tout</u> A-<u>module de type fini</u> M ; <u>l'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> M <u>est un sous-module compléments</u>.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) car tout A-module est injectif.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) car d'après l'exemple 1 ci-dessus, l'anneau A n'admet pas d'idéaux à gauche essentiel.

<u>Applications du théorème 3.5 à l'étude des modules sur un anneau principal</u>.

Si M est un module sur un anneau principal A, rappelons la caractérisation des sous-modules compléments dans M obtenue au chapitre II :
X est un sous-module complément dans $M \Longleftrightarrow$ pour tout $x_0 \in X$ et tout élément extrémal p de A, l'équation $px = x_0$ a une solution dans X si elle a une solution dans M. Rappelons d'autre part la définition suivante :

<u>Définition 2</u>. Un sous-module X d'un module M est dit <u>pur</u> si, pour tout $a \in A$ et tout $x_0 \in X$, l'équation $ax = x_0$ est résoluble dans X si et seule-

ment si, elle est résoluble dans M .

D'après ce qui précède, il est clair qu'un sous-module pur est un sous-module complément ; la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant dû à Fuchs : soit G le groupe abélien $G = (a) + (b)$ avec $\mathrm{Ann}(a) = (p^3)$, $\mathrm{Ann}(b) = (p)$, où p est un nombre premier ; le sous-groupe $X = (pa + b)$ n'est pas pur, mais c'est un sous-groupe complément. Les facteurs directs sont des sous-modules purs ; un autre exemple sera fourni par les sous-modules fermés.

Propriété 1. Si M est un A-module de torsion et X un sous-module fermé dans M , alors X est un sous-module pur.

En utilisant la décomposition des modules de torsion, on se ramène au cas d'un p-module ; si $x_1 \in M$ est tel que $a\, x_1 = x_0$ avec $x_0 \neq 0$ on a $Ax_1 \cap X' \neq (0)$, comme Ax_1 est un module co-irréductible, Ax_1 est extension essentielle de $Ax_1 \cap X$, X est un sous-module fermé d'où $x_1 \in X$.

On en déduit, en utilisant le théorème 3.3 que si l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément, alors il y a identité entre sous-modules compléments et sous-modules purs. On peut également noter qu'un sous-module pur d'un module M n'est pas nécessairement fermé comme le montre l'exemple du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$, où $\mathbb{Z}$ est pur mais pas fermé, même lorsque tout sous-module complément est pur, il suffit de prendre le module divisible $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_2$.

Les modules M tels que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément se répartissent d'après le théorème 3.5 en deux classes : d'une part tous les modules sans torsion et d'autre part certains modules de torsion :

Propriété 2. Soit p un élément extrémal de A ; les p-modules M tels que toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément sont les modules co-irréductibles et les modules semi-simples.

Si M n'est pas un module co-irréductible, il est décomposable et on peut écrire $M = X_1 \oplus X_2$; soient x_1 et x_2 deux éléments non nuls de X_1 et X_2 ; on a $Ax_1 \cap Ax_2 = (0)$, $\mathrm{Ann}(x_1) = (p^{\alpha})$, $\mathrm{Ann}(x_2) = (p^{\beta})$ si $\alpha > \beta$.

$A/(p^{\alpha})$ est extension essentielle de $(p^{\beta})/(p^{\alpha})$ ce qui est impossible d'après le théorème 3.5 et $\alpha = \beta = 1$.

Pour étudier le cas général, on utilisera la propriété suivante :

Soient a et b deux éléments non nuls de A avec $a = P_1^{\alpha_1} \times \ldots \times P_m^{\alpha_m}$; $b = P_1^{\beta_1} \times \ldots \times P_n^{\beta_n}$; pour que $A/(b)$ soit extension essentielle de $(a)/(b)$ il faut et il suffit que l'on ait : $(P_1, \ldots, P_m) \subseteq (P_1, \ldots, P_n)$ et $\beta_i > \alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, m$.

<u>Propriété 3.</u> <u>Soit</u> $M = \bigoplus_p M_p$ <u>la décomposition de</u> M <u>en</u> p-<u>modules ; pour que toute intersection de sous-modules compléments dans</u> M <u>soit un sous-module complément il faut et il suffit que cette propriété soit vraie pour chaque module</u> M_p .

Il suffit de démontrer que la condition est suffisante. Sinon d'après le théorème 3.5, on pourrait trouver deux éléments non nuls x, y de M tels que $Ax \cap Ay = (0)$ avec $\mathrm{Ann}(x) = P_1^{\alpha_1} \times \ldots \times P_m^{\alpha_m}$, $\mathrm{Ann}(y) = P_1^{\beta_1} \times \ldots \times P_n^{\beta_n}$ où $\beta_i > \alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, m$ en posant $x_1 = P_2^{\alpha_2} \times \ldots \times P_m^{\alpha_m} x$ et $y_1 = P_2^{\beta_2} \times \ldots \times P_m^{\beta_m} y$ on a : $\mathrm{Ann}(x_1) = (P_1^{\alpha_1})$, $\mathrm{Ann}(y_1) = P_1^{\beta_1})$ avec $\beta_1 > \alpha_1$ et $Ax_1 \cap Ay_1 = (0)$ ce qui contredit la propriété 3.2 .

Les propriétés 3.2 et 3.3 déterminent entièrement la structure de M compte-tenu du fait que les modules co-irréductibles sont les injectifs indécomposables et les modules monogènes isomorphes à $A/(p^n)$.

Nous allons maintenant revenir à l'étude générale des A-modules.

<u>Proposition 7.</u> <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>la famille des sous-modules</u> (X_i) <u>d'un module</u> M , <u>où les</u> X_i <u>vérifient la propriété suivante : l'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> X_i <u>est un sous-module complément ; alors</u> $\mathcal{F}$ <u>est un ensemble inductif.</u>

Soit $(X_j)_{j \in J}$ un sous-ensemble totalement ordonné ; posons $X = \bigcup_j X_j$. Si $X \notin \mathcal{F}$, d'après le théorème 3.5 , il existe x, y , éléments non nuls de

X vérifiant les conditions a) et b) du théorème 3.5 et x, y, appartiennent à un X_j ce qui est impossible et $\mathcal{F}$ est inductif.

D'après le théorème de Zorn, il existe donc un élément maximal, on ne peut espérer dans le cas général que cet élément soit maximum, il suffit de considérer le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2)$ où $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/(2)$ sont des éléments maximaux.

<u>Proposition 8</u>. <u>Soit</u> M <u>un</u> <u>A-module tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> M <u>soit un sous-module complément ; pour tout élément</u> x <u>de</u> M <u>avec</u> $\mathrm{Ann}(x) = (0)$, <u>on a</u> $j(M) \subset \overline{Ax}$.

Si $j(M) \not\subset \overline{Ax}$; il existe y élément non nul de $j(M)$ tel que $Ay \cap \overline{Ax} = (0)$ en particulier $Ay \cap Ax = (0)$ et on a A extension essentielle de $\mathrm{Ann}(y)$ ce qui contredit l'hypothèse (théorème 3.5) .

Si on suppose de plus $j(A) = (0)$, alors $Ax \cap j(M) = (0)$; en effet si $ax \in j(M)$, $\mathrm{Ann}(ax) = \mathrm{Ann}(a)$ qui n'est pas essentiel dans A on en déduit $j(M) = (0)$ d'où :

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> M <u>un module sur un anneau à idéal singulier nul, contenant un élément</u> x <u>avec</u> $\mathrm{Ann}(x) = (0)$; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>toute intersection de sous-modules compléments dans</u> M <u>est un sous-module complément</u>.

(ii) <u>le sous-module singulier</u> $j(M)$ <u>est nul</u>.

***

CHAPITRE IV

COEUR GENERALISE D'UN MODULE

***

On se propose de définir un sous-module remarquable $\Gamma(E)$ d'un A-module injectif E et d'étudier les sous-modules compléments dans $\Gamma(E)$; le sous-module $\Gamma(E)$ contiendra le coeur de E , sous-module introduit par L. LESIEUR et R. CROISOT dans [11] .

1 - DEFINITION ET ETUDE D'UN SOUS-MODULE PARTICULIER D'UN A-MODULE INJECTIF E .

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module tel qu'il existe deux sous-modules compléments dans</u> M <u>dont l'intersection n'est pas un sous-module complément</u> ; <u>on peut trouver alors un endomorphisme essentiel</u> φ <u>de</u> E(M) <u>satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

(i) <u>il existe un sous-module injectif</u> K <u>de</u> E(M) <u>tel que</u> $\ker \varphi \supset K$.

(ii) $\varphi[E(M)] \subset K$.

(iii) $\varphi(M) \neq (0)$.

Si M est un tel module, il existe deux sous-modules compléments dans M distincts, X et X' , qui sont extensions essentielles de $X \cap X'$. D'après le théorème 1.1 , on peut trouver deux sous-modules injectifs I et I' de E(M) avec $X = I \cap M$, $X' = I' \cap M$; I et I' sont extensions essentielles de $I \cap I'$ et par suite admettent les mêmes modules supplémentaires dans E(M) . Soit K un sous-module injectif supplémentaire de I et I' ; on a $E(M) = I \oplus K = I' \oplus K$, si x est un élément de E(M) , $x = i + k = i' + k'$ où $i \in I$, $i' \in I'$, k , $k' \in K$. On posera $\varphi(x) = i - i' = k' - k$; φ est un endomorphisme essentiel de noyau $K \oplus I' \cap I$ et on a $\varphi[E(M)] \subset K$. Par hypothèse, il existe $i \in I \cap M$, $i \notin I' \cap M$, par suite $i \notin \ker \varphi$ et à fortiori $M \not\subset \ker \varphi$.

Cette proposition nous conduit à considérer l'ensemble B' des endomorphismes essentiels φ de E satisfaisant aux conditions (i) et (ii) . On posera :

$$\Gamma(E) = \bigcap_{\varphi \in B'} \ker \varphi \quad ; \qquad \Gamma(M) = M \cap \Gamma(E) .$$

Nous allons étudier le sous-module $\Gamma(E)$.

<u>Lemme 1.</u> <u>Soit</u> N <u>un sous-module de</u> $\Gamma(E)$; <u>si</u> I <u>est une enveloppe injective de</u> N <u>contenue dans</u> E , <u>alors</u> N <u>est un sous-module de</u> $\Gamma(I)$.

Soit φ un endomorphisme essentiel de I satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ; si on pose $\varphi' = \varphi \circ p$, où p est la projection de E sur I parallèlement à un supplémentaire K' de I dans E . φ' est un endomorphisme de E de noyau $K' \oplus \ker \varphi$, qui vérifie (i) et (ii) et par suite $N \subset \ker \varphi'$; on en déduit $\varphi(N) = (0)$ et finalement $N \subset \Gamma(I)$.

Soit E un A-module injectif tel que le sous-module $\Gamma(E)$ soit essentiel dans E ; la proposition 4.1 montre que l'intersection de deux sous-modules compléments dans $\Gamma(E)$ est un sous-module complément. Si $\Gamma(E)$ n'est pas essentiel, soit I une enveloppe injective de $\Gamma(E)$ contenue dans E ; d'après le lemme 4.1 , $\Gamma(E)$ est un sous-module de $\Gamma(I)$ et la première partie de la démonstration prouve que l'intersection de deux sous-modules compléments dans $\Gamma(E)$ est un sous-module complément.

Soient φ un endomorphisme essentiel et p un idempotent de l'anneau B des endomorphismes de E ; on a la relation :

$$(1) \qquad \varphi \cdot p - p \cdot \varphi = (1 - p) \cdot \varphi \cdot p - p \cdot \varphi \cdot (1 - p) .$$

Les endomorphismes $(1 - p) \cdot \varphi \cdot p$ et $p \cdot \varphi \cdot (1 - p)$ sont des éléments de B' et par suite $\varphi \cdot p$ et $p \cdot \varphi$ coïncident sur $\Gamma(E)$; si on prend pour φ un élément de B' alors $p \cdot \varphi[\Gamma(E)] = 0 = \varphi \cdot p\, [\Gamma(E)]$, il en résulte l'inclusion $p\,[\Gamma(E)] \subset \Gamma(E)$ et tout sous-module complément dans $\Gamma(E)$ est facteur direct d'où :

<u>Théorème 1.</u> <u>Le sous-module</u> $\Gamma(E)$ <u>possède les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Tout sous-module complément dans</u> $\Gamma(E)$ <u>est un facteur direct.</u>

(ii) <u>L'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> $\Gamma(E)$ <u>est un sous-module complément.</u>

D'après la proposition 4.1 , pour que l'intersection de deux sous-modules injectifs de E soit un sous-module injectif il faut et il suffit que tout élément de B' soit nul, c'est-à-dire que $E = \Gamma(E)$; la relation (1) précédente montre alors que les endomorphismes idempotents commutent avec les endomorphismes essentiels, cela signifie que les sous-modules injectifs de E sont stables par les endomorphismes essentiels de E .

Théorème 2. Soit E un A-module injectif ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'intersection de deux sous-modules injectifs de E est un sous-module injectif.

(ii) $E = \Gamma(E)$.

(iii) Les sous-modules injectifs de E sont stables par les endomorphismes essentiels de E .

Nous allons montrer comment l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) se généralise dans un A-module M quelconque.

Théorème 3. Pour que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M soit un sous-module complément, il faut et il suffit que, si X est un sous-module complément dans M et E(X) une enveloppe injective de X contenue dans E(M) , on ait $\varphi(X) \subset E(X)$ pour tout endomorphisme essentiel φ de E(M) .

La condition est nécessaire : en effet, soit φ un endomorphisme essentiel de E(M) tel qu'il existe un sous-module injectif I de E(M) avec $\varphi(I \cap M) \not\subset I$; soient, d'autre part, K un supplémentaire de I dans E(M) et p (resp. q) la projection canonique de E(M) sur K (resp. I) ; $\psi = p \varphi q$ est un endomorphisme essentiel et $1 - \psi$ est une injection (prop. 3.1) . Si on pose $I' = (1 - \psi)(I)$ et $I' \cap I = H$, on a $(I' \cap M) \cap (I \cap M) = H \cap M$; montrons que les sous-modules $I \cap M$ et $H \cap M$ sont distincts : par hypothèse il existe $i \in I \cap M$ tel que $\varphi(i) \notin I$ et par suite $\psi(i) = p . \varphi(i)$ est un élément non nul, comme $i \cap I' = \ker p . \varphi \cap I$, $i \notin H \cap M$. $I \cap M$. est par construction extension essentielle de $H \cap M$, et on a déterminé deux sous-modules compléments $I \cap M$ et $I' \cap M$ dont l'intersection n'est pas un sous-module complément.

Pour montrer que la condition est suffisante, on remarque que si un module M est tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément, alors, d'après la proposition 4.1 , il existe un sous-module injectif I de $E(M)$ et un endomorphisme essentiel φ tels que $\varphi(I \cap M) \not\subset I$.

Si X est un sous-module d'un module injectif E, X_E désignera l'intersection des noyaux des endomorphismes de E qui annulent X . (cf. chap. I) .

<u>Corollaire 1.</u> <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module d'enveloppe injective</u> E ; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>l'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> M <u>est un sous-module complément</u>.

(ii) <u>l'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> M_E <u>est un sous-module complément</u>.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) évident.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) on sait, (corollaire de la proposition 1.8), que tout sous-module complément dans M_E est de la forme X_E où X est un sous-module complément dans M . Soit p un idempotent de B tel que $X_E = M_E \cap \ker p$ il faut prouver d'après le théorème 4.3 , que pour tout endomorphisme essentiel φ de E on a $(1 - p)\,\varphi\,(X_E) = 0$ ou $(1 - p)\,\varphi\,(X) = 0$; d'après (i) et par définition de X_E on a $(1 - p)\,\varphi\,(X_E) = 0$.

<u>Remarques</u> :

(1) Soit M un A-module d'enveloppe injective E , stable par tout endomorphisme essentiel de E ; le théorème 4.3 prend la forme suivante : pour que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M soit un sous-module complément, il faut et il suffit que tout sous-module complément dans M soit stable par tout endomorphisme essentiel de E .

(2) Les conclusions de la proposition 4.3 restent valables lorsque l'on prend pour M un sous-module quelconque d'un module injectif E .

<u>Corollaire 2. Soit</u> M <u>un A-module d'enveloppe injective</u> E <u>possèdant les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>L'intersection de deux sous-modules compléments dans</u> M <u>est un sous-module complément.</u>

(ii) <u>Tout sous-module complément dans</u> M_E <u>est facteur direct. Alors</u> M <u>est un sous-module de</u> $\Gamma(E)$.

D'après le corollaire 4.1 , M_E possède la propriété (i) , si φ est un endomorphisme de définition de $\Gamma(E)$, on a $\ker \varphi \supset K$, où K est un module injectif et on a $E = K \oplus I$, la condition (ii) entraîne la relation $M = (K \cap M) \oplus (I \cap M)$, on en déduit immédiatement $\varphi(M) = (0)$.

<u>Corollaire 3. Si</u> M <u>est un sous-module non co-irréductible, de</u> $\Gamma(E)$, <u>alors</u> M <u>possède les propriétés</u> (i) <u>et</u> (ii) <u>du corollaire</u> 2.

La démonstration de ce corollaire ne présente aucune difficulté et sera donc omise. Les corollaires 4.2 et 4.3 donnent donc une caractérisation du sous-module $\Gamma(E)$ c'est le plus grand sous-module de E vérifiant (i) et (ii) ; on montrera plus tard que, pour certains anneaux, le sous-module $\Gamma(E)$ sera entièrement caractérisé par la condition (i) .

Si M est un sous-module de $\Gamma(E)$, tout sous-module de M admet une seule extension essentielle maximale dans M , nous allons généraliser cette situation.

<u>Proposition 2. Si</u> M <u>un A-module d'enveloppe injective</u> E , <u>stable par les endomorphismes de définition de</u> $\Gamma(E)$; <u>tout sous-module</u> N <u>de</u> M <u>admet alors des extensions essentielles maximales dans</u> M <u>isomorphes</u>.

Soient I et I' deux sous-modules injectifs de E tels que $I \cap M$ et $I' \cap M$ soient deux extensions essentielles maximales de N ; il existe un sous-module injectif K tel que $E = I \oplus K = I' \oplus K$, si $x \in E$ on a : $x = i + k = i' + k'$ avec $i \in I$, $i' \in I'$, $k , k' \in K$, soit φ l'endomorphisme défini par : $\varphi(x) = i - i' = k' - k$, φ est un endomorphisme de définition de $\Gamma(E)$ et par hypothèse $\varphi(M) \subset M$. , si $i \in I \cap M$ on a

$i = i' + k'$ et $i' = i + \varphi(i)$ est un élément de M ; l'application qui à i fait correspondre l'élément i' est un isomorphisme de $I \cap M$ sur $I' \cap M$.

Corollaire. Soit M un A-module stable par les endomorphismes essentiels de E ; alors tout sous-module de M admet des extensions essentielles maximales dans M isomorphes.

2 - COEUR D'UN MODULE.

Soit E un A-module injectif, on appelle coeur de E le sous-module $C(E)$ défini par : $C(E) = \bigcap_{\varphi \in J} \ker \varphi$ où J est l'idéal bilatère des endomorphismes essentiels de E, c'est également le radical de jacobson de l'anneau B des endomorphismes de E (prop. 3.1).

Nous allons généraliser divers résultats de L. LESIEUR et R. CROISOT obtenus dans le cas des modules de dimension finie [11] .

Propriété 1. Si $C(E)$ est le coeur du A-module injectif E, il vérifie les conditions suivantes :

(i) Tout sous-module complément dans $C(E)$ est facteur direct.

(ii) L'intersection de deux sous-modules compléments dans $C(E)$ est un sous-module complément.

En effet $C(E)$ est un sous-module de $\Gamma(E)$ vérifiant $C(E)_E = C(E)$, l'assertion résulte du corollaire 4.3 , du théorème 4.3 .

Propriété 2. Si N est un sous-module de $C(E)$, la fermeture de N dans $C(E)$ est le sous-module N_E ;

Soit $E(N)$ une enveloppe injective de N contenue dans E ; la fermeture de N dans $C(E)$ est le module $E(N) \cap C(E)$. Soit φ un endomorphisme de E qui annule N ; on désignera par p la projection de E sur $E(N)$ parallèlement à un supplémentaire de $E(N)$ dans K. $\varphi \circ p$ est un endomorphisme essentiel de E ; si $x \in E(N) \cap C(E)$, on a : $\varphi \circ p(x) = 0 = \varphi(x)$ et

$E(N) \cap C(E) \subseteq N_E$, on sait d'autre part (prop. 1.7) que N_E est extension essentielle de N d'où l'égalité.

Lemme 2. Soit E' une enveloppe injective de $C(E)$ contenue dans E ; on a alors $C(E) \subset C(E')$.

Soit F un supplémentaire de E' dans E ; si p est la projection de E sur E' parallèlement à F et φ un endomorphisme essentiel de E' , $\varphi \circ p$ est un endomorphisme essentiel de E et on a donc

$\varphi \circ p\ [C(E)] = 0 = \varphi\ [C(E)]$ d'où le lemme.

Nous allons retrouver les propriétés 1 et 2 précédentes, en généralisant la méthode de [11] ; le lemme 4.2 , nous permet de supposer $C(E)$ essentiel dans E . Notons que $C(E)$ qui est un module quasi-injectif est tel que ses sous-modules compléments sont facteurs directs. On appellera $\underline{S}$ l'anneau régulier B/J (prop. 3.1).

Si X est un sous-module complément dans $C(E)$, on a $X = X_E$ (corollaire de la prop. 1.8) et $\Lambda_X = Bp + J$ (prop. 1.8).

Il y a donc correspondance biunivoque entre les sous-modules compléments de $C(E)$ et les facteurs directs de S . Si X_1 et X_2 sont deux sous-modules compléments donc $c(E)$ avec $\Lambda_{X_1} = Bp_1 + J$, $\Lambda_{X_2} = Bp_2 + J$ on a $\ker (\Lambda_{X_1} + \Lambda_{X_2}) = X_1 \cap X_2$; l'anneau S est régulier, par suite $(Bp_1 + J) + (Bp_2 + J) = Bp + J$ où p est un idempotent et $X_1 \cap X_2$ est un sous-module complément ; de même $X_1 + X_2$, on a donc :

Propriété 3. Si $C(E)$ est un sous-module essentiel de E , le treillis des sous-modules compléments dans $C(E)$ est isomorphe au treillis des facteurs directs de l'anneau régulier $S = B/J$.

Propriété 4. Si $C(E)$ est essentiel dans E , $C(E)$ est un S-module dont le sous-module singulier est nul.

Si $f \in B$ on notera $\overline{f}$ l'image de f dans $S = B/J$; on posera $\overline{f} \cdot x = f(x)$. Cette loi définit sur $C(E)$ une structure de S-module, si

$C(E)$ est co-irréductible S est un corps et $C(E)$ est un espace vectoriel à gauche sur S ; Si $C(E)$ n'est pas co-irréductible et si x est un élément non nul de $C(E)$ on peut écrire $x = x_1 + x_2$ où x_1 et x_2 appartiennent à des facteurs directs de $C(E)$; on a : $\mathrm{Ann}(x_i) = \mathrm{Ann}(Ax_i) = \overline{Sp_i}$ d'après la propriété 2 où P_i est un idempotent de B pour $i = 1, 2$, S est régulier on a donc $\mathrm{Ann}(x) = \overline{Sp_1} \cap \overline{Sp_2} = \overline{Sp}$ et $\mathrm{Ann}(x)$ est un facteur direct de S.

Remarque :

Lorsque $C(E)$ n'est pas essentiel dans E, le treillis des sous-modules compléments dans $C(E)$ est isomorphe au treillis des facteurs directs de l'anneau réguliers B/Λ où Λ désigne l'idéal bilatère des endomorphismes qui annulent $C(E)$.

Propriété 5. Les sous-modules compléments dans $C(E)$ sont les sous-modules X tels que $E(C(E)/X)$ soit somme directe de modules injectifs isomorphes à des sous-modules injectifs de E.

La condition est nécessaire ; si X est un sous-module complément propre dans un A-module M, $E(M/_X)$ est isomorphe à l'enveloppe injective d'un complément relatif de X dans M. Supposons que l'on ait $E\,(C(E)/_X) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ où les E_i sont des A-modules injectifs ; soit X_i/X un sous-module complément dans $C(E)/_X$ tel que $E(X_i/X) = \bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} E_j$ (Théorème 1.1) ; on a $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ et il suffit de montrer que X_i est un sous-module complément dans $C(E)$; $C(E)/X_i$ est isomorphe au module quotient $C(E)/_X \big/ X_i/_X$ et d'après le choix de $X_i/_X$, $E(C(E)/X_i)$ est isomorphe à F_i ; on est ramené au cas où l'ensemble I a un élément. Considérons la suite :

$$C(E) \xrightarrow{\varphi} C(E)/_{X_i} \xrightarrow{i} E(C(E)/_{X_i}) \xrightarrow{\psi} E\,.$$

où φ est l'application canonique de $C(E)$ dans son ensemble quotient, i une injection et ψ une injection. L'homomorphisme $\psi \circ i \circ \varphi$ se prolonge en un endomorphisme f de E et on a $\ker f \cap C(E) = X_i$ et X_i est un sous-module complément.

Soit E un A-module injectif, si $(E_j)_{j \in J}$ est l'ensemble des sous-modules injectifs de E, on notera C_j le coeur de E_j et $\mathcal{C}$ l'ensemble des C_j.

<u>Théorème 4.</u> <u>L'ensemble des coeurs des sous-modules injectifs d'un</u> A-<u>module injectif</u> E <u>est inductif</u>.

Si (C_i) $i \in I$ est un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{C}$, il nous faut montrer qu'il existe un sous-module injectif E_j de E tel que $C_j \supset C_i$ pour tout $i \in I$.

Soit $M = \bigcup_{i \in I} C_i$; d'après le théorème 3.6 on sait que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément, si $E(M)$ désigne une enveloppe injective de M contenue dans E on va prouver que $M \subset C(E(M))$, ce qui achèvera la démonstration.

Supposons $M \not\subset C(E(M))$, il existe $x \in M$, $x \neq 0$ et un endomorphisme essentiel φ de $E(M)$ tels que $\varphi(x) \neq 0$; d'autre part on peut trouver $i \in I$ avec $x \in C_i$. Si $E(C_i)$ est une enveloppe injective de C_i contenue dans $E(M)$ on a $E(C_i) \cap M \supset C_i$ nous allons distinguer deux cas :

a) C_i est un sous-module essentiel dans M.

Soit E_i le sous-module de E tel que $G(E_i) = C_i$; il existe une injection f de $E(M)$ dans E_i qui est l'identité sur C_i ; on a démontré (lemme 4.2) que C_i est un sous-module du coeur de $f(E(M))$; il en résulte que $C(E(M)) \supset C_i$ et par suite $\varphi(x) = 0$.

b) C_i n'est pas essentiel dans M.

Si $E(C_i)$ est une enveloppe injective de C_i contenue dans $E(M)$, on sait que $E(C_i) \cap M = X$ est un sous-module complément dans M ; d'après le théorème 4.3 $\varphi(X) \subset E(C_i)$; la restriction de φ à X se prolonge donc en un endomorphisme essentiel φ_o de $E(C_i)$, d'après le lemme 4.2. $C_i \subset \mathcal{C}(E(C_i))$ d'où $\varphi_o(C_i) = 0$ et par suite $\varphi(x) = 0$.

Dans les deux cas il y a contradiction avec l'hypothèse faite et on a donc

$M \subset \Gamma(E(M))$.

Remarques :

1 - En général il n'existe pas d'élément maximum dans $\mathcal{C}$: par exemple si $E = Q \times (Q/\mathbb{Z})_2$, où Q est le corps des rationnels et $(Q/\mathbb{Z})_2$ le 2-composant de $Q/\mathbb{Z}$ on a $C(E) = C\,[(Q/\mathbb{Z})_2]$ et $C(Q) = Q$.

2 - Si E est un module injectif sur un anneau commutatif noéthérien tel que $C(E)$ soit essentiel dans E , alors $C(E)$ est un élément maximum de $\mathcal{C}$.

Nous allons terminer l'étude particulière du coeur par le résultat suivant.

Théorème 5. Soit E un A-module injectif isotypique ; pour que l'intersection de deux sous-modules injectifs de E soit un sous-module injectif, il faut et il suffit que $E = C(E)$.

Si E est isotypique de type Eo, Eo est stable par les endomorphismes essentiels de E (théorème 4.2), mais on a vu que l'anneau des endomorphismes de Eo est un corps (théorème 3.2) et par suite le radical de Jacobson de Eo, donc de E , est nul.

Théorème 6. Soit (E_i) $i \in I$ la famille des sous-modules injectifs d'un module injectif E ; alors les sous-modules $\Gamma(E_i)$ forment un ensemble inductif.

On posera $\Gamma_i = \Gamma(E_i)$, soit $(\Gamma_j)_{j \in J}$ un sous-ensemble totalement ordonné, si $M = \bigcup_{j \in J} \Gamma_j$, on notera $E(M)$ une enveloppe injective de M contenue dans E ; nous allons montrer que $M \subset \Gamma(E(M))$. Supposons $M \not\subset \Gamma(E(M))$ il existe un élément x , non nul, de M et un endomorphisme essentiel φ tels que : $\ker \varphi \supset I$, sous-module injectif de $E(M)$, $\varphi[E(M)] \subset I$ et $\varphi(x) \neq 0$ et il existe $j \in J$ tel que $x \in \Gamma_j$.

a) Γ_j est un sous-module essentiel dans M .

On procède comme dans la démonstration a) du théorème 4 en employant le lemme 4.1.

b) Γ_j n'est pas essentiel dans M .

$E(\Gamma_j) \cap M = X$ est un sous-module complément dans M ; d'après le théorème 4.3 $\varphi(x) \in E(Ax)$, où, $E(Ax)$ est une enveloppe injective de Ax contenue dans $E(M)$, (théorème 3.6 et théorème 4.3) ; il en résulte l'inclusion $\overline{Ax} \supset \overline{A\varphi(x) \cap M}$.

<u>Lemme 3. Soit</u> M <u>un A-module tel que toute intersection de sous-modules compléments dans</u> M <u>est un sous-module complément ; si</u> X <u>et</u> X' <u>sont deux sous-modules compléments dans</u> M <u>avec</u> $X' \subset X$, <u>pour toute enveloppe injective</u> $E(X')$ <u>de</u> X' , <u>il existe une enveloppe injective</u> $E(X)$ <u>et</u> X <u>telle que</u> $E(X) \supset E(X')$.

Il suffit de montrer que le module $N = X + E(X')$ est extension essentielle de X . Si y est un élément non nul de N on a : $y = x + e$, où $x \in X$, $e \in E(X')$; si l'un des deux éléments est nul ou si $x \in X'$, il est immédiat de montrer qu'il existe $a \in A$, avec $ay \neq 0$, tel que $ay \in X$.

On supposera donc $e \neq 0$, $x \notin X'$. X' est un sous-module fermé de M (théorème 3.1) , il existe donc $b \in A$, avec $bx \neq 0$, tel que $Abx \cap X' = (0)$ et on a $by = bx + be$. Si $be = 0$, by est un élément non nul de X , si $be \neq 0$ on peut trouver $b_1 \in A$ avec $b_1 be \neq 0$ tel que $b_1 be \in X'$, il en résulte que $b_1 by$ est un élément de X non nul, car sinon $b_1 bx$ serait un élément non nul de X' ce qui est contraire au choix de bx . On a donc prouvé que pour tout élément non nul y de N , il existe $a \in A$, avec ay élément non nul de X et N est extension essentielle de X .

Soit K une enveloppe injective de $A\varphi(x)$ contenue dans I ; d'après le lemme 4.3 appliqué aux sous-modules compléments $\overline{Ax}$ et $\overline{A\varphi(x) \cap M}$, il existe une enveloppe injective I_o de Ax contenant K . On en déduit les décompositions suivantes : $I_o = K \oplus K'$; $E(M) = K_o \oplus K \oplus K'$, où K_o et K' sont injectifs.

Si p est la projection canonique de $E(M)$ sur K parallèlement aux autres facteurs, l'endomorphisme essentiel $\varphi_o = P \circ \varphi$ est tel que $\ker \varphi_o \supset K$ et on a $\operatorname{Im}(\varphi_o) \subset K$. et $\varphi(x) = \varphi_o(x)$; la restriction de φ_o à I_o est un endomorphisme de définition de $\Gamma(I_o)$ et par suite $\varphi_o(\Gamma(I_o)) = 0$, en tenant compte des inclusions suivantes :

$\Gamma(E(j)) \supset \Gamma_j$, $\Gamma_j \cap E(Ax) \subset \Gamma[E(Ax)]$ pour toute enveloppe injective de Ax , on déduit que x est un élément de $\Gamma(I_0)$ et $\varphi(x) = 0 = \varphi_0(X)$.

Dans les deux cas, il y a contradiction avec l'hypothèse faite sur x et φ et $M \subset \Gamma(E(M))$.

3 - RELATIONS ENTRE LES SOUS-MODULES $C(E)$ ET $\Gamma(E)$.

$\Gamma(E)$ est un sous-module de E contenant $C(E)$, sous certaines conditions $\Gamma(E)$ est extension essentielle de $C(E)$. Rappelons le résultat suivant dû à L. LESIEUR et R. CROISOT [11] .

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un</u> A-<u>module injectif tel que</u> $C(E) \neq (0)$; <u>si</u> $C(E)$ <u>contient un sous-module co-irréductible</u> X , <u>pour tout élément non nul</u> x <u>de</u> X , $Ann(x)$ <u>est élément maximal de l'ensemble des annulateurs des éléments non nuls de</u> E .

Si $Ann(x)$ n'est pas un élément maximal il existe y, $y \neq 0$, appartenant à E avec $Ann(x) \subset Ann(y)$. Si f est un homomorphisme de Ax dans Ay défini par $f(x) = y$, f se prolonge en un homomorphisme de $E(Ax)$ dans E . Soit p la projection canonique de E sur $E(Ax)$ parallèlement à un supplémentaire ; $g = f' \circ p$ est un endomorphisme essentiel de E car $E(Ax)$ est un injectif indécomposable et on a $f'(x) \neq 0$ ce qui contredit le fait que $x \in C(E)$.

Si φ est un endomorphisme essentiel de E et si $x \notin \ker \varphi$, on a $Ann(x) \subset Ann\ \varphi(x)$, on en déduit que si les annulateurs des éléments non nuls de E vérifient la condition maximale, alors $C(E)$ est différent de zéro.

<u>Théorème 7</u>. <u>Soit</u> E <u>un</u> A-<u>module injectif tel que les annulateurs des éléments de</u> E <u>vérifient la condition maximale</u> ; $\Gamma(E)$ <u>est alors extension essentielle de</u> $C(E)$.

On sait que $C(E)$ est un sous-module non nul, supposons que $\Gamma(E)$ soit un sous-module essentiel de E , si E est indécomposable le théorème est démontré, sinon soit X un sous-module complément dans $\Gamma(E)$; si $x \in X$ tel que $Ann(x)$ soit un élément maximal dans l'ensemble des annulateurs des éléments non nuls de X on a $\varphi(x) = 0$ pour tout endomorphisme essentiel φ (théorème 4.3) et par suite $C(E) \cap X \neq (0)$ pour tout sous-module complément X dans $\Gamma(E)$ et $C(E)$ est essentiel.

Si $\Gamma(E)$ n'est pas essentiel dans E, soit I une enveloppe injective de $\Gamma(E)$ continue dans E on a $\Gamma(I) \supset \Gamma(E)$ d'après le lemme 4.1 et $\Gamma(I)$ est un sous-module essentiel dans I extension essentielle de $C(I)$ d'après ce qui précède l'assertion résultera du lemme suivant.

Lemme 4. Soit I une enveloppe injective de $\Gamma(E)$ contenue dans E ; alors $C(I) \cap \Gamma(E) = C(E)$.

Soient φ un endomorphisme essentiel de E et x un élément de $C(I) \cap \Gamma(E)$; on désignera par p la projection de E sur I parallèlement à un supplémentaire. $\varphi \circ p$ est un endomorphisme essentiel et on a $\varphi \circ p(x) = \varphi(x) = p \circ \varphi(x)$, car $x \in \Gamma(E)$ (théorème 4.2) ; $p \circ \varphi \circ p$ est un endomorphisme essentiel de I et $p \cdot \varphi \cdot p(x) = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$ et $x \in C(E)$; comme d'autre part $C(E) \subset C(I) \cap \Gamma(E)$ on a l'égalité.

Corollaire. Soit A un anneau noethérien à gauche ; pour tout A-module injectif E, $\Gamma(E)$ est extension essentielle de $C(E)$.

Dans le chapitre V, on déterminera explicitement $\Gamma(E)$ lorsque A sera un anneau commutatif noethérien.

Proposition 3. Soient A un C-anneau et E un A-module injectif ; $\Gamma(E)$ est alors extension essentielle de $C(E)$.

Le coeur $C(E)$ est toujours différent de (0), car E a un socle non nul ou alors le sous-module singulier de E est nul et dans ce cas $C(E) = E$, d'après le lemme 4.4, il suffit de considérer le cas où $\Gamma(E)$ est essentiel dans E. Soit X un sous-module complément dans $\Gamma(E)$; si $x \in X$, $x \notin C(E)$, il existe un endomorphisme essentiel φ tel que $\varphi(x) \in X$, avec $\varphi(x) \neq 0$; $\mathrm{Ann}(\varphi(x))$ est un idéal à gauche essentiel dans A, il existe donc $a \in A$, avec $a\varphi(x) \neq 0$ tel que $Aa\varphi(x)$ soit un A-module simple et par suite $a\varphi(x) \in C(E) \cap X$; pour tout sous-module complément X on a donc $C(E) \cap X \neq (0)$ et $C(E)$ est essentiel dans $\Gamma(E)$.

Dans le cas général, $\Gamma(E)$ n'est pas nécessairement extension essentielle de $C(E)$ comme le montre l'exemple suivant :

Soit A un anneau de valuation de rang 1, non noethérien et soit x un élément non nul de A ; Ax est un idéal $\cap$-irréductible, si E est une enveloppe injective de A/Ax on a $\Gamma(E) = E$ et $C(E) = (0)$. En effet si $C(E)$ n'est pas nul, d'après la proposition 4.1, il existe $y \in E$ avec $\mathrm{Ann}(y) = P$, où P est le seul idéal premier non nul de A ; on pourrait donc trouver un élément a de A, $a \in Ax$ tel que $Pa \subseteq Ax$; A est un anneau de valuation on a donc l'inclusion $Aa \supset Ax$ d'où $x = ba$; si $m \in P$ on a $ma = \lambda x = \lambda ba$, d'où $m = \lambda b$ et l'idéal P est engendré par b ce qui montre que A est noethérien contrairement à l'hypothèse faite.

Il est facile de prouver la propriété suivante : si $\Gamma(E)$ est un sous-module essentiel de E, pour que $C(E)$ soit non nul, il faut et il suffit qu'il existe un sous-module injectif F de E tel que $C(F)$ soit non nul. Nous allons donner des exemples de modules M tels que $\Gamma(M) = (0)$:

Soit A un anneau commutatif admettant une chaîne infinie d'idéaux premiers (P_i) $i \in I$, où P_i n'est pas maximal pour tout i.

Considérons le module M, d'enveloppe injective E, défini par :

$$M = \bigoplus_{i \in I} (A/P_i)$$

si x est un élément non nul de M, $\mathrm{Ann}(x)$ est un idéal premier P_i. Si $\Gamma(E)$ n'est pas nul, d'après le théorème 3.6, il existe un idéal premier P_{i_0}, tel que $x \neq 0$, $x \in \Gamma(M) = M \cap \Gamma(E) \Longrightarrow \mathrm{Ann}(x) = P_{i_0}$, on en déduit que pour tout x non nul de $\Gamma(E)$, on a $\mathrm{Ann}(x) = P_{i_0}$. Si φ est un endomorphisme essentiel de E, si $x \notin \ker \varphi$, $\mathrm{Ann}(x)$ est strictement contenu dans $\mathrm{Ann}[\varphi(x)]$, comme $\Gamma(E)$ est stable par les endomorphismes essentiels, on a $\varphi(\Gamma(E)) = 0$ et $\Gamma(E) = C(E)$. Il suffit de prouver que $C(E)$ est nul pour obtenir une contradiction et cela résulte de la proposition 4.2. De cet exemple, on déduit le résultat suivant :

<u>Propriété 6.</u> <u>Si un anneau commutatif</u> A <u>est tel que pour tout</u> A-<u>module injectif</u> E, <u>on ait</u> $C(E) \neq (0)$, <u>alors</u> A <u>possède les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Toute chaîne d'idéaux premiers de</u> A <u>est finie</u>.

(ii) <u>Pour tout idéal</u> $\cap$-<u>irréductible</u> J , $Ass(A/J) \neq \emptyset$

Réciproquement un anneau commutatif A vérifiant (ii) et la condition (ii)' suivante :

(ii)' Pour tout idéal essentiel a , $Ass(A/a) \neq \emptyset$, est tel que le coeur de tout module injectif est non nul.

***

CHAPITRE V
ETUDE DE CERTAINS ANNEAUX INTRODUITS PAR LA NOTION DE COEUR GENERALISE

***

Soit E un A-module injectif ; on a vu au chapitre IV, que si M est un sous-module de $\Gamma(E)$, l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément. On peut se poser maintenant le problème suivant : soit M un A-module d'enveloppe injective E , tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément ; M est-il un sous-module de $\Gamma(E)$? La réponse est négative dans le cas général comme le montre l'exemple suivant : on considère un anneau commutatif noethérien A tel qu'il existe un idéal premier P et des idéaux $\cap$-irréductible J_1 et J_2 , non comparables, P-primaires, avec $J_1 \cap J_2 = P^2 = (C)$. L'intersection de deux sous-A-modules compléments dans A est un sous-module complément ; en effet, si x et y sont deux éléments non nuls de A , avec $Ax \cap Ay = (0)$, alors Ax et Ay sont des sous-modules co-irréductibles et par suite, $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(y) = P$; le théorème 3.5 entraîne l'assertion. Si E est une enveloppe injective de A , il est facile de montrer que $C(E) = \Gamma(E)$ (§ III de ce chapitre) et que l'on a $\Gamma(E) \cap A = P$. et $A \not\subset \Gamma(E)$; il en sera ainsi pour l'anneau $K[X, Y]/J$, anneau quotient de l'anneau des polynômes à deux indéterminées sur un corps commutatif K , où J est l'idéal défini par la relation : $J = (X^2, Y) \cap (X, Y^2) = (X, Y)^2$.

Dans ce qui suit, on met en évidence des anneaux, pour lesquels le problème posé admet une solution satisfaisante.

1 - LES Γ-ANNEAUX

Proposition 1. Soit M un A-module tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément ; alors les sous-modules co-irréductibles de M sont contenus dans $\Gamma(E)$, où E est une enveloppe injective de M .

Soit φ un endomorphisme essentiel de E ayant les propriétés suivantes :

il existe un sous-module injectif K de E tel que $\ker \varphi \supset K$ et $\varphi(E) \subset K$; soit d'autre part un élément non nul x de M tel que Ax soit un sous-module co-irréductible ; d'après le théorème 4.3 , $\varphi(x)$ appartient à $E(Ax)$. Si $\varphi(x) \neq 0$, il existe $a \in A$, avec $a\varphi(x) \neq 0$, tel que $\varphi(x) \in X$, où $X = M \cap E(Ax)$, on en déduit $a\varphi(x) \in X \cap (K \cap M)$. X est un sous-module complément minimal dans M , on a donc $X \subset K$ ou $X \cap K = (0)$ et dans les deux cas $\varphi(ax) = 0$; il en résulte $\varphi(x) = 0$ et $x \in \Gamma(E)$.

Corollaire. Soient A un anneau noethérien à gauche et E un A-module injectif ; pour que le coeur $C(E)$ soit essentiel dans E , il faut et il suffit qu'il existe un sous-module M essentiel dans E tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M soit un sous-module complément.

Cela résulte du fait que $\Gamma(E)$ est extension essentielle de $C(E)$ (corollaire du théorème 4.7) et que E est somme directe de modules injectifs et indécomposables.

Proposition 2. Soit M un A-module tel que l'intersection de deux sous-modules compléments est un sous-module complément ; si Ax est un sous-module non essentiel dans M , avec $x \notin \Gamma(M)$, il existe un sous-module injectif propre E' de $E(M)$ contenant x avec $x \notin \Gamma(E')$.

Par hypothèse, il existe un endomorphisme essentiel φ avec $\ker \varphi \supset K$ où K est un sous-module injectif de $E(M)$ avec de plus $\varphi(x) \neq 0$ et $\varphi[E(M)] \subset K$. Soit K_0 une enveloppe injective du sous-module $A\varphi(x)$, contenue dans K ; on a $E(M) = K_0 \oplus K'$, si p désigne la projection de $E(M)$ sur K_0 parallèlement à K' , $P \circ \varphi$ est un endomorphisme essentiel tel que $\ker(P \circ \varphi) \supset K_0$ et $\mathrm{Im}(P \circ \varphi) \subset K_0$ et on a $P \circ \varphi(x) \neq 0$; d'après le lemme 4.3 , il existe une enveloppe injective E' de Ax contenant K_0 ; la restriction φ' de $P \circ \varphi$ à E' est un endomorphisme de définition de $\Gamma(E')$ et on a $\varphi'(x) \neq 0$ et $x \notin \Gamma(E')$.

Définition 1. On appelle Γ-anneau, un anneau unitaire A tel que tout A-module est engendré par ses sous-modules co-irréductibles.

Les anneaux principaux, les anneaux dont le treillis des idéaux à gauche est une chaîne sont des exemples de Γ-anneaux.

Proposition 3. Soient A un Γ-anneau et M un A-module d'enveloppe injective E ; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(ii) M est un sous-module de $\Gamma(E)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) d'après la proposition 5.1 .

(ii) $\Longrightarrow$ (i) c'est le théorème 4.1 .

Proposition 4. Pour qu'un anneau A soit un Γ-anneau, il faut et il suffit que tout A-module monogène soit engendré par ses sous-modules co-irréductibles.

C'est une conséquence immédiate de la définition 5.1 . Nous allons maintenant étudier les Γ-anneaux et nous en déduirons une caractérisation dans le cas commutatif.

Proposition 5. Tout idéal bilatère I d'un Γ-anneau est intersection d'un nombre fini d'idéaux à gauche $\cap$-irréductibles.

Par hypothèse, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_n$ du Γ-anneau A tels que $1 = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_o$, où $x_o \in I$, avec $I^{\bullet}. x_i = I_i$; I_i est un idéal $\cap$-irréductible contenant I et on a $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

Proposition 6. Soit A un Γ-anneau commutatif ; deux idéaux $\cap$-irréductibles, non comparables pour la relation d'inclusion, sont étrangers.

En remarquant que tout anneau quotient d'un Γ-anneau, est un Γ-anneau, on se ramène au cas où J_1 et J_2 sont deux idéaux $\cap$-irréductibles non comparables tels que $J_1 \cap J_2 = (C)$. On désignera par P_1 (resp. P_2) l'idéal premier associé à J_1 (resp. J_2) , qui est tel que P_1/J_1 (resp. P_2/J_2) est l'ensemble des diviseurs de zéro de A/J_1 (resp. A/J_2) . Il existe un nombre fini d'éléments de A, $x_1, \dots, x_n$ tels que $1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, avec $\mathrm{Ann}(x_i) = I_i$;

on a $I_i = (J_1 : x_i) \cap (J_2 : x_i)$, c'est un idéal $\cap$-irréductible, on a donc $I_i = J_1 : x_i$ ou $I_i = J_2 : x_i$. Soit K_1 l'ensemble des éléments i de $[1,\dots, n]$ tels que $\mathrm{Ann}(x_i) = J_1 : x_i$; si $i \notin K_1$ on a alors $\mathrm{Ann}(x_i) = J_2 : x_i$; on posera $K_2 = [1,\dots, n] - K_1$, $x = \sum_{i\in K_1} x_i$, $y = \sum_{i \in K_2} x_i$.

La relation (1) s'écrit alors : $1 = x + y$ avec $\mathrm{Ann}(x) \supset J_1$, $\mathrm{Ann}(y) \supset J_2$ et $\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) = (0)$. J_1 et J_2 sont des sous-modules compléments maximaux dans A et par suite $\mathrm{Ann}(x) = J_1$, $\mathrm{Ann}(y) = J_2$; de la relation $\mathrm{Ann}(x) = J_1 = J_1 : x$, on déduit $J_1 \cap Ax = (0)$. Soit J_2' un complément relatif de J_1 dans A contenant x ; on a $(J_1 \cap J_2') : y = 0 : y = J_2$ et par suite $J_2 = J_2' : y$ ou $J_2 = J_1 : y$, cette dernière égalité est impossible car J_2 et J_1 ne sont pas comparables, il en résulte l'égalité $J_2 = J_2' : y$ d'où $J_2 = J_2'$ et $x \in J_2$; on montrerait de façon analogue que $y \in J_1$ ce qui montre que $J_1 + J_2 = A$.

<u>Théorème 1</u>. <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif</u> ; <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) A <u>est un</u> Γ-<u>anneau</u>.

(ii) <u>Tout idéal de</u> A <u>est intersection d'un nombre fini d'idéaux</u> $\cap$-<u>irréductibles étrangers deux à deux</u>.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Cela résulte des propositions 5.5 et 5.6.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Car tout A-module monogène est somme directe de sous-modules co-irréductibles et la proposition 5.4 entraîne l'assertion. Dans ce qui suit, les anneaux considérés sont <u>commutatifs</u>.

<u>Propriété 1</u>. <u>Si</u> S <u>est une partie multiplicativement stable de</u> A , $S^{-1}A$ <u>est un</u> Γ-<u>anneau</u>.

Rappelons que si a est un idéal de A , $S^{-1}(A/a)$ est isomorphe à $S^{-1}A/S^{-1}a$; le résultat est conséquence du lemme suivant.

<u>Lemme 1</u>. <u>Si</u> J <u>est un idéal</u> $\cap$-<u>irréductible de</u> A , <u>le saturé</u> J_S <u>de</u> J <u>pour</u> S <u>est un idéal</u> $\cap$-<u>irréductible</u>.

Si $J \cap S \neq \emptyset$, alors $J_S = A$ et la propriété est vraie ; supposons donc $J \cap S = \emptyset$ soit P l'idéal premier associé à J et soit $y \notin J_S$; la relation $ay \in J_S$ entraîne l'existence d'un élément s de S tel que $say \in J$ $sy \notin J$ et par suite $a \in P$. Si J_S n'est pas $\cap$-irréductible, d'après le théorème 5.1, on peut écrire $J_S = I_1 \cap I_2$ où I_1 et I_2 sont deux idéaux étrangers et par suite les idéaux $I_1 : y$ et $I_2 : y$ sont étrangers et ne peuvent être contenus dans P et J_S est $\cap$-irréductible.

Remarques :

1 - Si J est un idéal $\cap$-irréductible, la racine $r(J)$ est un idéal premier. En effet si P est l'idéal premier associé à J , d'après la proposition 5.6 , P ne peut contenir qu'un seul idéal premier minimal.

2 - D'après le théorème 5.1 , pour qu'un anneau local commutatif soit un Γ-anneau, il faut et il suffit que le treillis de ses idéaux soit une chaîne.

3 - Si A est un Γ-anneau, pour tout idéal premier P , l'anneau local A_P est un Γ-anneau (propriété 5.1) ; la réciproque de cette propriété est en général inexacte ; en effet, soit A un anneau régulier commutatif, on sait que, pour tout idéal premier p de A , A_p est un corps, donc un Γ-anneau ; mais pour que A soit un Γ-anneau il faut et il suffit qu'il soit semi-simple, car les idéaux $\cap$-irréductibles de A sont les idéaux maximaux.

Propriété 2. Le treillis des idéaux d'un Γ-anneaux est distributif.

On sait d'après Fuchs qu'il suffit de prouver la propriété suivante : si J est un idéal $\cap$-irréductible, I_1 et I_2 deux idéaux tels que $J \supset I_1 \cap I_2$ alors $J \supset I_1$ ou $J \supset I_2$; le résultat se démontre au moyen de la proposition 5.6 et de la remarque 1.

Cas particulier des anneaux noethériens commutatifs.

Lemme 2. Un Γ-anneau local noethérien A ne peut admettre qu'un seul idéal premier non nul.

Soit m l'idéal maximal de A et soit P un idéal premier non nul que l'on peut supposer minimal ; si J est un idéal contenu dans P , avec $J \neq P$, soit $x \in m - P$ et $y \in P - J$; $J + A\,xy$ est un idéal non primaire ce qui est contraire à l'hypothèse (remarque 2) , et $P = m$.

Soit A un Γ-anneau commutatif noethérien ; si P est un idéal premier non maximal de A , on désignera par m un idéal maximal contenant P . D'après le lemme 5.2 , on a $P\,A_m = (0)$ et par suite P est un sous-module complément dans A . Si l'anneau A est intègre pour tout idéal premier P non nul, Ap est un anneau de valuation discrète et A est un anneau de Dedekind ; finalement en utilisant la proposition 5.6 on a :

Théorème 2. Si A est un Γ-anneau commutatif noethérien, A est produit d'un nombre fini d'anneaux A_i tels que : A_i est un anneau de Dedekind ou un Γ-anneau local noethérien admettant un seul idéal premier.

Si A est un Γ-anneau noethérien tout idéal premier essentiel de A est maximal et A est un C-anneau (prop. 2.10) ; nous allons établir une réciproque :

Théorème 3. Pour qu'un Γ-anneau commutatif soit un C-anneau, il faut et il suffit qu'il soit noethérien.

Lemme 3. Pour qu'un Γ-anneau local A soit un C-anneau il faut et il suffit qu'il soit noethérien.

La condition est suffisante d'après le lemme 5.2 ; réciproquement tout idéal du Γ-anneau local est $\cap$-irréductible, s'il n'est pas nul, il est donc essentiel et tout idéal premier non nul est maximal (proposition 2.9). Nous allons montrer que l'idéal premier M non nul de A est principal. Soit $x \in A$, $x \neq 0$; il existe $y \notin Ax$ tel que $My \subseteq Ax$, les idéaux de A forment une chaîne, on peut donc trouver $a \in A$ tel que $x = ay$; si $m \in M$, $my \in Ax \Longleftrightarrow my = bay$, où $b \in A$ et m est un élément de $Aa + \mathrm{Ann}(y)$, comme $a \notin \mathrm{Ann}(y)$, on a $Aa \supseteq \mathrm{Ann}(y)$; finalement $M = Aa$ et A est noethérien.

Soit A un Γ-anneau qui est un C-anneau ; d'après le théorème 5.1 A est le produit d'un nombre fini d'anneaux A_i , qui, d'après la proposition 2.9 sont des anneaux locaux, noethériens en vertu du lemme 5.3 et A est noethérien.

Propriété 3. Un Γ-anneau commutatif réduit est un anneau semi-héréditaire.

Si S désigne l'ensemble des éléments de l'anneau A, non diviseurs de zéro, $S^{-1}A$ est un anneau semi-simple d'après le théorème 5.1 et pour tout idéal P premier ; A_P est un anneau de valuation, le théorème de Endo [2] entraîne l'assertion.

2 - CARACTERISATION DES ANNEAUX REGULIERS COMMUTATIFS.

Les Γ-anneaux ne sont pas les seuls anneaux donnant une réponse affirmative au problème posé ; les anneaux réguliers commutatifs ont également cette propriété comme le montre l'étude qui suit :

Proposition 7. Soit A un anneau régulier commutatif ; si J est un idéal de A on a $C(A/J) = A/J$, où $C(A/J)$ désigne le coeur du A-module A/J.

Pour établir ce résultat on aura besoin de la propriété suivante :

Lemme 4. Soit M un module monogène sur un anneau commutatif A ; pour que $C(M)$ soit différent de M, il faut et il suffit qu'il existe un endomorphisme essentiel φ de M avec $\varphi(M) \neq (0)$.

Si $C(M) \neq M$, il existe un endomorphisme essentiel f de $E(M)$ enveloppe injective de M, tel que $f(M) \neq (0)$; $M = Ax$, on a donc $f(x) \neq 0$ et il existe $a \in A$ avec $af(x)$ élément non nul de M ; si on pose $\varphi = af$, φ est un endomorphisme essentiel de M et on a $\varphi(M) \neq (0)$.

Soit x_0 l'image canonique de l'élément unité de A dans A/J ; nous allons démontrer que les endomorphismes essentiels de $A x_0$ sont nuls ce qui, en vertu du lemme précédent, démontrera la proposition.

Soit φ un endomorphisme essentiel de $A x_0$; on a $\varphi(x_0) = a x_0$, supposont $ax_0 \neq 0$, $\ker \varphi = \mathrm{Ann}(ax_0) \cdot x_0$. Soit y un élément de $\ker \varphi \cap A ax_0$; $y = \lambda ax_0$ et on a $\varphi(y) = 0$, c'est-à-dire $\lambda a^2 x_0 = 0$ et $\lambda a^2 \in \mathrm{Ann}(x_0) = J$, a fortiori $\lambda^2 a^2 \in J$; A est un anneau régulier on en déduit $\lambda a \in J$, d'où $y = 0$ et $\ker \varphi \cap Aax_0 = (0)$ ce qui est contraire au choix de φ.

Théorème 4. Soit M un module sur un anneau régulier commutatif ; les propriétés suivantes sont équivalentes ;

(i) L'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(ii) $M = C(M)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) (théorème 4.1) .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Si $x \in M$ est tel que Ax soit essentiel dans M , d'après la proposition 5.7 , $C(M) \supset Ax$; supposons maintenant, Ax non essentiel dans M ; soit $E(Ax)$ une enveloppe injective de Ax contenue dans $E(M)$; si φ est un endomorphisme essentiel de $E(M)$ on a $\varphi[E(Ax) \cap M] \subset E(Ax)$ d'après le théorème 4.3 . Soit φ_1 la restriction de φ à $E(Ax) \cap M$; φ_1 se prolonge en un endomorphisme essentiel φ_0 de $E(Ax)$ et d'après la proposition 5.7 $\varphi_0(Ax) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ d'où $x \in C(M)$ et finalement $M = C(M)$.

Corollaire. Pour qu'un anneau commutatif A soit un anneau régulier il faut et il suffit, que pour tout A-module M , les propriétés (i) et (ii) du théorème précédent soient équivalentes.

Soit J un idéal $\cap$ -irréductible d'un tel anneau A ; on a par hypothèse $C(A/J) = A/J$, on sait alors que pour tout x non nul de A/J , on a $\mathrm{Ann}(x) = P$, où P est un idéal premier et J est premier. Si I est un idéal de A , I est égal à sa racine $r(I)$ et A est régulier.

3 - ETUDE DU PROBLEME DANS LE CAS DES MODULES SUR UN ANNEAU COMMUTATIF NOETHERIEN.

Rappelons les résultats classiques suivants : si E est un A-module injectif, où A est un anneau commutatif noethérien, E est somme directe de modules injectifs et indécomposables ; d'autre part il y a correspondance biunivoque entre les types d'injectifs indécomposables et les idéaux premiers de A . L'étude du sous-module $C(E)$ a été faite dans [11] , on se propose de déterminer $\Gamma(E)$.

Proposition 8. Soit E un A-module injectif isotypique tel que $\dim E > 1$, alors $\Gamma(E) = C(E)$.

On a $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, où E_i est un A-module injectif indécomposable tel que pour tout $i \in I$, E_i soit isomorphe à $E(A/P)$ où P est un idéal premier de A . Rappelons les résultats suivants $\Gamma(E) = \bigoplus_{i \in I} (\Gamma(E) \cap E_i)$ (théorème 4.1) et $C(E) = \bigoplus_{i \in I} C(E_i)$ [11] ; nous allons montrer que $\Gamma(E) \cap E_i = C(E_i)$. Si $C(E) = E$, la propriété est vraie, supposons donc $C(E) \neq E$; pour tout $i \in I$ on a alors $C(E_i) \neq E_i$; si $\Gamma(E) \cap E_i$ contient strictement $C(E_i)$, il existe $x \in \Gamma(E) \cap E_i$; $x \notin C(E_i)$; $Ann(x) = J$ est un idéal $\cap$-irréductible différent de P . Soit $y \in E_j$, $j \neq i$, avec $Ann(y) = P$, $y \in \Gamma(E)$ et on a $Ax \cap Ay = (0)$ avec $A/Ann(x)$ extension essentielle de $Ann(y)/Ann(x)$ ce qui contredit le théorème 3.5.

Remarque :

La proposition 5.8 et le théorème 4.2 entraînent le résultat suivant : Soit E un A-module injectif isotypique ; pour que l'intersection de deux sous-modules injectifs de E , soit un module injectif, il faut et il suffit que $C(E) = E$ (résultat obtenu par d'autres méthodes au chapitre III) , si p est l'idéal premier associé à E , p est un idéal premier minimal qui est un sous-module complément dans A ; car il n'existe pas dans A d'idéal P-primaire différent de P et l'anneau local A_p est un corps.

Proposition 9. Soit E un A-module injectif somme directe d'injectifs indécomposables dont les idéaux premiers associés sont non comparables deux à deux pour la relation d'inclusion ; alors $\Gamma(E) = E$ et l'intersection de deux sous-modules injectifs de E est un sous-module injectif.

C'est une conséquence facile du théorème 3.1 .

Soit E un A-module injectif quelconque ; si Φ désigne l'ensemble des éléments maximaux de $Ass(E)$, on peut écrire $E = E_1 \oplus E_2$. Avec $Ass(E_1) = Ass(M) - \Phi$ et $Ass(E_2) = \Phi$. $\Gamma(E)$ est extension essentielle de $C(E)$ et il est facile de montrer que $\Gamma(E) = \Gamma(E_1)$. Si on pose $E_1 = \bigoplus_{i \in I} F_i$, où les F_i désignant les composants isotypiques de E_1 , on a

$\Gamma(E) = \Gamma(E_1) = \bigoplus_{i \in I} \Gamma(F_i)$, où $\Gamma(F_i) = C(F_i)$ si $\dim F_i > 1$ et $\Gamma(F_i) = F_i$ si $\dim F_i = 1$.

Proposition 10. Soit M un A-module vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\mathrm{Ass}(M) = \{P\}$.

(ii) L'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

Alors si M est de dimension infinie $M = \Gamma(M)$; si M est un module de dimension finie, non indécomposable avec $M \neq \Gamma(M)$, $M - \Gamma(M)$ est l'ensemble des éléments x tels que Ax soit essentiel dans M .

Si E désigne une enveloppe injective de M , on sait, d'après la proposition 5.8 que $C(E) = \Gamma(E)$ et par suite $C(M) = \Gamma(M)$. Si M n'est pas contenue dans $\Gamma(E)$, il existe $x \in M$, $x \notin \Gamma(M)$ avec $\mathrm{Ann}(x) = q$, où q est un idéal P-primaire différent de P . Si Ax n'est pas essentiel dans M , ce qui sera toujours le cas si la dimension de M est infinie, il existe $y \neq 0$, $y \in M$ tel que $\mathrm{Ann}(y) = P$ et $Ax \cap Ay = (0)$; on aurait alors $A/\mathrm{Ann}(x)$ extension essentielle de $\mathrm{Ann}(y)/\mathrm{Ann}(x)$ ce qui contredit le théorème 3.5 .

On a vu, proposition 5.4 , que si M , est un module d'enveloppe injective E , tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément, alors $\Gamma(E)$ est essentiel dans E , il en résulte la propriété suivante : si P_1 et P_2 sont deux éléments de $\mathrm{Ass}(M)$, ils ne sont pas comparables pour la relation d'inclusion. Nous allons déterminer les anneaux noethériens vérifiant la condition suivante :

(B) Pour tout A-module M tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément on a $M = \Gamma(M)$.

D'après la description de $\Gamma(E)$ et la proposition 5.10 , ce sont les anneaux tels que les A-modules isotypiques de dimension finie vérifient (B) .

Lemme 5. Pour qu'un anneau A vérifie (B) , il faut et il suffit, que pour tout A-module M isotypique de dimension 2 tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément, on ait $M = \Gamma(M)$.

Soit M un A-module isotypique de dimension n ; on a $n = 2p$ où

$n = 2p + 1$. E désignera une enveloppe injective de M .

a) $n = 2p$: $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où F_i est de dimension 2 ; si q_i désigne la projection de E sur F_i , parallèlement aux autres facteurs, $q_i(M)$ est un sous-module essentiel de F_i ; tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans $q_i(M)$ est un sous-module complément (conséquence facile de la proposition 1.2) ; par hypothèse $q_i(M) \subset \Gamma(F_i)$ or $\Gamma(E) = \bigoplus_{i=1}^{p} \Gamma(F_i)$ et $M \subset \Gamma(M)$.

b) $n = 2p + 1$: $E = \left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) \oplus E_o$, où F_i est de dimension 2 pour tout i et E_o est un module indécomposable si $x \in M$, $x \notin \Gamma(E)$, d'après la proposition 5.10 , Ax est essentiel dans M . On a $x = x_1 +\dots+ x_2 +\dots+ x_p + x_o$ où x_i est un élément non nul de $\Gamma(F_i)$ pour $i = 1, 2,\dots, p$ et x_o est un élément non nul de E_o , si P est l'idéal premier associé à M on a $\mathrm{Ann}(x_i) = P$ (proposition 5.8) et par suite $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(x_o)$ et Ax n'est pas essentiel.

<u>Théorème 5</u>. <u>Si</u> A <u>est un anneau commutatif noethérien, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) A <u>vérifie la condition</u> (B) .

(ii) <u>Pour tout idéal premier</u> P <u>de</u> A , <u>les idéaux</u> P-<u>primaires</u> q <u>contenant</u> P^2 <u>sont</u> $\cap$ -<u>irréductibles</u>.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) cela a été montré au début du chapitre V.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) d'après le lemme 5.5 il suffit de démontrer que si M est un A-module isotypique de dimension 2 , tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément alors $M = \Gamma(M)$. Supposons qu'il existe un module M vérifiant les conditions précédentes avec $M \not\subset \Gamma(M)$; $M - \Gamma(M)$ est l'ensemble des éléments x tels que Ax soit essentiel dans M (proposition 5.10) . Soit $x_o \in M - \Gamma(M)$ avec $\mathrm{Ann}(x_o)$ maximal parmi les annulateurs des éléments de $M - \Gamma(M)$; $\mathrm{Ann}(x_o) = J_1 \cap J_2$, car M est de dimension 2 , où J_1 et J_2 sont deux idéaux $\cap$ -irréductibles non comparables pour la relation d'inclusion. Si x est un élément non nul de Ax_o, on a par construction $\mathrm{Ann}(x) = P$ ou $\mathrm{Ann}(x) = J_1 \cap J_2$ et il en résulte $P^2 \subset J_1 \cap J_2$ ce qui contredit (ii) .

***

INDEX TERMINOLOGIQUE

***

***

BIBLIOGRAPHIE

***

[1] CROISOT R. : Coeur d'un module II. Séminaire DUBREIL-PISOT t. 14 1960-61 n° 17.

[2] ENDO : On semi-hereditary rings. J. Math. Soc. JAPON 13. (1961) p. 109-119.

[3] FAITH. C. and UTUMI. Y. : Quasi-injective modules and their endomorphism rings. Archiv. der. Math. Vol. 15 fas. 3 p. 166-174 (1964).

[4] FORT. J. : (Thèse) Bull. Soc. Math. Fr. supplément au numéro de sept. 1964. Mémoire n° 1.

[5] FUCHS : Abélian groups. BUDAPEST Publishing house of the hungarian Academy of Sciences. 1958.

[6] GABRIEL. P. : Des catégories abéliennes Bull. Soc. Math. Fr. t. 90. 1962.

[7] GOLDIE A.W. : Semi-prime rings with maximum condition. Proc. LONDON. Math. Soc. Série 3 t. 10. 1960 p. 201-220.

[8] JOHNSON R.E. : Structure theory of faithful rings II. Tran. Amer. Math. Soc. t. 84. 1957 p. 523-544.

[9] JOHNSON R.E. and WONG E.T. : Quasi-injective modules and irreductible rings. J. LONDON. Math. Soc. t. 36. 1961 p. 260-265.

[10] LESIEUR L. et CROISOT R. : Sur les anneaux premiers noethériens à gauche. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t. 76. 1959. p. 161-183.

[11] LESIEUR L. et CROISOT R. : Coeur d'un module. J. Math. Pures et appl. 42. Fasc. 4. 1963 p. 367-407.

[12] LESIEUR L. et CROISOT R. : Algèbre noethérienne non commutative. Mémorial des Sciences Mathématiques. 1963.

[13] OSOFSKY B. L. : Rings all of whose finitely generated modules are injective. Pacific J. of Math. Vol. 14 n° 2 (1964). p. 645.

[14] RENAULT G. : C.R. Acad. Sc. Paris t. 256 p. 3222. 1963.

[15] RENAULT G. : C.R. Acad. Sc. Paris t. 258 p. 4888. 1964.

[16] RENAULT G. : C.R. Acad. Sc. Paris t. 259 p. 4203. 1964.

***