MÉMOIRES DE LA S. M. F.

P. BERNAT

Sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble

Mémoires de la S. M. F., tome 7 (1966)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1966__7__1_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 7, 1966, 175 p.

SUR LE CORPS ENVELOPPANT D'UNE ALGÈBRE DE LIE RÉSOLUBLE

par

Pierre BERNAT

*
* *

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre V

Compléments divers

*
* *

INTRODUCTION

Soient G un groupe de Lie réel simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, K le corps des fractions de U, U_o le centre de U, Z le centre de K, K_o le corps des fractions de U. On a les inclusions $\mathbb{R} \subset U_o \subset K_o \subset Z$, $\mathbb{R}$ désignant le corps des réels.

Si G est nilpotent, on sait [7] que K_o est une extension pure de $\mathbb{R}$, et que les représentations unitaires irréductibles de G se classifient en général à l'aide de caractères de U_o. Si G est résoluble, on a souvent $U_o = \mathbb{R}$ et Z est en général plus grand que K_o : la question se pose de savoir s'il est possible de classifier les représentations irréductibles de G par des caractères de Z.

L'exemple suivant dont l'idée revient à J. DIXMIER est significatif à cet égard. Gardons les notations précédentes. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de base (x, y, z) définie par les crochets non nuls $[x, y] = p\, y$, $[x, z] = q\, z$, p, q étant des entiers rationnels non nuls. Alors G est un groupe exponentiel [3] et $Z = \mathbb{R}(y^q z^{-p})$: si $p\, q > 0$, alors $U_o = \mathbb{R}$. Les représentations irréductibles U de G qui ne sont triviales sur aucun des sous-groupes $\exp \mathbb{R}\, y$, $\exp \mathbb{R}\, z$ définissent des caractères non nuls χ_U de Z qui les déterminent à une équivalence près. Si U est une représentation de cette sorte construite à partir d'une forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$ [3], on a $\chi_U (y^q z^{-q}) = U_{y^q z^{-p}} = i\, f(y)^q f(z)^{-q}$, le générateur $y^q z^{-p}$ de Z sur $\mathbb{R}$ apparait comme un élément classifiant au sens de [7].

Il semble donc que, dans le cas résoluble, Z puisse jouer le rôle tenu dans le cas nilpotent par U_o. D'où l'intérêt qu'il y aurait à connaitre la structure de Z. Son étude fait l'objet du présent travail.

Plus précisément, étant donné un corps commutatif quelconque L , soit (P_L) l'assertion suivante : (P_L) pour tout entier $n > 0$, le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie sur L , résoluble et de dimension n , est une extension pure de L , de degré $\leqslant n$.

Nous montrons (P_L) dans un certain nombre de cas. Notre exposé s'ordonne comme suit. Au chapitre I , on établit, pour une classe de corps gauches, des propriétés qui les apparentent aux corps de fractions rationnelles sur un corps commutatif. Le chapitre II établit (P_L) pour L algébriquement clos de caractéristique 0 . Le chapitre III groupe quelques lemmes techniques. La démonstration de (P_R) fait l'objet du chapitre IV. Quelques résultats subsidiaires sont groupés au chapitre V.

Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans [1] et [2]

Nous tenons à remercier Monsieur J. DIXMIER qui a bien voulu s'imposer la lecture de cette étude, et nous signaler un certain nombre d'imprécisions ou d'inexactitudes.

Notations. Elles sont fixées au début de chaque chapitre. Un symbole tel que (II 1-3) renvoie au § 1-3 du chapître II. Les indications de chapitre, toutefois, sont généralement omises à l'intérieur d'un même chapitre.

Par ailleurs, un index (p. 173) donne les références des principaux symboles et termes utilisés.

*
* *

CHAPITRE I

Propriétés du corps des quotients d'un anneau

1. Notations et terminologie.

1-1 On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels ; les lettres n, m, éventuellement affectées d'indices, désigneront des entiers $\geqslant 0$, fixés dans le contexte, les lettres i, k des entiers variables.

1-2 Soient A un anneau, $u, v \in A$, $B \subset A$. On posera

$$[u, v] = uv - vu$$

On vérifie aussitôt les égalités

$$(1) \qquad \begin{cases} [u, v] = -[v, u] \qquad , \text{ et, pour } n > 1 \\ [u, v^n] = [u, v]\, v^{n-1} + v\, [u, v^{n-1}] = [u, v^{n-1}]\, v + v^{n-1}\, [u, v] \end{cases}$$

On notera $[u, B]$ l'ensemble des éléments $[u, w]$, pour $w \in B$, et on dira que u est symétrique par rapport à B si $[u, B] \subset B$. Les résultats du § 2 justifient cette terminologie.

1-3 Soient A un anneau, B un sous-anneau de A. Pour tout $x \in A$, nous noterons

- $M(x)$ le monoïde multiplicatif engendré par x

- $B_\ell\{x\}$ (resp. $B_r\{x\}$) le B - pseudo module à gauche (resp. à droite) engendré par $B \cup M(x)$

- $P_\ell(B, x)$ (resp. $P_r(B, x)$) l'ensemble des expressions formelles

(2) (E) $b_n x^n + \ldots + b_o \qquad b_i \in B$

(resp.

(3) (E) $x^n b_n + \ldots + b_o \qquad b_i \in B$)

Les éléments de $P_\ell(B, x)$ (resp. $P_r(B, x)$) sont les <u>polynômes</u> (en x) <u>à gauche</u> (resp. à <u>droite</u>) sur B . Pour tout $P \in P_\ell(B, x)$ (resp. $P_r(B, x)$) , on définit de manière naturelle le <u>degré</u> deg (P) et le <u>coefficient dominant</u> p(P) = "le coefficient du terme de plus haut degré" de P . (On posera deg (0) = 0)

L'ensemble $P_\ell(B, x)$ (resp. $P_r(B, x)$) s'identifie de manière naturelle au B - module à gauche (resp. à droite) $B^{(\mathbb{N})}$, et il existe une surjection évidente $\psi_\ell(x) : P_\ell(B, x) \longrightarrow B_\ell\{x\}$ (resp. $\psi_r(x) : P_r(B, x) \longrightarrow B_r\{x\}$) . Pour $u \in B_\ell\{x\}$ (resp. $u \in B_r\{x\}$) , on posera $\mathcal{R}_\ell(u) = (\psi_\ell(x))^{-1}(\{u\})$ (resp. $\mathcal{R}_r(u) = (\psi_r(x))^{-1}(\{u\})$; les éléments de $\mathcal{R}_\ell(u)$ (resp. $\mathcal{R}_r(u)$) sont les <u>représentants</u> de u dans $P_\ell(B, x)$ (resp. $P_r(B, x)$) .

Si $\psi_\ell(x)$ (resp. $\psi_r(x)$) est une bijection, nous dirons que x est <u>transcendant à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) par rapport à B . On peut alors identifier $B_\ell\{x\}$ à $P_\ell(B, x)$ (resp. $B_r\{x\}$ à $P_r(B, x)$), et définir, pour $u \in B_\ell\{x\}$ (resp. $u \in B_r\{x\}$) le degré de u , noté $\deg_B^\ell(u)$, (resp. $\deg_B^r(u)$) , et le terme dominant de u , noté $p_B^\ell(u)$ (resp. $p_B^r(u)$) .

Nous dirons que x est transcendant par rapport à B , s'il est transcendant à gauche et à droite par rapport à B . Plus généralement, nous omettrons les indices ℓ, r lorsque les objets "à gauche" et "à droite correspondant sont identiques. On omettra de même l'indice B lorsque le contexte ne prêtera pas à confusion. Ces principes sont valables pour tout ce chapitre.

2. Propriétés des éléments symétriques.

2-1 Lemme 1 Soient

- A un anneau
- B un sous-anneau de A
- x un élément de A symétrique par rapport à B

Alors

(i) Pour tout $P \in P_\ell(B, x)$, il existe $P' \in P_r(B, x)$ tel que

$\psi_\ell(x)(P) = \psi_r(x)(P')$ et $\deg(P) = \deg(P')$ et $p(P) = p(P')$

(ii) Pour tout $P \in P_r(B, x)$, il existe $P' \in P_\ell(B, x)$ tel que

$\psi_r(x)(P) = \psi_\ell(x)(P')$ et $\deg(P) = \deg(P')$ et $p(P) = p(P')$

(iii) $B_\ell\{x\} = B_r\{x\} = B\{x\}$, et $B\{x\}$ est un anneau.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(i)_n$ l'assertion que pour $P \in P_\ell(B, x)$ et $\deg(P) < n$, il existe $P' \in P_r(B, x)$ vérifiant (i) . Il est clair que $(i)_1$ est vraie. Supposons

$n > 1$, $(i)_n$ vérifiée , $P \in P_\ell(B, x)$ et $\deg P = n$

et posons

$u = \psi_\ell(x)(P)$, $b = p(P)$, $b_0 = [b, x]$

Par hypothèse $b_0 \in B$. Par ailleurs il existe $P_1 \in P_\ell(B, x)$ tel que

$$u = b\,x^n + \psi_\ell\,(P_1) \quad \text{et} \quad \deg\,(P_1) < n$$

Or (1-2 formules (1)) :

$$b\,x^n = x^n\,b + [b,\ x^n] = x^n\,b + b_o\,x^{n-1} + x\,[b,\ x^{n-1}]$$

Appliquant d'abord $(i)_n$ à l'élément $b\,x^{n-1}$ de $P_\ell(B,\ x)$ on en déduit que

$$[b, x^{n-1}] = \psi_r(x)(P_2), \text{ avec } P_2 \in P_r(B,\ x) \text{ et } \deg P_2 < n\text{-}1$$

Appliquant ensuite $(i)_n$ aux éléments $b_o\,x^{n-1}$ et P_1 de $P_\ell(B,\ x)$, on en déduit l'existence de $P' \in P_r(B,\ x)$ vérifiant les conditions de (i) . Donc $(i)_n \Longrightarrow (i)_{n+1} \Longrightarrow (i)$.

L'assertion (ii) se démontre de manière analogue, en utilisant cette fois le troisième membre de l'identité (1) de 1-2 .

Par ailleurs, $\psi_\ell\,(x)$ et $\psi_r(x)$ étant surjectifs, on a :
$(i) \Longrightarrow (B_\ell\,\{x\} \subset B_r\,\{x\})$ et $(ii) \Longrightarrow (B_r\,\{x\} \subset B_\ell\,\{x\})$, ce qui établit la première assertion de (iii). Pour vérifier la seconde, on se ramène, par linéarité et compte tenu de la première, à vérifier que tout élément de A de la forme

$$b\,x^m\,c\,x^n\ , \quad \text{avec} \quad b,\ c \in B\ ,\ n,\ m \geqslant 0$$

appartient à $B_\ell\,\{x\}$ (par exemple). Mais céla résulte d'applications répétées de (ii).

<u>2-2</u> <u>Proposition 1</u> Soient

- A un anneau
- B un sous-anneau de A
- x un élément de A symétrique par rapport à B

Dans ces conditions

(i) si x est transcendant à droite <u>ou</u> à gauche par rapport à B, alors x est transcendant par rapport à B.

(ii) si x est transcendant par rapport à B, alors, pour tout $u \in B\{x\}$, on a

$$\deg_B^\ell(u) = \deg_B^r(u) = \deg_B(u) \quad \text{et} \quad p_B^\ell(u) = p_B^r(u) = p_B(u)$$

(iii) si x est transcendant par rapport à B, et si B est sans diviseur de zéro, alors, pour tout couple (u, v) d'éléments non nuls de $B\{x\}$, on a :

$$\deg_B(u\,v) = \deg_B(u) + \deg_B(v) \quad \text{et} \quad p_B(u\,v) = p_B(u)\,p_B(v)$$

<u>Démonstration</u>. Compte tenu du lemme 1, on a :
(x non transcendant à gauche par rapport à B) $\Longleftrightarrow$
$(\exists P)\,(P \in P_\ell(B, x)$ et $p(P) \neq 0$ et $\psi_\ell(x)(P) = 0) \Longleftrightarrow$
$(\exists P')(P' \in P_r(B, x)$ et $p(P') \neq 0$ et $\psi_r(x)(P') = 0) \Longleftrightarrow$
(x non transcendant à droite par rapport à B) ce qui établit (i).
L'assertion (ii) résulte aussitôt du lemme 1 ; compte tenu des hypothèses et de ce qui précède, il suffit, pour montrer (iii), de vérifier que pour tout couple (b, c) d'éléments non nuls de B, on a, quels que soient les entiers $\geqslant 0$ n, m :

$$\deg\,(b\,x^n\,c\,x^m - b\,c\,x^{n+m}) < n + m\,.$$

Mais cela résulte encore du lemme 1.

3. <u>Les anneaux réguliers</u>.

<u>3-1</u> Soit A un anneau sans diviseur de zéro. On dit que A admet un corps des fractions à gauche s'il existe un corps K et un sous anneau A' de K tels que A' soit isomorphe à A et que tout élément de K

soit de la forme $x'^{-1} y'$, avec $x' \in A'$, $y' \in A'$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, quels que soient $x \in A$, $y \in A$, $y \neq 0$, il existe $u, v \in A$, $u \neq 0$ tels que $u x = v y$[8]. Le corps K est alors déterminé à un isomorphisme près. On écrira, par abus de langage, $K = K_\ell(A)$. On définit pareillement la nation de corps des fractions à droite. Pour que A possède un corps des fractions à gauche $K_\ell(A)$ et un corps des fractions à droite $K_r(A)$, il faut et il suffit que

(P) quels que soient $x \in A$, $y \in A - \{0\}$, il existe u, u' $v, v' \in A$ tels que

$$u u' \neq 0 , \quad \text{et} \quad u x = v y \quad \text{et} \quad x u' = y v' .$$

S'il en est ainsi, nous dirons que A est un anneau <u>régulier</u>. Nous dirons de même qu'une algèbre A_1 est régulière si l'anneau A_1 est régulier. Si A est un anneau régulier, et si l'on identifie A à son image dans $K_\ell(A)$ et à son image dans $K_r(A)$, l'application identique de A se prolonge d'une manière unique en un isomorphisme de $K_\ell(A)$ sur $K_r(A)$ [8]. Nous identifierons $K_\ell(A)$ à $K_r(A)$ et noterons $K(A)$ l'objet obtenu de la sorte, que nous appelerons le <u>corps des fractions de A</u>. L'anneau A s'identifie alors à un sous-anneau de $K(A)$. Ces identifications sont canoniques en ce sens qu'elles dépendent seulement du choix préalable des isomorphismes $A \longrightarrow K_\ell(A)$, $A \longrightarrow K_r(A)$.

Si A est un anneau régulier, pour toute famille finie $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ d'éléments de $K(A)$, il existe des éléments $y_1, \dots, y_n$, $v_1, \dots, v_n$ de A, et deux éléments non nuls x, u de A tels que $\alpha_i = x^{-1} y_i = v_i u^{-1}$ pour $i = 1, \dots, n$[8].

<u>3-2</u> <u>Proposition 2</u> Soient

- A un anneau régulier de caractéristique $\neq 2$
- D une dérivation de A

Alors

(i) D se prolonge d'une manière unique en une dérivation $\bar{D}$ de $K(A)$

(ii) l'ensemble des éléments de $K(A)$ annulés par $\bar{D}$ est un sous-corps de $K(A)$

<u>Démonstration.</u>

1. Posons $A^* = A - \{0\}$, $E = A^* \times A$. Soient (u, v), $(x, y) \in E$, $\alpha \in K(A)$ tels que $\alpha = x^{-1} y = v u^{-1}$. S'il existe une dérivation $\bar{D}$ prolongeant D , alors

$$0 = D\,1 = \bar{D}(x\, x^{-1}) = D\,x \,.\, x^{-1} + x \,.\, \bar{D}(x^{-1})$$

Donc $\bar{D}(x^{-1}) = -\, x^{-1} \,.\, (D\,x) \,.\, x^{-1}$, et de même $\bar{D}(u^{-1}) = -\, u^{-1}(D\,u)\, u^{-1}$

et par suite

$$(1)\quad \bar{D}(\alpha) = x^{-1} \,.\, D\,y + \bar{D}(x^{-1}) \,.\, y = x^{-1} \,.\, D\,y - x^{-1} \,.\, D\,x \,.\, x^{-1}\, y$$

$$(2)\quad \bar{D}(\alpha) = D\,v \,.\, u^{-1} + v \,.\, \bar{D}(u^{-1}) = D\,v \,.\, u^{-1} - v\, u^{-1} \,.\, D\,u \,.\, u^{-1}$$

2. Pour que les égalités (1), (2) définissent une même application $\bar{D}$ de $K(A)$ dans $K(A)$, il suffit évidemment que l'égalité $\alpha = x^{-1} y = v\, u^{-1}$, soit

$$(3)\quad y\, v = x\, v$$

implique

$$(4)\quad x^{-1} \,.\, D\,y - x^{-1} \,.\, D\,x \,.\, x^{-1}\, y = D\,v \,.\, u^{-1} - v\, u^{-1} \,.\, D\,u \,.\, u^{-1}$$

ce qui est le cas : en effet (3) entraîne que

(5) $y \,.\, Du + Dy \,.\, u = x \,.\, Dv + Dx \,.\, v$

et l'on en déduit (4) par multiplication des deux membres de (5), à gauche par x^{-1}, à droite par u^{-1}.

3. Pour établir (i) il reste donc à vérifier que l'application $\bar{D}$ définie par les formules (1) ou (2) est une dérivation, l'unicité résultant évidemment de ces mêmes formules. Soient $\beta, \gamma \in K(A)$. Il s'agit de vérifier les égalités

(6) $\bar{D}(\beta + \gamma) = \bar{D}(\beta) + \bar{D}(\gamma)$

et

(7) $\bar{D}(\beta\gamma) = \bar{D}(\beta) \,.\, \gamma + \beta \,.\, \bar{D}(\gamma)$

Or il existe $w, z \in A^*$ et $b, c, t \in A$ tels que

(8) $\beta = w^{-1} b$ et $\gamma = w^{-1} c = t z^{-1}$

Il est clair que (1) et (8) impliquent (6). Montrons (7). Il existe, d'après (P), $(d, e) \in E$ tel que

(9) $d^{-1} e = b t z^{-1}$

et par suite

$$d^{-1}.De - d^{-1}.Dd.d^{-1} e = \bar{D}(d^{-1}e) = \bar{D}(b\, t\, z^{-1}) = D(b\, t).z^{-1} - bt\, z^{-1}.Dz.z^{-1}$$

soit

(10) $d^{-1}.De - d^{-1}.Dd.d^{-1}e = Db.tz^{-1} + b.Dt.z^{-1} - bt\, z^{-1}.Dz.z^{-1}$

Compte tenu de (1), (8), (9) et (10) on obtient alors

$$\begin{aligned}\bar{D}(\beta\gamma) &= \bar{D}(w^{-1}\ b\ t\ z^{-1}) = \bar{D}((dw)^{-1}\ e) = (dw)^{-1}\ De - (dw)^{-1}\ D(dw).(dw)^{-1}.e \\ &= w^{-1}.d^{-1}.De - w^{-1}.d^{-1}.[Dd.w + d.Dw]\ w^{-1}.d^{-1}.e \\ &= w^{-1}[d^{-1}.De - d^{-1}.Dd.d^{-1}.e] - w^{-1}.Dw.w^{-1}.d^{-1}.e \\ &= w^{-1}[Db.tz^{-1} + b.Dt.z^{-1} - bt\ z^{-1}.Dz.z^{-1}] - w^{-1}.Dw.w^{-1}.bt\ z^{-1} \\ &= [w^{-1}.Db - w^{-1}.Dw.w^{-1}\ b]\ t\ z^{-1} + w^{-1}\ b\ [Dt.z^{-1} - t\ z^{-1}.Dz.z^{-1}] \\ &= \bar{D}(\beta)\ .\ \gamma + \beta\ .\ \bar{D}(\gamma)\ .\end{aligned}$$

4. L'assertion (ii) résulte de ce que $\bar{D}$ est une dérivation d'un corps. (cf. par exemple [5])

Corollaire 1. Notations et hypothèses de la proposition. Si D est la dérivation intérieure de A définie par un élément de A, alors $\bar{D}$ est la dérivation intérieure de $K(A)$ définie par ce même élément.

Corollaire 2. Soient K un corps commutatif, A une algèbre sur K, régulière. Alors toute K - dérivation de A se prolonge d'une manière unique en une K - dérivation de $K(A)$.

Démonstration. Les objets D et $\bar{D}$ étant définis comme dans la proposition, on a $\bar{D}(K) = D(K) = \{0\}$, donc $\bar{D}$ est K - linéaire.

3-3 Extension du corps des scalaires.

Proposition 3. Soient

- Ω un corps commutatif
- E un sous-corps de Ω
- U une algèbre sur E, régulière
- K le corps des fractions de U

Dans ces conditions

(i) Si l'algèbre $U \otimes_E \Omega$ est régulière, alors K et Ω sont linéairement disjoints sur E dans le corps des fractions de $U \otimes_E \Omega$

(ii) Si en outre Ω est une extension quadratique de Ω , alors $K \otimes_E \Omega$ est un corps canoniquement isomorphe au corps des fractions de $U \otimes_E \Omega$.

<u>Démonstration</u>. Posons $U_\Omega = U \otimes_E \Omega$, $K_\Omega = K \otimes_E \Omega$ et, supposant U_Ω régulière, notons $K(U_\Omega)$ le corps des fractions de U_Ω . Par définition du produit tensoriel, U et Ω sont des sous-algèbres commutantes de U_Ω , et par suite K et Ω sont des sous-algèbres commutantes de $K(U_\Omega)$; on peut donc définir une application canonique φ de K_Ω dans $K(U_\Omega)$: si $\alpha_i \in K$, $\omega_i \in \Omega$, $\varphi\left(\sum_i \alpha_i \otimes \omega_i\right) = \sum_i \alpha_i \omega_i$.
Montrer (i) revient à montrer que φ est injectif, i.e. que si, pour $i = 1,\dots, n$ et $\omega_1,\dots,\omega_n$ linéairement indépendants sur E , on a $\sum_i \alpha_i \omega_i = 0$, alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. En effet, il existe toujours des éléments $a, a_i \in U$ tels que $\alpha_i = a^{-1} a_i$, pour $i = 1,\dots, n$; donc $\sum_i \alpha_i \omega_i = 0$ équivaut à $0 = a^{-1} \sum_i a_i \omega_i = \sum_i a_i \omega_i = \sum_i a_i \otimes \omega_i$ et par conséquent $a_1 = \dots = a_n = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Cela étant, supposons qu'il existe $x \in \Omega$, $\alpha, \beta \in E$ tels que

$$(1) \quad \Omega = E[x] = E(x) \ , \quad x^2 = \alpha x + \beta \ , \quad \beta \neq 0 \quad \text{et} \quad x \notin E$$

Nous allons montrer que dans ces conditions <u>tout élément non nul de U_Ω est inversibles dans K_Ω</u> . Tout élément non nul de K_Ω étant le produit d'un élément non nul de K et d'un élément non nul de U_Ω , sera par suite inversible dans K_Ω et K_Ω sera un corps. Comme φ est injectif comme on vient de le voir, et que par ailleurs K_Ω contient U_Ω qui engendre $K(U_\Omega)$, il s'ensuivra que φ est bijectif : ce sera l'isomorphisme canonique cherché de K_Ω sur $K(U_\Omega)$.

Soient donc $a, b \in U$, non tous deux nuls. Montrons que $a x + b$ est inversible à droite dans K_Ω. Il suffit pour cela de trouver $c, d \in U$, non tous deux nuls tels que $(a x + b)(c x + d) \in U$: en effet, comme U_Ω n'a pas de diviseur de zéro et que $a x + b \neq 0$ et $c x + d \neq 0$, il s'ensuivra que $(a x + b) . (c x + d) = e \in U - \{0\}$, donc $(c x + d) e^{-1} = (c e^{-1}) x + (d e^{-1}) \in K_\Omega$ sera un inverse à droite de $a x + b$.

Pour tout couple (c, d) d'éléments de U, on a, compte tenu de (1) :

$$\begin{aligned}(ax + b)(cx + d) &= ac\,(\alpha x + \beta) + (bc + ad)\,x + bd \\ &= [(a\alpha + b)\,c + ad]\,x + [a\,\beta\,c + bd]\end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver, pour $a, b \in U$ non tous deux nuls, des éléments $c, d \in U$ tels que

$$(c, d) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad (a\alpha + b)\,c + ad = 0\,,$$

ce qui est toujours possible puisque U est régulière.

Inversant les rôles des couples (a, b), (c, d), on voit de même que l'existence d'un inverse à gauche de $ax + b$ équivaut à celle d'un couple $(c', d') \in U \times U$ tel que

$$(c', d') \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad c'(\alpha a + b) + d'\,a = 0$$

ce qui est encore assuré, pour la même raison.

4. L'algorithme de divisibilité et quelques conséquences.

4-1 Proposition 4. Soient

- A un anneau régulier
- B un sous-anneau régulier de A

- K (resp. L) le corps des fractions de A (resp. B)
- x un élément de A transcendant et symétrique par rapport à B, engendrant A sur B.

Dans ces conditions

(i) L est le sous-corps de K engendré par B ; l'élément x est transcendant et symétrique par rapport à L ; l'anneau $L\{x\}$ est régulier et K est son corps des fractions. En outre, pour tout $T \in B\{x\}$, on a : $\deg_B(T) = \deg_L(T)$.

(ii) pour tout $\alpha \in K$, il existe des éléments a, b, c, d de $L\{x\}$ tels que $\alpha = a^{-1}b = dc^{-1}$. On a alors

$$(1) \qquad \begin{cases} \deg_L b - \deg_L a = \deg_L d - \deg_L c \\ \text{et} \\ (p_L a)^{-1} \cdot (p_L b) = (p_L d) \cdot (p_L c)^{-1} \end{cases}$$

En outre α a un degré par rapport à L bien déterminé, noté $\deg_L \alpha$: c'est l'entier $\deg_L b - \deg_L a$, et un coefficient dominant bien déterminé, noté $p_L \alpha$: c'est l'élément $(p_L a)^{-1} \cdot (p_L b)$ de L.

(iii) pour tout couple (P, Q) d'éléments $\neq 0$ de $L\{x\}$, il existe deux couples (R, S), (R', S') d'éléments de $L\{x\}$ déterminés de manière unique par les conditions

$$(2) \qquad P = RQ + S \quad \text{et} \quad (\deg_L S < \deg_L Q \quad \text{ou} \quad S = 0)$$

$$(3) \qquad P = QR' + S' \quad \text{et} \quad (\deg_L S' < \deg_L Q \quad \text{ou} \quad S' = 0)$$

<u>Démonstration</u>. <u>Montrons (i)</u>. Comme B est régulier, tout élément du sous-corps L' de K engendré par B est le quotient de deux éléments de B, et par suite L' s'identifie à L. Soient $\alpha \in L$ et $a, b \in B$ tels que $\alpha = b\,a^{-1}$. Alors

$$[x, \alpha] = [x, b]\, a^{-1} + b\, a^{-1} [x\, a]\, a^{-1} \in L$$

donc x est symétrique par rapport à L. Si $U \in L\{x\}$, il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ et $a_1, \dots, a_n, b \in B$ tels que $U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i$ et $\alpha_i = b^{-1} a_i$, donc $U = b^{-1} \sum_i a_i x^i$, et par suite (prop. 1) x est transcendant par rapport à L. Cela montre également la dernière assertion de (i). Par hypothèse, $A = B\{x\} \subset L\{x\}$ et tout élément de K peut s'écrire sous la forme $U V^{-1}$ et sous la forme $(V')^{-1} U'$, avec $U, V, U', V' \in A$. En particulier, si $X \in L\{x\} - \{0\}$ et $Y \in L\{x\}$, il existe $U, U' \in L\{x\} - \{0\}$ et $V, V' \in L\{x\}$ tels que $V Y = U X$ et $Y V' = X U'$, donc $L\{x\}$ est régulier.

Montrons (ii). La première assertion résulte de ce qu'on vient de dire ; la seconde de l'égalité $b c = a d$ et de la prop. 1 ; les autres assertions sont des conséquences triviales de (1).

Montrons (iii). (iii) est trivial si $Q \in L$ ou que $\deg_L Q > \deg_L P$. Supposons donc $\deg_L P \geqslant \deg_L Q > 0$ et cherchons R, S vérifiant (2). Procédons par récurrence sur $\deg_L P$. Soient $n = \deg_L P$, $m = \deg_L Q$, $\alpha = (p_L P)(p_L Q)^{-1}$. Alors (prop. 1), $\deg_L (P - \alpha x^{n-m} Q) < n$. Si $\deg_L Q > \deg_L (P - \alpha x^{n-m} Q)$, on prend $R = \alpha x^{n-m}$, $S = P - RQ$. Sinon, il existe, par l'hypothèse de récurrence $R_1, S_1 \in L\{x\}$ tels que $P - \alpha x^{n-m} Q = R_1 Q + S_1$, et $\deg_L S_1 < \deg_L Q$, et il suffit alors de prendre $R = \alpha x^{n-m} + R_1$, $S = S_1$. Si un autre couple (R^*, S^*) d'éléments de $L\{x\}$ vérifie (2), alors $(R^* - R) Q = S^* - S$, donc (prop. 1)

$$\deg_L Q \leqslant \deg_L (R^* - R) + \deg_L Q = \deg (S^* - S)$$

ce qui est absurde.

On montre pareillement l'existence et l'unicité d'un couple (R', S') vérifiant (3).

Corollaire 1. Les notations et les hypothèses étant celles de la proposition, pour tout couple (P, Q) d'éléments $\neq 0$ de $L\{x\}$, il existe des éléments U, U', V, V' de $B\{x\}$ tels que $PQ^{-1} = VU^{-1} = (U')^{-1} V'$.

Corollaire 2. Les notations et les hypothèses étant celles de la proposition, pour tout élément $\alpha \neq 0$ de K, on a :

ou bien $\qquad \deg_L (\alpha - p_L(\alpha) \cdot x^{\deg_L \alpha}) < \deg_L \alpha$

ou bien $\qquad \alpha = p_L \alpha \cdot x^{\deg_L \alpha}$

Démonstration. Posons $n = \deg_L \alpha$, $u = p_L \alpha$. Il résulte des formules (1) de l'énoncé de la proposition que

(1) $$\deg_L (\alpha^{-1}) = -n \quad \text{et} \quad p_L(\alpha^{-1}) = u^{-1}$$

Par ailleurs

(2) $$x^n u (\alpha^{-1} - u^{-1} x^{-n})\alpha = x^n u - \alpha$$

et (prop. 1)

(3) $$\text{si } n > 0, \quad \deg_L (x^n u - u x^n) < n .$$

Cela étant, supposons d'abord le résultat établi pour les éléments de K de degré ≥ 0. Si n est < 0, il résulte alors de (1), (2) et (3) que, si $\alpha \neq 0$,

$$\deg_L(\alpha - ux^n) = 2n + \deg(\alpha^{-1} - u^{-1} x^{-n}) < 2n + (-n) = n .$$

On peut donc se limiter au cas où n est ≥ 0. Il existe alors des éléments P, Q de $L\{x\}$ tels que $\alpha = PQ^{-1}$ et $\deg_L(P) \geq \deg_L(Q)$, et par conséquent (prop. 6 (iii)), il existe des éléments R, S de $L\{x\}$ tels que $P = RQ + S$ et ($\deg_L(S) < \deg_L(Q)$ ou $S = 0$). Il s'ensuit que

$\alpha = R + SQ^{-1}$ et $R \neq 0$. Par ailleurs, il résulte de la démonstration de la prop. 4 que

$$u = p_L(P).(p_L(Q))^{-1} = p_L(R) \quad \text{et} \quad n = \deg_L(R)$$

Le résultat du corollaire est alors trivial si $S = 0$, et dans le cas contraire, on a $\deg_L(SQ^{-1}) < 0$ et par conséquent

$$\deg_L(\alpha - u\, x^n) = \deg\,(R - u\, x^n) < n \ .$$

4-2 Proposition 5 Soient

- A un anneau régulier
- B un sous-anneau régulier de A .
- K (resp. L) le corps des fractions de A (resp. B)
- x un élément de A , symétrique et transcendant par rapport à B et engendrant A sur B
- δ un ensemble de dérivations de A laissant stable B
- $\bar{\delta}$ l'ensemble des dérivations de K prolongeant les dérivations de δ (cf. prop. 2)
- N le sous-corps de K formé des éléments de K annulés par tous les éléments de $\bar{\delta}$
- $M = N \cap L\{x\}$
- $N' = N \cap L$
- G l'ensemble des éléments a de N , transcendants sur N' et tels que $N = N'\{a\}$

Dans ces conditions, notant deg le degré par rapport à B et le degı par rapport à L

(i) L et $L\{x\}$ sont stables par $\bar{\delta}$

(ii) si, pour tout $(u, D) \in A \times \delta$, on a $\deg Du \leqslant \deg u$, alors

(I) Si a, b, c, d sont des éléments de $L\{x\} - \{0\}$ tels que $(a = cb + d$ ou $a = bc + d)$ et $\deg d < \deg b$ et $a \in M$ et $b \in M$, alors $c \in M$ et $d \in M$

(II) N est le corps engendré par M dans K

(III) si $N \not\subset L$, alors $M \not\subset L$, $G \neq \emptyset$, et $G \cap M$ est l'ensemble des éléments de $M-N'$ de degré minimum ; si d est ce degré minimum, les degrés de tous les éléments de M sont des multiples entiers de d.

<u>Démonstration</u>. Soient $D \in \mathfrak{S}$ et $\bar{D} \in \bar{\mathfrak{S}}$ le prolongement de D à K. Par hypothèse $D|B$ est une dérivation de B, donc se prolonge en une dérivation de L, laquelle coïncide avec $\bar{D}|L$, en vertu de l'unicité de $\bar{D}$ (prop. 2). Donc L est stable par $\bar{D}$ et par suite par $\bar{\mathfrak{S}}$. Si $\sum_i \alpha_i x^i \in L\{x\}$, $\alpha_i \in L$, alors $\bar{D}\left(\sum_i \alpha_i x^i\right) = \sum_i (\bar{D}\alpha_i) x^i + \sum_i \alpha_i D(x^i)$ appartient à $L\{x\}$ puisque $\bar{D}\alpha_i \in L$ et $D(x^i) \in A = B\{x\}$, ce qui montre (i).

Montrons (ii). Soient a, b, c, d des éléments $\neq 0$ de $L\{x\}$ tels que

(1) $a = cb + d$ et $\deg d < \deg b$ et $a \in M$ et $b \in M$

alors $ab^{-1} = c + db^{-1} \in N$ et donc $Dc + \bar{D}(db^{-1}) = Dc + Dd \,.\, b^{-1} = 0$. Si $\bar{D}(db^{-1}) \neq 0$, alors $\deg Dc = \deg(\bar{D}(db^{-1})) < 0$, ce qui est absurde. Par conséquent $Dc = Dd = 0$. Raisonnement analogue si $a = bc + d$. Comme D est un élément quelconque de $\mathfrak{S}$, l'assertion (I) en résulte.

Pour vérifier (II), pour tout $\pi \in N$, notons $S(\pi)$ l'ensemble des couples $(a, b) \in L\{x\}^2$ tels que $\pi = ab^{-1}$, et posons

$$d(\pi) = \inf_{(a,b) \in S(\pi)} (\sup. (\deg a, \deg b)) .$$

Il est clair que, si Δ est l'application canonique $(u, y) \longrightarrow (y, u)$ de $L\{x\}^2$ sur lui-même, l'on a, pour $\pi \neq 0$:

$$S(\pi^{-1}) = \Delta \circ S(\pi) \quad \text{et} \quad d(\pi) = d(\pi^{-1}) .$$

Il s'agit de vérifier que $(\pi \in N - \{0\}) \Longrightarrow S(\pi) \cap M^2 \neq \emptyset$. On peut sans diminuer la généralité se limiter aux $\pi \in N$ de degré $\geqslant 0$. Or il existe dans ces conditions un élément (a, b) de $S(\pi)$ tel que $\deg b = d(\pi) \leqslant \deg a$.

Si $d(\pi) = 0$, alors $\pi \in M$. Sinon il existe (prop. 4) un élément $c \in L\{x\}$ est un élément $\pi_1 \in K$ tels que

$$\pi = c + \pi_1 , \quad \deg \pi_1 < 0 \quad \text{et} \quad d(\pi_1) < d(\pi) .$$

Un raisonnement déjà fait montre alors que $c \in M$ et $\pi_1 \in N$; l'assertion (II) en résulte aussitôt par récurrence sur $d(\pi)$.

La première assertion de (III) résulte aussitôt de (II) . Posons $\hat{N} = M - L \cap M$: l'ensemble $\hat{N}$ n'est pas vide. Soit $d = \inf_{a \in \hat{N}} \deg a$, et soit G' l'ensemble des éléments de $\hat{N}$ de degré d . Comme d est > 0 , que x est transcendant sur B , donc sur L (prop. 6) , et à fortiori sur N' , les éléments de G' sont transcendants sur N' . Il suffit donc de vérifier que si $a \in G'$, alors $M = N'_l\{a\} = N'_r\{a\}$. Mais cela s'établit aussitôt par récurrence sur le degré des éléments de M , en utilisant (I) et l'algorithme de divisibilité dans $L\{x\}$ (prop. 4 (iii)).

Corollaire. Les notations et les hypothèses étant celles de la prop. 5, supposons en outre que A soit de caractéristique 0 et que, pour tout $(u, D) \in A \times \delta$, $Du > 0$ implique $\deg Du < \deg u$, et que $N \not\subset L$. Alors les éléments de $G \cap M$ sont de la forme $ax + b$, avec $a \in N'$, $a \neq 0$, $b \in L$, et il existe parmi eux des éléments de la forme $x + c$, avec $c \in L$.

Démonstration. Soient D un élément de δ , $\bar{D}$ son prolongement à K , p un entier > 0 . Alors $Dx \in B$, et $D(x^{p+1}) = D(x . x^p) = Dx.x^p + x.D(x^p)$.

On en déduit aussitôt, par récurrence sur p , en utilisant la prop. 1 (iii) que l'on a , pour tout entier $k > 0$

$$D(x^k) = k\, Dx \,.\, x^{k-1} + \alpha_k$$

avec $\alpha_k \in A$, $\deg(\alpha_k) \leqslant k-2$. Si donc $\alpha = a_n x^n + \ldots + a_o \in G \cap M$, avec $a_o, \ldots, a_n \in L$, et $a_n \neq 0$, alors

$$0 = \bar{D}(\alpha) = D a_n \,.\, x^n + (a_n\, n\, Dx + D(a_{n-1}))\, x^{n-1} + \beta$$

avec $\beta \in L\{x\}$, $\deg \beta \leqslant n-2$. Donc, x étant transcendant sur L , $D a_n = a_n \,.\, n\, Dx + D(a_{n-1}) = 0$, et par suite $D(n\, a_n\, x + a_{n-1}) = 0$. Donc $n = 1$, $\alpha = a_1 x + a_o$ et $a_1 \in N'$, et par conséquent $a_1^{-1} \alpha = x + a_1^{-1} a_o \in G \cap M$.

*

* *

CHAPITRE II

Le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie complètement résoluble

1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω , U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. On sait [9] que U est régulière. Nous appellerons corps enveloppant de $\mathfrak{g}$ le corps des fractions de U . Soient en outre $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$, U' son algèbre enveloppante, K (resp. K') le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) . Si x est un élément de $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}'$, x est symétrique et transcendant par rapport à U' (cf. chap. I) , comme il résulte du théorème de Birkoff-witt. On a $U = U'\{x\}$ et K est le corps des fractions de $U'\{x\}$ et de $K'\{x\}$; tout élément de U a un degré par rapport à U' bien déterminé (I 2-3) et il en est de même pour tout élément de $K'\{x\}$ ou de K (I 4-1)

Ce degré est d'ailleurs indépendant du choix de x dans $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}'$, comme on le voit en considérant d'abord les éléments de U, et en remarquant que tout élément de $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}'$ est de la forme $\omega x + y$, avec $\omega \in \Omega - \{0\}$ et $y \in \mathfrak{g}'$.

2. Le résultat suivant joue un rôle essentiel dans tout ce qui suit.

<u>Lemme L.</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω
- $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{a}$
- $K(\mathfrak{a})$ (resp. $K(\mathfrak{b})$ le corps enveloppant de $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$).
- a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$
- $Z(\mathfrak{g})$ le centre du corps enveloppant de $\mathfrak{g}$
- G l'ensemble des éléments g de $K(\mathfrak{b})\{a\}$ tels que

$Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{a}) = (Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{b}))(g)$

Si $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{a})$ est distinct de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{b})$, alors

(i) $Z(\mathfrak{g}) \cap (K(\mathfrak{b})\{a\} - K(\mathfrak{b})) \neq \emptyset$ et $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{a})$ est une extension pure de degré 1 de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{b})$.

(ii) G n'est pas vide : c'est l'ensemble des éléments de $Z(\mathfrak{g}) \cap (K(\mathfrak{b})\{a\} - K(\mathfrak{b}))$ de degré minimum par rapport à $K(\mathfrak{b})$. Si d est ce degré minimum, les degrés des éléments de $Z(\mathfrak{g}) \cap (K(\mathfrak{b})\{a\})$ sont des multiples entiers de d.

(iii) Si en outre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b}$ et si Ω est de caractéristique 0 les éléments de G sont de la forme $ba + b'$, avec $b \in (Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{b})) - \{0\}$ et $b' \in K(\mathfrak{b})$, et il existe des éléments de G de la forme $g = a + u$, avec $u \in K(B)$.

Démonstration. Compte tenu des remarques du § 1 , le lemme résulte aussitôt de la prop. 5 de I 4-2 et de son corollaire, si l'on prend A (resp. B) égal à l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) , $K = K(\mathfrak{a})$, $L = K(\mathfrak{b})$, $x = a$, et si l'on définit δ comme l'ensemble des dérivations de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$ prolongeant les dérivations de $\mathfrak{a}$ induites par les dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$.

3. Notant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif, nous dirons que $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble si $\mathfrak{g}$ possède, pour sa structure de $\mathfrak{g}$- module une suite de composition à quotients de dimension 1 .. Cela étant, on a le théorème suivant :

Théorème 1. Le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie complètement résoluble de dimension finie n sur un corps commutatif Ω est une extension pure de degré $d \leq n$ de Ω . En outre, lorsque Ω est de caractéristique 0 , $d = n$ si et seulement $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie commutative.

4. Cela résulte aussitôt du théorème plus précis suivant

Théorème 2. Soient

- Ω un corps commutatif
- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur Ω complètement résoluble et de dimension n
- U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$
- K le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$
- Z le centre de K
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}_{n+1} = \{0\}$ une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\dim (\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}) = 1$ pour $i = 1,\dots, n$
- U_i (resp. K_i) l'algèbre enveloppante (resp. le corps enveloppant de $\mathfrak{g}_i$ ($K_{n+1} = U_{n+1} = \Omega$.)
- $(x_1,\dots, x_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $x_i \in \mathfrak{g}_i - \mathfrak{g}_{i+1}$ pour $i = 1,\dots,n$
- $Z_i = Z \cap K_i$ $(i = 1,\dots, n+1)$
- G_i l'ensemble des éléments a_i de $K_{i+1}\{x_i\}$ tels que $Z_i = Z_{i+1}(a_i)$ pour $i = 1,\dots, n$

- $P = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, l'ensemble des indices i pour lesquels $Z_i \neq Z_{i+1}$.

Dans ces conditions

(i) si $i \in P$, alors

1) $Z_i \cap (K_{i+1}\{x\} - K_{i+1}) \neq \emptyset$, et Z_i est une extension pure de degré 1 de Z_{i+1}

2) $G_i \neq \emptyset$ et G_i est la partie de $Z \cap (K_{i+1}\{x_i\} - K_{i+1})$ formée des éléments de degré minimum (en x_i) par rapport à K_{i+1}

3) si en outre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, et si Ω est de caractéristique 0 , alors les éléments de G_i sont de degré 1 par rapport à K_{i+1} , et il existe parmi eux des éléments de la forme $x_i + \alpha_i$, avec $\alpha_i \in K_{i+1}$

(ii) Z est une extension pure de degré m de Ω ; pour tout élément $(a_1, \ldots, a_m)$ de $\prod_{k=1}^{m} G_{i_k}$, on a $Z = \Omega(a_1, \ldots, a_m)$ et $(a_1, \ldots, a_m)$ est une famille algébriquement libre sur Ω .

(iii) si Ω est de caractéristique 0 , alors $n = m$ si et seulement si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie commutative.

Démonstration. L'assertion (i) résulte aussitôt du Lemme (L), et il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii) . Montrons (iii) . Il suffit évidemment de vérifier que, si $n = m$, alors $\mathfrak{g}$ est commutative. C'est clair si $n = 1$. Supposons le résultat établi pour les algèbres de Lie complètement résolubles de dimension $< n$, n étant > 1 , et supposons que $P = \{1, \ldots, n\}$. Il résulte alors de (i) que $Z_2 = Z \cap K_2$ est une extension pure de degré $n-1$ de Ω . Or $\mathfrak{g}_2$ est une algèbre de Lie complètement résoluble de dimension $n-1$, et le centre de son corps enveloppant K_2 contient Z_2 : par l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que $\mathfrak{g}_2$ est commutative et K_2 est donc un corps commutatif. Comme par ailleurs $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_2$, il s'ensuit, d'après (i) 3) qu'il existe un élément a_1 de G_1 de la forme $a_1 = x_1 + \alpha_1$, avec $\alpha_1 \in K_2$. On a alors, pour tout $y \in \mathfrak{g}_1$: $[y, a_1] = [y, x_1 + \alpha_1] = [y, x_1] = 0$. Donc x_1 commute à $\mathfrak{g}_1$, et par suite à $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ est commutative.

5. <u>Théorème 3</u>.

(i) Le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur un corps Ω algébriquement clos et de caractéristique 0 est une extension pure de Ω ; son degré de transcendance est strictement inférieur à la dimension de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g}$ n'est pas commutative.

(ii) Le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimension finie sur un corps commutatif Ω est une extension pure de Ω ; son degré de transcendance est strictement inférieur à la dimension de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g}$ n'est pas commutative ; il est en outre engendré par le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u>. Les assertions de (i) (resp. les deux premières assertions de (ii)) résultent du Théorème de Lie (resp. du Théorème d'Engels) et du théorème 1. Supposons $\mathfrak{g}$ nilpotente et définissons n, U, K, $\mathfrak{g}_i$, U_i, K_i, x_i, Z, Z_i comme dans le théorème 2. Tout élément a de U a une expression unique de la forme

$$a = \sum_{(i)} x_1^{i(1)} \dots x_n^{i(n)} \; a_{(i)}$$

avec $(i) = (i(1), \dots, i(n)) \in \mathbb{N}^n$, les $a_{(i)}$ étant des éléments de Ω nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Munissons $\mathbb{N}^n$ de l'ordre lexicographique : $(p_1, \dots, p_n) < (q_1, \dots, q_n)$ s'il existe un indice j tel que $p_j < q_j$ et $p_i = q_i$ pour $i < j$; et définissons le multidegré de a , noté deg a , comme le plus grand des $(i) \in \mathbb{N}^n$ tels que $a_{(i)} \neq 0$. Soit $\deg a = (p_1, \dots, p_n)$. Posons

$$h'(a) = \begin{cases} n+1 & \text{si } a \in \Omega \\ \text{le plus petit entier } j \text{ tel que } p_j > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(a) = n + 1 - h'(a) .$$

Par récurrence sur $h(a)$, on vérifie alors sans peine, utilisant la prop. 1 du chap. I et le fait que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ pour $i = 1,\dots, n$, que

- si $a, b \in U$, alors $\deg ab = \deg a + \deg b$ (on pose $\deg 0 = 0$)

- si D est une dérivation de U prolongeant une dérivation intérieure de $\mathfrak{g}$, et si $Da \neq 0$, alors $\deg Da < \deg a$

Soit alors $z = ab^{-1} \in Z - \{0\}$, a, b étant des éléments de U choisis de sorte que $\deg a$ soit minimum. Si D est une dérivation de U prolongeant ad_x, $x \in \mathfrak{g}$, et si $\bar{D}$ est son prolongement à K, alors $0 = \bar{D}z = Da \,.\, b^{-1} - ab^{-1} \,.\, Db \,.\, b^{-1}$, d'où, si Db est $\neq 0$: $Da = ab^{-1}\, Db$, $Da \,.\, (Db)^{-1} = ab^{-1} = z$, et donc Da est $\neq 0$. Par suite $\deg Da < \deg a$, ce qui contredit la minimalité de a. Donc $Da = Db = 0$ et, comme $x \in \mathfrak{g}$ est arbitraire, a et b appartiennent au centre de U. (*)

En particulier, si pour un indice $i \in [1, n]$, on a $z \in Z_i$, alors a et $b \in U_i$. On en déduit aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire 1. Notations et hypothèses du Théorème 2. Pour $i = 1,\dots, n+1$, soit U_i^o l'intersection de U_i avec le centre de U. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors, pour $i \in [1, n]$

$$Z_i \neq Z_{i+1} \implies U_i^o \neq U_{i+1}^o$$

Corollaire 2. Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur un corps commutatif,

(*) Je dois à J. DIXMIER l'idée de cette démonstration.

- $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{a}$
- U (resp. $U(\mathfrak{a})$, $U(\mathfrak{b})$) l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$)
- K (resp. $K(\mathfrak{a})$, $K(\mathfrak{b})$) le corps enveloppant le $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$)
- Z (resp. U^o) le centre de K (resp. U)
- a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$

Dans ces conditions, si $Z \cap K(\mathfrak{a}) \neq Z \cap K(\mathfrak{b})$, il existe un élément $u \neq 0$ de $U^o \cap U(\mathfrak{b})$ et un élément v de $U(\mathfrak{b})$ tels que $Z \cap K(\mathfrak{a}) = (Z \cap K(\mathfrak{b}))(ua + v)$

<u>Démonstration</u>. Il existe une suite de Jordan-Holder de $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux termes consécutifs. Le cor. 1 montre alors que $U^o \cap U(\mathfrak{a})$ est distinct de $U^o \cap U(\mathfrak{b})$. Par suite (lemme 3 du chap. II de [7]), il existe $u \in U^o \cap U(\mathfrak{b}) - \{0\}$, et $v \in U(\mathfrak{b})$ tels que $u\,a + v \in U^o \cap U(\mathfrak{a})$, et par conséquent (Lemme (L)) $Z \cap K(\mathfrak{a}) = (Z \cap K(\mathfrak{b}))(ua+v)$.

*
* *

CHAPITRE III

Quelques lemmes

1. Notations. Rappels.

<u>1-1</u> On désigne par

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels
- $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels
- $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Le p.g.c.d. positif de deux entiers rationnels non tous deux nuls a, b, sera noté $\langle a, b \rangle$. Si a et b sont > 0, $[a/b]$ désignera la partie entière de a/b. Lorsque le contexte ne prêtera pas à confusion, on notera

i une racine carrée de -1 dans $\mathbb{C}$.

<u>1-2</u> Si U est un anneau (non nécessairement commutatif) , si U' est un sous-anneau de U , et si x est un élément de $U - U'$ symétrique par rapport à U' (cf. I 2), nous noterons $U'\{x\}$ l'anneau engendré dans U par $U' \cup \{x\}$, et utiliserons sans autre référence les résultats et les notations de I 2 .

<u>1-3</u> Soient Ω un corps commutatif , A un espace vectoriel sur Ω . Nous noterons A^* l'espace vectoriel dual de A ; si $\Omega = \mathbb{R}$, nous noterons $\tilde{A}$ l'espace vectoriel $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$; si en outre A est une algèbre sur $\mathbb{R}$, nous considérons toujours $\tilde{A}$ comme muni de sa structure d'algèbre sur $\mathbb{C}$.

<u>1-4</u> Soient

- Ω un corps commutatif
- E un sous-corps de Ω
- A un sous-anneau factoriel de Ω
- $x, a, b, a_1, \dots, a_n$ des éléments de Ω

<u>a</u> Si $ab \neq 0$, on note $M_E(a, b)$ le monoïde multiplicatif engendré dans Ω par $E \cup \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$

<u>b</u> Si x est transcendant sur E , et si $a_1, \dots, a_n \in E[x]$, on dira que $a_1, \dots, a_n$ sont premiers entre eux <u>sur</u> E pour exprimer que $a_1, \dots, a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble en tant qu'éléments de $E[x]$.

<u>c</u> Si x est transcendant sur E , si $a_1, \dots, a_n \in E$ et que $a = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, on dira que a est x - <u>unitaire</u> si $a_n = 1$. Cela étant, si $b \in E(x)$, il existe un couple (b_1, b_2) d'éléments de $E[x]$ uniquement déterminé par la condition que 1) b_1, b_2 sont premiers entre eux sur

$E[x]$ 2) b_2 est x - unitaire, 3) $b = b_1 b_2^{-1}$. On dira alors que (b_1, b_2) est le <u>couple d'éléments de $E[x]$</u> associé à b .

<u>d</u> Si x est transcendant sur le corps des fractions de A , si $a_1, \ldots, a_n \in A$, $a_n \neq 0$, et si $a = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, nous dirons que a est <u>primitif</u> si $a_o, a_1, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

<u>1-5</u> Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur un corps commutatif Ω , nous noterons $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $K(\mathfrak{g})$ le corps enveloppant de $\mathfrak{g}$ (cf. II 1) , et $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $K(\mathfrak{g})$. On sait (II 1) que les résultats du chapitre I sont applicables à $U(\mathfrak{g})$, $K(\mathfrak{g})$, et plus généralement, pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, à $U(\mathfrak{h})$, $K(\mathfrak{h})$. En particulier, si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de $\mathfrak{g}$, et si a est un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \oplus \Omega\, a$, alors

- a est symétrique et transcendant par rapport à $K(\mathfrak{b})$
- tout élément ξ de $K(\mathfrak{a})$ a des expressions de la forme $\alpha\beta^{-1}$, et des expressions de la forme $\gamma^{-1}\delta$, avec α, β, γ , $\delta \in K(\mathfrak{b})\{a\}$, et ξ a un degré bien déterminé par rapport à $K(\mathfrak{b})$ (I 4-1)

- on a, dans $K(\mathfrak{b})\{a\}$, deux algorithmes de divisibilité.

Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, nous noterons D_x la dérivation de $K(\mathfrak{g})$ prolongeant ad_x (I 3 prop. 2). Nous dirons qu'une partie M de $K(\mathfrak{g})$ est <u>stable par $\mathfrak{g}$</u> si M est stable par D_x pour tout $x \in \mathfrak{g}$. En particulier, si $\mathfrak{p}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $K(\mathfrak{p})$ est stable par $\mathfrak{g}$.

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, nous noterons $S(\lambda)$ l'ensemble des éléments <u>non nuls</u> α de $K(\mathfrak{g})$ tels que $D_x\alpha = \lambda(x)\alpha$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. (La notation $S(\lambda)$ est utilisée au lemme 3-2 dans une situation plus générale).

<u>1-6</u> La notation (L) fera référence au lemme (L) du chap. II.

2. Lemmes "polynomiaux".

Lemme 2-1 Soient

- Ω un corps commutatif
- E un sous-corps de Ω
- a, b deux éléments de Ω algébriquement indépendants sur E
- ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 des entiers rationnels

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $|\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1| = 1$

(ii) $M_E(a, b) = M_E(a^{\ell_1} b^{m_1}, a^{\ell_2} b^{m_2})$

Démonstration. Comme a et b sont algébriquement indépendants sur E , on a les équivalences

$$\text{(ii)} \iff (\exists (p_1, p_2, q_1, q_2)) ((p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^4 \text{ et}$$

$$a = (a^{\ell_1} b^{m_1})^{p_1} . (a^{\ell_2} b^{m_2})^{p_2} \text{ et } b = (a^{\ell_1} b^{m_1})^{q_1} . (a^{\ell_2} b^{m_2})^{q_2})$$

$$\iff (\exists (p_1, p_2, q_1, q_2)) ((p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^4 \text{ et } \ell_1 p_1 + \ell_2 p_2 = 1$$

$$\text{et } m_1 p_1 + m_2 p_2 = 0 \text{ et } \ell_1 q_1 + \ell_2 q_2 = 0 \text{ et } m_1 q_1 + m_2 q_2 = 0)$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \text{ est inversible dans } M_2(\mathbb{Z})\right) \iff \text{(i)} .$$

Lemme 2-2 Soient

- Ω un corps commutatif
- E un sous-corps de Ω
- x, y (resp. a, b) deux éléments de Ω algébriquement indépendants sur E .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\{a, b\} \subset M_E(x, y)$

(ii) $M_E(x, y) \cap E(a, b) = M_E(a, b)$

<u>Démonstration</u>.

1. Il est clair que (ii) $\Longrightarrow$ (i) . Supposons (i) vérifié. Alors on a manifestement : $M_E(a, b) \subset M_E(x, y) \cap E(a, b)$. Il suffit donc de montrer que si $a \in M_E(x, y)$, $b \in M_E(x, y)$ et $c \in M_E(x, y) \cap E(a, b)$, alors $c \in M_E(a, b)$. On peut sans diminuer la généralité supposer

$$(1)\begin{cases} a = x^{q_1} y^{q_2} \qquad b = x^{r_1} y^{r_2} \qquad c = x^{s_1} y^{s_2} \\ \text{avec } q_i, r_i, s_i \in \mathbb{Z} \quad (i = 1, 2) \text{ , et } s_1^2 + s_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

2. Supposons d'abord que les entiers q_i, r_i, s_i vérifient les conditions supplémentaires

(2) $q_1 > 0$, $q_2 \geq 0$, $r_1 = 0$, $r_2 > 0$, $s_1 > 0$, $s_2 \geq 0$

et supposons toujours que $c \in E(a, b)$. Il existe alors deux éléments P, Q de $E[a, b] \subset E[x, y]$, premiers entre eux sur $E(b)[a]$, tels que $c = P/Q$. Posons

(3) $P = \sum a^k u_k \quad q = \sum a^k v_k$, avec $u_k, v_k \in E[b]$

Notons φ l'homomorphisme de $E(y)[x]$ sur $E(y)$ qui annule x et conserve les éléments de $E(y)$; il se prolonge en une place de $E(y, x)$ à valeur dans $E(y) \cup \{\infty\}$ que nous noterons encore φ . On a alors : $0 = \varphi(c) = \varphi(c)\varphi(Q) = \varphi(P)$. Donc $u_o = 0$, et il existe un entier $k_o > 0$ et un élément P' de $E[a, b]$ tels que

(4) $P = a^{k_o} P'$ et $\varphi(P') \neq 0$.

Il s'ensuit, P et Q étant premiers entre eux sur $E(b)[a]$, que $v_o \neq 0$ et donc φ prend une valeur finie $\neq 0$ en $P'/Q = c\, a^{-k_o} = x^{s_1 - k_o q_1}\, y^{s_2 - k_o q_2}$, et par conséquent $k_o q_1 = s_1$ et $y^{s_2 - k_o q_2} = c\, a^{-k_o} \in E(a, b)$. Comme q_1 est >0, les éléments a et y sont algébriquement indépendants sur E ; comme $r_1 = 0$, on a $E(b) \subset E(y)$, et donc $E(y) \cap E(a, b) = E(b)$. Par suite $c\, a^{-k_o} = y^{s_2 - k_o q_2} \in E(b)$. Comme y est entier sur $E[b]$ et que $E[b]$ est intégralement clos dans $E(b)$, il s'ensuit que $y^{|s_2 - k_o q_2|} \in E[b]$. Il existe donc $\tau \in \mathbb{Z}$ tel que $y^{s_2 - k_o q_2} = b^{\tau}$, et par suite $c = a^{k_o}\, b^{\tau} \in M_E(a, b)$

3. Supposant désormais que $x, y, a, b, q_i, r_i, s_i$ sont seulement liés par les égalités (1) de 1, on va se ramener à la situation de 2.

4. Appelons systèmes (S) les familles $F = (x', y', a', b', c') \in \Omega^5$ telles que

$\underline{\alpha}$ $M_E(x', y') = M_E(x, y)$ et $M_E(a', b') = M_E(a, b)$

$\underline{\beta}$ $c' \in \{c, c^{-1}\}$

$\underline{\gamma}$ il existe des entiers $q_1'(F) = q_1', \ldots, s_2'(F) = s_2'$ tels que

$$a' = (x')^{q_1'}\,(y')^{q_2'}\ ,\ b' = (x')^{r_1'}\,(y')^{r_2'}\ ,\ c' = (x')^{s_1'}\,(y')^{s_2'}$$

ce qui implique que

$\underline{\delta}$ x', y' (resp. a', b') sont algébriquement indépendants sur E

$\underline{\varepsilon}$ $c' \in E(a', b') \cap M_E(x', y')$

Il est clair que $F_o = (x, y, a, b, c)$ est un système (S) . On va en déduire des systèmes (S) , notés F_i $(i = 1,\dots, 6)$; les éléments de F_i seront notés $x(i),\dots, c(i)$, et on posera

$$q_1(i) = q_1'(F_i),\dots, \quad s_2(i) = s_2'(F_i) \ ;$$

on effectuera la construction de telle sorte qu'on ait :

(5) $q_1(6) > 0$, $q_2(6) \geqslant 0$, $r_1(6) = 0$, $r_2(6) > 0$, $s_1(6) > 0$, $s_2(6) \geqslant 0$
Dans ces conditions, il résultera de γ), δ) ε) et (5) que les conditions de 2 seront réalisées par les éléments de F_6 , donc $c(6) \in M_E(a(6), b(6))$, et, compte tenu de α) et β) , $c \in M(a, b)$.

5. On définit F_1 comme suit :

$$a(1) = a, \quad b(1) = b, \; c(1) = c$$

Si $s_1 \neq 0$, $x(1) = x$, $y(1) = y$ (et donc $F_1 = F_o$)
Si $s_1 = 0$, $x(1) = y$, $y(1) = x$

Comme $s_1^2 + s_2^2$ est $\neq 0$ (formules (1)) , il s'ensuit que $s_1(1)$ est $\neq 0$.

6. Construction de F_2 : $x(2) = x(1),\dots, b(2) = b(1)$

$$c(2) = \begin{cases} c(1) & \text{si } \ s_1(1) \ \text{ est } >0 \\ c(1)^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $s_1(2)$ est > 0 .

7. Construction de F_3 : $x(3) = x(2)$, $a(3) = a(2),\dots, c(3) = c(2)$

$$y(3) = \begin{cases} y(2) & \text{si } \ s_2(2) \ \text{ est } \geqslant 0 \\ y(2)^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $s_1(3) > 0$ et $s_2(3) \geqslant 0$.

8. Les F_i , $i = 4, 5, 6$ se déduiront de F_3 par modification des $a(j)$, $b(j)$ seulement : donc, pour $i = 4, 5, 6$, nous aurons

$x(i) = x(3)$ $y(i) = y(3)$ $c(i) = c(3)$ $s_1(i) = s_1(3) > 0$ et $s_2(i) = s_2(3) \geq 0$

Posons $\bar{q}_j = q_j(3)$, $\bar{r}_j = r_j(3)$, $j = 1, 2$.

Pour définir F_4 , distinguons trois cas :

<u>a</u> $\bar{r}_1 = 0$. On prend alors $a(4) = a(3)$, $b(4) = b(3)$

<u>b</u> $\bar{r}_1 \neq 0$ et $\bar{q}_1 = 0$. On prend alors $a(4) = b(3)$ et $b(4) = a(3)$

<u>c</u> $\bar{r}_1\ \bar{q}_1 \neq 0$. Soient alors

$$\rho = \langle \bar{r}_1, \bar{q}_1 \rangle \quad , \quad \ell_1 = \bar{r}_1/\rho \qquad m_1 = -\bar{q}_1/\rho \quad .$$

On a donc $\langle \ell_1, m_1 \rangle = 1$, et il existe par suite deux entiers ℓ_2, m_2 tels que $\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1 = 1$.

On prend alors $a(4) = a(3)^{\ell_2} . b(3)^{m_2}$, $b(4) = a(3)^{\ell_1} . b(3)^{m_1}$

Il est clair que F_4 est un système (S) dans les cas <u>a</u> et <u>b</u> ; dans le cas <u>c</u> cela résulte du lemme 2-1 . <u>Montrons que</u> $r_1(4) = 0$. C'est clair dans les cas <u>a</u> et <u>b</u> ; dans le cas <u>c</u> , cela résulte de ce que

$$b(4) = a(3)^{\ell_1}.b(3)^{m_1} = \left(x(3)^{q_1(3)}.y(3)^{q_2(3)}\right)^{\ell_1}.\left(x(3)^{r_1(3)}.y(3)^{r_2(3)}\right)^{m_1}$$
$$= x(3)^{(\bar{q}_1(\bar{r}_1/\rho)-\bar{r}_1(\bar{q}_1/\rho))} . y(3)^{(\bar{q}_2\ell_1+\bar{r}_2 m_1)} = y(3)^{r_2(4)}$$

Dans ces conditions $r_2(4).q_1(4)$ est $\neq 0$: cela résulte de <u>δ</u>

On a donc : $q_1(4) \neq 0$ $r_1(4) = 0$, $r_2(4) \neq 0$, $s_1(4) > 0$, $s_2(4) \geq 0$

9. Construction de F_5 :

$$a(5) = \begin{cases} a(4) & \text{si } q_1(4) > 0 \\ a(4)^{-1} & \text{sinon} \end{cases} \qquad b(5) = \begin{cases} b(4) & \text{si } r_2(4) > 0 \\ b(4)^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc : $q_1(5) > 0$, $r_1(5) = 0$, $r_2(5) > 0$, $s_1(5) > 0$, $s_2(5) \geq 0$

10. Construction de F_6. Comme $r_2(5)$ est > 0, il existe un entier $\ell > 0$ tel que $q_2(5) + \ell r_2(5) \geqslant 0$. On prend $a(6) = a(5).b(5)^{\ell}$, et $b(6) = b(5)$; alors F_6 est un système (S) (Lemme 2-1), et les entiers $q_1(6), \ldots, s_2(6)$ vérifient bien (5), ce qui termine la démonstration.

<u>Lemme 2-3</u> Soient

- Ω un corps commutatif
- E un sous-corps de Ω
- x, y deux éléments de Ω algébriquement indépendants sur E
- P, Q, R des éléments de E [x, y]
- S un élément de E [y]

Si PQ = RS et si S et les coefficients des puissances de x dans P sont premiers entre eux sur E [y], alors S divise Q dans E [x, y].

<u>Démonstration</u>. Soit n le degré par rapport à y de S = S(y). Le lemme est trivial si n = 0. Sinon on procède par récurrence sur n. Si n > 0, il existe dans un surcorps de E un élément ω tel que $S(\omega) = 0$. Donc $P(x, \omega) . Q(x, \omega) = 0$, et comme l'hypothèse implique que $P(x, \omega)$ est $\neq 0$, il s'ensuit que $Q(x, \omega) = 0$: l'homomorphisme canonique $E[x, y] \longrightarrow E[x, \omega]$ annule S et les coefficients des puissances de x dans Q. Donc il existe $S_1 \in E[y] - E$ qui divise dans E [y], S et tous les coefficients des puissances de x dans Q. Posant $S' = S/S_1$, $Q' = Q/S_1$, on a $S' \in E[y]$, $Q' \in E[x, y]$, et $PQ' = RS'$; donc, par l'hypothèse de récurrence, il existe $T \in E[x, y]$ tel que $Q' = TS'$, et par suite Q = TS.

<u>Lemme 2-4</u> Soient

- Ω un corps commutatif
- E un sous-corps de Ω contenant $\mathbb{C}$
- σ un automorphisme involutif de Ω tel que $\sigma(E) = E$, qui

prolonge l'automorphisme non identique de $\mathbb{C}$

- ξ un élément de Ω , $\bar{\xi}$ l'élément $\sigma\xi$, tels que ξ et $\bar{\xi}$ soient algébriquement indépendants sur E
- P un élément $\neq 0$ de $E[\bar{\xi}, \xi]$
- $(A)_P$, $(B)_P$, $(C)_P$ les assertions suivantes :

$(A)_P$ P et σP n'ont, en tant qu'éléments de $E[\bar{\xi}, \xi]$, aucun diviseur commun n'appartenant pas à E .

$(B)_P$ P et σP sont premiers entre eux sur $E(\bar{\xi})[\xi]$

$(C)_P$ P et σP sont premiers entre eux sur $E(\xi)[\bar{\xi}]$

Dans ces conditions

(i) les assertions $(A)_P$, $(B)_P$, $(C)_P$ sont équivalentes

(ii) il existe un élément $P_1 \neq 0$ de $E[\bar{\xi}, \xi]$ tel que $P/\sigma P = P_1/\sigma P_1$ et vérifiant $(A)_{P_1}$ (et donc $(B)_{P_1}$ et $(C)_{P_1}$)

Démonstration.

1. Nous utiliserons le résultat suivant

(R) Soient A un anneau factoriel, K le corps des quotients de A , x un élément d'un surcorps commutatif de K , transcendant sur K . Tout élément q de $K[x]$ est le produit d'un élément de K et d'un élément primitif q' de $A[x]$. Si q divise dans $K[x]$ un élément p de $A[x]$, alors q' divise p dans $A[x]$.

Montrons (i) . Il est clair que $((B)_P$ et $(C)_P) \Longrightarrow (A)_P$. Par ailleurs, les propriétés de σ impliquent $(B)_P \Longleftrightarrow (C)_P$. Appliquant enfin (R) avec $A = E[\bar{\xi}]$, $x = \xi$, on obtient $(A_P) \Longrightarrow (B_P)$.

2. Montrons (ii) . Soit $Q \in E[\bar{\xi}, \xi]$ de degré maximum en ξ parmi les éléments de $E[\bar{\xi}, \xi]$ qui divisent P et σP dans $E[\bar{\xi}, \xi]$. Appliquant (R) avec $A = E[\bar{\xi}]$, $x = \xi$, on obtient que Q est un p.g.c.d. de P et σP dans $E(\bar{\xi})[\xi]$. Si $Q \in E[\bar{\xi}]$, alors $(B)_P$ est vérifiée,

donc, compte tenu de (i), on a $Q \in E$ et il suffit de prendre $P_1 = P$.

Supposons désormais $Q \notin E[\bar{\xi}]$. Comme Q est un p.g.c.d. de P et σP dans $E(\bar{\xi})[\xi]$, que σQ divise P et σP dans $E[\bar{\xi}, \xi]$ (puisque $E[\bar{\xi}, \xi]$ est stable par σ) et à fortiori dans $E(\bar{\xi})[\xi]$, il s'ensuit que $Q/\sigma Q \in E(\bar{\xi})[\xi]$

<u>Si $Q/\sigma Q \in E(\bar{\xi})$</u>, alors, $\bar{\xi}$ et ξ étant algébriquement indépendants sur E, on a $\sigma Q/Q = (Q/\sigma Q)^{-1} = \sigma(Q/\sigma Q) \in E(\xi) \cap E(\bar{\xi}) = E$; les deux éléments $Q + \sigma Q$, $\sqrt{-1}\,(Q - \sigma Q)$ de $E[\bar{\xi}, \xi]$ sont invariants par σ, et l'un au moins, soit Q_1, est $\neq 0$ et divise P et σP dans $E[\bar{\xi}, \xi]$. Il suffit alors de prendre $P_1 = P/Q_1$: d'une part l'on a

$$(P/Q_1)\,/\,\sigma(P/Q_1) = (P/Q_1)\,/\,(\sigma P/Q_1) = P/\sigma P$$

et par ailleurs Q/Q_1, qui appartient à E, est un p.g.c.d. de P/Q_1 et $\sigma P/Q_1 = \sigma(P/Q_1)$ dans $E(\bar{\xi})[\xi]$, ce qui implique $(B)_{P/Q_1}$.

<u>Supposons désormais $Q/\sigma Q \notin E(\bar{\xi})$</u>. Il existe alors $R = R(\bar{\xi}, \xi) \in E[\bar{\xi}, \xi] - E[\bar{\xi}]$ et $S = S(\bar{\xi}) \in E[\bar{\xi}]$ tels que

$$(1) \quad Q/\sigma Q = R/S$$

et que S et les coefficients des puissances de ξ dans R soient premiers entre eux dans leur ensemble, en tant qu'éléments de $E[\bar{\xi}]$. On déduit alors de (1) que

$$(R/S)\,.\,(\sigma R/\sigma S) = (Q/\sigma Q)\,.\,\sigma(Q/\sigma Q) = 1 \quad , \text{ soit}$$

$$(2) \quad R(\bar{\xi}, \xi)\,.\,(\sigma R)(\xi, \bar{\xi}) = S(\bar{\xi})\,.\,(\sigma S)(\xi)\,.$$

Par suite (Lemme 2-3), $S(\bar{\xi})$ divise $(\sigma R)(\xi, \bar{\xi})$ dans $E[\bar{\xi}, \xi]$, et donc $(\sigma S)(\xi)$ divise $R(\bar{\xi}, \xi)$ dans $E[\bar{\xi}, \xi]$. Il résulte dans

ces conditions de (2) qu'il existe $\alpha \in E - \{0\}$ tel que $R = \alpha(\sigma S)$.
L'égalité (1) devient alors $Q = \sigma Q \cdot \alpha(\sigma S)/S$, soit

(3) $S\,Q = \alpha\,\sigma(S\,Q)$.

Par suite (cela résulte par exemple du lemme 2-3) , S (resp. σS) divise σQ (resp. Q) , dans $E[\bar{\xi}, \xi]$. Soit donc $T \in E[\bar{\xi}, \xi]$ tel que

(4) $Q = T \cdot \sigma S$

On en déduit, compte tenu de (3)

(5) $T = \alpha \cdot (\sigma T)$.

Les deux éléments $T + \sigma T$, $\sqrt{-1}\ (T - \sigma T)$ sont invariants par σ , et l'un d'entre eux au moins, soit T_1 , est $\neq 0$ et divise Q et σQ (et donc P et σP) , dans $E[\bar{\xi}, \xi]$. Posons $P' = P/T_1$. L'élément σS de $E[\xi]$ est alors un p.g.c.d. de P' et $\sigma P' = \sigma P/T_1$ dans $E(\bar{\xi})[\xi]$, et divise P' et $\sigma P'$ dans $E[\bar{\xi}, \xi]$: en effet $P'/\sigma S = P/Q \cdot T/T_1$, $\sigma P'/\sigma S = \sigma P/Q \cdot T/T_1$ et $T/T_1 \in E$. Par suite S divise P' et $\sigma P'$ dans $E[\bar{\xi}, \xi]$, et, par une nouvelle application du lemme 2-3 , on obtient que $S.\sigma S$ divise P' et $\sigma P'$ dans $E[\bar{\xi}, \xi]$.

Il suffit alors de prendre $P_1 = P'/S.\sigma S$. D'une part en effet on a :

$$P_1/\sigma P_1 = (P'/S.\sigma S) / \sigma (P'/S.\sigma S) = P'/\sigma P' = (P/T_1) / \sigma (P/T_1) = P/\sigma P$$

En outre $Q/T_1.S.\sigma S) = (T/T_1) \cdot (1/S) \in E(\xi)$ est un p.g.c.d. de $P_1 = P/(T_1.S.\sigma S)$ et $\sigma P_1 = \sigma P/T_1.S.\sigma S$ dans $E(\bar{\xi})[\xi]$, donc $(B)P_1$ est vérifiée.

<u>Lemme 2-5</u> Soient

- Ω un corps commutatif

- X une indéterminée
- P, Q, R, S des éléments de $\Omega[X]$

Si - $PQ \neq 0$ et P et Q sont premiers entre eux sur $\Omega[X]$

- $R/P - S/Q \in \Omega$
- le degré de R (resp. S) par rapport à X est $\leq$ à celui de P (resp. Q)

alors $R/P \in \Omega$ et $S/Q \in \Omega$

Démonstration. Soit $u \in \Omega$ tel que $R/P - S/Q = u$. Alors $QR = P(S + uQ)$, donc Q divise $S + uQ$ dans $\Omega[X]$; Soit $Q_1 \in \Omega[X]$ tel que $S + uQ = Q_1 \cdot Q$. Comme le degré de $S + uQ$ est inférieur ou égal à celui de Q , on a $Q_1 \in \Omega$, donc $S/Q = Q_1 - u \in \Omega$ et $R/P = u + (Q_1 - u) \in \Omega$.

Lemme 2-6 Soient

- Ω un corps commutatif
- X, Y deux éléments d'un sur-corps commutatif de Ω algébriquement indépendants sur Ω
- m, n deux entiers non nuls

Alors $(XY)^m$ et $(Y/X)^n$ sont algébriquement indépendants sur Ω et $(\Omega X + \Omega) \cap \Omega((XY)^m, (Y/X)^n) = \Omega$

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer le lemme pour $m = n = 1$. Posons $Y = XU$ et $\Omega' = \Omega(U)$. On a alors $\Omega(X, Y) = \Omega(X, U)$ donc X et par suite X^2 et $X^2 U = XY$ sont transcendants sur $\Omega' = \Omega(Y/X)$, ce qui établit la première assertion. Par ailleurs, $\Omega(XY, Y/X) = \Omega(X^2 U, U) = \Omega'(X^2)$, et donc $(\Omega X + \Omega) \cap \Omega(XY, Y/X) \subset (\Omega' X + \Omega') \cap \Omega'(X^2) \cap \Omega(X)$. Si P, Q sont des éléments de $\Omega'[X^2]$ de degré respectif p, q par rapport à X^2 , et s'il existe $\omega' \in \Omega'$ tel que $X + \omega' = P/Q$, alors

$Q(X+\omega') = P$ et $2q+1 = 2p$, ce qui est absurde. Par conséquent
$(\Omega' X + \Omega') \cap \Omega'(X^2) = \Omega'$, et
$(\Omega X + \Omega) \cap \Omega(XY, Y/X) \subset \Omega' \cap \Omega(X) = \Omega(U) \cap \Omega(X) = \Omega$.

<u>Lemme 2-7</u> Soient

- Ω un corps commutatif
- Ω_o un sous-corps de Ω
- X, Y deux indéterminés
- m un entier positif
- R_1, R_2 des éléments non nuls de $\Omega(Y)$

Alors $\Omega_o(R_1, R_2 X^m) \cap \Omega[X] = \Omega_o(R_1)[R_2 X^m]$

<u>Démonstration</u>. Posons $\Omega' = \Omega_o(R_1)$. Soient
$\omega_i', \omega_j'' \in \Omega'$, $\omega_k \in \Omega$, $i = 0, 1, \ldots, p$, $j = 0, 1, \ldots, q$, $k = 0, 1, \ldots, s$
tels que $\omega_p' \, \omega_q'' \, \omega_s \neq 0$ et que

$$\left(\sum_i \omega_i' (R_2 X^m)^i\right) \cdot \left(\sum_k \omega_k X^k\right) = \sum_j \omega_j'' (R_2 X^m)^j$$

Par identification des termes de plus haut degré en X dans les deux membres, on en déduit que $pm + s = qm$ et $\omega_p' \cdot (R_2)^p \cdot \omega_s = \omega_q''(R_2)^q$.
Par conséquent

$$\omega_s X^s = \omega_q'' \cdot (\omega_p')^{-1} (R_2)^{q-p} X^s = \omega_q'' . (\omega_p')^{-1} . (R_2 X^m)^{q-p} \in \Omega'[R_2 X^m].$$

Par récurrence sur s , on en déduit aussitôt que
$\Omega_o(R_1, R_2 X^m) \cap \Omega[X] \subset \Omega_o(R_1)[R_2 X^m]$, d'où le lemme, l'inclusion inverse étant triviale.

<u>Lemme 2-8</u> Soient

- Ω, E, E_o trois corps commutatifs tels que $E_o \subset E \subset \Omega$
- X un élément de Ω transcendant sur E

- u, u_1 des éléments non nuls de E
- ℓ, r des entiers rationnels non nuls

Si $u_1 X^\ell \in E_o(u X^r)$, alors il existe un entier rationnel non nul k et un élément u_o de E_o tels que

$$\ell = k r \quad \text{et} \quad u_1 X^\ell = u_o (u X^r)^k$$

Démonstration. Remplaçant éventuellement $u_1 X^\ell$ ou $u X^r$ par son inverse, on se ramène au cas où ℓ et r sont > 0 . Par application du lemme 2-7 (où l'on prend $\Omega = E$, $\Omega_o = E_o$, $R_1 = 1$, $R_2 = u$, $m = r$) , on obtient alors que $u_1 X^\ell \in E_o[u X^r]$. Ecrivant $u_1 X^\ell$ comme polynôme en $u X^r$ à coefficients dans E_o , on en déduit le lemme par identification des puissances de X .

Lemme 2-9 Soient

- Ω un corps commutatif
- E un sous-corps de Ω
- E_o un sous-corps de E
- X un élément de Ω transcendant sur E
- u, u_1 des éléments non nuls de E
- r, d deux entiers > 0, r n'étant pas un multiple de la caractéristique de Ω
- R un élément non nul de $E(X)$

Si $u_1 R^d \in E_o(u X^r)$, alors il existe un entier rationnel m , un élément u_2 de E , et un élément S de $E_o(u X^r)$ tels que

$$R = u_2 S X^m \quad \text{et} \quad |m| < r .$$

Démonstration. Dans ce qui suit, jusqu'à la formule (8) du § 4 , pour tout couple (F, x) formé d'un corps commutatif F et d'un élément x d'un surcorps de F transcendant sur F , le symbole $F[x]$ dénote l'anneau $F[x]$ muni de la structure supplémentaire définie par la donnée des éléments x - unitaires de $F[x]$ (cf. 1-4) . Si donc y est un élément de F distinct de 0 et de 1 , les objets $F[x]$, $F[yx]$ sont distincts.

1. Nous utiliserons le résultat (bien connu) suivant.

Soient K un corps commutatif, K_o un sous-corps de K , K' une clôture algébrique de K , Y une indéterminée. On sait que tout élément T de $K[Y]$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$(1) \quad T = \alpha T_1 (T_2)^2 \dots (T_k)^k$$

α étant un élément de K, $T_1, \dots, T_k$ étant des éléments Y - unitaires de $K[Y]$, n'ayant que des racines simples dans K' : si D est la dérivation usuelle de $K[Y]$ $(D|K = 0 \,,\; DY = 1)$, alors le polynôme $(T_i)^i \dots (T_k)^k$ se définit comme le générateur unitaire de l'idéal de $K[Y]$ engendré par $T, DT, \dots D^{i-1} T$; si $(T_i)^i \dots (T_k)^k \neq 1$, alors $(T_i)^i \dots (T_k)^k$ est le polynôme Y - unitaire de plus haut degré parmi ceux qui divisent T dans $K[Y]$, et dont toutes les racines ont une multiplicité $\geqslant i$; en outre

$$(2) \quad T_{(i)} = \prod_{i \leqslant j \leqslant k} (T_j)^{[j/i]}$$

est le polynôme Y - unitaire de plus haut degré parmi ceux dont la puissance i-ième divise T dans $K[Y]$. Si en outre $T \in K_o[Y]$, alors $T_1, T_2, \dots$ et $T_k \in K_o[Y]$: la décomposition (1) n'est pas modifiée si l'on considère T comme un élément de $K_o[Y]$

2. Les notations étant celles du § précédent, posons $T_i = 1$ pour $i > k$. On peut alors, pour tout entier $i > 0$, définir $T_{(i)}$ par l'égalité (2) , et définir deux applications $I(K, Y, i)$, $J(K, Y, i)$ de $K[Y]$ dans lui-même en posant

$$I(K, Y, i)\, T = T_{(i)} \quad , \quad J(K, Y, i)\, T = T/(T_{(i)})^i \, .$$

Pour tout $T \in K[Y]$, $J(K, Y, i)\,T$ est donc un élément de $K[Y]$ dont toutes les racines ont une multiplicité strictement inférieure à i.

Notons alors, pour tout $\beta \in K - \{0\}$

- $\mathcal{J}(\beta)$ l'application identique de $K[Y]$ sur $K[\beta Y]$
- $M(\beta)$ la bijection de $K[Y]$ définie, pour tout $T \in K[Y]$, par :

$$(M(\beta)\,T)\,(Y) = T(\beta Y)$$

- $N(\beta)$ la bijection de $K[Y]$ définie, pour $T \in K[Y]$, par :

$$N(\beta)\,T = \beta T$$

- $I(K, \beta Y, i)$ (resp. $I(K_o, \beta Y, i)$,... etc) l'analogue de $I(K, Y, i)$ ... est défini dans $K[\beta Y]$ (resp. $K_o[\beta Y]$).

Cela posé, on vérifie aisément les formules suivantes

$$(3)\begin{cases} I(K, \beta Y, i) \circ \mathcal{J}(\beta) \circ M(\beta) = \mathcal{J}(\beta) \circ M(\beta) \circ I(K, Y, i) \\ I(K, Y, i) \circ N(\beta) \qquad\qquad\qquad = I(K, Y, i) \\ (I(K, Y, i) \circ M(\beta))\,T \qquad\quad = \left[N(\beta^{-\deg I(K,Y,i)T}) \circ M(\beta) \circ I(K,Y,i)\right]T \end{cases}$$

et, compte tenu de 1

$$(4)\quad I(K, \beta Y, i) \mid K_o[\beta Y] = I(K_o, \beta Y, i)$$

formules valables quel que soit $(\beta, T) \in (K - \{0\}) \times K[Y]$

3. Cela étant, nous pouvons sans diminuer la généralité supposer Ω algébriquement clos, ce que nous ferons. Soient $\omega, \omega' \in \Omega$, Ω_o un sous-corps de Ω, $p'(\omega)$ un élément de $\Omega_o[\omega]$. Si ω est transcendant sur Ω_o, on traite ω comme une indéterminée sur Ω_o. En particulier

- on note $P'(\omega')$ l'élément de $\Omega_o[\omega']$ déduit de $P'(\omega)$ par substitution de ω' à ω dans l'expression de P' en fonction de ω. On dira que ω' est racine de $P'(\omega)$ si $P'(\omega') = 0$.

La multiplicité des racines de $P'(\omega)$ se définit alors sans ambiguité.

- on pourra utiliser résultats et notations du § 2. Si par exemple $\omega' \in \Omega_o - \{0\}$, et si $Q(\omega'\ \omega) \in \Omega_o[\omega'\ \omega]$, on a $Q(\omega'\ \omega) = (M(\omega')\ Q)\ (\omega)$.

4. Dans ces conditions, montrons d'abord que <u>si</u> $U(X)$ <u>est un élément de</u> $E[X]$, v <u>un élément de</u> E <u>et</u> $U_1(u\,X^r)$ <u>un élément de</u> $E_o[u\,X^r]$ <u>tels que</u>

(5) $(U(X))^d = v \,.\, U_1(u\,X^r)$

<u>alors il existe</u> $w \in E$, $U_2 \in E_o[u\,X^r]$ <u>et un entier</u> $s \geq 0$ <u>tels que</u> $U(X) = w \,.\, U_2 \,.\, X^s$

Nous poserons

(6) $U_3(X^r) = v \,.\, U_1(u\,X^r)$

et (cf. 2)

$$(7)\begin{cases} I = I(E,\ X^r,\ d) \quad I' = I(E,\ u\,X^r,\ d),\ I_o = I(E_o,\ u\,X^r,\ d),\ J = J(E,X^r,d) \\ d_1 = \text{degré par rapport à } X^r \text{ de } (J\,U_3)\ (X^r) \\ U_4^{\cdot}(X^r) = u^{-d_1\,d} \,.\, (J\,U_3)\ (X^r) \end{cases}$$

Nous noterons ψ l'application identique de $E[X^r]$ sur $E[u\,X^r]$ ($\psi = \mathcal{J}(u)$ avec les notations de 2). L'égalité (6) s'écrit alors avec les notations de 2 :

$$U_3(X^r) = [M(u) \circ N(v)\ U_1]\ (X^r)$$

et par suite, compte tenu de (3) et (7) :

$$\begin{aligned}(I\ U_3)(X^r) &= [(I \circ M(u) \circ N(v))\ U_1]\ (X^r) \\ &= [(N(u^{-d_1}) \circ M(u) \circ I \circ N(v))U_1]\ (X^r) = u^{-d_1}[(M(u) \circ I)\ U_1]\ (X^r) \\ &= u^{-d_1}\ [(\psi^{-1} \circ I' \circ \psi \circ M(u))\ U_1](X^r)\end{aligned}$$

Or $[(\psi \circ M(u))U_1]\ (X^r) = U_1(u\ X^r) \in E_o\ [u\ X^r]$, et donc (formule 4)

$$[(I' \circ \psi \circ M(u))U_1]\ (X^r) = [(I_o \circ \psi \circ M(u))\ U_1]\ (X^r) \in E_o\ [u\ X^r]$$

Soit, posant

$$U_2 = [(\psi^{-1} \circ I \circ \psi \circ M(u))\ U_1]\ (X^r)$$

et identifiant l'anneau $M(u)\ (E_o(X^r))$ à son image par ψ , qui est $E_o(u\ X^r)$:

$$(8)\quad (I\ U_3)(X^r) = u^{-d_1}\ .\ U_2 \quad \text{et} \quad U_2 \in E_o\ [u\ X^r]$$

Donc, compte tenu de (5), (6), (7) et (8) :

$$\begin{aligned}[U(X)]^d &= U_3(X^r) = [(I\ U_3)(X^r)]^d\ (J\ U_3)\ (X^r) \\ &= u^{-dd_1}\ .\ U_2^d\ .\ (J\ U_3)\ (X^r) = U_2^d\ .\ U_4(X^r)\end{aligned}$$

et il s'ensuit que l'on a, l'anneau $E[X]$ étant intégralement clos dans $E(X)$:

$$U(X)/U_2 \in E\ [X]$$

posant alors

$$(9)\quad U_5(X) = U(X)/U_2$$

on a :

$$(10) \quad [U_5(X)]^d = U_4(X^r)$$

et les racines de $U_4(X^r) = u^{-dd_1} \ (\mathcal{J} U_3)\ (X^r)$ ont une multiplicité $< d$. Posons $U_6(X) = U_4(X^r)$. A toute racine $\xi \in \Omega$ de $U_6(X)$ correspond une racine $\eta \in \Omega$ de $U_4(X^r)$ telle que $\xi^r = \eta$. Comme la multiplicité de η, comme racine de $U_4(X^r)$ est strictement inférieure à d, et que celle de ξ, en tant que racine de $U_6\,(X) = (U_5(X))^d$, est $\geqslant d$, il s'ensuit que l'équation $Y^r = \eta$, Y étant une indéterminée, a des racines multiples : donc $\eta = \xi = 0$, et par conséquent $U_6(X)$, $U_4(X^r)$ et $U_5(X)$ sont des monômes en X à coefficients dans E, ce qui établit notre assertion.

5. Cela étant, passons à la démonstration. Soit $(P(X), Q(X))$ (resp. $P_1(u\,X^r)$, $Q_1(u\,X^r)$) le couple d'éléments de $E\,[X]$ (resp. $E_0\,[u\,X^r]$) associé à R (resp. $u_1\,R^d$). On a donc :

$$(11) \quad u_1 \frac{(P(X))^d}{(Q(X))^d} = \frac{P_1(u\,X^r)}{Q_1(u\,X^r)}$$

Il résulte de l'identité de Bezout que $P_1(u\,X^r)$, $Q_1(u\,X^r)$, premiers entre eux sur $E_0\,[u\,X^r]$, le sont aussi sur $E\,[X]$. Il existe par suite un élément $u_3 \in E$ tel que

$$(P(X))^d = u_3\ P_1(u\,X^r) \quad \text{et} \quad Q(X)^d = u_1\ u_3\ Q_1(u\,X^r)$$

Appliquant alors le résultat de 4, on voit qu'il existe $u' \in E$, $S' \in E_0(u\,X^r)$ et un entier m' tels que

$$R = u'\ S'\ .\ X^{m'}$$

Si $m' = 0$, le lemme est vérifié pour $u_2 = u'$, $S = S'$, $m = m'$; sinon, posant $n = \left[\frac{|m'|}{r}\right] \cdot \frac{m'}{|m'|}$, on peut écrire

$$R = (u'.u^{-n}).(S'.(u\,X^r)^n)\ .\ X^{m'-rn}$$

et il est clair que $|m'-rn|$ est $< r$: le lemme est vérifié pour $u_2 = u'.u^{-n}$, $S = S'.(uX^r)^n$, $m = m' - rn$.

3. Lemmes divers

Lemme 3-1 Soient

- d un entier $\geqslant 1$
- p un entier $\neq 0$
- $E_1(d,\ p)$ l'ensemble des quadruplets $(k_1,\ k_2,\ \ell_1,\ \ell_2) \in \mathbb{Z}^4$

tels que

$$(1)\quad \begin{cases} |k_1\,\ell_2 - k_2\,\ell_1| = 1 & (1\text{-}1) \\ p\,k_1 + d\,\ell_1 = k_2 & (1\text{-}2) \\ p\,k_2 + d\,\ell_2 = k_1 & (1\text{-}3) \end{cases}$$

- $E_2(d,\ p)$ l'ensemble des quadruplets $(k_1',\ k_2',\ \ell_1',\ \ell_2') \in \mathbb{Z}^4$

tels que

$$(2)\quad \begin{cases} |k_1'\,\ell_2' - k_2'\,\ell_1'| = 1 & (2\text{-}1) \\ p\,k_1' + d\ \ell_1' = k_1' & (2\text{-}2) \\ p\,k_2' + d\ \ell_2' = -\,k_2' & (2\text{-}3) \end{cases}$$

- $E\ (d,\ p) = E_1(d,\ p) \cup E_2(d,\ p)$

Alors (i) $E(d,\ p) \neq \emptyset \iff d$ divise $p^2 - 1$

(ii) l'un au moins des deux ensembles $E_1\ (d,\ p)$, $E_2\ (d,\ p)$ est vide.

Démonstration. Etant donnés deux entiers rationnels $a,\ b,\ a \neq 0$, nous écrivons $a|b$ pour $b/a \in \mathbb{Z}$.

1. Nous construirons d'abord, pour $i = 1, 2$, une partie $F_i(d, p)$ de $E(d, p)$ telle que $(F_i(d, p) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (E_i(d, p) \neq \emptyset)$, et nous montrerons alors que

$$1)\ ((F_1(d, p) \cup F_2(d, p)) \neq \emptyset) \Longrightarrow (d \mid p^2-1)$$

$$2)\ (d \mid p^2-1) \Longrightarrow ((F_1(d, p) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (F_2(d, p) = \emptyset))$$

ce qui impliquera (i) et (ii).

2. Nous noterons

– $E_1^*(d, p)$ la partie de $E_1(d, p)$ formée des quadruplets $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^4$ vérifiant (1) et la condition

$$(3) \qquad |k_1| \geqslant |k_2|$$

– $E_2^*(d, p)$ la partie de $E_2(d, p)$ formée des quadruplets $(k'_1, k'_2, \ell'_1, \ell'_2) \in \mathbb{Z}^4$ vérifiant (2) et la condition

$$(4) \qquad k'_1\, k'_2 > 0$$

– $F_1(d, p)$ l'ensemble des quadruplets $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$(5) \quad \begin{cases} p - 1 = (k_2 - k_1)(\ell_2 + \ell_1) & (5\text{-}1) \\ p + 1 = (k_2 + k_1)(\ell_2 - \ell_1) & (5\text{-}2) \\ d \quad\;\; = (k_1 + k_2)(k_1 - k_2) & (5\text{-}3) \end{cases}$$

– $F_2(d, p)$ l'ensemble des quadruplets $(k'_1, k'_2, \ell'_1, \ell'_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$(6) \quad \begin{cases} p - 1 = -2\, \ell'_1\, k'_2 & (6\text{-}1) \\ p + 1 = -2\, \ell'_2\, k'_1 & (6\text{-}2) \\ d \quad\;\; = 2\, k'_1\, k'_2 & (6\text{-}3) \end{cases}$$

3. Il est clair que $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in E_1(d, p)$ implique $(k_2, k_1, \ell_2, \ell_1) \in E_1(d, p)$, donc $(E_1(d, p) = \emptyset) \Longleftrightarrow (E_1^*(d, p) = \emptyset)$

De même $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in E_2(d, p)$ implique $(-k_1, k_2, -\ell_1, \ell_2) \in E_2(d, p)$ et $k_1 k_2 \neq 0$: si $k_i = 0$ $(i = 1$ ou $2)$, alors (2-3) et (2-4) impliquent $\ell_i = 0$, ce qui contredit (2-1) ; donc $(E_2(d, p) = \emptyset) \Longleftrightarrow (E_2^*(d, p) = \emptyset)$.

4. Montrons que $E_1^*(d, p) = F_1(d, p)$. Soit $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^4$ vérifiant (1) et (3). Multipliant les deux membres de (1-2) (1-3) par $k_2, -k_1$, respectivement, et additionnant, on obtient, compte tenu de (1-1) et (3), l'égalité (5-3), soit $d = k_1^2 - k_2^2$, et (1-2), (1-3) s'écrivent alors

$$(7) \quad \begin{cases} k_2 - p\,k_1 = (k_1^2 - k_2^2)\;\ell_1 \\ k_1 - p\,k_2 = (k_1^2 - k_2^2)\;\ell_2 \end{cases}$$

L'on en déduit par combinaison linéaire

$$(8) \quad \begin{cases} (k_1 + k_2)\;(1 - p) = (k_1^2 - k_2^2)\;(\ell_1 + \ell_2) & (8-1) \\ (k_1 - k_2)\;(1 + p) = (k_1^2 - k_2^2)\;(\ell_2 - \ell_1) & (8-2) \end{cases}$$

Or (5-3) implique $k_1 + k_2 \neq 0$ et $k_1 - k_2 \neq 0$; et dans ces conditions (8-1) $\Longrightarrow$ (5-1), (8-2) $\Longrightarrow$ (5-2), et donc $E_1^*(d, p) \subset F_1(d, p)$. Inversement (5-3) $\Longrightarrow$ (3), ((5-1) et (5-2)) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (7), ((7) et (5-3)) $\Longrightarrow$ ((1-2) et (1-3)), ((5-1) et (5-2)) $\Longrightarrow$ (1-1), donc $F_1(d, p) = E_1^*(d, p)$.

5. Montrons que $E_2^*(d, p) = F_2(d, p)$.

Soit $(k'_1, k'_2, \ell'_1, \ell'_2) \in \mathbb{Z}^4$ vérifiant (2) et (4). Multipliant les deux membres de (2-2), (2-3) par k'_2, $-k'_1$ respectivement, et additionnant, on obtient, compte tenu de (4) et de (2-1) l'égalité (6-3), soit $d = 2\,k'_1\,k'_2$ et (2-2), (2-3) s'écrivent alors

$$(9)\quad \begin{cases} k'_1(1-p) = 2\,k'_1\,k'_2\,\ell'_1 & (9\text{-}1)\\ k'_2(1+p) = -\,2\,k'_1\,k'_2\,\ell'_2 & (9\text{-}2)\end{cases}$$

Or (6-3) implique $k'_1 \neq 0$ et $k'_2 \neq 0$ et dans ces conditions (9-1) $\Longrightarrow$ (6-1), (9-2) $\Longrightarrow$ (6-2) , et par suite E^*_2 $(d, p) \subset F_2(d, p)$. Inversement (6-3) $\Longrightarrow$ (4) , ((6-1) et (6-2)) $\Longrightarrow$ ((9) et (2-1)), ((9) et (6-3)) $\Longrightarrow$ ((2-2) et (2-3)) , et donc $F_2(d, p) = E^*_2(d, p)$

6. Il résulte alors de 3, 4 et 5 que, pour $i = 1, 2$ on a $(F_i(d, p) \neq \emptyset) \Longleftrightarrow (E_i(d, p) \neq \emptyset)$. Il résulte par ailleurs des formules (5) et (6) que

$$F_1(d, p) \cup F_2(d, p) \neq \emptyset \text{ implique } d \mid p^2-1 \ .$$

<u>Supposant désormais que</u> d/p^2-1 , il nous suffit dès lors de montrer que $(F_1(d, p) \neq \emptyset)$ équivaut à $F_2(d, p) = \emptyset$.

Dans ce qui suit, nous noterons $\equiv$ l'égalité modulo 2.

7. <u>Montrons d'abord</u> que $(F_1(d, p) \neq \emptyset) \Longrightarrow (F_2(d, p) = \emptyset)$. Supposons en effet qu'il existe $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in F_1(d, p)$ et $(k'_1, k'_2, \ell'_1, \ell'_2) \in F_2(d, p)$. Alors (1-1) implique que $|(\ell_1 + \ell_2)\,k_1 - (k_1 + k_2)\,\ell_1| = |(\ell_1 - \ell_2)\,k_1 - (k_1 - k_2)\ell_1| = |k_1\,\ell_2 - k_2\,\ell_1| = 1$ donc $\langle \ell_1 + \ell_2\ , k_1 + k_2 \rangle = \langle \ell_1 - \ell_2, k_1 - k_2 \rangle = 1$. Il s'ensuit, compte tenu de (5) que

$$(10)\quad \langle d, p-1 \rangle = |k_1 - k_2| \quad \text{et} \quad \langle d, p+1 \rangle = |k_1 + k_2|$$

De même, (2-1) implique $\langle \ell'_1, k'_1 \rangle = \langle \ell'_2, k'_2 \rangle = 1$, et donc, compte tenu de (6) :

$$(11)\quad \langle d, p-1 \rangle = 2\,|k'_2| \quad \text{et} \quad \langle d, p+1 \rangle = 2\,|k'_1|$$

Combinant alors (11), (10), (5-3) et (4) , on obtient

$d = 4\ |k'_1\ k_2| = 4\ k'_1\ k'_2$, ce qui contredit (6-3)

Pour montrer que $(F_2(d, p) = \emptyset)$ implique $(F_1(d, p) \neq \emptyset)$, soit encore que $F_1(d, p) \cup F_2(d, p)$ est non vide, nous distinguerons deux cas :

8. $|p| = 1$. On vérifie aussitôt que

- si $d \equiv 0$, soit $d = 2\ k$, alors $(1, k, 0, -1) \in F_2(2\ k, 1)$ et $(k, 1, 1, 0) \in F_2(2\ k, -1)$

- si $d \equiv 1$, soit $d = 2\ k + 1$, alors $(-(k+1), k, 1, -1) \in F_1(2k+1, 1)$ et $(k+1, k, 1, 1) \in F_1(2k+1, -1)$

9. $|p| > 1$. Nous poserons :

$$d_1 = \langle p-1, d \rangle \qquad \delta_1 = (p-1)/d_1 \qquad u = \langle d_1, d_2 \rangle$$
$$d_2 = \langle p+1, d \rangle \qquad \delta_2 = (p+1)/d_2$$

On a donc, puisque d est > 0 et que $d | p^2-1$

$$(12) \quad \begin{cases} p-1 = d_1\ \delta_1\ , \quad p+1 = d_2\ \delta_2 \quad , \quad d = d_1\ d_2\ u^{-1} \\ \text{et} \qquad\qquad u = 1 \text{ ou } 2 \end{cases}$$

<u>a</u> Si $u = 2$, alors $0 \equiv d_1 \equiv d_2 \equiv d \equiv p^2-1 \equiv p-1 \equiv p+1$. Posant alors $d_1 = 2\ e_1$, $d_2 = 2\ e_2$, on déduit aussitôt de (12) que $(e_2, e_1, -\delta_1, -\delta_2) \in F_2(d, p)$

<u>b</u> Supposons désormais $u = 1$. Si $d_1 \equiv d_2$ et $\delta_1 \equiv \delta_2$, alors le système :

$$\begin{cases} d_1 = k_1 - k_2 & -\delta_1 = \ell_2 + \ell_1 \\ d_2 = k_1 + k_2 & \delta_2 = \ell_2 - \ell_1 \end{cases}$$

a une solution entière $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2)$ dont on vérifie aussitôt compte tenu de (12), qu'elle appartient à $F_1(d, p)$. Dans le cas contraire, d_1 et d_2 sont de parité différente : comme $\nu = 1$, il est exclu que $d_1 \equiv d_2 \equiv 0$, et par ailleurs $d_1 \equiv d_2 \equiv 1$ impliquerait que $\delta_1 \equiv \delta_2$ puisque $p-1 \equiv p+1$. Il en résulte en particulier que

(13) $0 \equiv d \equiv p-1 \equiv p+1$

Deux cas se présentent alors

<u>1</u> $d_1 \equiv 0$ et $d_2 \equiv 1$. Il résulte dans ces conditions de (12) et (13) que $\delta_2 \equiv 0$. Posant $d_1 = 2\,k$, $\delta_2 = 2\,\ell$, on déduit alors de (12) que $(d_2, k, -\delta_1, -\ell) \in F_2(d, p)$

<u>2</u> $d_1 \equiv 1$ et $d_2 \equiv 0$. Il résulte dans ces conditions de (12) et (13) que $\delta_1 \equiv 0$. Posant $d_2 = 2\,k$, $\delta_1 = 2\,\ell$, on déduit alors de (12) que $(k, d_1, -\ell, -\delta_2) \in F_2(d, p)$.

<u>Lemme 3-2</u> Soient

- K un corps non nécessairement commutatif de caractéristique $\neq 2$
- σ un automorphisme involutif de K
- Z le centre de K
- Ω un sous-corps de Z stable par σ
- Ω_0 le corps des invariants de σ dans Ω
- U un sous-anneau régulier de K contenant Ω
- A un sous-espace vectoriel (sur Ω) de U, stable par σ, engendrant K (pour sa structure de corps), et de dimension finie sur Ω
- σ^* l'application Ω_0 - linéaire de A^* dans A^* définie par l'égalité

(1) $(\sigma^* \lambda)(x) = \sigma . \lambda(\sigma x)$ pour tout $(\lambda, x) \in A^* \times A$

- A_o (resp. $U_o . K_o$) l'ensemble des éléments de A (resp. U, K) invariants par σ

- A^*_o l'ensemble des éléments de A^* invariants par σ^*

- pour tout $x \in A$, D_x la dérivation intérieure de K définie par x : $D_x y = xy - yx$ pour $y \in A$.

- pour tout $\lambda \in A^*$, $S(\lambda)$ l'ensemble des éléments α de $K - \{0\}$ tels que $D_x \alpha = \lambda(x) \alpha$ pour tout $x \in A$

- $\mathbb{R}$ un sous-espace vectoriel (sur Ω) de A^* stable par σ^*

- $\mathbb{R}_i$ l'espace vectoriel (sur Ω_o) formé des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda + \sigma^* \lambda = 0$

- L un sous-corps commutatif de K contenant Z et stable par σ

- $\psi(\mathbb{R}, L)$ (resp. $\psi(\mathbb{R}_i, L)$) l'ensemble $L \cap (\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} S(\lambda))$ (resp. $L \cap (\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_i} S(\lambda))$)

- $\mathcal{U}(\mathbb{R}, L)$ l'ensemble des éléments α de $\psi(\mathbb{R}, L)$ tels que $\alpha . \sigma\alpha = 1$.

On suppose que

(A) $A \simeq A_o \otimes_{\Omega_o} \Omega$ et $U \simeq U_o \otimes_{\Omega_o} \Omega$ et $K \simeq K_o \otimes_{\Omega_o} \Omega$

Dans ces conditions

(i) Pour tout $\lambda \in A^*$, $S(\lambda)$ est l'ensemble des $\alpha \in K - \{0\}$ tels que $D_x \alpha = \lambda(x) \alpha$ pour tout $x \in A_o$.

(ii) Quels que soient $\lambda, \mu \in A^*$, on a, si $S(\lambda)$ et $S(\mu)$ ne sont pas vides

(2) $S(\lambda)\, S(\mu) \subset S(\lambda+\mu)$, $S(\lambda)^{-1} = S(-\lambda)$

(3) $S(\sigma^* \lambda) = \sigma(S(\lambda))$

(iii) $\psi(\mathbb{R}, L)$, $\psi(\mathbb{R}_i, L)$ et $\mathcal{U}(\mathbb{R}, L)$ sont des sous-groupes, stables par σ , du groupe commutatif des éléments inversibles de L , et on a les inclusions

(4) $L - \{0\} \supset \psi(\mathbb{R}, L) \supset \psi(\mathbb{R}_i, L) \supset \mathcal{U}(\mathbb{R}, L)$

(5) $\psi(\mathbb{R}_i, L) \supset (L - \{0\}) \cap S(0) = Z - \{0\}$

(i v) $A^* \simeq (A_0^*) \otimes_{\Omega_0} \Omega$

Démonstration.

Montrons (i). Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une base de Ω sur Ω_0 (card $I \leq 2$!) et soient $\lambda \in A^*$, $\alpha \in K - \{0\}$, tels que $D_x \alpha = \lambda(x)\, \alpha$ pour tout $x \in A_0$. Si $y \in A$, il existe d'après (A) une famille $(y_i)_{i \in I}$ d'éléments de A_0 tels que $y = \sum \omega_i y_i$. Comme $\Omega \subset Z$, on a $D_y = \sum\limits_i \omega_i D_{y_i}$, et par suite $D_y \alpha = \sum\limits_i \omega_i D_{y_i} \alpha = \sum\limits_i \omega_i \lambda(y_i)\alpha = \lambda(y)\alpha$, donc $\alpha \in S(\lambda)$.

Montrons (ii). Soient $\lambda, \mu \in A^*$, $\alpha \in S(\lambda)$, $\beta \in S(\mu)$, $x \in A$. Alors, comme $\Omega \subset Z$, on a

$$D_x \alpha\beta = D_x\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot D_x\beta = \lambda(x)\, \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \mu(x)\beta = (\lambda+\mu)(x)\alpha\beta$$

et de même

$$D_x \alpha^{-1} = -\alpha^{-1}.D_x \alpha . \alpha^{-1} = -\alpha^{-1} . \lambda(x) \alpha . \alpha^{-1} = (-\lambda)(x) . \alpha^{-1} .$$

Donc $S(\lambda)\, S(\mu) \subset S(\lambda+\mu)$ et $S(\lambda)^{-1} \subset S(-\lambda)$. Remplaçant λ par $-\lambda$, on en déduit que $S(\lambda)^{-1} = S(-\lambda)$. Pour vérifier (3) , notons d'abord que l'on a, pour tout $x \in A$:

$$(6) \qquad \sigma . D_x = D_{\sigma x} . \sigma$$

Si en effet $\alpha \in K$, $x \in A$, alors

$$\sigma(D_x \alpha) = \sigma(x\alpha - \alpha x) = \sigma x . \sigma\alpha - \sigma\alpha . \sigma x = D_{\sigma x} \sigma\alpha$$

Si donc $\lambda \in A^*$ et $\alpha \in S(\sigma, \lambda)$, alors

$$D_x \sigma\alpha = D_{\sigma(\sigma x)} \sigma\alpha = \sigma(D_{\sigma x} \alpha) = \sigma(\lambda(\sigma x) . \alpha = (\sigma^* \lambda)(x) . \sigma\alpha$$

et par suite $\sigma\alpha \in S(\sigma^* \lambda)$; donc $\sigma(S(\lambda)) \subset S(\sigma^*\lambda)$. Remplaçant λ par $\sigma^* \lambda$, on en déduit $\sigma(S(\sigma^* \lambda)) \subset S(\lambda)$, d'où $S(\sigma^* \lambda) \subset \sigma(S(\lambda)$ ce qui montre (3) .

<u>Montrons (iii)</u>. Comme $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}_i$ sont des groupes additifs, il résulte de (2) que $\Psi(\mathfrak{R}, L)$ et $\Psi_i(\mathfrak{R}, L)$ sont des groupes, et $\mathfrak{R}_i \subset \mathfrak{R}$ implique $\Psi(\mathfrak{R}_i, L) \subset \Psi(\mathfrak{R}, L)$. Comme $L = \sigma L$, la stabilité de $\Psi(\mathfrak{R}, L)$ et $\Psi(\mathfrak{R}_i, L)$ par σ résulte de (3) . Comme $\mathfrak{U}(\mathfrak{R}, L) \subset \Psi(\mathfrak{R}, L)$, il s'ensuit d'une part que $\mathfrak{U}(\mathfrak{R}, L)$ est un groupe stable par σ , et d'autre part que pour tout $\alpha \in \mathfrak{U}(\mathfrak{R}, L)$, il existe $\lambda \in \mathfrak{R}$ tel que $\alpha \in S(\lambda)$. Alors, compte tenu de (ii)

$$1 = \alpha\sigma(\alpha) \in S(\lambda) . \sigma(S(\lambda)) \subset S(\lambda + \sigma^* \lambda)$$

et donc, pour tout $x \in A$, on a $0 = D_x 1 = (\lambda + \sigma^*\lambda)(x)$, donc $\lambda \in \mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{R}, L) \subset \Psi(\mathfrak{R}_i, L)$. Les inclusions (5) sont triviales.

<u>Montrons (iv)</u>. Comme A est de dimension finie sur Ω , il résulte de (A) que A_o est de dimension finie sur Ω_o , et donc [4] on a $A^* \simeq (A_o)^* \otimes_{\Omega_o} \Omega$. Il suffit donc de montrer que $(A_o)^*$ et A_o^* sont

isomorphes en tant qu'espaces vectoriels sur Ω_0. C'est clair si σ est l'automorphisme identique : alors $\Omega = \Omega_0$, $A_0 = A$. Sinon Ω est une extension quadratique de Ω_0. Soit alors $\chi' \in \Omega$ tel que $\Omega = \Omega_0(\chi')$. On a $\sigma\chi' + \chi' \in \Omega_0$, donc, posant $\chi = \chi' - 1/2\ (\sigma(\chi') + \chi')$

(7) $\Omega = \Omega_0(\chi)$ et $\chi + \sigma\chi = 0$ et $\chi^2 = \sigma(\chi^2) \in \Omega_0$

Posons alors, pour tout $x \in A$

(8) $r(x) = 1/2\ (x + \sigma x)$, $j(x) = 1/2\chi\ (x - \sigma x)$

Il s'ensuit que

(9) $x = r(x) + \chi\, j(x)$

(10) $r(\sigma x) = r(x)$ et $j(\sigma x) = -\, j(x)$

et que $r : x \longrightarrow r(x)$ et $j : x \longrightarrow j(x)$ sont des applications Ω_0-linéaires de A dans A_0. En outre on vérifie aussitôt que

(11) $r(A) = r(A_0) = j(A) = j(\chi A_0) = A_0$

Posons alors, pour $\lambda \in (A_0)^*$ et $x \in A$

(12) $(\varphi(\lambda))(x) = \lambda(r(x)) + \chi.\, \lambda(j(x))$

Il est clair que $\varphi : \lambda \longrightarrow \varphi(\lambda)$ est une application Ω_0-linéaire de $(A_0)^*$ dans A^*, car

$$(\varphi(\lambda))(\chi x) = \lambda(r(\chi x)) + \chi\lambda(j(\chi x)) = \lambda(\chi^2\, j(x)) + \chi\,\lambda(r(x))$$
$$= \chi\ .\ (\varphi(\lambda))\ (x)\ .$$

Il résulte par ailleurs de (11) que φ est injectif. Il suffit donc de montrer que $\varphi((A_o)^*) = A_o^*$.

Soit $\mu \in A_o^*$. Alors, pour $x \in A_o$, on a

$$\mu(x) = (\sigma^*\mu)(x) = \sigma(\mu(x)) \in A_o$$

donc $\mu | A_o \in (A_o)^*$. Dans ces conditions, posant $\lambda_\mu = \mu | A_o$, on a pour $x \in A$

$$(\varphi(\lambda_\mu))(x) = \lambda_\mu(r(x)) + x \, . \lambda_\mu(j(x)) = \mu(r(x) + x j(x)) \equiv \mu(x)$$

donc $\varphi((A_o)^*) \supset A_o^*$

Si maintenant $\lambda \in (A_o)^*$, on a, pour $x \in A$, compte tenu de (10) :

$$\begin{aligned}[\sigma^*(\varphi(\lambda))](x) &= \sigma[(\varphi(\lambda))(\sigma x)] = \sigma[\lambda(r(\sigma x)) + x . \lambda(j(\sigma x))] \\ &= \sigma(\lambda(r(x)) + \sigma x . \sigma(\lambda(-j(x)))) = \lambda(r(x)) + x\lambda(j(x)) = (\varphi(\lambda))(x) .\end{aligned}$$

Donc $\varphi((A_o)^*) \subset A_o^*$, ce qui termine la démonstration.

<u>Remarque</u>. Si l'on supprime l'hypothèse (A) toutes les assertions du lemme ne faisant par intervenir σ^* et $\mathbb{R}_i$ restent valables : il suffit pour le voir de prendre σ égal à l'automorphisme identique.

4. Lemmes relatifs aux algèbres de Lie.

<u>Lemme 4-1</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie
- $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$
- α, β deux éléments de $K(\mathfrak{g})$
- δ un élément de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$
- λ, μ des éléments de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$
- i une racine carrée de -1 dans $\mathbb{C}$

Alors

(i) Les homomorphismes canoniques

$$K(\mathfrak{g})^{\sim} \longrightarrow K(\tilde{\mathfrak{g}})$$
$$Z(\mathfrak{g})^{\sim} \longrightarrow Z(\tilde{\mathfrak{g}})$$

sont des $\mathbb{C}$ - isomorphismes surjectifs.

(ii) $Z(\mathfrak{g}) = Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\mathfrak{g})$. Si $\alpha + i\beta \in Z(\tilde{\mathfrak{g}})$, alors $\alpha \in Z(\mathfrak{g})$ et $\beta \in Z(\mathfrak{g})$

(iii) L'automorphisme non identique de $\mathbb{C}$ se prolonge canoniquement en un automorphisme involutif σ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ qui laisse fixes les éléments de $K(\mathfrak{g})$ et laisse stables $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$, $U(\tilde{\mathfrak{g}})$, $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\mathfrak{h}}$ et $K(\tilde{\mathfrak{h}})$.

(iv) Il existe des éléments λ_1, λ_2 de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$, prolongeant des éléments de $\mathfrak{g}^*$ tels que $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, et l'on a, notant σ^* l'involution de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$ associée à σ (cf. lemme 3-2) :

$$\sigma^*\lambda = \lambda_1 - i\lambda_2 , \quad S(\sigma^*\lambda) = \sigma S(\lambda) ,$$
$$S(\lambda)S(\mu) \subset S(\lambda+\mu) , \quad S(\lambda)^{-1} = S(-\lambda)$$

et, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$D_x(\sigma\delta) = \sigma(D_{\sigma x}\delta) \quad \text{et} \quad (\sigma^*\lambda)(x).\sigma\delta = \sigma(\lambda(\sigma x)\delta)$$

(v) $S(\lambda)$ est l'ensemble des éléments non nuls γ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ tels que $D_x\gamma = \lambda(x)\gamma$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

<u>Démonstration</u>. L'homomorphisme canonique $K(\mathfrak{g})^{\sim} \longrightarrow K(\tilde{\mathfrak{g}})$ est un $\mathbb{C}$-isomorphisme surjectif en vertu de la prop. 3 de I 3-4 . L'assertion (i) résulte alors de [6] . Par suite $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \simeq Z(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, d'où (ii) . Soit σ_0

l'automorphisme de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ défini, pour $\gamma \in K(\mathfrak{g})$, $z \in \mathbb{C}$, par l'égalité

$$\sigma_0(\gamma \otimes z) = \gamma \otimes \bar{z} ,$$

$\bar{z}$ désignant le conjugué de z . Si l'on identifie $K(\mathfrak{g})^{\sim}$ à $K(\tilde{\mathfrak{g}})$, alors σ_0 s'identifie à un automorphisme σ de $K(\mathfrak{g})$ dont on voit aussitôt qu'il vérifie (iii) . On peut alors appliquer le lemme 3-2 . L'assertion (v) (resp. la première assertion de (iv)) résulte de l'assertion (i) (resp. (v)) de ce lemme, l'égalité $D_x(\sigma\delta) = \sigma(D_{\sigma x}\delta)$ de la formule (6) de la démonstration de ce lemme. Soient $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$, x_1, $x_2 \in \mathfrak{g}$ tels que $x = x_1 + i\,x_2$. Alors $(\sigma^*\lambda)(x).\sigma\delta = \sigma(\lambda(\sigma x)).\sigma\delta = \sigma(\lambda(\sigma x)\,\delta)$ et d'autre part, comme $\sigma x = x_1 - i\,x_2$

$$\begin{aligned}(\sigma * \lambda)(x) &= \sigma\lambda(\sigma x) = \sigma(\lambda_1(x_1 - ix_2) + i\,\lambda_2(x_1 - ix_2)) \\ &= \sigma((\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)) + i(\lambda_2(x_1) - \lambda_1(x_2))) \\ &= \lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2) - i(\lambda_2(x_1) - \lambda_1(x_2)) \\ &= \lambda_1(x_1 + ix_2) - i\,\lambda_2(x_1 + ix_2) = (\lambda_1 - i\,\lambda_2)(x)\end{aligned}$$

Donc $\sigma^*\lambda = \lambda_1 - i\,\lambda_2$. Les autres assertions du Lemme résultent du lemme 3-2 (ii) .

<u>Notations et terminologie</u>. Désormais, pour toute algèbre de Lie réelle de dimension finie $\mathfrak{g}$, nous identifierons $K(\mathfrak{g})^{\sim}$ à $K(\tilde{\mathfrak{g}})$, et plus généralement toute sous-algèbre de $K(\mathfrak{g})^{\sim}$ à son image canonique dans $K(\tilde{\mathfrak{g}})$: $U(\mathfrak{g})^{\sim}$ à $U(\tilde{\mathfrak{g}})$, $Z(\mathfrak{g})^{\sim}$ à $Z(\tilde{\mathfrak{g}})$ ... etc. Nous appellerons <u>automorphisme canonique</u> de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ l'automorphisme σ du lemme précédent. Pour tout $\alpha \in K(\tilde{\mathfrak{g}})$ (resp. $\lambda \in (\tilde{\mathfrak{g}})^*$) on notera $\bar{\alpha}$ (resp. $\bar{\lambda}$) l'élément $\sigma\alpha$ (resp. $\sigma^*\lambda$) , et dira que α (resp. λ) est <u>réel</u> si $\alpha = \bar{\alpha}$ (resp. $\lambda = \bar{\lambda}$) .

<u>Lemme 4-2</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω
- $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$

- α un élément de $K(\mathfrak{g})$

Alors

(i) les dérivations de $K(\mathfrak{g})$ prolongeant les dérivations intérieures de $\mathfrak{g}$ laissent stable $Z(\mathfrak{a})$

(ii) si Ω est de caractéristique 0 , si $\alpha \in Z(\mathfrak{a})$ et $\alpha^m \in Z(\mathfrak{g})$,avec $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, alors $\alpha \in Z(\mathfrak{g})$

<u>Démonstration</u>. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ est stable par ad_x , donc $U(\mathfrak{a})$ et par suite $K(\mathfrak{a})$ sont stables par D_x . Or toute dérivation d'une algèbre laisse stable son centre, d'où (i) . En particulier, si $\alpha \in Z(\mathfrak{a})$, alors $\alpha(D_x \alpha) = (D_x \alpha).\alpha$, et par suite $D_x(\alpha^m) = m\,\alpha^{m-1}(D\,\alpha)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, d'où (ii) .

<u>Lemme 4-3</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω
- $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$
- a un élément de $\mathfrak{n} - \mathfrak{b}$, λ un élément de $\mathfrak{g}^*$ tels que l'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$[x, a] - \lambda(x)\, a \in \mathfrak{b}$$

- δ un élément de $Z(\mathfrak{n})$ tel que $\delta - a \in K(\mathfrak{b})$
- $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{n}_0$ et $\mathfrak{b}_0$ des idéaux de $\mathfrak{g}$

Dans ces conditions

(i) pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$D_x\,\delta - \lambda(x)\,\delta \in Z(\mathfrak{n}) \cap K(\mathfrak{b})$$

(ii) si $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}_o$, $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{h}}_o$, $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{b}}_o$, on a , pour tout $x \in \mathfrak{g}$

(1) $\qquad D_x \bar{\xi} - \bar{\lambda}(x)\, \bar{\xi} = \overline{D_{\bar{x}}\, \xi - \lambda(\bar{x})\, \xi}$

En particulier, pour tout $y \in \mathfrak{g}_o$

(2) $\qquad D_y \bar{\xi} - \bar{\lambda}(y)\, \bar{\xi} = \overline{D_y\, \xi - \lambda(y)\, \xi}$

<u>Démonstration</u>. Ecrivant, pour $x \in \mathfrak{g}$

$$D_x \xi - \lambda(x)\, \xi = D_x(\xi - a) + (D_x a - \lambda(x)\, a) + \lambda(x)\, (a - \xi)$$

et appliquant le lemme 4-2 , on en déduit (i) . La formule (1) résulte du Lemme 4-1 (iv) ; comme $y \in \mathfrak{g}_o$ implique $y = \bar{y}$, on en déduit (2) et le lemme.

<u>Lemme 4-4</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω
- $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{a}$
- a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$
- N un sous-corps commutatif de $K(\mathfrak{g})$ contenant Ω
- ξ un élément de $N \cap (K(\mathfrak{b})\,\{a\})$ tel que

$$N \cap K(\mathfrak{a}) = (N \cap K(\mathfrak{b}))\,(\xi) \quad \text{et} \quad \xi - a \in \mathfrak{b}$$

Dans ces conditions

$$N \cap (K(\mathfrak{b})\,\{a\}) = (N \cap K(\mathfrak{b}))[\xi]$$

<u>Démonstration</u>. Comme $\xi - a \in \mathfrak{b}$, ξ est transcendant et symétrique par rapport à $K(\mathfrak{b})$ et $K(\mathfrak{b})\,\{a\} = K(\mathfrak{b})\,\{\xi\}$; il s'ensuit, d'une

part que $N \cap K(\mathfrak{a})$ est extension pure de degré 1 de $N \cap K(\mathfrak{b})$, et d'autre part que tout élément de $K(\mathfrak{b})\{a\}$ s'écrit de manière unique sous la forme d'un polynôme à gauche en δ à coefficients dans $K(\mathfrak{b})$.

Soit P un élément non nul de $N \cap (K(\mathfrak{b})\{a\})$. Il existe alors des éléments u_i de $K(\mathfrak{b})$, des éléments v_j , w_k de $N \cap K(\mathfrak{b})$, et des entiers ≥ 0 , soient p, q, r , tels que

$$P = \sum_{0}^{p} u_i \delta_i = \left(\sum_{0}^{q} v_j \delta^j\right) \cdot \left(\sum_{0}^{r} w_k \delta^k\right)^{-1} , \text{ avec } u_p v_q w_r \neq 0$$

et donc (I 4-1) , $u_p = v_q (w_r)^{-1} \in N \cap K(\mathfrak{b})$ et

$\sum_{0}^{p-1} u_i \delta^i = P - u_p \delta^p \in N \cap (K(\mathfrak{b})\{a\})$. On en déduit aussitôt par récurrence sur p que $P \in (N \cap K(\mathfrak{b}))[\delta]$, et donc

$$N \cap (K(\mathfrak{b})\{a\}) \subset (N \cap K(\mathfrak{b}))[\delta] \subset N \cap (K(\mathfrak{b})\{\delta\}) = N \cap (K(\mathfrak{b})\{a\})$$

<u>Lemme 4-5</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps commutatif de caractéristique 0
- $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$ des idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$
- a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, λ un élément de $\mathfrak{g}^*$ tels que l'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$[x, a] - \lambda(x)\, a \in \mathfrak{b}$$

- δ un élément de $Z(\mathfrak{p})$, transcendant sur $Z(\mathfrak{p}) \cap K(\mathfrak{b})$, et tel que $Z(\mathfrak{p}) \cap K(\mathfrak{a}) = (Z(\mathfrak{p}) \cap K(\mathfrak{b}))(\delta)$
- P un élément de $(Z(\mathfrak{p}) \cap K(\mathfrak{b}))[\delta]$, de degré $s > 0$ par rapport à δ , u, u' des éléments de $Z(\mathfrak{p}) \cap K(\mathfrak{b})$, $u \neq 0$, tels que

$$P = u(\delta^{s} + u' \delta^{s-1} + \dots)$$

Si $P \in Z(\mathfrak{g})$, et si l'une des deux conditions suivantes (A) , (B) est remplie

(A) $\quad \delta - a \in K(\beta)$

(B) $\quad$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $D_x \delta - \lambda(x)\, \delta \in K(\beta)$

alors

$$u \in S(-s\lambda) \quad \text{et} \quad \delta + u'/s \in S(\lambda) \quad \text{et} \quad u(\delta + u'/s)^s \in Z(\mathfrak{g})$$

Démonstration. On a : (A) $\Longrightarrow$ (B) (lemme 4-3) ; et (B) et le lemme 4-2 impliquent que

(1) $\quad D_x \delta = \lambda(x)\, \delta + w_x$, avec $w_x \in Z(P) \cap K(\beta)$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

Si donc $P \in Z(\mathfrak{g})$, l'on obtient, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, égalant à zéro les coefficients de δ^s et δ^{s-1} dans l'expression de $D_x P$, et tenant compte de (1) :

$$(2) \quad \begin{cases} D_x u + s\, \lambda(x)\, u = 0 \\ (D_x u)\, u' + u(D_x u' + s\, w_x + (s-1)\, \lambda(x)\, u') = 0 \end{cases}$$

La première égalité (2) montre que $u \in S(-s\lambda)$. La seconde s'écrit encore, compte tenu de la première et de (1) :

$$u \,.\, [-s\, \lambda(x)\, u' + D_x u' + s\,(D_x \delta - \lambda(x)\, \delta) + (s-1)\, \lambda(x)\, u'] = 0$$

soit, puisque u est $\neq 0$

$$D_x (s\,\delta + u') = \lambda(x)\, (s\,\delta + u') .$$

Donc $s\,\delta + u'$ et $\delta + u'/s$ appartiennent à $S(\lambda)$ et par suite (lemme 3-2) : $u(\delta + u'/s)^s \in S(-s\lambda + s\lambda) = S(0) \subset Z(\mathfrak{g})$.

Lemme 4-6 Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω
- $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$
- a_1, a_2 des éléments de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ tels que les sous-espaces $\Omega a_1 \oplus \mathfrak{b}$ et $\Omega a_2 \oplus \mathfrak{b}$ soient deux idéaux de $\mathfrak{g}$, distincts.

Alors $K(\Omega a_1 \oplus \mathfrak{b}) \cap K(\Omega a_2 \oplus \mathfrak{b}) = K(\mathfrak{b})$

Démonstration. Posons

$$\mathfrak{a}_i = \Omega a_i \oplus \mathfrak{b} \quad (i = 1, 2) , \quad \mathfrak{h} = \Omega a_1 \oplus \Omega a_2 \oplus \mathfrak{b}$$

Alors $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ sont des idéaux de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_1 \oplus \Omega a_2 = \mathfrak{a}_2 \oplus \Omega a_1$
Soit α un élément $\neq 0$ de $K(\mathfrak{a}_1)$. Montrons si $\alpha \in K(\mathfrak{a}_2)$ alors $\alpha \in K(\mathfrak{b})$. Soient en effet $\beta_1, \dots \beta_m$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K(\mathfrak{b})$, $\beta_m \gamma_n \neq 0$

tels que $\alpha = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \, (a_1)^i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j (a_1)^j\right)^{-1}$, soit :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha\, \gamma_j (a_1)^i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i (a_1)^i .$$

Si $\alpha \in K(\mathfrak{a}_2)$, alors les $\alpha \gamma_j$, $\beta_i \in K(\mathfrak{a}_2)$, et donc (I prop. 1), l'on a $m = n$, et $\alpha \gamma_i = \beta_i$ pour $i = 1, \dots, n$; en particulier $\alpha = \beta_n (\gamma_n)^{-1} \in K(\mathfrak{b})$.

Lemme 4-7 Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie
- $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{g}$, a un élément de $\tilde{\mathfrak{a}}$ tels que

  - $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ et $\dim (\mathfrak{a} / \mathfrak{b}) = \dim (\tilde{\mathfrak{a}} / \tilde{\mathfrak{b}}) = 2$
  - $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}} + \mathbb{C}\, a \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}$
  - $\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a$ et $\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}$ sont des idéaux de $\tilde{\mathfrak{g}}$

- $\mathfrak{J}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$
- (c) et $(\bar{c})$ les assertions suivantes

(c) $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, a) \neq Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$

($\bar{c}$) $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}) \neq Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$

Dans ces conditions

(i) les assertions (c) et ($\bar{c}$) sont éqiivalentes

(ii) si (c) est vraie, alors

<u>a</u> $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\alpha}) \neq Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, a)$

et

$Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\alpha}) \neq Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a})$

<u>b</u> si un élément δ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ engendre $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, a)$ sur $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$, alors $\bar{\delta}$ engendre $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a})$ sur $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$

(iii) si l'une des conditions suivantes est réalisée

(A) (c) est vraie et $\mathcal{R}$ est nilpotent

(B) $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})\{a\}$ contient des éléments de degré 1 par rapport à a

et si δ est un élément de $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\beta)\{a\}$ engendrant $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, a)$ sur $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$, alors δ engendre $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ sur $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a})$, δ et $\bar{\delta}$ sont algébriquement indépendants sur $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\beta)$, et l'on a

$$Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}))(\delta) = (Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, a))(\bar{\delta})$$
$$= (Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta}))(\delta, \bar{\delta}) .$$

(iv) les assertions déduites de (ii) et (iii) en remplaçant (c) par ($\bar{c}$) et en échangeant les rôles de a et $\bar{a}$ sont également vraies.

<u>Démonstration</u>. Posons pour simplifier

$$\mathfrak{h} = \tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, a\ , \quad \bar{\mathfrak{h}} = \tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}\ , \quad H = K(\mathfrak{h}) \quad \bar{H} = K(\bar{\mathfrak{h}})$$
$$A = K(\tilde{\alpha}) \quad B = K(\tilde{\beta}) \quad N = Z(\tilde{\mathfrak{n}})$$

et notons σ l'automorphisme canonique de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ (cf. ce qui suit le lemme 4-1) . Alors $\sigma\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}}$, et, compte tenu du lemme 4-1 , on a

(1) $\sigma N = N \quad \sigma A = A\ , \quad \sigma B = B\ , \quad \sigma H = \bar{H}$.

On en déduit aussitôt (i) , l'assertion <u>b</u> de (ii) et l'équivalence de (iv) et de ((ii) et (iii)) . Par ailleurs il résulte du lemme 4-6 que l'on a

(2) $A - H \supset \bar{H} - B$ et $A - \bar{H} \supset H - B$

ce qui, compte tenu de (i) , implique (ii) <u>a</u> .

Montrons (iii) . Si $\mathfrak{n}$ est nilpotent, il en est de même de $\tilde{\mathfrak{n}}$, donc, compte tenu de (L) , on a : (A) $\Longrightarrow$ (B) . Supposons (B) vérifiée et notons δ un élément de $N \cap B\,\{a\}$ tel que $N \cap H = (N \cap B)\,(\delta)$; il résulte alors de (L) que δ , étant de degré 1 par rapport à a et appartenant à $A - \bar{H}$, engendre $N \cap A$ sur $N \cap \bar{H}$; donc, compte tenu de (1) , $\bar{\delta}$ engendre $N \cap A$ sur $N \cap H$, ce qui implique que δ et $\bar{\delta}$ sont algébriquement indépendants sur $N \cap B$ et termine la démonstration.

<u>Lemme 4-8</u> Soient

- $\mathfrak{g}$, α , β , a définis comme au lemme précédent
- $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant α
- λ l'élément de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$ tel que $[x, a] - \lambda(x)\, a \in \tilde{\beta}$ pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$
- $\mathcal{R}_0$ l'ensemble des éléments μ de $(\mathfrak{g})^*$ ayant la propriété suivante :

(P) il existe un idéal $\mathfrak{B}(\mu)$ de $\mathfrak{g}$ et un élément $a(\mu)$ de $\tilde{\mathfrak{g}} - \check{\mathfrak{B}}(\mu)$ tels que $[x, a(\mu)] - \mu(x)\, a(\mu) \in \tilde{\mathfrak{B}}(\mu)$ pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$

- $\mathbb{R}$ le sous-espace vectoriel de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$ engendré par $\mathbb{R}_o$
- Ψ l'ensemble $\bigcup\limits_{\mu \in \mathbb{R}} S(\lambda)$
- $G(\alpha, \mathfrak{B}, a)$ l'ensemble des éléments $\delta \in K(\tilde{\mathfrak{g}})$ tels que

  $\underline{a}$ $\delta - a \in K(\tilde{\mathfrak{B}})$

  $\underline{b}$ $Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{B}}))\ (\delta, \bar{\delta})$

Dans ces conditions

(i) pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$, et pour tout $\mu \in \mathbb{R}_o$, on a $[x, \overline{a(\mu)}] - \bar{\mu}(x)\, \overline{a(\mu)} \in \tilde{\mathfrak{B}}(\mu)$; en particulier $[x, \bar{a}] - \bar{\lambda}(x)\, \bar{a} \in \tilde{\mathfrak{B}}$.

(ii) Ψ est stable par l'automorphisme canonique de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$.

(iii) les assertions suivantes sont équivalentes

(A) $G(\alpha, \mathfrak{B}, a) \cap S(\lambda) \neq \emptyset$

(B) $\Psi \cap Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{B}} \oplus \mathbb{C}\, a) \neq \Psi \cap Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{B}})$

(C) $\Psi \cap Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{B}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}) \neq \Psi \cap Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{B}})$

<u>Démonstration</u>.

1. Compte tenu de (P) et du lemme 4-1 (iv) , on a, pour $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et $\mu \in \mathbb{R}_o$

$$[x, \overline{a(\mu)}] - \bar{\mu}(x)\, \overline{a(\mu)} = \overline{([\bar{x}, a(\mu)] - \mu(\bar{x})\, a(\mu))}\ ,$$ ce qui établit (i) . Soient alors σ, $\mathfrak{h}$, $\bar{\mathfrak{h}}$, H, $\bar{H}$, A, B, N définis comme dans la démonstration du lemme 4-7 . On a toujours

(1) $\sigma N = N' \quad \sigma A = A\ , \quad \sigma B = B\ , \quad \sigma H = \bar{H}$

La stabilité par σ des idéaux de $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui sont les complexifiés d'idéaux de $\mathfrak{g}$ implique alors que $\mathfrak{R}_o$, et donc $\mathfrak{R}$, et par suite (lemme 4-1 (iv)) Ψ sont stables par σ , et que les assertions (B) et (C) de (iii) sont équivalentes. Par ailleurs (A) $\Longrightarrow$ (B) , puisque $G(\alpha, \beta, a) \subset N \cap (H-B)$ et que $\lambda \in \mathfrak{R}_o$. Il suffit donc de montrer que (B) $\Longrightarrow$ (A) .

2. <u>Supposons donc (B) vérifiée.</u> Par suite $N \cap H \neq N \cap B$, et par conséquent (lemme 4-7 et (L)) $G(\alpha, \beta, a) \neq \emptyset$. Notons δ un élément de $G(\alpha, \beta, a)$ fixé une fois pour toutes, et posons, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $r(x) = D_x\,\delta - \lambda(x)\,\delta$. Donc (lemme 4-3) $r(x) \in N \cap B$. Soit

(2) $D_x\,\delta - \lambda(x)\,\delta = r(x) \in N \cap B$ pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$.

Par ailleurs ((L) et lemme 4-7) ,

- δ (resp. $\bar{\delta}$) engendre $N \cap H$ (resp. $N \cap \bar{H}$) sur $N \cap B$
- δ (resp. $\bar{\delta}$) engendre $N \cap A$ sur $N \cap \bar{H}$ (resp. $N \cap H$)
- δ et $\bar{\delta}$ sont algébriquement indépendants sur $N \cap B$ et $N \cap A = (N \cap B)(\delta, \bar{\delta})$.

3. <u>Montrons d'abord : (B) $\Longrightarrow$ ($\Psi \cap (N \cap B)[\delta] \neq \Psi \cap N \cap B$).</u> Supposons en effet qu'il existe un élément R de $\Psi \cap N \cap H = \Psi \cap (N \cap B)(\delta)$ non contenu dans $\Psi \cap N \cap B$; soit $\mu \in \mathfrak{R}$ tel que $R \in S(\mu)$, et soit (P, Q) le couple d'éléments de $(N \cap B)[\delta]$ associé à R (cf. 1-4) . Il suffit de vérifier que P ou Q appartient à $\Psi \cap N \cap (B[\delta] - B)$. C'est clair si $Q = 1$. Supposons donc Q de degré strictement > 0 par rapport à δ . Soit m ce degré. Pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$, l'on a alors, compte tenu de (2)

(3) $D_x\,Q = m\,\lambda(x)\,\delta^m + \dots\ \delta^{m-1} + \dots$

Donc $\lambda(x) \neq 0$ implique $D_x Q \neq 0$. Comme par ailleurs $R \in S(\mu)$, l'on a, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$\mu(x)\ P/Q = D_x\ (P/Q) = \frac{(D_x P).Q - P.(D_x Q)}{Q^2}$$

soit $P.(D_x Q) = Q(D_x P - \mu(x) P)$. (Comme $D_x P$ et $D_x Q$ appartiennent à $N \cap A$ (lemme 4-2) , on travaille ici dans un corps commutatif, ce qui justifie ces écritures et ces calculs : remarque valable jusqu'à la fin du chapitre). Si donc $D_x Q \neq 0$, on a

$$(4) \qquad P/Q = \frac{(D_x P) - \mu(x) P}{D_x Q}$$

Comme par hypothèse la fraction P/Q est irréductible, il résulte alors de (3) et (4) que

$$D_x Q = 0 \text{ si } \lambda(x) = 0 , \quad D_x Q = m\,\lambda(x)\,Q \text{ sinon.}$$

Donc $Q \in S(m\,\lambda) \cap N \cap (B[\delta] - B) \subset \Psi \cap N \cap (B[\delta] - B)$, ce qui établit notre assertion.

4. Soit donc $T \in \Psi \cap N \cap (B[\delta] - B)$. Notons ν l'élément de R , u, v les éléments de $N \cap B$, $u \neq 0$, ℓ l'entier > 0 tels que

$$(5) \qquad T \in S(\nu) \qquad T = u(\delta^{\ell} + v\,\delta^{\ell-1} + \dots)$$

Ecrivant que $T \in S(\nu)$, on obtient, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$\begin{aligned} \nu(x)\ T &= \nu(x)\ u\ (\delta^{\ell} + v\,\delta^{\ell-1} + \dots) \\ &= D_x T = (D_x u).(\delta^{\ell} + v\,\delta^{\ell-1} + \dots) + u.D_x(\delta^{\ell} + v\,\delta^{\ell-1} + \dots) \end{aligned}$$

Or, compte tenu de (2) , on a, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$D_x\ \delta^n = n(D_x \delta)\ \delta^{n-1} = n\ \lambda(x)\ \delta^n + n\ r(x)\ \delta^{n-1}$$

Il vient alors

$$\nu(x)\, u\, \delta^{\ell} + \nu(x)\, uv\, \delta^{\ell-1} + \dots =$$
$$(D_x u + \ell\lambda(x)\, u)\,\delta^{\ell} + ((D_x u).v + \ell ur(x) + (\ell-1)\lambda(x)uv + u\, D_x v)\delta^{\ell-1} + \dots$$

Donc

$$(6) \qquad \nu(x)\, u = D_x u + \ell\lambda(x)\, u$$

$$(7) \qquad \nu(x)\, uv = (D_x u).v + \ell ur(x) + (\ell-1)\,\lambda(x)\, uv + u\, D_x v$$

Portant dans (7) l'expression de $D_x u$ tiré de (6), on obtient, divisant par u :

$$\nu(x)\, v = (\nu(x) - \ell\lambda(x))\, v + \ell\, r(x) + (\ell-1)\,\lambda(x)\, v + D_x v$$

soit

$$\lambda(x)\, v - D_x v = \ell\, r(x) = \ell\,(D_x \delta - \lambda(x)\, \delta)$$
$$D_x(\ell\delta + v) = \lambda(x)\,(\ell\delta + v)$$

Donc $\delta + v/\ell \in S(\lambda) \cap \bar{G}(\alpha, \beta, a)$
ce qui termine la démonstration.

<u>Lemme 4-9</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif
- λ un élément de $\mathfrak{g}^*$
- E un sous-corps commutatif de $K(\mathfrak{g})$ stable par $\mathfrak{g}$
- k un entier > 0
- $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ des éléments de $Z(\mathfrak{g})$ algébriquement indépendants sur E
- v un élément de $E(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \cap S(\lambda)$

Alors il existe un élément v_o de $Z(\mathfrak{g}) \cap E(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ et un élément v_1 de $E \cap S(\lambda)$ tels que $v = v_o v_1$

Démonstration. Par récurrence sur k, on se ramène aussitôt au cas où $k = 1$; soient alors $\varepsilon = \varepsilon_1$, $v \in E(\varepsilon) \cap S(\lambda)$, (P, Q) le couple d'éléments de $E[\varepsilon]$ associé à v. On a donc, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$\lambda(x)\, P/Q = \frac{(D_x P)\, Q - P(D_x Q)}{Q^2}$$

soit : $P(D_x Q) = Q(D_x P) - \lambda(x) P)$.

S'il existe $x \in \mathfrak{g}$ tel que $D_x Q \neq 0$, alors $P/Q = \dfrac{D_x P - \lambda(x) P}{D_x Q}$, et $D_x Q$ est un polynôme en ε de degré strictement inférieur à celui de Q, ce qui est exclu. Donc $Q \in Z(\mathfrak{g}) \cap E[\varepsilon]$, et par conséquent (lemme 3-2), $P \in E[\varepsilon] \cap S(\lambda)$. Soit $P = \sum_{j=o}^{p} u_j \varepsilon^j$; $u_j \in E$, $u_p \neq 0$. Alors on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$\sum_{j=o}^{p} (D_x u_j)\ \varepsilon^j = D_x P = \lambda(x) P = \sum_{j=o}^{p} (\lambda(x)\, u_j)\ \varepsilon^j$$

Donc $u_p \in S(\lambda)$ et par suite (lemme 3-2) , $P/u_p \in S(0) \subset Z(\mathfrak{g})$. Par conséquent $v = (P/u_p\, Q)\, u_p = v_o, v_1$, avec

$$v_o = P/u_p\, Q \in Z(\mathfrak{g}) \cap E(\varepsilon) \quad \text{et} \quad v_1 = u_p \in E \cap S(\lambda) .$$

Lemme 4-10 Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif
- λ , μ deux éléments de $\mathfrak{g}^*$
- E un sous-corps commutatif de $K(\mathfrak{g})$, stable par $\mathfrak{g}$
- δ un élément de $S(\lambda)$
- $E(\delta)$ le corps engendré dans $K(\mathfrak{g})$ par $E \cup \{\delta\}$

Si $E(\zeta)$ est un corps commutatif, et si $E(\zeta) \cap Z(\mathfrak{g}) \subset E$, alors tout élément de $E(\zeta) \cap S(\mu)$ est le produit d'un élément de E par une puissance entière ζ^{ℓ}, $\ell \in \mathbb{Z}$, de ζ. Si ζ est algébrique de degré r par rapport à E, alors on peut choisir ℓ tel que $0 \leqslant \ell < r$.

<u>Démonstration</u>. Supposons d'abord que ζ soit transcendant sur E. Soient $v \in E(\zeta) \cap S(\mu)$ et (P, Q) le couple d'éléments de $E[\zeta]$ associés à v. On a

$$P = w\,\zeta^{p} + \dots\,, \quad Q = \zeta^{q} + \dots\,, \quad w \in E - \{0\}\,,\ p,\ q \geqslant 0\,.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$(1) \qquad D_x P = (D_x w + p\,\lambda(x)\,w)\,\zeta^{p} + \dots\,, \quad D_x Q = q\,\lambda(x)\,\zeta^{q} + \dots$$

$$D_x v = \frac{(D_x P)\,Q - P(D_x Q)}{Q^2} = \mu(x)\,P/Q$$

et par conséquent

$$(2) \qquad (D_x P)\,Q - P(D_x Q) = \mu(x)\,PQ\,.$$

Par identification dans (2) des termes de plus haut degré en ζ, on obtient, compte tenu de (1)

$$(D_x w + p\,\lambda(x)\,w) - q\,\lambda(x)\,w = \mu(x)\,w$$

Donc $w \in S(\mu + (q-p)\lambda)$, et par suite (lemme 3-2) : $v/w\,\zeta^{p-q} \in S(\mu - \mu - (q-p)\lambda - (p-q)\lambda) \cap E(\zeta) = S(0) \cap E(\zeta) \subset Z(\mathfrak{g}) \cap E \subset E$ d'où notre assertion.

Si ζ est algébrique de degré r sur E, on peut écrire $v = P$, P étant un élément de $E[\zeta]$ de degré p, $0 \leqslant p < r$; comme $1, \zeta, \dots, \zeta^{r-1}$ sont linéairement indépendants sur E, le raisonnement précédent - où l'on fait $Q = 1$, reste valable, et montre que $v/\delta^p \in E$, d'où le lemme.

Lemme 4-11 Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif
- λ, μ des éléments de $\mathfrak{g}^*$
- L un sous-corps commutatif de $K(\mathfrak{g})$
- E un sous-corps de L , α , δ, δ' des éléments de $K(\mathfrak{g})$ tels

que

$\underline{a}$ $E \subset E(\alpha) \subset E(\delta') \subset E(\delta, \delta') \subset L$

$\underline{b}$ $\alpha \in Z(\mathfrak{g})$, $\delta' \in S(\lambda)$, et $E(\delta)$ est stable par $\mathfrak{g}$

$\underline{c}$ δ' est algébrique sur $E(\alpha)$ et δ et δ' sont algébriquement indépendants sur E

$\underline{d}$ $E(\delta, \delta') \cap Z(\mathfrak{g}) \subset E(\alpha)$

$\underline{e}$ pour toute combinaison linéaire μ' de λ et μ , on a : $E(\delta) \cap S(\mu') = E \cap S(\mu')$

Alors tout élément de $E(\delta, \delta') \cap S(\mu)$ est le produit d'un élément de $E(\alpha)$ par une puissance entière ≥ 0 de δ' strictement inférieure au degré de δ' sur $E(\alpha)$.

Démonstration. Soit r le degré de δ' sur $E(\alpha)$. Alors $E(\delta, \delta') = E(\alpha, \delta)(\delta')$ est une extension algébrique de degré $r' \leq r$ de $E(\alpha, \delta)$. Si donc v est un élément de $E(\delta, \delta') \cap S(\mu)$, alors v s'écrit de manière unique sous la forme

$$v = \sum_{j=0}^{k} u_j \, \delta'^j \text{ , avec } u_j \in E(\alpha, \delta) \text{ , } u_k \neq 0 \text{ et } 0 \leq k < r'$$

Posons

(1) $v_o = v/u_k \ \delta^k$

Il résulte de b que $E(\alpha, \delta)$ est stable par $\mathfrak{g}$. Comme $v \in S(\mu)$ et que $\delta' \in S(\lambda)$, on a pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$\mu(x)\ v = \sum_{j=o}^{k} \mu(x)\ u_j(\delta')^j = \sum_{j=o}^{k} (D_x u + j\,\lambda(x)\ u)\ (\delta')^j$$

et par suite

(2) $u_k \in S(\mu - k\,\lambda)$

ce qui implique, compte tenu de d et du lemme 3-2

(3) $v_o \in E(\alpha)$.

Par ailleurs, c entraîne que δ et α sont algébriquement indépendants sur E . Il résulte alors de (2) et du lemme 4-9 que

(4) $u_k = w\, w'$ avec $w \in E(\delta, \alpha) \cap Z(\mathfrak{g})$ et $w' \in E(\delta) \cap S(\mu - k\,\lambda)$

or compte tenu de d et e

(5) $w \in E(\alpha)$ et $w' \in E$

Le lemme résulte alors de (1) (3), (4) et (5) .

Lemme 4-12 Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle de dimension finie $n \geqslant 1$
- $\mathfrak{D}$ l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$

On identifie $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}^*$) a son image canonique dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ (resp. $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$) . Dans ces conditions il existe :

- deux entiers m, p, $1 \leqslant p \leqslant m \leqslant n$
- une suite de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$

$$(S) = (\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_{m-1} \supset \mathfrak{g}_m = \{0\})$$

- une suite de Jordan-Holder du $\tilde{\mathfrak{g}}$ - module $\tilde{\mathfrak{g}}$

$$(\tilde{S}) = (\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}_o \supset \mathfrak{h}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{h}_n = \{0\})$$

- une partie I de $[0, m-1]$
- une application injective croissante $\psi : [0, m-1] \longrightarrow [0, n-1]$
- une famille (a_j) , $j \in [0, m-1]$ d'éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}$
- une famille (a_j', a_j'') , $j \in [0, m-1]$ d'éléments de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$
- une famille (λ_j) , $j \in [0, m-1]$ d'éléments de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$
- une famille $(\lambda_j', \lambda_j'')$, $j \in [0, m-1]$ d'éléments de $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$

tels que :

(i) les ensembles $\psi([0, m-1])$ et $\psi([0, m-1] - I)+1$ forment un recouvrement disjoint de $[0, n-1]$

(ii) pour tout $k \in [0, m-1]$, on a

$$a_k = a_k' + i\, a_k'' \qquad \lambda_k = \lambda_k' + i\, \lambda_k''$$
$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_{k+1} \oplus (\mathbb{R}\, a_k' + \mathbb{R}\, a_k'')$$
$$\tilde{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{h}_{\psi(k)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_{\psi(k)} = \mathfrak{h}_{\psi(k)+1} + \mathbb{C}\, a_k$$

(iii) si $k \in I$ alors

$\underline{a}$ $\dim(\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 1$ et $\psi(k+1) = \psi(k) + 1$

$\underline{b}$ $a_k'' = 0$ et $\lambda_k'' = 0$

$\underline{c}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ (resp. pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{g}}$) on a $[x, a_k'] - \lambda_k(x)\, a_k' \in \mathfrak{g}_{k+1}$ (resp. $[\tilde{x}, a_k] - \lambda_k(\tilde{x})\, a_k \in \mathfrak{h}_{\psi(k)+1} = \mathfrak{h}_{\psi(k+1)}$)

(iv) si $k \in [0, m-1] - I$, alors

$\underline{a}$ $\dim(\mathfrak{g}_k / \mathfrak{g}_{k+1}) = 2$ et $\psi(k+1) = \psi(k) + 2$

$\underline{b}$ $\mathfrak{h}_{\psi(h)+1} = \mathfrak{h}_{\psi(k+1)} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}_k = \tilde{\mathfrak{g}}_{k+1} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}_k$

$\underline{c}$ on a pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$[x, a_k'] = \lambda_k'(x)\, a_k' - \lambda_k''(x)\, a_k'' \mod \mathfrak{g}_{k+1}$$
$$[x, a_k''] = \lambda_k''(x)\, a_k' + \lambda_k'(x)\, a_k'' \mod \mathfrak{g}_{k+1}$$

$\underline{d}$ on a pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$[\tilde{x}, a_k] = \lambda_k(\tilde{x})\, a_k \mod \tilde{\mathfrak{g}}_{k+1}$$
$$[\tilde{x}, \bar{a}_k] = \bar{\lambda}_k(\tilde{x})\, \bar{a}_k \mod \tilde{\mathfrak{g}}_{k+1}$$

(v) pour tout $k \in [0, m-1]$, on a $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k+1}$

(vi) $\mathfrak{g}_p = \mathcal{D}$, $[0, p-1] \subset I$ et pour tout $k \in [0, p-1]$, on a $\lambda_k = 0$.

Démonstration.

1. Soit $(S) = (\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_m = \{0\})$ une suite de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$. Convenons de dire que (S) possède la propriété (P) s'il existe pour tout $k \in [0, m-1]$ des éléments $a_k', a_k'' \in \mathfrak{g}$, $\lambda_k', \lambda_k'' \in \mathfrak{g}^*$ vérifiant les conditions (iii) et (iv) du lemme. Cela étant, faisons d'abord quelques remarques

$\underline{a}$ Si (S) a la propriété (P) , alors il existe un entier $n \geq m$ $(n = \dim \mathfrak{g})$, une suite de Jordan-Holder $(\tilde{S})$ du $\tilde{\mathfrak{g}}$ - module $\tilde{\mathfrak{g}}$, une application croissante ψ de $[0, m-1]$ dans $[0, n-1]$, et, pour $k \in [0, m-1]$, des éléments $a_k \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $\lambda_k \in (\mathfrak{g})^*$ vérifiant les assertions (i) à (iv) du lemme : on définit a_k et λ_k suivant (ii) , ψ suivant (iii) $\underline{a}$ et (iv) $\underline{a}$, le reste est vérification triviale.

b Si (S) a la propriété (P) , alors $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k+1}$ pour tout $k \in [0, m-1]$. C'est clair si $\dim (\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 1$. Si $\dim (\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 2$, alors a'_k et a''_k sont linéairement indépendants modulo $\mathfrak{g}_{k+1}$ et l'on déduit alors de (iv) c que $0 = [a'_k, a'_k] = \lambda'_k(a'_k)\, a'_k - \lambda''_k(a'_k)\, a''_k$, donc $\lambda'_k(a'_k) = \lambda''_k(a'_k) = 0$ et par suite

$$[a'_k, a''_k] = \lambda''_k(a'_k)\, a'_k + \lambda'_k(a'_k)\, a''_k \mod \mathfrak{g}_{k+1}$$
$$= 0 \mod \mathfrak{g}_{k+1} ,$$

ce qui établit notre assertion.

c S'il existe une suite de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$ qui possède la propriété (P) , alors toutes les suites de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$ ont la propriété (P) , et il existe parmi elles des suites où figure $\mathfrak{D}$.

Cela résulte des théorèmes classiques relatifs aux groupes à apérateur : isomorphie des quotients successifs à l'ordre près, possibilité de "plonger" la suite de composition ($\mathfrak{g} \supset \mathfrak{D} \supset \{0\}$) dans une suite de Jordan-Holder.

d Si (S) a la propriété (P) et si $\mathfrak{g}_p = \mathfrak{D}$, alors le lemme est vrai. Compte tenu de ce qu'on vient de voir, il suffit de vérifier (vi) , ce qui est trivial.

2. Compte tenu des remarques précédentes, il nous suffit, pour établir le lemme, d'établir l'existence de suites de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$ ayant la propriété (P) . Par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, on se ramène à la considération des idéaux minimaux (non nuls) de $\mathfrak{g}$: il s'agit de vérifier que si $\mathfrak{a}$ est un tel idéal, il existe $\lambda', \lambda'' \in \mathfrak{g}^*$ et $a', a'' \in \mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{a} = \mathbb{R}\, a' + \mathbb{R}\, a''$ et que l'on ait, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$[x, a'] = \lambda'(x)\, a' - \lambda''(x)\, a'' \quad \text{et} \quad [x, a''] = \lambda''(x)\, a' + \lambda'(x)\, a''.$$

C'est clair si $\mathfrak{g}$ possède des idéaux de dimension 1 . Supposons le contraire. Soit donc $\mathfrak{a}$ un idéal minimal de dimension > 1 . Alors $\tilde{\mathfrak{a}}$ est un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui contient un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$, soit $\mathfrak{b}$ de dimension 1 (Théorèmes de Lie et de Jordan-Holder). Soient $b \in \mathfrak{b}$, $\lambda \in (\tilde{\mathfrak{g}})^*$, b', $b'' \in \mathfrak{g}$, λ', $\lambda'' \in \mathfrak{g}^*$ tels que

$$\mathfrak{b} = \mathbb{C}\, b \ , \quad b = b' + i\, b'' \ , \quad \lambda = \lambda' + i\, \lambda''$$

et qu'on ait, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$[\tilde{x}, b] = \lambda(\tilde{x})\, b$$

L'on en déduit, séparant parties réelles et parties imaginaires, que l'on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, b'] = \lambda'(x)\, b' - \lambda''(x)\, b''$$

$$[x, b''] = \lambda''(x)\, b' + \lambda'(x)\, b''$$

Donc $\mathfrak{a} = \mathbb{R}\, b \oplus \mathbb{R}\, b'$ et le lemme est établi :

5. <u>Lemmes de décomposition</u>.

<u>Lemme 5-1</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique 0
- $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{a}$
- a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$
- λ l'élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $[x, a] - \lambda(x)\, a \in \mathfrak{b}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Si $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{a}) \neq Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{b})$, alors il existe un entier $s > 0$ et deux éléments u, v de $K(\mathfrak{b})$ tels que

$\underline{a}$ $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\alpha) = (Z(\mathfrak{g}) \cap K(\beta))\ (u(a+v)^s)$

$\underline{b}$ $a+v \in Z(\operatorname{Ker} \lambda) \cap S(\lambda)$ et $u \in S(-s\lambda) \cap Z(\operatorname{Ker} \lambda)$

$\underline{c}$ si $[\mathfrak{g}, \alpha] \subset \beta$, alors $s = u = 1$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Ker} \lambda$ le transporteur de α dans β ; c'est un idéal contenant α . Posons

$$(1) \quad \begin{cases} K = K(\mathfrak{g}) \ , \quad Z = Z(\mathfrak{g}) \ , \quad K_1 = K(\mathfrak{g}_1) \quad Z_1 = Z(\mathfrak{g}_1) \\ A = K(\alpha) \ , \quad B = K(\beta) \end{cases}$$

On a donc

$$(2) \qquad Z \cap K_1 \subset Z_1 \quad \text{et} \quad [\mathfrak{g}_1, \alpha] \subset \beta$$

ce qui implique, compte tenu des hypothèses

$$(3) \qquad Z_1 \cap A \neq Z_1 \cap B \ .$$

Le lemme (L) appliqué à $\mathfrak{g}_1$ montre alors qu'il existe un élément v_1 tel que

$$(4) \qquad v_1 \in B \quad \text{et} \quad Z_1 \cap A = (Z_1 \cap B)\ (a + v_1)$$

ce qui établit notre assertion si $[\mathfrak{g}, \alpha] \subset \beta$, puisqu'alors $\lambda = 0$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$. Supposons désormais $\lambda \neq 0$, et posons

$$(5) \qquad \delta_1 = a + v_1 \ .$$

Le lemme (L) appliqué à $\mathfrak{g}$, montre alors qu'il existe α_1 tel que

$$(6) \qquad \alpha_1 \in Z \cap (B\{a\} - B) \quad \text{et} \quad Z \cap A = (Z \cap B)\ (\alpha_1)$$

Par ailleurs, appliquant le lemme 4-4 (où l'on prend $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1$) , on obtient

(7) $\quad Z_1 \cap B\{a\} = (Z_1 \cap B)\ [\delta_1]$

Or

(8) $\quad Z \cap B\{a\} = \qquad (Z \cap B\{a\}) \cap K_1 = (Z \cap K_1) \cap B\{a\}$

L'on déduit alors de (2), (6) et (8) que

$$\alpha_1 \in (Z \cap K_1) \cap B\{a\} \subset Z_1 \cap B\{a\} = (Z_1 \cap B)\ [\delta_1] \ .$$

Soit alors s le degré de α_1 par rapport à δ_1, et soient $u, u', u \neq 0$, les éléments de $Z_1 \cap B$ tels que $\alpha_1 = u(\delta_1^s + u'\delta_1^{s-1} + \ldots)$ Il résulte de (5) que s est aussi le degré de α_1 par rapport à a, et donc $s \geqslant 1$. Par ailleurs, le lemme 4-5 (où l'on prend $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1$) implique que l'on a

$$u(\delta_1 + u'/s)^s \in Z(\mathfrak{g}) \ , \quad u \in S(-s\ \lambda) \ , \quad \delta_1 + u'/s \in S(\lambda) \ .$$

Par suite α_1 et $u(\delta_1 + u'/s)^s$ sont des éléments de $Z \cap (B\{a\} - B)$ de degré minimum, d'après (L), et (L) implique donc que $Z \cap A =$ $(Z \cap B)\ (u\ (\delta_1 + u'/s)^s$. Le lemme est donc vérifié, si l'on prend $v = v_1 + v'/s$.

<u>Lemme 5-2</u> Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie
- $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{g}$, a un élément de $\tilde{\mathfrak{a}}$ tels que

  - $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ et $\dim(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) = \dim(\tilde{\mathfrak{a}}/\tilde{\mathfrak{b}}) = 2$
  - $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}$
  - $\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a$ et $\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}$ sont des idéaux de $\tilde{\mathfrak{g}}$

- λ l'élément de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$ tel que $[x, a] - \lambda(x)\, a \in \tilde{\mathfrak{b}}$ pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$

- $\mathcal{N}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a}$

Si $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}}) \neq Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$, alors une et une seulement des deux éventualités suivantes est toujours réalisée

(I) <u>1</u> Les corps $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$, $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a)$, $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a})$ et $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}})$ sont deux à deux distincts

<u>2</u> Il existe un élément δ de $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}})$ tel que

<u>a</u> $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a) = (Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}}))\,(\delta)$

<u>b</u> $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}) = (Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}}))\,(\bar{\delta})$

<u>c</u> $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}}) = (Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(B \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}))\,(\delta) = (Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C} a))(\bar{\delta})$

$= (Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}}))\,(\delta, \bar{\delta})$

<u>d</u> δ et $\bar{\delta}$ sont algébriquement indépendants sur $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$

<u>e</u> $\delta - a \in K(\tilde{\mathfrak{b}})$

(II) <u>1</u> $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a) = Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}) = Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$

<u>2</u> Il existe

- un élément δ' de $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}})$
- un élément u' de $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$
- un élément v' de $K(\tilde{\mathfrak{b}})$

tels que

<u>a</u> δ' est transcendant sur $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$

<u>b</u> $Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}}) = (Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}}))\,(\delta')$

<u>c</u> $\delta' = a + u'\,\bar{a} + v'$

<u>d</u> $u'\,\overline{u'} = 1$

<u>e</u> pour tout $x \in \mathfrak{g}$ $D_x\, \delta' - \lambda(x)\, \delta' \in Z(\tilde{\mathcal{N}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$

Démonstration.

1 Comme lors du lemme 4-7 , nous poserons pour simplifier

$$\mathfrak{h} = \tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, a \,, \quad \bar{\mathfrak{h}} = \tilde{\beta} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a} \,, \quad H = K(\mathfrak{h}) \,, \quad \bar{H} = K(\bar{\mathfrak{h}})$$

$$A = K(\tilde{\alpha}) \,, \quad B = K(\tilde{\beta}) \,, \quad N = Z(\tilde{\mathcal{N}}) \,.$$

Nous distinguerons deux cas .

2 Supposons d'abord $N \cap H \neq N \cap B$. Comme $\mathcal{N}$ est nilpotent, il en est de même de $\tilde{\mathcal{N}}$, et il résulte alors du lemme 4-7 que $N \cap \bar{H} \neq N \cap B$, $N \cap A \neq N \cap H$ et $N \cap A \neq N \cap \bar{H}$, et qu'il existe $\delta \in N \cap H$ vérifiant (I) 2 a, b, c, d . On peut en outre, d'après (L) , choisir δ de manière à vérifier (I) 2 e . Comme par ailleurs $H \cap \bar{H} = B$ (lemme 4-6) , $N \cap H \neq N \cap B$ implique $N \cap H \neq N \cap H'$, donc (I) est réalisé.

3 Supposons maintenant $N \cap H = N \cap B$. Alors le lemme 4-7 implique (II) 1 et l'on a donc

$$(1) \qquad N \cap A \neq N \cap H \quad \text{et} \quad N \cap A \neq N \cap \bar{H}$$

Appliquant alors à $\tilde{\mathcal{N}}$ le corollaire 2 du Théorème 3 de II , on obtient qu'il existe des éléments δ , $P(\bar{a})$, $Q(\bar{a})$ de $K(\tilde{\mathcal{N}})$ tels que

$$\delta = a + P(\bar{a}) \,.\, (Q(\bar{a}))^{-1}$$

$$P(\bar{a}) \in U(\tilde{\beta}) \,\{\bar{a}\} \,, \quad Q(\bar{a}) \in N \cap U(\bar{\mathfrak{h}})$$

et

$$(2) \qquad N \cap A = (N \cap \bar{H})\,(\delta) = (N \cap B)\,(\delta)$$

et par suite, notant σ l'automorphisme canonique de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$:

$$(3) \qquad N \cap A = \sigma(N \cap A) = (N \cap B)\,(\bar{\delta})$$

Or (II) $\underline{1}$ implique que $Q(\bar{a}) \in N \cap U(\mathfrak{H}) \subset N \cap H = N \cap B$, donc

$$(4) \qquad \delta = a + P_1(\bar{a}) \text{ , avec } P_1(\bar{a}) \in B\{\bar{a}\} .$$

$\underline{4}$ Dans ce qui suit, nous notons u_i , $i = 1, 2, \ldots$, des éléments de $N \cap B$. De (2) et (3) on déduit que δ et $\bar{\delta}$, qui sont transcendants sur $N \cap B$, sont liés par une relation homographique de la forme

$$(5) \qquad u_1 \delta \bar{\delta} + u_2 \delta + u_3 \bar{\delta} + u_4 = 0$$

$u_1, \ldots, u_4$ étant non tous nuls, et déterminés à un facteur près de $N \cap B$. Si $u_1 \neq 0$, on peut prendre $u_1 = 1$, et alors

$$0 = \delta\bar{\delta} + u_2\delta + u_3\bar{\delta} + u_4 = \sigma(\delta\bar{\delta} + u_2\delta + u_3\bar{\delta} + u_4) = \bar{\delta}\delta + \bar{u}_2\bar{\delta} + \bar{u}_3\delta + \bar{u}_4$$

donc $u_3 = \bar{u}_2$, $u_4 = \bar{u}_4$ et (5) devient

$$(6) \qquad (\delta + u_3)\,(\overline{\delta + u_3}) = u_3\bar{u}_3 - u_4 \in N \cap B$$

Or (4) implique que $(\delta + u_3)\,(\overline{\delta + u_3}) \in (a + B\{\bar{a}\}).(\bar{a} + B\{a\})$ est un élément de $\bar{H}\{a\}$ de degré $\geqslant 1$ par rapport à a , ce qui contredit (6) . Donc $u_1 = 0$, et par suite $u_2 u_3 \neq 0$, puisque δ et $\bar{\delta}$ sont transcendants sur $N \cap B$. On peut donc écrire (5) sous la forme

$$(7) \qquad \bar{\delta} = u_5 \delta + u_6 .$$

Posant alors $\sigma(P_1(\bar{a})) = \bar{P}_1(a)$, on a, combinant (4) et (7)

$$(8) \qquad \bar{a} + \bar{P}_1(a) = u_5(a + P_1(\bar{a})) + u_6$$

ce qui implique que $P_1(\bar{a})$ est un polynôme de degré 1 en $\bar{a}$ à coefficients dans B . Soit

$$(9) \qquad P_1(\bar{a}) = v_1\bar{a} + v_2 , \quad v_1, v_2 \in B .$$

Combinant (8) et (9) , on obtient

$$\bar{a} + \bar{v}_1 \, a + \bar{v}_2 = u_5(a + v_1 \, \bar{a} + v_2) + u_6 \, .$$

Comme a (resp. $\bar{a}$) est transcendant et symétrique par rapport à $\bar{H}$ (resp. B) , il s'ensuit que

$$(10) \qquad u_5 = \bar{v}_1 \qquad v_1 \, \bar{v}_1 = v_1 \, u_5 = \bar{u}_5 \, \bar{v}_1 = 1$$

Prenant alors $v' = v_2$, $u' = v_1$, $\delta' = \delta$, il est clair, compte tenu de (2) , (4) (9) et (10) que les assertions (II) 2 a, b, c, d sont vérifiées ; or elles impliquent, compte tenu de (II) 1 et du lemme 4-2 , l'assertion (II) 2 e : si $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$, l'on a

$$D_x \, \delta' - \lambda(x) \, \delta' = (D_x \, a - \lambda(x) \, a) + D_x(u' \, \bar{a} + v') - \lambda(x)(u' \, \bar{a} + v')$$
$$\in N \cap (B + \bar{H}) = N \cap \bar{H} = N \cap B \, .$$

Lemme 5-3 Les notations et les hypothèses étant celles du lemme 5-2 , on suppose en outre que

1) $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) \neq Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$

2) l'éventualité (I) du lemme 5-2 est réalisée.

Soit alors $G_1 \; (\mathcal{H}, \alpha , \beta , a)$ l'ensemble des éléments δ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ vérifiant l'assertion (I) 2 du lemme 5-2 .

Alors une et une seulement des deux éventualités suivantes $(I)_1$ et $(I)_2$ est toujours réalisée

$(I)_1$

1 $S(\lambda) \cap G_1(\mathcal{H}, \alpha , \beta , a) \neq \emptyset$

et

$\underline{2}$ il existe un entier $s > 0$ et deux éléments u_1 , δ de $Z(\tilde{\mathfrak{h}})$ tels que

$\underline{a}$ $\delta \in S(\lambda) \cap G_1(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a)$

$\underline{b}$ $u_1 \in Z(\tilde{\mathfrak{h}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}) \cap S(- s\ \lambda)$

$\underline{c}$ $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\mathfrak{a})$ est extension pure de degré 1 de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a)$ et de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a})$ et $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}))(u_1\ \delta^s) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}} \oplus \mathbb{C}\, a))(\bar{u}_1\ \bar{\delta}^s)$

$(I)_2$

$\underline{1}$ $S(\lambda) \cap G_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a) = \emptyset$

et

$\underline{2}$ il existe un entier $s > 0$ et des éléments δ, u, v', w' de $Z(\tilde{\mathfrak{h}})$ tels que

$\underline{a}$ $\delta \in G_1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a)$

$\underline{b}$ $u, v', w' \in Z(\tilde{\mathfrak{h}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$ et $u \neq 0$

$\underline{c}$ $v' . \bar{v}' = 1$ et $v' \in S(\lambda - \bar{\lambda})$

$\underline{d}$ $\delta + v'\ \bar{\delta} + w' \in S(\lambda)$

$\underline{e}$ $u \in S(- s\ \lambda)$

$\underline{f}$ $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}})$ est une extension pure de degré 1 de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}})$ et $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{a}}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{b}}))\ (u(\delta + v'\ \bar{\delta} + w')^s)$

<u>Démonstration</u>.

$\underline{1}$ Définissons $\mathfrak{h}$, $\bar{\mathfrak{h}}$, H, $\bar{H}$, A, B, N comme dans la démonstration du lemme 5-2 . Posons en outre

$$Z = Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \qquad G_1 = G_1(\mathcal{R}, \alpha, \beta, a) .$$

et notons σ l'automorphisme canonique de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Notons que G_1 coïncide avec l'ensemble $G(\alpha, \beta, a)$ du lemme 4-8 , et que l'on a

(1) $\quad Z \cap A \neq Z \cap \bar{H}$ et $Z \cap A \neq Z \cap H$

En effet, compte tenu du lemme 4-6 ,
$(Z \cap A = Z \cap \bar{H}) \Longrightarrow Z \cap A = \sigma(Z \cap A) = Z \cap H \Longrightarrow Z \cap A = Z \cap H \cap \bar{H} = Z \cap B$
ce qui contredit l'hypothèse.

Cela étant, on va montrer que $(I)_1\ 1 \Longrightarrow (I)_1\ 2$ et $(I)_2\ 1 \Longrightarrow (I)_2\ 2$, ce qui impliquera évidemment le lemme.

<u>2</u> Supposons $S(\lambda) \cap G_1 \neq \emptyset$. Soit $\delta \in S(\lambda) \cap G_1$. Alors (lemme 4-4 et (L)) , il existe

$$\alpha \in Z \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H}) \subset N \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H}) = (N \cap \bar{H})[\delta] - N \cap H$$

tel que $Z \cap A = (Z \cap \bar{H})(\alpha)$. Notons s le degré de α par rapport à δ (et donc aussi par rapport à a) . Alors on a $s > 0$ et (lemme 4-5) il existe $u_1 \in (N \cap \bar{H}) \cap S(-s\lambda)$, donc (lemme 3-2) , $u_1 \delta^s \in S(0) \subset Z$, et par suite ((L)) , l'on a :

$$Z \cap A = (Z \cap \bar{H})(u_1\ \delta^s) = \sigma(Z \cap A) = (Z \cap H)(\bar{u}_1\ \bar{\delta}^s) ,$$

donc $(I)_1\ 1 \Longrightarrow (I)_1\ 2$.

<u>3</u> Supposons désormais $S(\lambda) \cap G_1 = \emptyset$.

<u>Montrons d'abord que dans ces conditions $Z \cap H = Z \cap B$</u> (et donc $Z \cap \bar{H} = \sigma(Z \cap H) = Z \cap B)$.) Soit en effet $\delta_1 \in G_1$, et supposons $Z \cap H \neq Z \cap B$. Alors $N \cap H = (N \cap B)(\delta_1)$ et il existe ((L) et lemme 4-4) , un élément α_1 de $Z \cap H$ tel que

$$\alpha \in Z \cap (B\{a\} - B) \subset N \cap (B\{a\} - B) = (N \cap B)[\delta_1] - N \cap B ,$$

donc (lemme 4-5) , il existe $v \in N \cap B$ tel que $\delta_1 + v \in S(\lambda)$,
et donc $\delta_1 + v \in S(\lambda) \cap G_1$, ce qui est absurde.

4 Supposons désormais $S(\lambda) \cap G_1 = \emptyset$ et $Z \cap H = Z \cap \bar{H} = Z \cap B$.
Soit $\delta_1 \in G_1$. Compte tenu de (1) , de (L) et du lemme 4-4 , il existe $\alpha_1 \in Z$ tel que
$\alpha_1 \in Z \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H}) \subset N \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H}) = (N \cap \bar{H})[\delta_1] - N \cap \bar{H}$, et que
$Z \cap A = (Z \cap \bar{H})(\alpha_1) = (Z \cap B)(\alpha_1)$. Donc (lemme 4-5) , il existe un entier
$s > 0$, et des éléments u, v de A tels que

(2) - $\delta_1 + v \in S(\lambda)$

- $u \in S(-s\lambda) \cap N \cap \bar{H}$ et $v \in N \cap \bar{H}$

- $u(\delta_1 + v)^s$ est un élément de $Z \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H})$ de même degré que α_1 .

Par suite, compte tenu de (L) , du lemme 4-8 (iii) , et de la définition de G_1 , on a

(3) $Z \cap A = (Z \cap \bar{H})(u(\delta_1 + v)^s) = (Z \cap B)(u(\delta_1 + v)^s)$

(4) $u \in S(-s\lambda) \cap N \cap B$

(5) $v \in N \cap (\bar{H} - B)$

Posant, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$, $D_x \delta_1 - \lambda(x)\delta_1 = w_x$, on a par ailleurs (lemme 4-3)

(6) $D_x \delta_1 - \lambda(x)\delta_1 = w_x \in N \cap B$

et, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

(7) $D_x \bar{\delta}_1 - \bar{\lambda}(x)\bar{\delta}_1 = \bar{w}_x$

Comme $v \in N \cap \bar{H} = \sigma(N \cap H) = (N \cap B)(\bar{\delta}_1)$, notant (P, Q) le couple d'éléments de $(N \cap B)[\bar{\delta}_1]$ associé à v , on obtient alors, compte tenu de (6) et de (2) , pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$:

$$w_x = D_x \delta_1 - \lambda(x)\, \delta_1 = \lambda(x)\, v - D_x v = \lambda(x)\, P/Q - \frac{(D_x P).Q - P.(D_x Q)}{Q^2}$$

soit

$$(8) \qquad w_x = \frac{(\lambda(x)\, P - D_x P)\, Q + P.(D_x Q)}{Q^2}$$

donc

$$(9) \qquad P/Q = \frac{D_x P - \lambda(x)\, P + w_x Q}{D_x Q} \qquad \text{si } D_x Q \neq 0 .$$

Soient alors m (resp. n) le degré de P (resp. Q) par rapport à $\bar{\delta}_1$; u_1, u_2 les éléments de $N \cap B$ tels que

$$(10) \qquad P = u_1 (\bar{\delta}_1^m + u_2\, \bar{\delta}_1^{m-1} + \ldots) , \quad u_1 \neq 0 .$$

On déduit de (7) que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et pour tout entier $p \geqslant 0$ on a

$$(11) \qquad D_x(\bar{\delta}_1^p) = p\, (D_x \bar{\delta}_1)\, \bar{\delta}_1^{p-1} = p\, \bar{\lambda}(x)\, \bar{\delta}_1^p + p\, \bar{w}_x\, \bar{\delta}_1^{p-1}$$

Donc, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$(12) \qquad D_x Q = n\, \bar{\lambda}(x)\, \bar{\delta}_1^n + \ldots\ \bar{\delta}_1^{n-1} + \ldots .$$

La fraction rationnelle P/Q étant irréductible, on déduit de (9) et de (12) que $D_x Q = n\, \bar{\lambda}(x)\, Q$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, donc (lemme 4-1 (v)) $Q \in S(n\, \bar{\lambda})$, et par suite (lemme 4-8 (iii)) $n = 0$, $Q = 1$, et l'égalité (8) devient :

$$(13) \qquad D_x P - \lambda(x)\, P = - w_x \quad \text{pour tout } x \in \tilde{\mathfrak{g}} .$$

Or, compte tenu de (10) et (11), on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$D_x P = D_x u_1(\bar{\delta}_1^m + u_2\bar{\delta}_1^{m-1} + \dots) + u_1(m\,\bar{\lambda}(x)\,\bar{\delta}_1^m + m\,\bar{w}_x\,\bar{\delta}_1^{m-1} + (D_x u_2)\,\bar{\delta}_1^{m-1}$$
$$+(m-1)\bar{\lambda}(x)u_2\,\bar{\delta}_1^{m-1} + \dots\,\bar{\delta}_1^{m-2} + \dots,$$

soit

$$(14)\quad D_x P = \bar{\delta}_1^m(D_x u_1 + m\,\bar{\lambda}(x)u_1) + \bar{\delta}_1^{m-1}((D_x u_1)u_2 + m\,u_1\,\bar{w}_x + u_1(D_x u_2)$$
$$+(m-1)\bar{\lambda}(x)u_1u_2) + \dots$$

Comme m est > 0 d'après (5), on déduit de (14) égalant à zéro le coefficient de $\bar{\delta}_1^{\,m}$ dans le premier membre de (13), qu'on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$(15)\quad D_x\,u_1 + (m\,\bar{\lambda} - \lambda)(x).u_1 = 0\,.$$

Si m est ≥ 2, on obtient de même, égalant à 0 le coefficient de $\bar{\delta}_1^{\,m-1}$ dans le premier membre de (13), qu'on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$(16)\quad (D_x\,u_1)\,u_2 + u_1\,(m\,\bar{w}_x + D_x\,u_2 + (m-1)\,\bar{\lambda}\,(x)\,u_2 - \lambda(x)\,u_2) = 0$$

soit, compte tenu de (15) et de (7)

$$0 = (\lambda - m\,\bar{\lambda})(x).u_2 + m\,\bar{w}_x + D_x\,u_2 + (m-1)\,\bar{\lambda}\,(x)\,u_2 - \lambda\,(x)\,u_2$$
$$= D_x\,u_2 - \bar{\lambda}\,(x)\,u_2 + m\,(D_x\,\bar{\delta}_1 - \bar{\lambda}\,(x)\,\delta_1)$$

ce qui peut s'écrire

$$D_x\,(m\,\bar{\delta}_1 + u_2) = \bar{\lambda}\,(x)\,(m\,\bar{\delta}_1 + u_2)$$

Donc (lemme 4-1 (v)), $\bar{\delta}_1 + u_2 \in S(\bar{\lambda})$, ce qui est exclu (lemme 4-8 (iii)).

Par conséquent $m = 1$ et l'égalité (10) devient

$$P = u_1\,(\bar{\delta}_1 + u_2)\,.$$

Posant alors $u_1 u_2 = u_3$, on a, d'après (2) et (3) (puisque $v = P$)

(17) $\delta_1 + v_1 \bar{\delta}_1 + u_3 \in S(\lambda)$ et $Z \cap A = (Z \cap \bar{H})(u(\delta_1 + u_1 \bar{\delta}_1 + u_3)^s)$

Par ailleurs, comme $m = 1$ et que l'égalité (15) est valable pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a (lemme 4-1 (v)) : $u_1 \in S(\lambda - \bar{\lambda})$ et par suite, compte tenu de (17) et du lemme 4-1 (iv) :

$$\delta_1 + (\bar{u}_1)^{-1} \bar{\delta}_1 + (\bar{u}_1)^{-1} \bar{u}_3 = (\bar{u}_1)^{-1}(\bar{\delta}_1 + \bar{u}_1 \delta_1 + \bar{u}_3) \in S(\bar{\lambda} - \overline{(\lambda - \bar{\lambda})}) \subset S(\lambda)$$

Donc $\delta_1 + u_1 \bar{\delta}_1 + u_3$ et $\delta_1 + (\bar{u}_1)^{-1} \bar{\delta}_1 + (\bar{u}_1)^{-1} \bar{u}_3$ appartiennent à l'espace vectoriel $S(\lambda) \cup \{0\}$, et par suite

$$(u_1 - (\bar{u}_1)^{-1}) \bar{\delta}_1 + (u_3 - (\bar{u}_1)^{-1} \bar{u}_3) \in S(\lambda) \cup \{0\}$$

Si donc $u_1 \bar{u}_1 \neq 1$, alors ce dernier élément est $\neq 0$ et appartient par suite à $S(\lambda) \cap ((N \cap B) [\bar{\delta}_1] - (N \cap B))$, ce qui est exclu (lemme 4-8 (iii).
Donc

(18) $u_1 \bar{u}_1 = 1$.

Comme $\delta_1 \in G_1$, que u, u_1, u_3 appartiennent à $N \cap B$, il résulte alors de (4) (17) et (18) , et de ce que, comme on l'a vu, $u_1 \in S(\lambda - \bar{\lambda})$, que $(I)_2$ $\underline{2}$ est vérifiée : il suffit de prendre $\delta = \delta_1$, $v' = u_1$, $w' = u_3$ et de définir u comme ci-dessus.

<u>Lemme 5-4</u> Notations et hypothèses du lemme 5-2 . Comme au lemme 5-3 , on note G_1 $(\mathcal{H}, \alpha, \beta, a)$ l'ensemble des éléments de $Z(\check{\mathcal{H}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ vérifiant les conditions (I) $\underline{2}$ du lemme 5-2 .

On suppose en outre que

1) $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) \neq Z(\mathfrak{g}) \cap K(\tilde{\beta})$

2) les éventualités (I) du lemme 5-2 et $(I)_1$ du lemme 5-3 sont réalisées.

Dans ces conditions, l'une et l'une seulement des quatre éventualités suivantes est toujours réalisée.

$(I)_{1,1}$ $\underline{1}$ Le corps $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ est une extension pure de degré 2 de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$

et $\underline{2}$ il existe des entiers rationnels t_1, t_2 et des éléments non nuls δ, u, α de $Z(\tilde{\mathfrak{L}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ tels que

$\underline{a}$ $\delta \in S(\lambda) \cap G_1(\mathfrak{L}, \alpha, \beta, a)$

$\underline{b}$ $u \in Z(\tilde{\mathfrak{L}}) \cap K(\tilde{\beta})$

$\underline{c}$ $t_1 > 0$ et $|t_2| \neq t_1$

$\underline{d}$ $\alpha = u \; \delta^{t_1} \; \bar{\delta}^{t_2}$

$\underline{e}$ $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\beta))(\alpha, \bar{\alpha})$

$(I)_{1,2}$ $\underline{1}$ Le corps $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ est une extension pure de degré 2 de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$

et $\underline{2}$ il existe des entiers t, t', et des éléments non nuls $\delta, u, u', \alpha, \alpha'$ de $Z(\tilde{\mathfrak{L}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ tels que

$\underline{a}$ $\delta \in S(\lambda) \cap G_1(\mathfrak{L}, \alpha, \beta, a)$

$\underline{b}$ $u \in Z(\mathfrak{L}) \cap K(\beta)$ et $u' \in Z(\tilde{\mathfrak{L}}) \cap K(\tilde{\beta})$

$\underline{c}$ $t > 0$ et $t' > 0$

$\underline{d}$ $\alpha = u(\delta \; \bar{\delta})^{t}$ et $\alpha' = u'(\delta / \bar{\delta})^{t'}$

$\underline{e}$ $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta}))\,(\alpha, \alpha')$

$(I)_{1,3}$ $\underline{1}$ Le corps $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ est une extension pure de degré 1 de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$

et $\underline{2}$ il existe un entier t, et des éléments non nuls δ, u, α de $Z(\tilde{\mathfrak{L}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ tels que

$\underline{a}$ $\delta \in S(\lambda) \cap G_1(\mathcal{R}, \alpha, \beta, a)$

$\underline{b}$ $u \in Z(\mathcal{R}) \cap K(\beta)$

$\underline{c}$ $t > 0$

$\underline{d}$ $\alpha = u(\delta\bar{\delta})^t$

$\underline{e}$ $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta}))(\alpha)$

$(I)_{1,4}$ $\underline{1}$ Le corps $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ est une extension pure de degré 1 de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$

et $\underline{2}$ il existe un entier t et des éléments non nuls δ, u, α de $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ tels que

$\underline{a}$ $\delta \in S(\lambda) \cap G_1(\mathcal{R}, \alpha, \beta, a)$

$\underline{b}$ $u \in Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$

$\underline{c}$ $t > 0$

$\underline{d}$ $\alpha = u(\delta/\bar{\delta})^t$

$\underline{e}$ $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta}))(\alpha)$

En outre l'élément δ figurant dans les assertions $(I)_{1,i}$ est déterminé de manière unique (i.e par les données de $\mathcal{R}, \alpha, \beta, a$) si $i = 2, 3, 4$.

Démonstration.

$\underline{1}$ définissons $\mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{h}}$, H, $\bar{H}$, A, B, N comme dans la démonstration du lemme 5-2, et posons, comme au lemme 5-3 :

$$Z = Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \quad G_1 = G_1(\mathcal{R}, \alpha, \beta, a) .$$

Nous procèderons alors comme suit. Au § 2, on étudie le cas où $S(\lambda) \cap G_1$ contient plus d'un élément, cas pour lequel on montre que la seule éventualité $(I)_{1,1}$ est réalisée, et on en déduit au § 3 l'incompatibilité mutuelle des éventualités $(I)_{1,3}$ et $(I)_{1,4}$. Dans les § suivants, on suppose que $S(\lambda) \cap G_1$ est réduit à un seul élément.

Aux § 4 à 6, on montre que

$$(\alpha) \quad (Z \cap H \neq Z \cap B) \Longrightarrow ((I)_{1,1} \Longleftrightarrow \text{non } (I)_{1,2}) .$$

Au § 4, on construit un premier couple $\mathcal{E}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ d'éléments de $Z \cap A$ engendrant $Z \cap A$ sur $Z \cap B$, ce qui permet de conclure dans un cas particulier. Au § 5, on déduit de $\mathcal{E}_1$ un second couple $\mathcal{E}_2 = (\alpha_1, \beta_2)$ de générateurs de $Z \cap A$ sur $Z \cap B$. On montre enfin, au § 6, qu'on peut construire à partir de $\mathcal{E}_2$ un troisième couple $\mathcal{E}_3$ de générateurs qui permet de vérifier (α).

On montre enfin, aux § 7 à 9 que $(Z \cap H = Z \cap B) \Longrightarrow ((I)_{1,3}$ ou $(I)_{1,4})$. Les autres assertions du lemme, savoir l'incompatibilité de $(I)_{1,1}$ (resp. $(I)_{1,2}$) avec $(I)_{1,3}$ au $(I)_{1,4}$, sont triviales.

<u>2 Supposons que</u> $S(\lambda) \cap G_1$ <u>contienne deux éléments distincts δ', δ''</u>. Comme $S(\lambda) \cup \{0\}$ est un espace vectoriel, et que, par définition de G_1, $\delta' - a$ et $\delta'' - a \in N \cap B$ (cf. lemme 5-2 (I) <u>1</u> e), il s'ensuit que $\delta' - \delta'' \in S(\lambda) \cap N \cap B$. Posant $u_1 = (\delta' - \delta'')^{-1}$, on a donc (lemme 4-1 (iv)) : $u_1 \in S(-\lambda) \cap N \cap B$ et $u_1 . \delta' \in Z \cap H$. Par suite, comme δ' est de degré 1 en a, appliquant le lemme 4-7 (iii) (où l'on prend $\mathcal{R} = \mathfrak{g}$), on obtient que $Z \cap A = (Z \cap B)(u_1 \delta', u_1 \delta')$. Les conditions $(I)_{1,1}$ sont bien vérifiées si on prend

$$\delta = \delta', \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 0, \quad u = u_1, \; \alpha = u_1 \; \delta' .$$

Il est clair par ailleurs que les éventualités $(I)_{1,3}$, $(I)_{1,4}$ sont exclues. Montrons qu'il en est de même pour $(I)_{1,2}$. Supposons en effet qu'il existe $t, t', \delta, u, u', \alpha, \alpha'$ vérifiant $(I)_{1,2}$ <u>2</u>. Alors (lemme 4-1 (iv)) $u_1 \delta \in (Z \cap B)(\alpha, \alpha')$, donc

$$u_1\ \xi \in (Z \cap B)(u(\xi\,\bar{\xi})^{t},\ u'(\xi/\bar{\xi})^{t'}) \subset (N \cap B)\ ((\xi\,\bar{\xi})^{t},\ (\xi/\bar{\xi})^{t'}) .$$

Comme ξ et ξ' sont algébriquement indépendants sur $N \cap B$ (lemme 5-2 , (I) <u>2</u> <u>d</u>) , ceci est impossible (lemme 2-6) .

<u>3</u> Montrons maintenant que si $S(\lambda) \cap G_1$ est réduit à un seul élément, alors $(I)_{1,3} \Longrightarrow$ non $(I)_{1,4}$. Soit $S(\lambda) \cap G_1 = \{\xi\}$. S'il existait des éléments $\neq 0$ u, u' de $N \cap B$ et des entiers > 0, t, t' tels que $(Z \cap B)(u(\xi\,\bar{\xi})^{t}) = (Z \cap B)(u'(\xi/\bar{\xi})^{t'})$, alors $(\xi\,\bar{\xi})^{t}$ et $(\xi/\bar{\xi})^{t'}$ seraient algébriquement liés, ce qui est exclu (lemme 2-6 et lemme 5-2 , (I) <u>2</u> <u>d</u>).

<u>Nous supposerons désormais que</u> $S(\lambda) \cap G_1 = \{\xi\}$

<u>4</u> <u>Supposons que l'on ait $Z \cap H \neq Z \cap B$</u>. Par application du lemme 4-7 (où l'on fait $\mathcal{A} = \mathfrak{g}$) , on en déduit que

$$Z \cap \bar{H} \neq Z \cap B \quad \text{et} \quad Z \cap A \neq Z \cap H \quad \text{et} \quad Z \cap A \neq Z \cap \bar{H}$$

et par suite ((L)) . $Z \cap A$ est une extension pure de degré 2 de $Z \cap B$. Soit alors (lemme 4-4 et (L)) α_1 un générateur de $Z \cap H$ sur $Z \cap B$ appartenant à $Z \cap B\,\{a\} \subset N \cap B\,\{a\} = (N \cap B)[\xi]$, et soit r le degre > 0 de α_1 par rapport à a (et donc aussi par rapport à ξ) . On sait alors (lemme 4-5) , qu'il existe un élément $v \in S(-\,r\,\lambda) \cap N \cap B$ et par conséquent (lemme 4-1 (iv) et (L)) on peut supposer que $\alpha_1 = v\ \xi^{r}$. Par ailleurs (lemme 5-3 $(I)_1$) , il existe un élément β_1 de $Z \cap A$, engendrant $Z \cap A$ sur $Z \cap H$, de la forme $\beta_1 = \bar{u}_1\ \bar{\xi}^{\,s}$, avec $s > 0$ et $u_1 \in N \cap \bar{H} \cap S(-\,s\,\lambda)$. Il s'ensuit que

$$Z \cap A = (Z \cap B)(\alpha_1,\ \beta_1) = (Z \cap B)(\bar{\alpha}_1,\ \bar{\beta}_1) = (Z \cap B)(\bar{v}\ \bar{\xi}^{r},\ u_1\,\xi^{s})$$

et par conséquent, compte tenu du lemme 2-7

$$\alpha_1 = v\ \xi^{r} \in (Z \cap B)(\bar{v}\ \bar{\xi}^{r},\ u_1\ \xi^{s}) \cap (N \cap B)[\xi]$$
$$= (Z \cap B)(\bar{v}\ \bar{\xi}^{r})[u_1\ \xi^{s}] = (Z \cap B)(\bar{\alpha}_1)\,[\,\bar{\beta}_1]$$

On a donc

$$(1) \qquad \alpha_1 = v\,\delta^r = \sum_{k=0}^{d} A_k(\bar\beta_1)^k \text{ , avec } d > 0 \text{ et } A_k \in (Z \cap B)(\bar\alpha_1)$$

$$\text{pour } k = 0, 1, \dots d, \quad \text{et } A_d \neq 0$$

Par identification des puissances de δ dans les deux membres de (1), on en déduit que $r = s\,d$ et que $A_k = 0$ si $k < d$. Soit finalement, posant $\tilde A = A_d$:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = v\,\delta^r = \tilde A(\bar\beta_1)^d & \beta_1 = \bar u_1\,\bar\delta^{\,s} \qquad r = s\,d \\ \tilde A \in (Z \cap B)(\bar\alpha_1) & u_1 \in (N \cap B)(\bar\delta) \qquad v = \tilde A\,u_1^d \in N \cap B \\ Z \cap H = (Z \cap B)(\alpha_1) & Z \cap A = (Z \cap H)(\beta_1) = (Z \cap B)(\alpha_1, \beta_1) \end{cases}$$

Si $d = 1$, alors $\bar\alpha_1$ et β_1 sont des éléments de $Z \cap (H\{\bar a\} - H)$ de même degré s par rapport à $\bar\delta$ (et donc aussi par rapport à $\bar a$). On en conclut ((L)) que $Z \cap A = (Z \cap H)(\bar\alpha_1) = (Z \cap B)(\alpha_1, \bar\alpha_1)$, et $(I)_{1,1}$ est vérifiée, si l'on prend $u = v$. $t_1 = r = s$, et $t_2 = 0$.

5 <u>Supposons désormais $d > 1$</u>. Par application du lemme 2-9 (où l'on prend $E = N \cap B$, $E_o = Z \cap B$, $X = \bar\delta$, $R = u_1$, $u = \bar v$, $u\,X^r = \bar\alpha_1$, $u_1 = v^{-1}$, $u_1\,R^d = \tilde A^{-1}$, ce qui est possible d'après (2)), on obtient qu'il existe un élément S de $(Z \cap B)(\bar\alpha_1)$, un élément u_2 de $N \cap B$, et un entier τ tels que

$$(3) \qquad u_1 = u_2\,S\,\bar\delta^{\tau}$$

et donc $\beta_1 = \bar u_2\,\bar S\,\delta^{\tau}\,\bar\delta^{\,s}$, avec $\bar S \in (Z \cap B)(\alpha_1)$. Comme β_1 et $\beta_1/\bar S$ sont des éléments de $Z \cap (H\{\bar a\} - H)$ de même degré s en a, il résulte de (L) que $Z \cap A = (Z \cap H)(\beta_1/\bar S)$. Posant alors

$$(4) \qquad \beta_2 = \beta_1/\bar S = \bar u_2\,\delta^{\tau}\,\bar\delta^{\,s} \text{ , } A_1 = A\cdot S^d$$

ce qui implique, compte tenu de (2) et (3)

(5) $A_1 = (v\, u_2^{-d})\, \zeta^{-\tau d} \in (Z \cap B)(\bar{\alpha}_1)$

Comme $\bar{\alpha}_1$ est un monôme en $\bar{\zeta}$, cela implique que l'on a

(6) $A_1 = u_o(\bar{\alpha}_1)^{-p}$, avec $u_o \in Z \cap B$, et $p \in \mathbf{Z}$.

Par suite, compte tenu de (2) et (5) , on a $-\tau\ d = p\ r = p\ s\ d$, soit

(7) $\tau = p\ s$

Finalement, par comparaison des formules (2) à (7) , on obtient, posant $z = \delta^s$:

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha_1 = v\ z^d = A_1(\bar{\beta}_2)^d, \quad z = \delta^s, \quad \beta_2 = \bar{u}_2\ z^p\ \bar{z} \\ A_1 = u_o(\bar{\alpha}_1)^{-p}, \quad u_2, v \in N \cap B, \quad u_o \in Z \cap B, \quad Z \cap H = (Z \cap B)(\alpha_1) \\ Z \cap A = (Z \cap H)\ (\beta_2) = (Z \cap B)(\alpha_1, \beta_2) = (Z \cap B)\ (\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2) \end{cases}$$

On en déduit que $(\beta_2)^p \cdot (\bar{\beta}_2)^{-1} = ((\bar{u}_2)^p \cdot (u_2)^{-1}) \cdot z^{p^2-1} \in Z \cap B$ {a} et par suite ((L)) , <u>d divise $p^2 - 1$</u> .

<u>6-1</u> Posons, pour tout couple $(k, \ell) \in \mathbf{Z}^2$

(9) $\varphi(k, \ell) = (\bar{\beta}_2)^k (\bar{\alpha}_1)^\ell = (\bar{u}_2^{\,k}\ \bar{v}^\ell) \cdot \bar{z}^{(pk+d\ell)}\ z^k$

et faisons au préalable deux remarques

(R_1) Pour qu'un couple (γ_1, γ_2) d'éléments de $Z \cap A$ de la forme

(10) $\gamma_i = v_i\ \varphi(k_i, \ell_i)$, $v_i \in Z \cap B$, $i = 1, 2$

engendre $Z \cap A$ sur $Z \cap B$, il faut et il suffit, compte tenu de (8) et du lemme 2-1 , que l'on ait

(11) $|k_2 \ell_1 - \ell_1 k_2| = 1$

Nous appellerons couples $(\mathcal{C})$ les couples (γ_1, γ_2) de la forme (10) tels que (11) soit vérifié.

(R_2) Tout élément de $Z \cap A \cap M_{N \cap B}(\delta, \bar{\delta})$ est de la forme (10) . Il est clair en effet d'une part que tout élément de $(Z \cap A) \cap M_{N \cap B}(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2)$ est de la forme (10) , et par ailleurs il résulte du lemme 2-2 et de (8) que

$$(Z \cap A) \cap M_{N \cap B}(\delta, \bar{\delta}) \subset (N \cap B)(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2) \cap M_{N \cap B}(\delta, \bar{\delta}) = M_{N \cap B}(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2) .$$

<u>6-2</u> Comme δ est le seul élément de $S(\lambda) \cap G_1$, il résulte de (R_2) que, si $(I)_{1,1}$ est vérifiée, alors il existe un couple $(\mathcal{C})$ tel que

(12) $\gamma_2 = \bar{\gamma}_1$.

Inversement, s'il existe un couple $(\mathcal{C})$ vérifiant (12) , alors il existe un élément $u \neq 0$ de $N \cap B$ et des entiers t'_1 , t'_2 tels que $\gamma_1 = u\, \delta^{t'_1}\, \bar{\delta}^{t'_2}$. Toutes les conditions de $(I)_{1,1}$ sont alors vérifiées, sauf peut être la condition $(I)_{1,1}$ 2 <u>c</u> . Il est exclu toutefois que $|t'_1| = |t'_2|$, car $t'_2 = \varepsilon t'_1$, $\varepsilon = \pm 1$, implique $\gamma_1(\gamma_2)^{-\varepsilon} \in Z \cap B$, or γ_1, γ_2 sont algébriquement indépendants sur $Z \cap B$. Si $t'_1 = 0$, alors t'_2 est $\neq 0$; on peut donc, échangeant au besoin les rôles de γ_1, γ_2 , supposer $t'_1 \neq 0$. Si $t'_1 > 0$ (resp. $t'_1 < 0$) la condition $(I)_{1,1}$ <u>2 c</u> est vérifiée si l'on prend $\alpha = \gamma_1$ (resp. $\alpha = \gamma_1^{-1}$)

<u>6-3</u> Comme $S(\lambda) \cap G_1 = \{\delta\}$, pour que $(I)_{1,2}$ soit vérifiée il faut, compte tenu de (R_2) qu'il existe un couple $(\mathcal{C})$ tel que

(13) $\bar{\gamma}_1/\gamma_1 \in Z \cap B$ et $\gamma_2\, \bar{\gamma}_2 \in Z \cap B$.

Inversement, s'il existe un couple $(\mathcal{C}) = (\gamma_1, \gamma_2)$ vérifiant (13) , alors l'un au moins des deux éléments $\gamma_1 + \bar{\gamma}_1$, $i(\gamma_1 - \bar{\gamma}_1)$, soit γ , n'est pas nul, et donc (γ, γ_2) est un couple de générateurs de $Z \cap A$ sur $Z \cap B$, qui sont des monômes en δ , $\bar{\delta}$, à coefficients dans $Z \cap B$, de la forme.

$$\gamma = w(\delta\ \bar{\delta})^{t_1} \quad , \quad \gamma_2 = w'(\delta / \bar{\delta})^{t_2}$$

avec $w = \bar{w} \in N \cap B \cap K(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}) \cap K(\beta)$

et qui sont algébriquement indépendants sur $Z \cap B$, ce qui entraîne que $t_1\, t_2$ est $\neq 0$. Remplaçant éventuellement γ par γ^{-1} , au γ_2 par $(\gamma_2)^{-1}$, on se ramène au cas où t_1 et t_2 sont > 0 , et toutes les conditions de $(I)_{1,2}$ sont alors satisfaites, avec $\alpha = \gamma$, $\alpha' = \gamma_2$

<u>6-4</u> Compte tenu de (9), (11), (12), (13) et de ce qu'on vient de voir, $(I)_{1,1}$ (resp. $(I)_{1,2}$) équivaut à l'existence de solutions entières du système

$$\begin{cases} |k_2\, \ell_1 - \ell_2\, k_1| = 1 \\ p\, k_1 + d\, \ell_1 = k_2 \\ p\, k_2 + d\, \ell_2 = k_1 \end{cases} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{cases} |k_2\, \ell_1 - \ell_2\, k_1| = 1 \\ p\, k_1 + d\, \ell_1 = k_1 \\ p\, k_2 + d\, \ell_2 = -k_2 \end{cases}$$

Il résulte alors du lemme 3-1 que l'une et l'une seulement des éventualités $(I)_{1,1}$ et $(I)_{1,2}$ est réalisée.

<u>7</u> Soit toujours $S(\lambda) \cap G_1 = \{\delta\}$. <u>Supposons désormais que l'on ait</u> $Z \cap H = Z \cap B$, et donc $Z \cap \bar{H} = Z \cap B$. On sait (lemme 5-3) qu'il existe un entier $s > 0$ et un élément $u_1 \neq 0$ de $N \cap \bar{H} \cap S(-s\lambda) = ((N \cap B)(\bar{\delta})) \cap S(-s\lambda)$ tel que $Z \cap A = (Z \cap \bar{H})(u_1\, \delta^s) = (Z \cap B)(u_1\, \delta^s)$. Par suite, posant $\alpha_1 = u_1\, \delta^s$, on a

$$Z \cap A = (Z \cap B)(\alpha_1) = (Z \cap B)(\bar{\alpha}_1) .$$

Donc α_1, $\bar{\alpha}_1$ sont liés par une relation homographique à coefficients dans $Z \cap B$, et, raisonnant comme au lemme 5-2 (§ 4 de la démonstration), on obtient que α_1, $\bar{\alpha}_1$ sont liés par une relation de l'un des types suivants

(A) $\bar{\alpha}_1 = \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2$

(B) $(\alpha_1 + \gamma_3)(\bar{\alpha}_1 + \bar{\gamma}_3) = \gamma_4$, $\gamma_i \in Z \cap B$, $i = 1,\dots,4$, $\gamma_1 \gamma_4 \neq 0$.

Dans ce qui suit, nous noterons $(P(\bar{\xi}), Q(\bar{\xi}))$ le couple d'éléments de $(N \cap B)[\xi]$ associés à u_1. Comme l'automorphisme canonique σ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ induit un isomorphisme de l'anneau $(N \cap B)[\bar{\xi}]$ sur l'anneau $(N \cap B)[\xi]$, il s'ensuit que, si l'on pose $\bar{P}(\xi) = \sigma(P(\bar{\xi}))$ et $\bar{Q}(\xi) = \sigma(Q(\bar{\xi}))$, alors $(\bar{P}(\xi), \bar{Q}(\xi))$ est le couple d'éléments de $(N \cap B)[\xi]$ associé à $\bar{u}_1$; en particulier, $\bar{P}(\xi)$ et $\bar{Q}(\xi)$ sont premiers entre eux sur $(N \cap B)[\xi]$. Nous pouvons traiter ξ et $\bar{\xi}$ comme des indéterminées sur $N \cap B$, définir sans ambiguïté les symboles $P(0)$, $\bar{P}(0)$ ... etc... , et parler de racine de $P(\xi)$ ... etc.

<u>8 Supposons d'abord qu'on ait une relation du type (A)</u>

On peut alors écrire

$$\gamma_2 = \bar{\alpha}_1 - \gamma_1 \alpha_1 = \bar{u}_1 \bar{\xi}^s - \gamma_1 u_1 \xi^s = \frac{\bar{P}(\xi)}{\bar{Q}(\xi)} \bar{\xi}^s - \gamma_1 \frac{P(\bar{\xi})}{Q(\bar{\xi})} \xi^s$$

soit

$$(14) \qquad \bar{P}(\xi) Q(\bar{\xi}) \bar{\xi}^s = \gamma_2 \bar{Q}(\xi) Q(\bar{\xi}) + \gamma_1 P(\bar{\xi}) \bar{Q}(\xi) \xi^s$$

Donc, substituant 0 à $\bar{\xi}$ dans les deux membres de (14)

$$0 = \gamma_2 Q(0) \bar{Q}(\xi) + \gamma_1 P(0) \xi^s \bar{Q}(\xi) = \gamma_2 Q(0) + \gamma_1 P(0) \xi^s$$

et par conséquent $\gamma_2 Q(0) = \gamma_1 P(0) = 0$.

Comme γ_1 est $\neq 0$ et que $P(\bar{\xi})$ et $Q(\bar{\xi})$ sont premiers entre eux, il s'ensuit que $P(0) = \gamma_2 = 0$, et l'égalité (14) devient

$$\bar{P}(\zeta)Q(\bar{\zeta})\,\bar{\zeta}^{\,s} = \gamma_1\, P(\bar{\zeta})\bar{Q}(\zeta)\,\zeta^s$$

et par suite

$$\frac{\bar{P}(\zeta)}{\bar{Q}(\zeta)\zeta^s} = \gamma_1 \frac{P(\bar{\zeta})}{Q(\bar{\zeta})\bar{\zeta}^{\,s}} \in ((N\cap B)(\zeta)) \cap ((N\cap B)(\bar{\zeta})) = N\cap B\ .$$

Comme $P(\bar{\zeta})$ et $Q(\bar{\zeta})$ (resp. $\bar{P}(\zeta)$ et $\bar{Q}(\zeta)$) sont premiers entre eux (et que $P(\bar{\zeta}) \notin N\cap B$ puisque $P(0) = 0$ et que $P(\bar{\zeta}) \neq 0$) , il s'ensuit que $Q(\bar{\zeta})$ et $\bar{Q}(\zeta) \in N\cap B$, et il existe donc un élément $u' \neq 0$ de $N\cap B$ tel que $u_1 = \dfrac{P(\bar{\zeta})}{Q(\bar{\zeta})} = u'\,\bar{\zeta}^{\,s}$, et donc

$$\alpha_1 = u'(\zeta\bar{\zeta})^s\ .$$

Alors l'un au moins des deux éléments $\alpha_1 + \bar{\alpha}_1$, $i(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)$, soit α , est $\neq 0$, engendre $Z\cap A$ sur $Z\cap B$, et est de la forme

$$\alpha = u(\zeta\bar{\zeta})^s\ , \quad \text{avec} \quad u = \bar{u} \in N\cap B$$

Par conséquent $u \in N\cap B\cap K(\mathfrak{g}) = Z(\mathcal{A})\cap K(\mathcal{B})$, et l'éventualité $(I)_{1,3}$ est réalisée.

<u>9 Supposons enfin qu'on ait une relation du type (B)</u>

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\gamma_4 &= (\alpha_1 + \gamma_3)(\bar{\alpha}_1 + \bar{\gamma}_3) = (u_1\zeta^s + \gamma_3)(\bar{u}_1\bar{\zeta}^{\,s} + \bar{\gamma}_3)\\ &= (P(\bar{\zeta})\,\zeta^s + \gamma_3\, Q(\bar{\zeta})).(\bar{P}(\zeta)\,\bar{\zeta}^{\,s} + \bar{\gamma}_3\,\bar{Q}(\zeta))(Q(\bar{\zeta})\bar{Q}(\zeta))^{-1}\end{aligned}$$

soit

$$(15)\qquad \gamma_4\, Q(\bar{\zeta})Q(\zeta) = (P(\bar{\zeta})\,\zeta^s + \gamma_3\, Q(\bar{\zeta})).(\bar{P}(\zeta)\,\bar{\zeta}^{\,s} + \bar{\gamma}_3\,\bar{Q}(\zeta))\ .$$

Comme s est > 0, que $P(\bar{\xi})\bar{P}(\xi)$ est $\neq 0$, il résulte de cette dernière égalité que ni $Q(\bar{\xi})$ ni $\bar{Q}(\xi)$ n'appartiennent à $N \cap B$. Soient alors ω une racine de $Q(\bar{\xi})$ dans une clôture algébrique Ω de $N \cap B$, et φ l'homomorphisme de $(N \cap B)(\xi)[\bar{\xi}]$ dans $(N \cap B)(\xi)[\omega]$ qui conserve les éléments de $(N \cap B)(\xi)$ et envoie $\bar{\xi}$ en ω. Appliquant φ aux deux membres de (15), on obtient :

$$0 = P(\omega)\,\xi^s\,(\bar{P}(\xi)\,\omega^s + \bar{\gamma}_3\,\bar{Q}(\xi))$$

Comme $P(\bar{\xi})$ et $Q(\bar{\xi})$ sont premiers entre eux, on a $P(\omega) \neq 0$ et par suite

$$\bar{P}(\xi)\,\omega^s + \bar{\gamma}_3\,\bar{Q}(\xi) = 0$$

Si $\bar{\gamma}_3$ est $\neq 0$, on a donc, ξ étant transcendant sur $(N \cap B)(\omega)$:

$$(\bar{u}_1)^{-1} = \frac{\bar{Q}(\xi)}{\bar{P}(\xi)} = -\frac{\omega^s}{\bar{\gamma}_3} \in ((N \cap B)(\xi)) \cap ((N \cap B)(\omega)) = N \cap B$$

et par suite $u_1 \in N \cap B$, $\alpha_1 = u_1\,\xi^s \in Z \cap H$, ce qui est exclu. Donc $\bar{\gamma}_3 = \gamma_3 = 0$ et $\bar{P}(\xi)\,\omega^s = 0$. Comme u_1 est $\neq 0$, on a $\bar{P}(\xi) = \sigma(P(\bar{\xi})) \neq 0$, et donc $\omega = 0$. Par conséquent, il existe un entier $s' > 0$ tel que $Q(\bar{\xi}) = \bar{\xi}^{s'}$, et l'égalité (15) devient :

$$\gamma_4(\xi\bar{\xi})^{s'} = (\xi\bar{\xi})^s\,P(\xi)\,\bar{P}(\xi)$$

ce qui implique, $P(\bar{\xi})$ et $Q(\bar{\xi})$ (resp. $\bar{P}(\xi)$ et $\bar{Q}(\xi)$) étant premiers entre eux, que $P(\bar{\xi})$ et $\bar{P}(\xi)$ appartiennent à $N \cap B$, et donc $s' = s$. Posant $P(\bar{\xi}) = u$, on obtient

$$\alpha_1 = u(\xi/\bar{\xi})^s$$

et l'éventualité $(I)_{1,4}$ est donc réalisée, ce qui termine la démonstration.

<u>Lemme 5-5</u> Notations et hypothèses du lemme 5-2 ; soient en outre

- $G_1(\mathcal{A}, \alpha, \beta, a)$ l'ensemble des éléments δ de $Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ vérifiant la condition (I) 2 du lemme 5-2

- $G_2(\mathcal{A}, \alpha, \beta, a)$ l'ensemble des éléments δ' de $Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ vérifiant la condition (II) 2 du lemme 5-2 .

On suppose que

1) $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) \neq Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$

2) l'éventualité $(I)_1$ du lemme 5-3 n'est pas réalisée.

Dans ces conditions, l'une et l'une seulement des deux éventualités suivantes $(I)_{2,1}$ et $(II)_1$ est toujours réalisée.

$(I)_{2,1}$ 1 L'éventualité (I) du lemme 5-2 est réalisée.
Le corps $Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ (resp. $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha})$) est une extension pure de degré 2 (resp. de degré 1) de $Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\beta})$ (resp. $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$) .

2 Il existe un entier $s > 0$ et des éléments $\delta, u, v', w', \alpha, \alpha'$ de $Z(\tilde{\mathcal{A}})$ tels que

a $u \in S(-s\lambda) \cap Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\beta})$, $w' \in Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\beta})$

$v' \in S(\lambda - \bar{\lambda}) \cap Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\beta})$ et $v'\bar{v}' = 1$

b $\delta \in G_1(\mathcal{A}, \alpha, \beta, a)$ et $\delta + v'\bar{\delta} + w' \in S(\lambda)$

c $\alpha = u(\delta + v'\bar{\delta} + w')^s$, $\alpha' = \bar{\alpha}' \in (Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\tilde{\beta}))[\delta + v'\bar{\delta} + w']$

et α' est de degré s en $\delta + v'\bar{\delta} + w'$

d $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta}))(\alpha) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta}))(\alpha')$

e si $s > 1$, alors $\alpha = \alpha'$ et $\dfrac{\overline{(\delta + v'\bar{\delta} + w')}}{(\delta + v'\bar{\delta} + w')} \in Z(\tilde{\mathcal{A}}) \cap K(\beta)$

$(II)_1$ $\underline{1}$ L'éventualité (II) du lemme 5-2 est réalisée. Le corps $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\alpha})$ (resp. $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha})$) est une extension pure de degré 1 de $Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$ (resp. de $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta})$) .

$\underline{2}$ Il existe un entier $s > 0$ et des éléments δ', u, α, α' de $Z(\tilde{\mathcal{R}})$ tels que

$\underline{a}$ $u \in S(-s\lambda) \cap Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$

$\underline{b}$ $\delta' \in S(\lambda) \cap G_2(\mathcal{R}, \alpha, \beta, a)$

$\underline{c}$ $\alpha = u(\delta')^s$, $\alpha' = \bar{\alpha}' \in (Z(\tilde{\mathcal{R}})) \cap K(\tilde{\beta}))[\delta']$ et α' est de degré s par rapport à δ'

$\underline{d}$ $Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\alpha}) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta}))(\alpha) = (Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\beta}))(\alpha')$

$\underline{e}$ si $s > 1$, alors $\alpha = \alpha'$ et $\overline{\delta'}/\delta' \in Z(\tilde{\mathcal{R}}) \cap K(\tilde{\beta})$.

<u>Démonstration</u>.

$\underline{1}$ On définit A, B, N, H, $\bar{H}$ comme précédemment (cf. démonstration du lemme 4-7) et on pose

$$Z = Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \quad , \quad G_1 = G_1(\mathcal{R}, \alpha, \beta, a) \quad , \quad G_2 = G_2(\mathcal{R}, \alpha, \beta, a) \ .$$

Nous utiliserons la remarque suivante :

S'il existe des éléments α_1, γ , γ' de Z tels que

$$\bar{\alpha}_1 = \gamma\alpha_1 + \gamma' \ , \ \gamma, \gamma' \in Z \cap B \ , \ \alpha_1\gamma \neq 0 \ \text{ et } \ Z \cap A = (Z \cap B)(\alpha_1)$$

alors il existe $\alpha'' \in Z \cap A$ tel que

1) $\alpha'' = \overline{\alpha''}$ et $Z \cap A = (Z \cap B)(\alpha'')$

et 2) si $\gamma' = 0$, alors $\alpha''/\alpha_1 \in Z \cap B$.

Il suffit en effet de prendre α'' égal à $\alpha_1 + \bar{\alpha}_1$ si $\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 \neq 0$, à $i(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)$ sinon. <u>Nous noterons</u> $\gamma'(\alpha_1)$ $(= \alpha'')$ <u>cet élément</u>.

<u>2</u> Cela étant, supposons d'abord qu'on soit dans la situation (I) du lemme 5-2 . Nos hypothèses impliquent alors qu'on est aussi dans la situation $(I)_2$ du lemme 5-3 , et donc $(I)_{2,1}$ <u>1</u> est vérifiée. Soient

- δ, u', v', w' des éléments de $N \cap A$, et s un entier > 0 vérifiant les conditions $(I)_2$ du lemme 5-3

- $\alpha_1 = u'(\delta + v'\bar{\delta} + w')^s$.

Nous poserons

$$(1) \qquad \Phi = \delta + v'\bar{\delta} + w' \ , \qquad w_1 = \bar{w}' - v'w$$

On a alors (lemme 5-3), notant σ l'automorphisme canonique de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$

$$(Z \cap B)(\alpha_1) = Z \cap A = \sigma(Z \cap A) = (Z \cap B)(\bar{\alpha}_1)$$

Donc α_1 et $\bar{\alpha}_1$ sont liés par une relation homographique de la forme

$$\gamma_1 \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \gamma_2 \alpha_1 + \gamma_3 \bar{\alpha}_1 + \gamma_4 = 0 \ ,$$

$\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ étant des éléments de $Z \cap B$ non tous nuls.

Comme δ et $\bar{\delta}$ sont algébriquement indépendants sur $N \cap B$ (lemme 5-2) , que α_1 et $\bar{\alpha}_1$ sont des polynômes de degré $s \geqslant 1$ par rapport à δ et $\bar{\delta}$, à coefficients dans $N \cap B$, une telle relation n'est possible que si $\gamma_1 = 0$, soit, changeant les notations

$$(2) \qquad \bar{\alpha}_1 = \gamma\alpha_1 + \gamma' \ , \quad \text{avec } \gamma, \gamma' \in Z \cap B \ , \quad \gamma \neq 0$$

On a par ailleurs, puisque $v' \bar{v}' = 1$ (lemme 5-3)

(3) $\bar{\Phi} = \bar{v}' \Phi + w_1$

Si $s = 1$, il résulte alors de (3), du lemme 5-3, et de la remarque du § 1, que les conditions $(I)_{2,1}$ $\underline{2}$ sont vérifiées si l'on définit v', w' comme ci-dessus et si l'on prend

$$\alpha = \alpha_1 , \quad \alpha' = r'(\alpha_1) \qquad u = u' .$$

Si $s > 1$, comme $\alpha_1 = u' \Phi^s$, on obtient alors, combinant (2) et (3)

$$\bar{u}' (\bar{v}' \Phi + w_1)^s = \gamma u' \Phi^s + \gamma' .$$

Comme Φ est transcendant sur $N \cap B$, il s'ensuit que

$$\gamma' = w_1 = 0$$

Donc (§ 1) $r'(\alpha_1)/\alpha_1 \in Z \cap B$.

Compte tenu du lemme 5-3, les conditions $(I)_{2,1}$ $\underline{2}$ sont alors vérifiées si l'on définit v', w' comme ci-dessus, et si l'on prend $\alpha = \alpha' = r(\alpha_1)$ $u = u' \, r(\alpha_1)/\alpha_1$, puisque (lemme 4-1) $u \in (Z \cap B - \{0\}).S(- s\lambda) \subset S(- s\lambda)$.

$\underline{3}$ Supposons maintenant que l'on soit dans la situation (II) du lemme 5-2. Alors

$$Z \cap H = Z \cap (N \cap H) = Z \cap (N \cap B) = Z \cap B$$

ce qui implique, d'après (L), que $Z \cap A$ est une extension pure de degré 1 de $Z \cap B$ et (lemme 4-7), que $Z \cap B = Z \cap \bar{\bar{H}}$, et montre $(II)_2$ 1.
Soient alors

- δ'' un élément de G_2

- α_1 un générateur de $Z \cap A$ sur $Z \cap B = Z \cap \bar{H}$, générateur contenu dans $Z \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H})$.

Un tel générateur existe d'après (L) , et on a par ailleurs (lemme 4-4) :

$$Z \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H}) \subset N \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H}) = [(N \cap \bar{H})(\delta'')] \cap (\bar{H}\{a\} - \bar{H})$$
$$\subset (N \cap \bar{H})[\delta''] - (N \cap \bar{H}) = (N \cap B)[\delta''] - (N \cap B) .$$

Donc $\alpha_1 \in (N \cap B)[\delta''] - (N \cap B)$. Par suite, si l'on note s le degré de α_1 par rapport à δ'' (et donc par rapport à a), il existe (lemme 4-5 et lemme 5-2 (II) 2 c) des éléments u_1 et v_1 de $N \cap B$ tels que

(4) $\quad \delta'' + v_1 \in S(\lambda)$ et $u_1 \in S(-s\lambda)$.

Posant alors

(5) $\quad \delta' = \delta'' + v_1$ et $\alpha_2 = u_1(\delta')^s$

il est clair que $\delta' \in S(\lambda) \cap G_2$ et il résulte de (L) et du lemme 4-1 que

(6) $\quad (Z \cap B)(\alpha_2) = Z \cap A = (Z \cap B)(\bar{\alpha}_2)$

On a par ailleurs (lemme 5-2 (II) 2) :

(7) $\quad \delta' = a + u'\bar{a} + v'$ avec $u' \in N \cap B$, $u'\bar{u}' = 1$, $v' \in B$

Donc $\bar{\delta}' - \bar{u}'\delta = (\bar{a} + \bar{u}' a + \bar{v}') - \bar{u}'(a + u'\bar{a} + v') = \bar{v}' - \bar{u}' v' \in N \cap B$.

Soit

(8) $\quad \bar{\delta}' = \bar{u}'\delta' + w$, $w \in N \cap B$

Or il résulte de (6) que α_2 et $\bar{\alpha}_2$ sont liés par une relation homographique de la forme

$$\gamma'_1 \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \gamma'_2 \alpha_2 + \gamma'_3 \bar{\alpha}_2 + \gamma'_4 = 0$$

$\gamma'_1, \dots, \gamma'_4$ étant des éléments de $Z \cap B$ non tous nuls.

Compte tenu de (5) et de (8), $\alpha_2 \bar{\alpha}_2$ est un polynôme en δ' de degré $2s$, à coefficients dans $N \cap B$, et $\gamma'_2 \alpha_2 + \gamma'_3 \bar{\alpha}_2 + \gamma'_4$ est un polynôme en δ de degré $\leqslant s$, à coefficients dans $N \cap B$. Comme s est > 0, il s'ensuit que $\gamma'_1 = 0$, soit, changeant nos notations

$$(9) \qquad \bar{\alpha}_2 = \gamma \alpha_2 + \gamma' \quad , \gamma, \gamma' \in Z \cap B , \quad \gamma \neq 0$$

Si $s = 1$, il résulte alors de (8) et de la remarque du § 1 que $(II)_1$ $\underline{2}$ est vérifiée si l'on prend

$$u = u_1 \qquad \alpha = \alpha_2 \qquad \alpha' = r'(\alpha_2)$$

δ' étant défini comme ci-dessus.

Si $s > 1$, on a, combinant (5), (8) et (9)

$$\bar{u}_1 (\bar{u}' \delta' + w)^s = \gamma u_1 (\delta')^s + \gamma'$$

donc, δ' étant transcendant sur $N \cap B$

$$w = \gamma' = 0 , \quad \overline{\delta'} / \delta' = \bar{u}' \in N \cap B$$

et par suite, compte tenu du § 1, $(II)_1$ $\underline{2}$ est vérifiée si l'on prend

$$\alpha = \alpha' = r(\alpha_2) \quad , \quad u = \left(r(\alpha_2)/\alpha_2\right) u_1 ,$$

δ' étant choisi comme ci-dessus.

*
* *

CHAPITRE IV

Le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble réelle

1. Notations - Rappels.

1-1 On garde les notations introduites aux § 1-1, 1-3 et 1-5 du chapitre III. En outre on note

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle de dimension finie n, fixée une fois pour toute

- $\mathcal{D}$ l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$

Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, on identifie $K(\mathfrak{h})^{\sim}$ à $K(\tilde{\mathfrak{h}})$ (cf. III 4-1), et on effectue les identifications qui donnent un sens aux inclusions

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & \cap & & & & \\ \mathfrak{h} & \subset & U(\mathfrak{h}) & \subset & K(\mathfrak{h}) & \subset & K(\mathfrak{g}) \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \tilde{\mathfrak{h}} & \subset & U(\tilde{\mathfrak{h}}) & \subset & K(\tilde{\mathfrak{h}}) & \subset & K(\tilde{\mathfrak{g}}) \end{array}$$

et $\mathfrak{g}^* \subset (\mathfrak{g}^*)^{\sim} = (\tilde{\mathfrak{g}})^*$.

On note σ l'automorphisme canonique de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ (III 4-1) ; il laisse stable $\tilde{\mathfrak{h}}$, $U(\tilde{\mathfrak{h}})$, $K(\tilde{\mathfrak{h}})$, et il lui correspond (ibid.) une involution σ^* de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$. Pour tout $\alpha \in K(\tilde{\mathfrak{g}})$, et pour tout $\lambda \in (\tilde{\mathfrak{g}})^*$ on posera

$$\bar{\alpha} = \sigma\alpha \qquad r(\alpha) = (1/2)\cdot(\alpha + \bar{\alpha}) \qquad j(\alpha) = (1/2i)\cdot(\alpha - \bar{\alpha})$$

$$\bar{\lambda} = \sigma^*\lambda \qquad r(\lambda) = (1/2)\cdot(\lambda + \bar{\lambda}) \qquad j(\lambda) = (1/2i)\cdot(\lambda - \bar{\lambda})$$

Donc $\alpha = r(\alpha) + i.j(\alpha)$, $\lambda = r(\lambda) + i.j(\lambda)$; $r(\alpha), j(\alpha) \in K(\mathfrak{g})$, $r(\lambda), j(\lambda) \in \mathfrak{g}^*$. On dira que α (resp. λ) est <u>réel</u> si $\alpha = \bar{\alpha}$ (resp. si $\lambda = \bar{\lambda}$) .

Pour toute partie E de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$, on posera $R(E) = E \cap K(\mathfrak{g})$, et on notera $E^{\vee}$ la partie de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ égale à $E - \{0\}$ si $0 \in E$, et égale à E sinon.

Soit $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une partie ordonnée finie de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$. Posons $F' = \{r(\alpha_1), j(\alpha_1), r(\alpha_2), \dots, r(\alpha_n), j(\alpha_n)\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{2n}\}$, avec $\beta_{2i} = r(\alpha_i)$, $\beta_{2i+1} = j(\alpha_i)$. On notera D(F) la partie de $K(\mathfrak{g})$ déduite de F' par suppression des termes répétés, et des termes β_i tels que $-\beta_i$ figure parmi les β_j , pour $j < i$.

Si $B = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K(\mathfrak{g})^n$, nous poserons : $\{B\} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$
Enfin, pour toute extension commutative Ω d'un corps Q , nous noterons $d(\Omega, Q)$ la dimension algébrique de Ω sur Q .

<u>1-2 Structure de $\mathfrak{g}$</u>.

Nous ferons choix, une fois pour toutes, d'une suite de Jordan-Holder

$$(\Sigma) = (\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_m = \{0\})$$

du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$, ayant les propriétés du lemme 4-12 , dont nous garderons les notations : à tout indice $k \in [0, m-1]$ est associé un objet $(a_k, a'_k, a''_k, \lambda_k, \lambda'_k, \lambda''_k) \in (\tilde{\mathfrak{g}})^3 \times ((\tilde{\mathfrak{g}})^*)^3$, fixé une fois pour toutes ; on note I l'ensemble des indices k tels que $\dim (\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 1$; il existe $p \in [1, m]$ tel que $\mathfrak{g}_p = \mathcal{D}$. On posera en outre pour simplifier

$$U_m = K_m = \mathbb{R} \text{ , et , pour } k < m$$

$$U_k = U(\mathfrak{g}_k) \text{ , } K_k = K(\mathfrak{g}_k) \text{ , } Z_k = Z(\mathfrak{g}) \cap K_k \text{ , } Z = Z_0 = Z(\mathfrak{g})$$

et $L = Z(\mathcal{D}) = Z(\mathfrak{g}_p)$, et, pour $k \in [0, m]$, $L_k = L \cap K_k$.

Donc $k \geqslant p$ implique $L_k \supset Z_k$.

Il résulte de III 4-1 que, pour tout $k \in [0, m]$,

$$K(\tilde{\mathfrak{g}}_k) = \tilde{K}_k = \sigma(\tilde{K}_k) \ , \quad Z(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k) = \tilde{Z}_k = \sigma(\tilde{Z}_k)$$

et pour $k \geqslant p$, $Z(\tilde{\mathcal{D}}) \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k) = \tilde{L}_k = \sigma(\tilde{L}_k)$.

Par ailleurs (III 4-12) , si $\dim(\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 2$, alors $\tilde{\mathfrak{g}}_{k+1} \oplus \mathbb{C}\, a_k$ et , $\tilde{\mathfrak{g}}_{k+1} \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}_k = \sigma(\tilde{\mathfrak{g}}_{k+1} \oplus \mathbb{C}\, a_k)$ sont des idéaux de $\tilde{\mathfrak{g}}$, distincts et contenus dans $\tilde{\mathfrak{g}}_k$.

1-3 Le groupe Ψ .

Nous noterons

- $\mathbb{R}$ le sous-espace vectoriel de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$ engendré par les λ_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$
- $\mathbb{R}_i$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{R}$ formé des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda + \bar{\lambda} = 0$
- Ψ l'ensemble $\tilde{L} \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} S(\lambda) \right)$
- Ψ_i l'ensemble $\tilde{L} \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_i} S(\lambda) \right)$
- $\mathfrak{U}'$ l'ensemble des éléments u' de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ tels que $u'\,\bar{u}' = 1$
- $\mathfrak{U}$ l'ensemble $\mathfrak{U}' \cap \Psi$

Nous poserons pour $k \geqslant p$

$$\Psi(k) = \Psi \cap \tilde{K}_k = \Psi \cap \tilde{L}_k \ , \quad \Psi_i(k) = \Psi_i \cap \tilde{K}_k = \Psi_i \cap \tilde{L}_k$$

$$\mathfrak{U}(k) = \mathfrak{U} \cap \tilde{K}_k = \mathfrak{U} \cap \tilde{L}_k$$

Pour tout $v \in \Psi_i$, nous appellerons <u>hauteur</u> de v , et noterons $h(v)$ l'entier k tel que $v \in \Psi_i(k) - \Psi_i(k+1)$, si $v \notin \mathfrak{C}$, et poserons $h(v) = m$ sinon ; $h : v \longrightarrow h(v)$ applique donc Ψ_i dans $[p, m]$.

<u>1-4</u> <u>Propriétés des ensembles</u> Ψ , Ψ_i, $\mathfrak{U}$, $S(\lambda)$.

On note λ, μ des éléments de $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$, α un élément de $K(\tilde{\mathfrak{g}}) - \{0\}$ Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de nos définitions et de III <u>3-2</u> et III <u>4-1</u> :

<u>1</u> Si $\bar{\alpha}/\alpha \in \Psi$, alors $\bar{\alpha}/\alpha \in \mathfrak{U}$

<u>2</u> Ψ , Ψ_i, $\mathfrak{U}$, sont des sous-groupes, stables par σ , du groupe multiplicatif $\tilde{L} - \{0\}$. On a les inclusions

$$\begin{array}{ccc} \Psi \supset & \Psi_i & \supset S(0) = \tilde{Z} - \{0\} \\ & \cup & \\ & \mathfrak{U} & \end{array}$$

<u>3</u> $S(\lambda + \mu) \subset S(\lambda)S(\mu)$, $S(-\lambda) = S(\lambda)^{-1}$, $S(\bar{\lambda}) = \sigma S(\lambda)$

$$S(\lambda).S(\lambda)^{-1} \subset \tilde{Z}$$

<u>4</u> $S(\lambda) \cup \{0\}$ est un espace vectoriel sur $\tilde{Z}$. Par suite

$$\tilde{Z} . S(\lambda) \subset S(\lambda) \cup \{0\} , \quad S(\lambda) + S(\lambda) \subset S(\lambda) \cup \{0\}$$

et $$\tilde{Z}_p . \Psi \subset \Psi \cup \{0\}$$

<u>Dans ce qui suit, et singulièrement dans les démonstrations des propositions 1 et 2 ces propriétés seront considérées comme connues.</u>

<u>1-5</u> Nous nous dirigeons maintenant vers le théorème 4 . Une première étape consistera à établir l'existence d'une famille $(\mathfrak{F})$ de générateurs de Z sur $\mathbb{R}$ d'un certain type : ce sera l'objet de la prop. 1 , au § 2 .

Au § 3 , sera établie une propriété de décomposition des éléments de Ψ_i (prop. 2) . La démonstration du théorème 4 consistera alors essentiellement à construire, à partir d'une famille $(\mathcal{F})$, fournie par la prop. 1 , une famille $(\mathcal{F}')$, algébriquement libre sur $\mathbb{R}$, de générateurs de Z sur $\mathbb{R}$, et ceci en utilisant l'outil que fournit la prop. 2 .

2. Structure de $Z(\mathfrak{g})$. Première appro-ximation.

Proposition 1. Les notations étant celles du § 1 , soit J la partie de $[0, m-1]$ formée des indices k tels que $\breve{Z}_k \neq \breve{Z}_{k+1}$.

Alors il existe un recouvrement (J_i) , $0 \leqslant i \leqslant 7$, de J par des parties disjointes, et, pour tout $k \in J$,

1) un élément

$$M_k = (u_k, v_k, w_k ; \delta_k ; \alpha_k ; \beta_k ; \gamma_k ; x_k, y_k, \xi_k, \eta_k ; r_k, s_k, t_k)$$

de $(\breve{L}_{k+1})^3 \times \breve{L}_k \times Z_k \times (\breve{Z}_k)^2 \times (Z_k)^4 \times Z^3$

2) une partie G_k de Z_k

3) une partie $\breve{G}_k$ de $\breve{Z}_k$

tels que

(i) pour tout $k \in J$

$\underline{a}$ $x_k = r(\gamma_k), y_k = j(\gamma_k), \xi_k = r(\beta_k), \eta_k = j(\beta_k)$

$\underline{b}$ deux quelconques des 3 éléments $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ sont toujours, ou distincts, ou tous deux nuls ; $\breve{G}_k = \{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}^\nu$, $\breve{G}_k$ est algébriquement libre sur $\breve{Z}_{k+1}$ et $\breve{Z}_k = \breve{Z}_{k+1}(\breve{G}_k)$.

$\underline{c}$ $G_k = D(\breve{G}_k)^\nu = \{\alpha_k, x_k, y_k, \xi_k, \eta_k\}^\nu$ et $Z_k = Z_{k+1}(G_k)$

(ii)$_0$ $\underline{a}$ $J_o = J \cap [0, p-1]$

$\underline{b}$ si $k \in J_o$, alors $\{M_k\}^{\nu} = \tilde{G}_k = G_k = \{\alpha_k\}$ et $\alpha_k - a_k \in K_{k+1}$.

(ii)$_1$ $\underline{a}$ J_1 est l'ensemble des indices $K \in J \cap [p, m]$ tels que $\dim (\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 1$

$\underline{b}$ Si $k \in J_1$, alors

- $\{M_k\}^{\nu} = \{u_k, \delta_k, \alpha_k, r_k\}$
- $\delta_k \in S(\lambda_k) \cap L_k$, $\delta_k - a_k \in K_{k+1}$, $L_k = L_{k+1}(\delta_k)$
- $r_k > 0$, $u_k \in S(-r_k\lambda_k) \cap L_{k+1}$, $\alpha_k = u_k(\delta_k)^{r_k}$
- $\tilde{G}_k = G_k = \{\alpha_k\}$

(ii)$_2$ $\underline{a}$ J_2 est l'ensemble des indices $k \in J \cap [p, m]$ tels que $\dim (\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 2$ et que $\tilde{L} \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k \oplus \mathbb{C}\, a_k) = \tilde{L} \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k \oplus \mathbb{C}\, \bar{a}_k) = \tilde{L}_{k+1}$

$\underline{b}$ si $k \in J_2$, alors

- $\{M_k\}^{\nu} = \{u_k, \delta_k, \alpha_k, r_k\}$
- $\delta_k \in S(\lambda_k) \cap \tilde{L}_k$, δ_k est algébriquement indépendant sur $\tilde{L}_{k+1}$, et $\tilde{L}_k = \tilde{L}_{k+1}(\delta_k)$
- $r_k > 0$, $u_k \in S(-r_k\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$
- α_k est un élément de $Z_k \cap \tilde{L}_{k+1}[\delta_k]$ de degré r_k en δ_k
- $\tilde{G}_k = G_k = \{\alpha_k\}$
- si $r_k > 1$, alors $\alpha_k = u_k(\delta_k)^{r_k}$ et $\bar{\delta}_k/\delta_k \in \tilde{L}_{k+1}$

(ii)$_3$ $\underline{a}$ J_3 est l'ensemble des indices $k \in J \cap [p, m]$ tels que $\dim (\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 2$, $\tilde{L} \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k \oplus \mathbb{C}\, a_k) \neq \tilde{L}_{k+1}$ et que $S(\lambda_k) \cap \tilde{L} \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k \oplus \mathbb{C}\, a_k) = S(\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$

b si $k \in J_3$, alors

- $\{M_k\}^{\nu} = \{u_k, \delta_k, \alpha_k, r_k\}$

- δ_k et $\bar{\delta}_k$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$ et $\tilde{L}_k = \tilde{L}_{k+1}(\delta_k, \bar{\delta}_k)$

- il existe des éléments $v'_k \in S(\lambda_k - \bar{\lambda}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$, et $w'_k \in \tilde{L}_{k+1}$ tels que $v'_k \bar{v}'_k = 1$ et que $\delta_k + v'_k \bar{\delta}_k + w'_k \in S(\lambda_k)$

- $r_k > 0$, $u_k \in S(-r_k\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$,

- α_k est un élément de $Z_k \cap \tilde{L}_{k+1}[\delta_k + v'_k \bar{\delta}_k + w'_k]$ de degré r_k en $\delta_k + v'_k \bar{\delta}_k + w'_k$,

- $\tilde{G}_k = G_k = \{\alpha_k\}$

- si $r_k > 1$, alors $\alpha_k = u_k(\delta_k + v'_k \bar{\delta}_k + w'_k)^{r_k}$ et $\overline{(\delta_k + v'_k \bar{\delta}_k + w'_k)}/(\delta_k + v'_k \bar{\delta}_k + w'_k) \in \tilde{L}_{k+1}$

$(ii)_3$, a $J_4 \cup J_5 \cup J_6 \cup J_7$ est l'ensemble des indices $k \in J \cap [p, m]$ tels que $\dim(\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 2$, $\tilde{L} \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k \oplus \mathbb{C}\, a_k) \neq \tilde{L}_{k+1}$ et que $S(\lambda_k) \cap \tilde{L} \cap K(\tilde{\mathfrak{g}}_k \oplus \mathbb{C}\, a_k) \neq S(\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$

b si $k \in J_4 \cup J_5 \cup J_6 \cup J_7$, alors δ_k et $\bar{\delta}_k$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$ et $\delta_k \in S(\lambda_k)$.

$(ii)_4$ si $k \in J_4$, alors

- $\{M_k\}^{\nu} = \{u_k, \delta_k, \alpha_k, r_k\}$
- $r_k > 0$, $u_k \in S(-r_k(\lambda_k + \bar{\lambda}_k)) \cap L_{k+1}$,
- $\alpha_k = u_k(\delta_k \bar{\delta}_k)^{r_k}$
- $\tilde{G}_k = G_k = \{\alpha_k\}$

$(ii)_5$ si $k \in J_5$, alors

- $\{M_k\}^{\nu} = \{v_k, \beta_k, \xi_k, \eta_k, s_k\}$

- $s_k > 0$, $v_k \in S(s_k\ (\bar{\lambda}_k - \lambda_k)) \cap \tilde{L}_{k+1}$
- $\beta_k = v_k\ (\delta_k / \bar{\delta}_k)^{s_k}$
- $\tilde{G}_k = \{\beta_k\}$, $G_k = \{\xi_k, \eta_k\}$
- $\xi_k^2 + \eta_k^2 = v_k\ \bar{v}_k \in Z_{k+1}$

$(ii)_6$ si $k \in J_6$, alors

- $\{M_k\}^\nu = \{w_k, \gamma_k, x_k, y_k, r_k, t_k\}$
- $r_k > 0$, $r_k \neq |t_k|$, et $w_k \in S(-r_k \lambda_k - t_k \bar{\lambda}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$
- $\gamma_k = w_k\ (\delta_k)^{r_k}\ (\bar{\delta}_k)^{t_k}$
- $\tilde{G}_k = \{\gamma_k, \bar{\gamma}_k\}$, $G_k = \{x_k, y_k\}$

$(ii)_7$ si $k \in J_7$, alors

- $\{M_k\}^\nu = \{u_k, v_k, \alpha_k, \beta_k, \xi_k, \eta_k, r_k, s_k\}$
- $r_k > 0$, $s_k > 0$, $u_k \in S(-r_k(\lambda_k + \bar{\lambda}_k)) \cap L_{k+1}$,

  $v_k \in S(s_k\ (\bar{\lambda}_k - \lambda_k)) \cap \tilde{L}_{k+1}$
- $\alpha_k = u_k\ (\delta_k\ \bar{\delta}_k)^{r_k}$, $\beta_k = v_k\ (\delta_k / \bar{\delta}_k)^{s_k}$
- $\tilde{G}_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$, $G_k = \{\alpha_k, \xi_k, \eta_k\}$
- $\xi_k^2 + \eta_k^2 = v_k\ \bar{v}_k \in Z_{k+1}$

(iii) si $k \in J - (J_5 \cup J_7)$, alors Z_k est une extension pure de Z_{k+1} et G_k est algébriquement libre sur Z_{k+1} .

Démonstration.

1 Pour toute assertion (P) de l'énoncé, notons $(P)^k$ l'assertion que (P) est vraie pour l'indice k , supposé fixé (ce qui implique que $k \in J$) .

Supposons définis, un recouvrement (J_i), $0 \leq i \leq 7$ de J par des parties disjointes, et, pour tout $k \in J$, une partie $M'_k = \{u_k, v_k, w_k, \delta_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, r_k, s_k, t_k\}$ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ tels que, si l'on pose $\tilde{G}_k = \{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}^{\vee}$, alors $\tilde{G}_k$ et les éléments de M'_k vérifient celles des assertions de l'énoncé qui les concernent. Montrons que, dans ces conditions, la proposition est vraie.

En effet, on peut d'abord, pour tout $k \in J$, définir ξ_k, η_k, x_k, y_k de manière à vérifier (i) $\underline{a}$, et poser $G_k = D(\tilde{G}_k)^{\vee}$. Il résulte alors de III 4-1 et de (i) $\underline{b}$ que $Z_k = Z_{k+1}(G_k)$, et donc (i) est vrai. Les assertions $(ii)_{\tau}$, $\tau = 0, 1, 2, 3, 3', 4$ sont alors trivialement vérifiées. Si $k \in J_6$, alors x_k et y_k sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$: sinon γ_k et $\overline{\gamma}_k$ ne seraient pas algébriquement indépendants sur $\tilde{Z}_{k+1}$. Par suite $G_k = \{x_k, y_k\}$, et $(ii)_6$ est vérifiée. Si $k \in J_5 \cup J_7$, alors ξ_k et η_k sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$: sinon β_k serait algébrique sur $\tilde{Z}_{k+1}$. Si donc $k \in J_5$, alors $G_k = \{\xi_k, \eta_k\}$; et $(ii)_5$ est vérifiée. Pour vérifier $(ii)_7$ il suffit dans ces conditions de montrer que, si $k \in J_7$, alors $\alpha_k \notin \{\xi_k, -\xi_k, \eta_k, -\eta_k\}$. Dans le cas contraire, en effet, comme $\xi_k = 1/2\,(\beta_k + \overline{\beta}_k) \in \tilde{L}_{k+1}(\delta/\overline{\delta})$ et que $\eta_k = \frac{1}{2i}(\beta_k - \overline{\beta}_k) \in \tilde{L}_{k+1}(\delta/\overline{\delta})$, $\delta\overline{\delta}$ serait algébrique sur $\tilde{L}_{k+1}(\delta/\overline{\delta})$ ce qui est exclu (III 2-6 et $(ii)_3$, $\underline{b}$).

Dans ces conditions, on a, pour tout $k \in J - (J_5 \cup J_7)$:

$d(Z_k, Z_{k+1}) = d(\tilde{Z}_k, \tilde{Z}_{k+1}) = \text{card}\,\tilde{G}_k = \text{card}\,G_k$, ce qui, compte-tenu de (i) $\underline{c}$ implique (ii), et la proposition.

$\underline{2}$ Nous allons maintenant utiliser les lemmes 5-1 à 5-5 du chapitre III. Ces lemmes mettent en évidence 8 types d'éventualité pouvant se présenter pour un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$, éventualités qu'on peut représenter ainsi :

(0)	Cas du lemme <u>5-1</u> , si $[\mathfrak{g}, \alpha] \subset \mathfrak{B}$		
(1)	Cas général du Lemme <u>5-1</u>		
$(I)_{1,1}$	éventualité	$(I)_{1,1}$	du lemme <u>5-4</u>
$(I)_{1,2}$	"	$(I)_{1,2}$	du lemme <u>5-4</u>
$(I)_{1,3}$	"	$(I)_{1,3}$	" " "
$(I)_{1,4}$	"	$(I)_{1,4}$	" " "
$(I)_{2,1}$	"	$(I)_{2,1}$	" " <u>5-5</u>
$(II)_1$	"	$(II)_1$	" " "

Nous dirons que $k \in J$ est du type (0) (resp. (1),...) si l'éventualité (0) (resp. (1),...) est réalisée par le couple $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_{k+1})$.

<u>3</u> <u>Construction des ensembles</u> J_i , $i = 0, 1, \ldots, 7$.

Définissons l'ensemble J_o (resp. J_1, J_2, J_3) par la condition de vérifier $(ii)_o$ <u>a</u> (resp. $(ii)_1$ <u>a</u>, $(ii)_2$ <u>a</u>, $(ii)_3$ <u>a</u>) . Il est clair alors que l'ensemble $J - (J_o \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3)$ vérifie la condition $(ii)_{3'}$, <u>a</u> , laquelle implique, compte tenu du lemme 4-8 , que, pour les indices k de cet ensemble, le couple $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_{k+1})$ réalise l'éventualité $(I)_1$ du lemme 5-3 . Nous définirons alors les ensembles J_4 , J_5 , J_6 , J_7 comme suit :

J_4	est l'ensemble des	$k \in J - (J_o \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3)$	de type	$(I)_{1,3}$
J_5	"	"	"	$(I)_{1,4}$
J_6	"	"	"	$(I)_{1,1}$
J_7	"	"	"	$(I)_{1,2}$.

Il résulte alors de notre construction, et du lemme 5-4 , que $(J_i)_{i \in [0,7]}$ est un recouvrement de J par des parties disjointes.

4 Soit alors, pour tout $\tau \in [0, 7]$, l'assertion suivante
$(ii)'_\tau$ Pour tout $k \in J_\tau$, il existe une partie $\tilde{G}_k$ de $\tilde{Z}_k$ et une partie $M'_k = \{u_k, v_k, w_k, \delta_k, \alpha_k, \gamma_k, r_k, s_k, t_k\}$ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ telles que $\tilde{G}_k$ et les éléments de M'_k vérifient, en ce qui les concernent, les assertions $(i)^k$, $((ii)_\tau)^k$, et, si $\tau \in [4, 7]$, $((ii)_{3'})^k$.

Compte tenu des § 1 et 3 , il nous suffit de vérifier les assertions $(ii)'_\tau$. Or $(ii)'_4$, $(ii)'_5$, $(ii)'_6$, $(ii)'_7$ résultent du lemme 5-4 , compte tenu de la définition donnée au § 3 des ensembles J_4 , J_5 , J_6 , J_7 . Par ailleurs $k \in J_2$ (resp. $k \in J_3$) implique, compte tenu de II 4-8 , que k est de type $(II)_1$ (resp. de type $(II)_{2,1}$) ; les assertions $(ii)'_2$ et $(ii)'_3$ résultent alors du lemme 5-5 .

Pour vérifier $(ii)'_0$ et $(ii)'_1$, notons d'abord que si $k \in J$ et $G \subset Z_k$, alors dire que G engendre Z_k sur Z_{k+1} (resp. est algébriquement libre sur Z_{k+1}) revient à dire que G engendre $\tilde{Z}_k$ sur $\tilde{Z}_{k+1}$ (resp. est algébriquement libre sur $\tilde{Z}_{k+1}$) . Cela étant, nous appliquerons le lemme 5-1 . (*) Si $k \in J_1$, alors λ_k est réel et k est de type (1) . Il existe donc un entier $r_k > 0$ et

$$\delta_k \in S(\lambda_k) \cap Z(\operatorname{Ker}\lambda_k) \cap K_k \ , \ u_k \in S(-r_k\lambda_k) \cap Z(\operatorname{Ker}\lambda_k) \cap K_{k+1}$$

tels que $\delta_k - a_k \in K_{k+1}$ et que $Z_k = Z_{k+1}(u_k(\delta_k)^{r_k})$

Or, comme $\operatorname{Ker}\lambda_k$ est un idéal contenant $\mathcal{D}$, et que $K_k \subset K(\mathcal{D}) = K_p$, on a $Z(\operatorname{Ker}\lambda_k) \cap K_k \subset L_k$, $Z(\operatorname{Ker}\lambda_k) \cap K_{k+1} \subset L_{k+1}$. Comme $\delta_k - a_k \in K_{k+1}$, il résulte alors de (L) que $L_k = L_{k+1}(\delta_k)$, ce qui montre $(ii)'_1$, et termine la démonstration.

Remarque. Supposons définis un recouvrement (J_i) de J et, pour tout $k \in J$, un triplet $\mathcal{C}_k = (M_k, \tilde{G}_k, G_k)$, de manière à vérifier la prop. 1 . Envisageons les transformations de l'un des types suivants 0_1, 0_2 . On se donne un indice $k_0 \in J$, et deux éléments

$$\varepsilon_1 \in Z_{k+1} \ , \ \varepsilon_2 \subset \tilde{Z}_{k+1} \ , \ \varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0 \ .$$

(*) Si $k \in J_0$, alors $\lambda_k = 0$, donc k est de type (0), d'où $(ii)'_0$.

(O_1) On conserve les triplets $\mathcal{C}_k$, pour $k \neq k_o$. On substitue dans M_{k_o}, $\varepsilon_1 \alpha_{k_o}$ à α_{k_o} et $\varepsilon_1 u_k$ à u_k, les autres éléments de $\{M_{k_o}\}$ étant conservés. On note $M^1_{k_o}$ l'élément, déduit de M_{k_o}, obtenu de la sorte, et on définit alors de manière évidente un triplet $\mathcal{C}^1_{k_o} = (M^1_{k_o}, \tilde{G}^1_{k_o}, G^1_{k_o})$.

(O_2) On conserve les triplets $\mathcal{C}_k$ pour $k \neq k_o$. On substitue dans M_{k_o}, $\varepsilon_2 \beta_{k_o}$ à β_{k_o}, $\varepsilon_2 v_{k_o}$ à v_{k_o}, $r(\varepsilon_2 \beta_{k_o})$ à $r(\beta_{k_o}) = \xi_{k_o}$, et $j(\varepsilon_2 \beta_{k_o})$ à $j(\beta_{k_o}) = \eta_{k_o}$, les autres éléments de $\{M_{k_o}\}$ étant conservés. On note $M^2_{k_o}$ l'élément, déduit de M_{k_o}, obtenu de la sorte, et on définit alors de manière évidente un triplet $\mathcal{C}^2_{k_o} = (M^2_{k_o}, \tilde{G}^2_{k_o}, G^2_{k_o})$.

Je dis que la proposition reste vérifiée si l'on remplace $\mathcal{C}_{k_o}$ par $\mathcal{C}^1_{k_o}$ ou par $\mathcal{C}^2_{k_o}$, les autres $\mathcal{C}_k$ étant conservés (ou, en d'autres termes, si l'on effectue l'une des opérations (O_1), (O_2)).

Soit en effet τ_o l'indice tel que $k_o \in J_{\tau_o}$. Adoptons les notations des § 1 et 4 de la démonstration de la prop. 1. L'ensemble M'_{k_o} est remplacé par un ensemble $(M'_{k_o})^1$, ou $(M'_{k_o})^2$. Il suffit, compte tenu du § 1 de la démonstration, de montrer que $\tilde{G}^1_{k_o}$ (resp. $\tilde{G}^2_{k_o}$) et les éléments de $(M'_{k_o})^1$ (resp. $M'_{k_o})^2$, vérifient $((ii)'_{\tau_o})^{k_o}$, ce qui est trivial.

3. <u>Proposition 2</u>.

(i) Les notations étant celles de la prop. 1 ; on suppose choisis un recouvrement (J_i) de J, et, pour tout $k \in J$, une partie $\{M_k\}$ de $\dot{K}(\tilde{\mathfrak{g}})$ de manière à vérifier la dite proposition. Dans ces conditions, tout élément v de Ψ_i possède la propriété suivante

(P) Il existe des éléments $z(v)$, $u(v)$, $\rho(v)$ de $\tilde{L}$ (*) tels que

(*) les symboles $z(\ )$, $u(\ )$, $\rho(\ )$ ne sont pas fonctionnels ; il en est de même des symboles $z'(\ )$,... introduits dans la démonstration.

a $v = z(v) \, . \, u(v) \, . \, \rho(v)$

b $z(v) \in \tilde{Z}_{h(v)}$, $u(v) \in \mathcal{U}(h(v))$, $\rho(v) \in \psi_i(h(v))$.

c ou bien $\rho(v) = 1$, ou bien il existe un entier $\ell \geq h(v)$ de $J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7$ et un élément $\tau(v)$ de $Z_{\ell+1}$ tels que

$$\rho(v) \bar{\rho}(v) = \alpha_\ell \tau(v) \quad \text{et} \quad \rho(v) \in \psi_i(\ell)$$

(ii) Pour tout couple d'entiers (k_1, k_2) tels que $p \leq k_1 \leq k_2$, si v est un élément de $\psi_i(k_1)$ tel que $v \bar{v} \in Z_{k_2}$, alors il existe un élément v_1 de $\mathcal{U}(k_1)$ et un élément v_2 de $\psi_i(k_2)$ tels que $v = v_1 v_2$.

Démonstration.

1 Disons qu'un élément $v \in \psi_i$ a la propriété (P') si il existe des éléments $z'(v)$, $u'(v)$, $\rho'(v)$ de $\tilde{L}$ tels que

a' $v = z'(v) \, . \, u'(v) \, . \, \rho'(v)$

b' $z'(v) \in \tilde{Z}_{h(v)}$, $u'(v) \in \mathcal{U}(h(v))$, $\rho'(v) \in \psi_i(h(v))$

c' ou bien $\rho'(v) \in \psi_i(h(v) + 1)$, ou bien $\rho'(v)$ vérifie la condition c de l'énoncé.

Nous montrons au § 2 que si tout élément de ψ_i vérifie (P') , alors tout élément de ψ_i vérifie (P) . Aux § 3, 4 et aux § 6 à 12 , on se donne un élément v de ψ_i , et on montre que v vérifie (P') . On note μ l'élément de $\mathcal{R}_i$ tel que $v \in S(\mu)$. Alors $v \bar{v} \in S(\mu + \mu') \subset S(0) \subset Z$. On note k' l'entier $\geq h(v)$ tel que $v \bar{v} \in Z_{k'} - Z_{k'+1}$ (on pose $k' = m$ si $v \in \mathbb{C}$) . Le cas : $h(v) < k'$ est étudié aux § 3 et 4 . On en déduit (ii) au § 5 . Les § 6 à 12 étudient le cas : $h(v) = k'$. L'assertion (i) résulte alors du § 2 . Notons que (P) et (P') sont trivialement vérifiées pour les éléments $v \in \psi_i$ de hauteur m : ils appartiennent à $\mathbb{C}$.

Nous userons dans ce qui suit des notations suivantes. La lettre σ désignera l'automorphisme canonique de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$. Si L_o est un sous-anneau de $\tilde{L}$, si $\varepsilon, \eta, \ldots$ sont des éléments de $\tilde{L}$, et si $P(\varepsilon, \eta, \ldots)$ est un élément de $L_o[\varepsilon, \eta, \ldots]$, on écrit $\bar{P}(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}, \ldots)$ pour, $\sigma(P(\varepsilon, \eta, \ldots))$. Si donc $\eta = \bar{\varepsilon}$, on a $\bar{P}(\bar{\varepsilon}, \varepsilon, \ldots) = \sigma(P(\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \ldots))$

2 Soient les assertions suivantes

$$(P'_o) : v \in \psi_i \Longrightarrow v \text{ vérifie } (P')$$
$$(P_k) : v \in \psi_i(k) \Longrightarrow v \text{ vérifie } (P) .$$

On sait que (P_m) est vraie. Montrons qu'on a, pour tout $k \in [p, m-1]$:

$$((P'_o) \text{ et } (P_{k+1})) \Longrightarrow (P_k) .$$

Soit en effet $v \in \psi_i(k)$ vérifiant (P'), et soient $z'(v)$, $u'(v)$, $\rho'(v)$ les éléments d'une décomposition de v vérifiant a', b', c'. Si $\rho'(v)$ vérifie c, alors v vérifie (P) ; sinon $\rho'(v) \in \psi_i(k+1)$, et donc $\rho'(v)$ vérifie (P) ; On peut alors écrire, notant $z(\rho'(v)), \ldots, \rho(\rho'(v))$ les éléments d'une décomposition de $\rho'(v)$ vérifiant a, b, c :

$$v = z'(v) \cdot u'(v) \cdot (z(\rho'(v)) \cdot u(\rho'(v)) \cdot \rho(\rho'(v))$$

et par suite v vérifie (P) ; il suffit de prendre

$$z(v) = z'(v) . z(\rho'(v)) \quad . \quad u(v) = u'(v) . u(\rho'(v)), \ \rho(v) = \rho(\rho'(v)) .$$

Il s'ensuit que (P'_o) implique que tous les éléments de ψ_i vérifient (P) il suffit donc de vérifier (P'_o).

3 Soient v, μ, k' définis comme au § 1. Posons

$$k = h(v) \qquad v_1 = v\,\bar{v}$$

Supposons d'abord :

$$k < k' \quad \text{et} \quad \dim (\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 1 \,.$$

Comme $\tilde{L}_k - \tilde{L}_{k+1}$ est $\neq \emptyset$, puisque $v \in \tilde{L}_k - \tilde{L}_{k+1}$, il en est de même de $L_k - L_{k+1}$; donc ((L)), il existe un générateur δ de L_k sur L_{k+1} tel que $\delta - a_k \in K_{k+1}$. Par suite (II 4-3)

(1) $\quad D_x \delta - \lambda_k(x)) \delta \in L_{k+1}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Soit alors $(P(\delta), Q(\delta))$ le couple d'éléments de $\tilde{L}_{k+1}[\delta]$ associés à v. On a donc $P(\delta) \,.\, \bar{P}(\delta) = v_1\, Q(\delta) \,.\, \bar{Q}(\delta)$, avec $v_1 \in Z_{k+1} \subset \tilde{L}_{k+1}$. Il existe par suite $v_2 \in \tilde{L}_{k+1}$ tel que $P(\delta) = \bar{Q}(\delta)\, v_2$, et par conséquent $v = v_2\, (\bar{Q}(\delta)/Q(\delta))$. On a alors, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

(2) $\quad \mu(x) \,.\, 1 = (D_x v)/v = (D_x v_2)/v_2 + (D_x \bar{Q}(\delta))/\bar{Q}(\delta) - (D_x Q(\delta))/Q(\delta)$

Par suite (II 2-5), $(D_x \bar{Q}(\delta)/\bar{Q}(\delta))$ et $(D_x Q(\delta)/Q(\delta)$ appartiennent à $\tilde{L}_{k+1}$. Or on a, notant r le degré de $Q(\delta)$ (et de $\bar{Q}(\delta)$) par rapport à δ :

$$Q(\delta) = \delta^r + \ldots \delta^{r-1} + \ldots \qquad \bar{Q}(\delta) = \delta^r + \ldots \delta^{r-1} + \ldots$$

et donc, compte tenu de (1) :

$$D_x\, Q(\delta) = r\, \lambda_k(x)\, \delta^r + \ldots \qquad D_x(\bar{Q}(\delta)) = r\, \lambda_k(x)\, \delta^r + \ldots$$

ce qui implique que $Q(\delta)$ et $\bar{Q}(\delta) \in S(r\lambda_k)$. Par suite $\bar{Q}(\delta)/Q(\delta) \in \tilde{Z}_k \cap \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}(k)$ et, compte tenu de (2), $v_2 \in S(\mu) \cap \tilde{L}_{k+1} \subset \psi_i(k+1)$. Partant, v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = 1 \,, \quad u'(v) = \bar{Q}(\delta)/Q(\delta) \,, \quad \rho'(v) = v_2$$

4 Supposons maintenant

$$k < k' \quad \text{et} \quad \dim(\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}) = 2$$

Comme $v \in \tilde{L}_k - \tilde{L}_{k+1}$, on a $\tilde{L}_k \neq \tilde{L}_{k+1}$ et on peut appliquer III 5-2 .

Distinguons deux cas

a L'éventualité (II) du lemme 5-2 est réalisée. On sait alors qu'il existe $\xi' \in \tilde{L}_k$ et $u' \in \tilde{L}_{k+1} \cap \mathfrak{U}'$ tels que

$$(3)\quad \begin{cases} \tilde{L}_k = \tilde{L}_{k+1}(\xi'), & \xi' \text{ est algébriquement indépendant sur } \tilde{L}_{k+1} \\ \text{et } D_x\, \xi' - \lambda(x)\, \xi' \in \tilde{L}_{k+1} & \text{pour tout } x \in \mathfrak{g} \end{cases}$$

et

$$(4)\quad \bar{\xi}' - \bar{u}'\xi \in \tilde{L}_{k+1}$$

(cette dernière relation résultant de III 5-2 (II) 2 c et d) . Notons $(P(\xi'), Q(\xi'))$ le couple d'éléments de $\tilde{L}_{k+1}[\xi']$ associé à v . On a donc $P(\xi')\,\bar{P}(\bar{\xi}') = v_1\; Q(\xi)\,\bar{Q}(\bar{\xi}')$, avec $v_1 \in \tilde{L}_{k+1}$, et il résulte de (4) que $\bar{P}(\bar{\xi}')$ (resp. $\bar{Q}(\bar{\xi}')$) est un polynôme en ξ de même degré que $P(\xi')$ (resp. $Q(\xi')$) . Il existe donc $v_2 \in \tilde{L}_{k+1}$ tel que $P(\xi') = \bar{Q}(\bar{\xi}')\, v_2$, et par suite $v = v_2\,(\bar{Q}(\bar{\xi}')/Q(\xi))$. On a alors, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$(5)\quad \mu(x).1 = (D_x v)/v = (D_x v_2)/v_2 + (D_x \bar{Q}(\bar{\xi}'))/\bar{Q}(\bar{\xi}') - (D_x Q(\xi'))/Q(\xi')$$

Or il résulte de (3) que $D_x\, Q(\xi')$ (resp. $D_x\, \bar{Q}(\bar{\xi}')$) est un polynôme en ξ' de degré $\leqslant$ à celui de $Q(\xi')$ (resp. $\bar{Q}(\bar{\xi}')$); comme $\bar{Q}(\bar{\xi}')$ et $Q(\xi')$ sont premiers entre eux sur $\tilde{L}_{k+1}[\xi']$, puisque $P(\xi') = \bar{Q}(\bar{\xi}')\, v_2$, il s'ensuit (III 2-5) que $(D_x\, Q(\xi))/Q(\xi')$ et $(D_x\, \bar{Q}(\bar{\xi}'))/\bar{Q}(\bar{\xi}') \in \tilde{L}_{k+1}$; On déduit alors de (3) , de la même manière qu'au § 3 , que $Q(\xi') \in S(r\,\lambda_k)$, et donc $\bar{Q}(\bar{\xi}') \in S(r\,\bar{\lambda}_k)$, ce qui implique (cf. (5) :

$$\bar{Q}(\bar{\zeta}')/Q(\zeta') \in S(r(\bar{\lambda}_k - \lambda_k)) \cap \tilde{L}_k \cap \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}(k)$$

et, compte tenu de (5) , $v_2 \in S(\mu + r(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)) \cap \tilde{L}_{k+1} \subset \Psi_i(k+1)$.

L'égalité $v = 1 \cdot \bar{Q}(\bar{\zeta}')/Q(\zeta') \cdot v_2$ montre alors que v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = 1 \ , \quad u'(v) \in \bar{Q}(\bar{\zeta}')/Q(\zeta') \quad , \quad \rho'(v) = v_2 \ .$$

<u>b</u> <u>L'éventualité (I) du lemme 5-2 est réalisée</u>. Soit alors $\zeta \in \tilde{L}_k$ tel que $\zeta - a_k \in \tilde{K}_{k+1}$ et $\tilde{L}_k = \tilde{L}_{k+1}(\zeta, \bar{\zeta})$. Il existe alors deux éléments $P = P(\bar{\zeta}, \zeta)$, $Q = Q(\bar{\zeta}, \zeta)$ de $\tilde{L}_{k+1}[\bar{\zeta}, \zeta]$, premiers entre eux sur $\tilde{L}_{k+1}(\bar{\zeta})[\zeta]$ et tels que $v = P/Q$. On a donc

$$(6) \qquad P(\bar{\zeta}, \zeta).\bar{P}(\zeta, \bar{\zeta}) = v_1\, Q(\bar{\zeta}, \zeta).\bar{Q}(\zeta, \bar{\zeta}) \ , \text{ avec } v_1 = v\,\bar{v} \in \tilde{L}_{k+1} \ .$$

Il existe donc un élément $P_1 = P_1(\bar{\zeta}, \zeta)$ de $\tilde{L}_{k+1}[\bar{\zeta}, \zeta]$ et un élément $P_2 = P_2(\bar{\zeta})$ de $\tilde{L}_{k+1}[\bar{\zeta}]$ tels que

$$(7) \qquad \bar{Q}(\zeta, \bar{\zeta}) = P(\bar{\zeta}, \zeta) \cdot \frac{P_1(\bar{\zeta}, \zeta)}{P_2(\bar{\zeta})}$$

et que P_2 et les coefficients (dans $\tilde{L}_{k+1}[\bar{\zeta}]$) des puissances de ζ dans P_1 soient premiers entre eux sur $\tilde{L}_{k+1}[\zeta]$. Comparant (6) et (7) , on obtient

$$(8) \qquad P_1(\bar{\zeta}, \zeta) \cdot \bar{P}_1(\zeta, \bar{\zeta}) \cdot v_1 = P_2(\bar{\zeta}) \cdot \bar{P}_2(\zeta) \ .$$

Donc (III 2-3) P_2 divise $\bar{P}_1$ dans $\tilde{L}_{k+1}[\bar{\zeta}, \zeta]$, et par suite $\bar{P}_2$ divise P_1 dans $\tilde{L}_{k+1}[\bar{\zeta}, \zeta]$. Par conséquent, $P_1/\bar{P}_2$ et $\bar{P}_1/P_2 \in \tilde{L}_{k+1}$. Notant alors v_2 un élément de $\tilde{L}_{k+1}$ tel que $\bar{P}_2 = \bar{v}_2\, P_1$, il vient :

$$v = P/Q = (P/\bar{P}) \cdot (\bar{P}_2/P_2) \cdot v_2 = (P\,\bar{P}_2/\overline{(P\,\bar{P}_2)})\, v_2$$

Compte tenu de III 2-4 , on peut alors écrire v sous la forme

$$v = (P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta)/\,\bar{P}_3(\delta\,,\,\bar{\delta})\; v_2\;,$$

$P_3 = P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta)$ étant un élément de $\tilde{L}_{k+1}\,[\bar{\delta},\,\delta]$ tel que P_3 et $\bar{P}_3$ n'aient aucun diviseur commun non trivial dans $\tilde{L}_{k+1}\,[\bar{\delta}\,,\,\delta]$.
On peut en outre, modifiant au besoin v_2 , supposer que P_3 a été choisi tel que

$$(9) \qquad P_3 = \delta^{\tau}\,(\bar{\delta}^{\,\sigma} + \dots\; \bar{\delta}^{\,\sigma-1} + \dots\,) + \delta^{\tau-1}\,(\dots) + \dots$$

σ, τ étant des entiers $\geqslant 0$.

On a alors, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$(10) \qquad \mu(x).1 = D_x\, v/v = D_x\, v_2/v_2$$
$$+\,(D_x\, P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta))/P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta) - (D_x\,\bar{P}_3(\delta,\,\bar{\delta}))/\,P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta)$$

Comme P_3 et $\bar{P}_3$ sont premiers entre eux sur $(\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}))\,[\delta]$ et sur $(\tilde{L}_{k+1}(\delta))\,[\bar{\delta}]$, il résulte alors de III 2-5 (appliqué 2 fois) que

$$(D_x\, P_3(\bar{\delta}\,;\,\delta))/P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta) \quad \text{et} \quad (D_x\,\bar{P}_3\,(\delta\,,\,\bar{\delta}))/P_3(\delta,\,\bar{\delta})$$
$$\in \tilde{L}_{k+1}\,(\bar{\delta}) \cap \tilde{L}_{k+1}\,(\delta) = \tilde{L}_{k+1}\;,$$

et ceci pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Or il résulte de (9) et de III 4-3 que, pour tout $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$D_x\, P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta) = \delta^{\tau}\,((\tau\,\lambda_k(x) + \sigma\,\bar{\lambda}_k(x))\;\bar{\delta}^{\,\sigma} + \dots\;\bar{\delta}^{\,\sigma-1} + \dots) + \delta^{\tau-1}(\dots)$$

et donc $P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta) \in S(\tau\lambda_k + \sigma\,\bar{\lambda}_k)$, et par suite $\bar{P}_3(\delta\,,\,\bar{\delta}) \in S(\tau\,\bar{\lambda}_k + \sigma\lambda_k)$, $P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta)/\,\bar{P}_3(\delta\,,\,\bar{\delta}) \in S((\tau-\sigma)(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)) \cap \tilde{L}_k \cap \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}(k)$. On déduit alors de (10) que $v_2 \in S(\mu + (\tau-\sigma)(\bar{\lambda}_k - \lambda_k)) \cap \tilde{L}_{k+1} \subset \psi_i\;(k+1)$.
Dans ces conditions, l'égalité $v = 1\,.\,(P_3(\bar{\delta}\,,\,\delta)/\,\bar{P}_3(\delta\,,\,\bar{\delta}))\,.\,v_2$ montre que v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = 1 \quad , \quad u'(v) = \frac{P_3(\bar{\delta}, \delta)}{\bar{P}_3(\delta, \bar{\delta})} \quad , \text{ et } \quad \rho'(v) = v_2 \; .$$

5 L'assertion suivante résulte aussitôt des § 3 et 4 .

(A) Si $w \in \psi_i$, et si $w\bar{w} \in Z_{h(w)+1}$, alors il existe $u''(w) \in \mathfrak{U}(h(w))$ et $\rho''(w) \in \psi_i(h(w)+1)$ tels que $w = u''(w).\,\rho''(w)$.

Soient

$(ii)_{k_1, k_2}$ l'assertion déduite de (ii) en y fixant k_1, k_2

$(ii)_\ell$, la conjonction des assertions $(ii)_{k_1, k_2}$, pour $p \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant m$ et $k_2 - k_1 = \ell \geqslant 0$.

Il est clair que (ii) est la conjonction des assertions $(ii)_0$, $(ii)_1$, ... $(ii)_{m-p}$ et que $(ii)_0$ est trivialement vraie. Il suffit donc, pour établir (ii) de vérifier que, pour $\ell \in [0, m-p-1]$, ((A) et $(ii)_\ell$) $\Longrightarrow (ii)_{\ell+1}$ Supposons donc $(ii)_\ell$ vérifiée, et soit $w \in \psi_i$ tel que $w\bar{w} \in Z_{h(w)+\ell+1} \subset Z_{h(w)+1}$. Alors $\rho''(w)\,\overline{\rho''(w)} = w\bar{w} \in Z_{h(w)+\ell+1}$ et $\rho''(w) \in \psi_i\,(h(w)+1)$. Donc $(ii)_\ell$ implique que $\rho''(w) = w_1' \,.\, w_2$, avec $w_1' \in \mathfrak{U}\,(h(\rho''(w)))$ et $w_2 \in \psi_i\;(h(w)+\ell+1)$. Donc $w/w_2 = u''(w)\,.\,w_1' \in \mathfrak{U}(h(w))$ ce qui termine la démonstration.

Revenant maintenant à l'étude entreprise aux § 3 et 4 , supposons désormais que $k = h(v) = k'$. Alors $k \in \bigcup_{i \in [1,7]} J_i$, ce qui nous amène à distinguer sept cas.

6 $k \in J_1$

On a alors, avec les notations de la prop. 1 $(ii)_1$, $\alpha_k = u_k(\delta_k)^{r_k}$, donc δ_k , qui appartient à $S(\lambda_k)$, est algébrique de degré r_k sur $\tilde{L}_{k+1}(\alpha_k)$, et $\tilde{L}_k = (\tilde{L}_{k+1}(\alpha_k))(\delta_k)$. Par conséquent (III 4-10).

(10) $\quad v = v_1'\,(\delta_k)^\ell \quad , 0 \leqslant \ell < r_k \; , \; v_1' \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k)$

Il s'ensuit (III 4-9) que

$$(11) \quad v'_1 = v_2\, v_3 , \quad v_2 \in \tilde{Z}_k , \quad v_3 \in \tilde{L}_{k+1} \cap S(\mu - \ell\lambda_k)$$

soit

$$(12) \quad v = v_2 \,.\, 1 \,.\, (v_3(\delta_k)^{\ell}) , \quad v_3(\delta_k)^{\ell} \in S(\mu) \cap \tilde{L}_k \subset \psi_i(k) .$$

Si $\ell = 0$, alors $v_3 \in \psi_i(k+1)$ et donc v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2 , \quad u'(v) = 1 , \quad \rho'(v) = v_3 .$$

Si $\ell > 0$, on déduit de (11) et (12) , puisque $v\,\bar{v} \in Z_k$:

$$v_3\, \bar{v}_3\, (\delta_k)^{2\ell} = v\, \bar{v}/v_2\, \bar{v}_2 \in Z_k = Z_{k+1}\, (u_k(\delta_k)^{r_k})$$

Comme $0 < \ell < r_k$, il en résulte (III 2-8) que $2\ell = r_k$ et

$$(13) \quad (v_3(\delta_k)^{\ell}).(\bar{v}_3(\delta_k)^{\ell}) = v_4\, \alpha_k , \quad \text{avec} \quad v_4 \in Z_{k+1} .$$

Les relations (11) (12), (13) montrent alors que v vérifie (P') (et même (P)) : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2 , \quad u'(v) = 1 , \quad \rho'(v) = v_3(\delta_k)^{\ell}$$

7 $k \in J_2$

Soient α_k, δ_k, r_k, u_k des éléments de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ vérifiant la prop. 1 (ii)$_2$. Alors $\delta_k \in S(\lambda_k)$ et δ_k est algébrique de degré $\leqslant r_k$ sur $\tilde{L}_{k+1}(\alpha_k)$ .Comme $\tilde{L}_k = (\tilde{L}_{k+1}(\alpha_k))(\delta_k)$, on a par conséquent (III 4-10

$$(10)' \quad v = v'_1\, (\delta_k)^{\ell} , \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \ell < r_k \quad \text{et} \quad v_1 \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k)$$

et il résulte alors de III 4-9 que

$$(11)' \quad v_1' = v_2\, v_3 \ , \quad \text{avec} \quad v_2 \in \tilde{Z}_k \quad \text{et} \quad v_3 \in S(\mu - \ell\lambda k) \cap \tilde{L}_{k+1}$$

Par conséquent

$$(12)' \quad v = v_2 \,.\, 1 \,.\, (v_3(\delta_k)^{\ell}) \quad \text{et} \quad v_3(\delta_k)^{\ell} \in S(\mu) \cap \tilde{L}_k \subset \psi_i(k)$$

Si $\ell = 0$, alors $v_3 \in S(\mu) \cap \tilde{L}_{k+1} \subset \psi_i(k+1)$, et donc v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2 \ , \quad u'(v) = 1 \quad \rho'(v) = v_3$$

Si $\ell > 0$, alors $r_k > 1$, donc (prop. $1(ii)_2$) , $\alpha_k = u_k(\delta_k)^{r_k}$ et il existe $\chi_k \in \bar{L}_{k+1} - \{0\}$ tel que $\bar{\delta}_k = \chi_k\, \delta_k$; on déduit dans ces conditions de (11)' et (12)' , puisque $v\,\bar{v} \in Z_k$:

$$v_3\, \bar{v}_3 (\chi_k)^{\ell}\, (\delta_k)^{2\ell} = (v_3(\delta_k)^{\ell}).(\bar{v}_3(\bar{\delta}_k)^{\ell}) = v\,\bar{v}/v_2\,\bar{v}_2 \in Z_k = Z_{k+1}(u_k(\delta_k)^{r_k}) .$$

Comme $0 < \ell < r_k$, il en résulte (III 2-8) , que $2\ell = r_k$ et

$$(13)' \quad (v_3(\delta_k)^{\ell})\, (\bar{v}_3(\bar{\delta}_k)^{\ell}) = v_4\, \alpha_k \ , \quad \text{avec} \quad v_4 \in Z_{k+1} \,.$$

Les relations (11)', (12)', (13)' montrent alors que v vérifie (P') (et même (P)) : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2 \quad , \quad u'(v) = 1 \ , \quad \rho'(v) = v_3(\delta_k)^{\ell}$$

<u>8</u> $k \in J_3$

Notations de la prop. 1 $(ii)_3$: δ_k, u_k, v_k', w_k', r_k, α_k . On pose

$$\delta_k' = \delta_k + v_k'\ \bar{\delta}_k + w_k' \,.$$

Dans ces conditions, δ_k' est algébrique de degré $\leq r_k$ sur $\tilde{L}_{k+1}(\alpha_k)$, $\delta_k' \in S(\lambda_k)$ et $\tilde{L}_k = \tilde{L}_{k+1}(\delta_k, \delta_k')$, ce qui implique que $\tilde{L}_{k+1}(\delta_k, \delta_k') \cap \tilde{Z} = \tilde{Z}_k = \tilde{Z}_{k+1}(\alpha_k) \subset \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k)$. Par ailleurs comme (toujours en vertu de la prop. 1 $(ii)_3)$ $\tilde{v}'_k$ est $\neq 0$ et que δ_k et $\bar{\delta}_k$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$, δ_k et δ'_k sont également algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$. Montrons que dans ces conditions, les hypothèses du lemme 4-11 de III sont remplies, si l'on prend, avec les notations de ce lemme :

$$\delta = \delta_k \,, \quad \delta' = \delta'_k \,, \quad \lambda = \lambda_k \,, \quad E = \tilde{L}_{k+1} \,, \quad \alpha = \alpha_k$$

et si l'on choisit μ égal à la forme linéaire que nous avons ici pareillement désignée. Compte tenu de ce que nous venons de voir, il suffit de vérifier la condition $\underline{e}$ de ce lemme. Mais elle résulte de la prop. $(ii)_3$ $\underline{a}$ et du lemme 4-8 (iii) de III , car l'espace vectoriel $\mathfrak{R}$ (cf. § 1-3 du présent chapitre) auquel appartiennent λ et μ , possède les propriétés de l'espace vectoriel, pareillement noté $\mathfrak{R}$, de l'énoncé du lemme 4-8 . Il s'ensuit que

$$(10)'' \quad v = v'_1(\delta'_k)^{\ell} \,, \text{ avec } 0 \leq \ell < r_k \text{ et } v'_1 \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}\,(\alpha_k)$$

et il résulte alors de III 4-9 que

$$(11)'' \quad v'_1 = v_2\, v_3 \,, \text{ avec } v_2 \in \tilde{Z}_k \text{ et } v_3 \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$$

et donc

$$(12)'' \quad v = v_2 \circ 1 \,.\, (v_3(\delta'_k)^{\ell}) \text{ et } v_3(\delta'_k)^{\ell} \in S(\mu) \cap \tilde{L}_k \subset \psi_i(k)$$

Si $\ell = 0$, alors $v_3 \in S(\mu) \cap \tilde{L}_{k+1} \subset \psi_i\,(k+1)$, et donc v vérifie (P') ; il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2 \,, \quad v'(v) = 1 \,, \quad \rho'(v) = v_3 \,.$$

Si $\ell > 0$, alors $r_k > 1$, et donc (prop. 1 $(ii)_3$) , $\alpha_k = u_k(\delta'_k)^{1-\ell}$ et $\bar{\delta}'_k = \chi_k\, \delta'_k$, avec $\chi_k \in \tilde{L}_{k+1}$; on déduit dans ces conditions de (11)" et (12)" , puisque $v\,\bar{v} \in Z_k$:

$$v_3\, \bar{v}_3(x_k)^{\ell}\, (\delta'_k)^{2\ell} = (v_3(\delta'_k)^{\ell}).(\bar{v}_3(\bar{\delta}'_k)^{\ell}) = v\bar{v}/v_2\bar{v}_2 \in Z_k = Z_{k+1}(u_k(\delta'_k)^{r_k}).$$

Comme $0 < \ell < r_k$ il en résulte (III 2-8) que $2\ell = r_k$ et

$$(13)'' \quad (v_3(\delta'_k)^{\ell}) . (\bar{v}_3(\bar{\delta}'_k)^{\ell}) = v_4\, \alpha_k \text{ , avec } v_4 \in Z_{k+1} .$$

Les relations (11)", (12)", (13)" montrent alors que v vérifie (P') (et même (P)) : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2 \quad , \quad u'(v) = 1 \quad , \quad \rho'(v) = v_3(\delta_k)^{\ell}$$

<u>9</u> $k \in J_4$

On a, avec les notations de la prop. 1 $(ii)_3$, et $(ii)_4$:

$$\delta_k \in S(\lambda_k) \quad \text{et} \quad \alpha_k = u_k(\delta_k\, \bar{\delta}_k)^{r_k} \quad , \quad u_k \in L_{k+1}$$

Par suite δ_k est algébrique de degré $\leqslant r_k$ sur le corps $\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k, \alpha_k)$, lequel est stable par $\tilde{\mathfrak{g}}$. Par ailleurs

$$(\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k, \alpha_k))(\delta_k) \cap \tilde{Z} = \tilde{L}_k \cap \tilde{Z} = \tilde{Z}_k \subset \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k) \subset \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k, \alpha_k)$$

Nous pouvons donc appliquer III 4-10 . Par conséquent

$$(14) \quad v = v'_1\, (\delta_k)^{\ell} \text{ , avec } 0 \leqslant \ell < r_k \text{ et } v'_1 \in \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k, \alpha_k) \cap S(\mu - \ell\lambda_k).$$

Comme $\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k)$ est stable par $\tilde{\mathfrak{g}}$ (puisque $\bar{\delta}_k \in S(\bar{\lambda}_k)$) , et que α_k et $\bar{\delta}_k$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$ (puisque δ_k et $\bar{\delta}_k$ le sont) , on a alors, d'une part (III 4-9)

$$(15) \quad v'_1 = v_2\, v_3 \text{ , avec } v_2 \in \tilde{Z}_k \text{ et } v_3 \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k)$$

Et d'autre part

$$\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k) \cap \tilde{Z} \subset \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k) = \tilde{L}_{k+1}$$

Par conséquent (III 4-10)

$$(16)\quad v_3 = v_4\,(\bar{\delta}_k)^{\nu}\ ,\ \text{avec}\ \ \nu \in \mathbb{Z}\ ,\ \text{et}\ \ v_4 \in S(\mu - \ell\lambda_k - \nu\,\bar{\lambda}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$$

soit, en combinant (14), (15) et (16) ,

$$(17)\quad v = v_2 \cdot v_4\,(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell}\ ,\ \text{et}\ \ v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell} \in S(\mu) \cap \tilde{L}_k \subset \psi_i(k).$$

Comme $v\,\bar{v} \in Z_k$, on déduit alors de (15) et (17) que

$$v_4\,\bar{v}_4\,(\bar{\delta}_k\,\delta_k)^{\nu+\ell} = (v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell}).\overline{(v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell})} =$$

$$= v\,\bar{v}/v_2\,\bar{v}_2 \in Z_k = Z_{k+1}\,(u_k(\bar{\delta}_k\,\delta_k)^{r_k})$$

et par conséquent (III 2-8) :

$$(18)\quad \begin{cases} \ell + \nu = q \cdot r_k\ , & \text{avec}\ \ q \in \mathbb{Z} \\ (v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell}) \cdot \overline{(v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell})} = v_5(\alpha_k)^q\ ,\ v_5 \in Z_{k+1} \end{cases}$$

Posant alors

$$(19)\quad \begin{cases} q = 2\,t + \varepsilon\ , \quad t \in \mathbb{Z},\quad \varepsilon = 0\ \text{ou}\ 1 \\ v_6 = v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell}\,(\alpha_k)^{-t} = (v_4(u_k)^{-t}).(\bar{\delta}_k)^{\nu - tr_k}\,.\,(\delta_k)^{\ell - tr_k} \end{cases}$$

on déduit de (17) et (18) que

$$(20)\quad v_6 \in \psi_i(k)\ ,\quad v_6\,\bar{v}_6 = v_5(\alpha_k)^{\varepsilon}\quad \text{et}\quad v = v_2 \cdot (\alpha_k)^t \cdot v_6$$

Si $\varepsilon = 1$, il résulte alors de (15), (18), et (20) que v vérifie (P') (et même (P)) : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2.(\alpha_k)^t \ , \quad u'(v) = 1 \ , \quad \rho'(v) = v_6$$

Si $\varepsilon = 0$, alors $v_6 \bar{v}_6 = v_5 \in Z_{k+1}$, donc, compte tenu de (ii) ,

(21) $\quad v_6 = v_7 \cdot v_8$, avec $v_7 \in \mathfrak{U}(k)$ et $v_8 \in \psi_i(k+1)$.

L'égalité $v = v_2 \cdot (\alpha_k)^t v_7 \cdot v_8$ et les relations (15), (21) montrent alors que v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2(\alpha_k)^t, \ u'(v) = v_7 \ , \quad \rho'(v) = v_8$$

<u>10</u> $k \in J_5$

On a alors, les notations étant celles de la prop. 1 $(ii)_5$

$$\beta_k = v_k \ (\delta_k / \bar{\delta}_k)^{s_k} \ , \text{ avec } \ s_k > 0 \ \text{ et } \ \delta_k \in S(\lambda_k)$$

Donc $v_k(\delta_k)^{s_k} = \beta_k \ (\bar{\delta}_k)^{s_k}$, ce qui montre que δ_k est algébrique de degré $\leq s_k$ sur le corps $\tilde{L}_{k+1} \ (\bar{\delta}_k, \beta_k)$; lequel est stable par $\tilde{\mathfrak{g}}$. Par ailleurs

$$\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k, \beta_k) \cap \tilde{Z} = \tilde{Z}_k \subset \tilde{L}_{k+1}(\beta_k) \subset \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k, \beta_k)$$

et par conséquent (III 4-10)

(22) $\quad v = v_1' \ (\delta_k)^\ell$, avec $v_1' \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k, \beta_k)$ et $0 \leq \ell < s_k$.

Comme $\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k)$ est stable par $\tilde{\mathfrak{g}}$ (puisque $\bar{\delta}_k \in S(\bar{\lambda}_k)$, on a (III 4-9) :

(23) $\quad v_1' = v_2 \ v_3 \ , \quad v_2 \in \tilde{Z}_k \ , \quad v_3 \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k)$

Comme δ_k et $\bar{\delta}_k$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$ (prop. 1 $(ii)_{3'}$) , il en est de même de $\bar{\delta}_k$ et β_k , et donc

$$\tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k) \cap \tilde{Z} = \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k) \cap \tilde{Z}_k \subset \tilde{L}_{k+1}(\bar{\delta}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\beta_k) = \tilde{L}_{k+1}$$

et par conséquent (III 4-10)

(24) $v_3 = v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}$, avec $\nu \in \mathbb{Z}$, et $v_4 \in S(\mu - \ell\lambda_k - \nu\bar{\lambda}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$.

Soit en combinant (22), (23) et (24) :

(25) $v = v_2 \cdot v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu} (\delta_k)^{\ell}$, et $v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu} (\delta_k)^{\ell} \in S(\mu) \cap \tilde{L}_k \subset \Psi_i(k)$

Comme $v\,\bar{v} \in Z_k$, on déduit alors de (23) et (25)

$$v_4\,\bar{v}_4\,(\bar{\delta}_k\,\delta_k)^{\nu+\ell} = (v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell})\overline{(v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell})}$$

$$= v\,\bar{v}/v_2\,\bar{v}_2 \in \tilde{Z}_k = \tilde{Z}_{k+1}\,(v_4(\delta_k/\bar{\delta}_k))^{r_k}$$

et par conséquent (III 2-6) , $\nu = -\ell$ et

(26) $v = v_2 \cdot v_4\,(\delta_k/\bar{\delta}_k)^{\ell}$.

Comme $v_2 \in \tilde{Z}_k$ (cf. (23)) et que $(\delta_k/\bar{\delta}_k)^{\ell} \in S(\ell(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)) \cap \tilde{L}_k \cap \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}(k)$.

on a donc $v_4 \in S(\mu - \ell(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)) \cap \tilde{L}_{k+1} \subset \Psi_i(k+1)$. L'égalité (26) montre alors que v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_2 , \quad u'(v) = (\delta_k/\bar{\delta}_k)^{\ell} , \quad \rho'(v) = v_4 .$$

<u>11</u> $k \in J_6$

On a alors, les notations étant celles de la prop. 1 (ii)$_6$:

$$\gamma_k = w_k\,(\delta_k)^{r_k} \cdot (\bar{\delta}_k)^{t_k} , \quad \tilde{Z}_k = \tilde{Z}_{k+1}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k)$$

avec $r_k > 0$, $r_k \neq |t_k|$, $\delta_k \in S(\lambda_k)$, $w_k \in \tilde{L}_{k+1}$, ce qui implique que les corps $\tilde{L}_{k+1}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k)$ et $\tilde{L}_{k+1}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k, \bar{\delta}_k)$ sont stables par $\tilde{\sigma}$. Par ailleurs, les inclusions

$$(\tilde{L}_{k+1}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k))(\delta_k \bar{\delta}_k) \cap \tilde{Z} = \tilde{L}_k \cap \tilde{Z} = \tilde{Z}_k \subset \tilde{L}_{k+1}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k)$$

montrent que III 4-10 est applicable à ces deux corps. Une première application donne

$$(27) \quad v = v_1'(\delta_k)^{\ell} \quad , \quad \ell \in \mathbb{Z},\ v_1' \in S(\mu - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k, \bar{\delta}_k).$$

Une seconde application donne

$$(28) \quad v_1' = v_2(\bar{\delta}_k)^{\nu} \quad , \quad \nu \in \mathbb{Z},\ v_2 \in S(\mu - \ell\lambda_k - \nu\bar{\lambda}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k).$$

Appliquant ensuite III 4-9 (ce qui est possible, car $r_k \neq |t_k|$ implique (III 2-6) que $\gamma_k \bar{\gamma}_k$ et $\gamma_k / \bar{\gamma}_k$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$: il en est donc de même de γ_k et $\bar{\gamma}_k$), on obtient

$$(29) \quad v_2 = v_3 \cdot v_4, \quad v_3 \in \tilde{Z}_k, \quad v_4 \in S(\mu - \ell\lambda_k - \nu\bar{\lambda}_k) \cap \tilde{L}_{k+1}$$

Soit en combinant (27); (28) et (29) :

$$(30) \quad v = v_3 \cdot v_4 (\bar{\delta}_k)^{\nu} (\delta_k)^{\ell}$$

Comme $v\bar{v} \in Z_k$, on obtient alors de (29) et (30) :

$$\begin{aligned} v_4 \bar{v}_4 (\bar{\delta}_k \delta_k)^{\nu+\ell} &= (v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu} (\delta_k)^{\ell})\overline{(v_4(\bar{\delta}_k)^{\nu} (\delta_k)^{\ell})} \\ &= v\bar{v}/v_2\bar{v}_2 \in \tilde{Z}_k = \tilde{Z}_{k+1}(w_k(\delta_k)^{r_k}(\bar{\delta}_k)^{t_k}, \\ &\qquad \bar{w}_k(\bar{\delta}_k)^{r_k}(\delta_k)^{t_k}) \end{aligned}$$

Par suite (III 2-2), il existe un élément w de $\tilde{L}_{k+1}$, et deux entiers k_1, k_2 tels que

$$(\bar{\delta}_k \delta_k)^{\nu+\ell} = w(\gamma_k)^{k_1}(\bar{\gamma}_k)^{k_2} =$$

$$= w.(w_k)^{k_1}.(\bar{w}_k)^{k_2}.(\delta_k)^{(r_k.k_1+t_k.k_2)}(\bar{\delta}_k)^{(t_k.k_1+r_k\,k_2)}$$

et par conséquent, δ_k et $\bar{\delta}_k$ étant algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$

$$\ell + \nu = r_k \, . \, k_1 + t_k \, . \, k_2 = r_k \, . \, k_2 + t_k \, . \, k_1$$

donc $\quad (r_k - t_k)\, k_1 = (r_k - t_k)\, k_2 \, .$

Comme $r_k - t_k$ est $\neq 0$, il s'ensuit que

$$(31) \quad k_1 = k_2 \quad \text{et} \quad \ell + \nu = (r_k + t_k)\, k_1 \, .$$

Posant alors

$$(32) \quad \begin{cases} q = \ell - r_k \, . \, k_1 \quad , \quad v_5 = v_3(\gamma_k)^{k_1} \\ v_6 = v_4(\gamma_k)^{-k_1}.(\bar{\delta}_k)^{\nu}\,(\delta_k)^{\ell} \quad , \quad v_7 = v_4(w_k)^{-k_1} \end{cases}$$

il vient, compte tenu de (31) :

$$q = \ell - r_k \, . \, k_1 = t_k \, . \, k_1 - \nu$$

et

$$(33) \quad v_6 = (v_4.(w_k)^{-k_1}).(\bar{\delta}_k)^{\nu - t_k k_1}.(\delta_k)^{\ell - r_k . k_1} = v_7.(\delta_k/\bar{\delta}_k)^q \, .$$

Par suite, combinant (30), (32) et (33) et compte tenu de (29) , on obtient

$$(34) \quad v = v_5 \, . \, (\delta_k/\bar{\delta}_k)^q \, . \, v_7 \, , \, v_5 \in \tilde{Z}_k \, .$$

Par suite $v_7 \in S(\mu - q(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)) \cap \tilde{L}_{k+1} \subset \Psi_i(k+1)$. Comme par ailleurs $(\delta_k/\bar{\delta}_k)^q \in S(q.(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)) \cap \tilde{L}_k \cap \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}(k)$, il résulte alors de l'égalité (34) que v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_5 , \quad u'(v) = (\delta_k/\bar{\delta}_k)^q , \quad \rho'(v) = v_7 .$$

<u>12</u> $k \in J_7$.

On a alors, les notations étant celles de la prop. 1 $(ii)_7$,

$$\alpha_k = a_k(\delta_k \bar{\delta}_k)^{r_k} \quad \beta_k = v_k(\delta_k/\bar{\delta}_k)^{s_k} \quad \tilde{Z}_k = \tilde{Z}_{k+1}(\alpha_k, \beta_k)$$

avec $r_k > 0$, $s_k > 0$ et $\delta_k \in S(\lambda_k)$,

ce qui implique que les corps

$$\tilde{L}_{k+1}(\alpha_k, \beta_k) \quad \text{et} \quad \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k, \beta_k, \bar{\delta}_k)$$

sont stables par $\tilde{\mathfrak{g}}$. Par ailleurs, les inclusions

$$(\tilde{L}_{k+1}(\alpha_k, \beta_k))(\delta_k, \bar{\delta}_k) \cap \tilde{Z} = \tilde{L}_{k+1} \cap \tilde{Z} = \tilde{Z}_k \subset \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k, \beta_k)$$

montrent que III 4-10 est applicable à ces deux corps. De la même manière qu'au § 11, une double application de III 4-10 donne alors

$$(35) \quad v = v_1'(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell}, \ \ell, \nu \in \mathbb{Z}, \ v_1' \in S(\mu - \nu\bar{\lambda}_k - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k, \beta_k).$$

Comme δ_k et $\bar{\delta}_k$ sont algébriquement indépendants sur $\tilde{L}_{k+1}$ (prop. 1 $(ii)_{3'}$), il en est de même de α_k et β_k (III 2-6) et par conséquent (III 4-9)

$$(36) \quad v_1' = v_2 v_3 , \quad v_2 \in \tilde{Z}_k , \quad v_3 \in S(\mu - \nu\bar{\lambda}_k - \ell\lambda_k) \cap \tilde{L}_{k+1} .$$

Soit en combinant (35) et (36)

(37) $\quad v = v_2 . v_3(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell} \quad$ et $\quad v_3(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell} \in S(\mu) \cap \tilde{L}_k \subset \psi_i(k)$.

Comme $v\,\bar{v} \in Z_k$, on déduit alors de (36) et (37)

$$v_3\,\bar{v}_3(\bar{\delta}_k\delta_k)^{\nu+\ell} = (v_3(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell}).\overline{(v_3(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell})}$$

$$= v\,\bar{v}/v_2\,\bar{v}_2 \in Z_k \subset \tilde{Z}_{k+1}(\alpha_k,\beta_k) \subset \tilde{L}_{k+1}(\alpha_k,\beta_k).$$

Il existe donc (III 2-2) des entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, et un élément w de $\tilde{L}_{k+1}$ tels que

$$v_3\bar{v}_3(\bar{\delta}_k\delta_k)^{\nu+\ell} = w(\alpha_k)^{k_1}.(\beta_k)^{k_2} = w(u_k)^{k_1}.(v_k)^{k_2}(\bar{\delta}_k)^{(r_k.k_1-s_k k_2)}.(\delta_k)^{(r_k.k_1+s_k.k_2)}$$

et par conséquent $\nu+\ell = r_k.k_1 + s_k.k_2 = r_k.k_1 - s_k.k_2$. Il s'ensuit que

$$(38)\quad \begin{cases} k_2 = 0 \qquad \nu+\ell = r_k.k_1 \quad , \qquad w \in Z_{k+1} \\ (v_3(\bar{\delta}_k)^{\nu}.(\delta_k)^{\ell}).\overline{(v_3.(\bar{\delta}_k)^{\nu}.(\delta_k)^{\ell}}\,) = w(\alpha_k)^{k_1} \end{cases}$$

Posant alors

$$(39)\quad \begin{cases} k_1 = 2\,t + \varepsilon \quad , \qquad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1 \\ v_4 = v_2(\alpha_k)^{t} \qquad v_5 = v_3.(\bar{\delta}_k)^{\nu}(\delta_k)^{\ell}(\alpha_k)^{-t} \end{cases}$$

on a, compte tenu de (36), (38), (37)

$$(40)\quad v_4 \in \tilde{Z}_k \,, \quad v_5 . \bar{v}_5 = w(\alpha_k)^{\varepsilon} \quad , \quad v_5 \in \psi_i(k)$$

$$(41)\quad v = v_4 . v_5$$

Si $\varepsilon = 0$, il résulte alors de (40), (38) et de (ii) que $v_5 = v_6.v_7$, avec $v_6 \in \mathfrak{U}(k)$ et $v_7 \in \psi_i(k+1)$. Donc, compte tenu de (41) ,

$v = v_4 \cdot v_6 \cdot v_7$, égalité qui montre que v vérifie (P') : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_4 \ , \quad u'(v) = v_6 \ , \quad \rho'(v) = v_7 \ .$$

Si $\varepsilon = 1$, l'égalité (41) montre, compte tenu de (38) et (40) que v vérifie (P') (et même (P)) : il suffit de prendre

$$z'(v) = v_4 \ , \quad u'(v) = 1 \ , \quad \rho'(v) = v_5 \ ,$$

ce qui termine la démonstration.

4. Théorème 4

Le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble réelle $\mathfrak{g}$ de dimension finie est une extension pure de $\mathbb{R}$; son degré de transcendance est majoré par la dimension de $\mathfrak{g}$ et lui est strictement inférieur si $\mathfrak{g}$ n'est pas commutative.

Démonstration.

1. Les notations sont celles du § 1 et de la prop. 1. Les références aux § 1 à 3 du présent chapitre sont notées IV § 1 ,... etc, ceci pour les distinguer des références aux § de la présente démonstration, lesquelles ne comportent pas le symbole IV .

Nous allons montrer que $Z(\mathfrak{g})$ est une extension pure de $\mathbb{R}$. Comme $d(Z(\mathfrak{g}), \mathbb{R}) = d(Z(\tilde{\mathfrak{g}}), \mathbb{C})$ - c'est une conséquence immédiate de III 4-1 -, les autres assertions du théorème résulteront alors trivialement de II th. 2.

Pour ce faire, nous supposerons les ensembles J, J_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$, définis et fixés une fois pour toutes conformément à la prop. 1 (*) et nous intro-

(*) On vérifierait sans peine, mais c'est inutile pour notre propos, que la donnée de $\mathfrak{g}$ et (Σ) , (Σ) étant la suite de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$ introduite plus haut (IV § 1-2) détermine complètement les ensembles J et J_i

duirons les objets suivants.

a On notera $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles $F = (\{M_k\})_{k \in J}$ de parties $\{M_k\} = \{u_k, v_k, \ldots, t_k\}$ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ vérifiant les assertions de la prop. 1. Nous dirons que $u_k, \ldots, t_k$ $(k \in J)$ sont les <u>éléments</u> de F. Si F, F' sont deux éléments de $\mathcal{F}$ et qu'on note, pour $k \in J$, $u_k, v_k, \ldots$ (resp. $u'_k, v'_k, \ldots$) les éléments de F (resp. F'), on dira que u'_k (resp. $v'_k, \ldots$) est l'<u>homologue</u> (dans F') de u_k (resp. $v_k, \ldots$). A tout $F \in \mathcal{F}$ correspond une partie finie $\subset Z(\mathfrak{g})^{\vee}$, qu'on notera G_F, telle que $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}(G_F)$, ainsi qu'il résulte de la prop. 1, savoir

$$G_F = \bigcup_{k \in J} \{\alpha_k, x_k, y_k, \xi_k, \eta_k\}^{\vee}$$

On notera $F_o = (\{M_k(0)\})_{k \in J}$ un élément de $\mathcal{F}$ fixé une fois pour toutes. Les éléments de F_o seront notés $u_k(0), \ldots$ etc.

b Soient $\ell \in J$, $z_1 \in Z^{\vee}_{\ell+1}$, $z_2 \in \tilde{Z}^{\vee}_{\ell+1}$. Nous noterons $O_1(\ell, z_1)$, $O_2(\ell, z_2)$ les opérations définies comme suit.

Soit $F \in \mathcal{F}$. Alors $O_1(\ell, z_1)F$ (resp. $O_2(\ell, z_2)F$ est la famille de parties de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ déduite de F par substitution de

$$z_1 \alpha_\ell \quad \text{à} \quad \alpha_\ell \quad \text{et} \quad z_1 u_\ell \quad \text{à} \quad u_\ell$$

(resp. $z_2 \beta_\ell$ à β_ℓ, $z_2 v_\ell$ à v_ℓ, $r(z_2 \beta_\ell)$ à ξ_ℓ, et $j(z_2 \beta_\ell)$ à η_ℓ)

les autres éléments de F étant conservés.

On notera $\mathcal{O}$ l'ensemble des $O_i(\ell, z)$ $(i = 1, 2)$. Il résulte de la remarque suivant le prop. 1 que les éléments de $\mathcal{O}$ sont des bijections de $\mathcal{F}$ sur lui-même. On désignera par $\mathcal{G}$ le sous-groupe du groupe symétrique de $\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{O}$, et on posera :

$$\mathcal{F}_o = \mathcal{G} \cdot F_o .$$

2. Les ensembles Ψ_A, Ψ_B

Etant donné un élément $F \in \mathcal{F}$, la prop. 2 (i) assure l'existence, pour tout $v \in \Psi_i$, d'une factorisation

$$(1) \qquad v = z(v) \,.\, u(v) \,.\, \rho(v)$$

jouissant d'une certaine propriété (P), laquelle dépend à priori du choix de F : convenons de dire que (1) est une factorisation f_F, et que f_F jouit de la propriété $(P)_F$. On s'assure aussitôt, sur l'énoncé de (P) (cf. prop. 2) et la définition de $\mathcal{G}$, que, pour tout $F' \in \mathcal{G} \,.\, F$, f_F jouit de la propriété $(P)_{F'}$. On peut donc dire, en un sens évident, que f_F dépend seulement de $\mathcal{G} \,.\, F$. Cela étant, nous dirons qu'une factorisation

$$f_{F_o} : \; v = z(v).u(v).\,\rho(v)$$

d'un élément $v \in \Psi_i$ est une factorisation φ_A (resp. φ_B) si $\rho(v) = 1$ (resp. $\rho(v) \neq 1$). Nous noterons

- Ψ_A la partie de Ψ_i formée des $v \in \Psi_i$ qui admettent une factorisation φ_A

- Ψ_B le complémentaire de Ψ_A dans Ψ_i : les $v \in \Psi_B$ admettent donc une factorisation φ_B.

Il résulte de ce qu'on vient de voir de Ψ_A, Ψ_B ne sont pas modifiée si l'on remplace F_o par un élément quelconque de $\mathcal{F}_o$.

3. La propriété (Q).

Soit F un élément de $\mathcal{F}$ dont les éléments sont notés $u_k, \ldots$ etc. Nous dirons que F a la propriété (Q) s'il existe :

- une partie J^* de $J_5 \cup J_7$

et

- une application <u>injective</u> $\varphi : J^* \longrightarrow J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7$

telles que

<u>a</u> si $k \in (J_5 \cup J_7) - J^*$, alors $\beta_k \cdot \bar{\beta}_k = 1$

<u>b</u> si $k \in J^*$, alors $\varphi(k) > k$ et $\beta_k \bar{\beta}_k = \alpha_{\varphi(k)}$.

<u>4</u>. Cela étant, la démonstration s'effectuera en deux étapes. La première consistera à construire un élément de $\mathcal{F}_o$ ayant la propriété (Q) . Pour ce faire, on déduira de F_o , par des opérations $0 \in \mathcal{G}$, des éléments $F_i \in \mathcal{F}_o$, $i = 1, 2, 3$, et de sorte que F_3 vérifie (Q) . Ce sera l'objet des § 5 à 12 . Les éléments de F_i seront notés $u_k(i), \ldots \alpha_k(i), \ldots$ ($k \in J$, $i = 1, 2, 3$) , et nous poserons (cf. § <u>1</u>) : $G_i = G_{F_i}$. La seconde étape consistera à déduire de G_3 une famille algébriquement libre de générateurs de Z sur $\mathbb{R}$. Ce sera l'objet du § 13.

<u>5</u>. Il résulte de la prop. 1 $(ii)_5$ et $(ii)_7$ que, si $k \in J_5 \cup J_7$, alors $v_k(0) \in \Psi_i(k+1)$. Nous noterons $J_5(A)$ (resp. $J_5(B)$) la partie de J_5 formée des indices k tels que $v_k(0) \in \Psi_A$ (resp. $v_k(0) \in \Psi_B$) . Définition analogue de $J_7(A)$ et $J_7(B)$. Cela étant, il résulte de la prop. 2 (i) et de la définition de Ψ_A , Ψ_B qu'il existe, pour tout $k \in J_5 \cup J_7$, des éléments

(2) $\quad w_k \in \Psi_i(k+1)$, $w'_k \in \mathcal{U}(k+1)$, $w''_k \in \tilde{Z}_{k+1}$

tels que

(3) $\quad v_k(0) = w_k \, w'_k \, w''_k$

et qu'en outre

- si $k \in J_5(A) \cup J_7(A)$, alors $w_k = 1$

- si $k \in J_5(B) \cup J_7(B)$, alors il existe un entier $\ell(k)$ et un élément $\widetilde{w}_k \in Z$ tels que

$$(4)\quad \begin{cases} w_k \in \Psi_i(\ell(k)) \ , \quad \check{w}_k \in Z_{\ell(k)+1} \\ w_k\, \bar{w}_k = \alpha_{\ell(k)}\, \widetilde{w}_k \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad \ell(k) > k \quad \text{et} \quad \ell(k) \in J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7$$

On définit alors F_1 par l'égalité

$$F_1 = \Big(\prod_{k \in J_5 \cup J_7} 0_2(k,\ (w_k'')^{-1})\Big).F_o$$

En d'autres termes, si $k \in J_5 \cup J_7$, on a

$$v_k(1) = v_k(0).(w_k'')^{-1} = w_k.w_k' \ , \quad \beta_k(1) = \beta_k(0).(w_k'')^{-1} \ ,$$

$$\xi_k(1) = r(\beta_k(1)) \ , \quad \eta_k(1) = j(\beta_k(1)) \ ,$$

les autres éléments de F_1 étant égaux à leurs homologues dans F_o . On a par suite pour tout $k \in J_5 \cup J_7$, puisque $w_k' \in \mathfrak{U}$.

$$(\xi_k(1))^2 + (\eta_k(1))^2 = \beta_k(1).\overline{\beta_k(1)} = \overline{v_k(1)}.v_k(1) = w_k.\bar{w}_k$$

Donc, compte tenu de (4) :

$$(6)\quad \left\{ (\xi_k(1))^2 + (\eta_k(1))^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in J_5(A) \cup J_7(A) \\ \alpha_{\ell(k)}\, \widetilde{w}_k & \text{si } k \in J_5(B) \cup J_7(B) \end{cases} \right.$$

6. <u>Supposons d'abord</u> : $J_5(B) \cup J_7(B) = \emptyset$

Alors F_1 vérifie la propriété (Q) du § 3 : il suffit de prendre, avec les notations de ce § , $J^* = \emptyset$, et de définir φ comme l'application vide $\emptyset \longrightarrow J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7$. On prendra alors $F_3 = F_2 = F_1$.

7. Nous supposerons désormais jusqu'à la fin du § 12 , que $J_5(B) \cup J_7(B) \neq \emptyset$ (*) . Pour ce faire, nous construisons d'abord, à partir de F_1 , une famille $F_2 \in \mathcal{F}_0$ ayant la propriété suivante (Q_1) :

(Q_1) Il existe un recouvrement (J', J'') de $J_5(B) \cup J_7(B)$, J', J'' étant disjoints, et si $J'' \neq \emptyset$, une application injective $\psi : J'' \longrightarrow J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7$ tels que

a si $k \in J''$, alors $\psi(k) > k$

b si $k \in J''$, alors il existe un élément z_k de $Z_{\psi(k)+1}$ tel que

$$\beta_k(2) \cdot \overline{\beta_k(2)} = \alpha^{(2)}_{\psi(k)} \cdot z_k$$

c si $k \in J'$, alors $\beta_k(2) \cdot \overline{\beta_k(2)} = 1$

d les éléments de F_2 n'appartenant pas à l'ensemble $\bigcup_{k \in J_5(B) \cup J_7(B)} \{v_k(2), \beta_k(2), \xi_k(2), \eta_k(2)\}$ sont égaux à leurs homologues dans F_1 .

La construction de $F_2 \in \mathcal{F}_0$ vérifiant (Q_1) fera l'objet des § 8 à 11 .

8. Les systèmes (S).

Nous poserons

$$J_5(B) \cup J_7(B) = \{k_1, \dots, k_q\} \text{ , avec } k_1 < k_2 < \dots < k_q$$

(*) Cette éventualité se rencontre effectivement pour des algèbres de Lie résolubles de petite dimension. Elle correspond au fait que, pour $k \in J$ donné, Z_k peut fort bien ne pas être extension pure de Z_{k+1}

et, pour $j \in [1, q]$

$$(7) \qquad \varepsilon_j^o = \beta_{k_j}(1) \ , \quad b_j^o = w_{k_j} \quad , \quad \psi^o(j) = \ell(k_j) \ , \quad c_j^o = \widetilde{w}_{k_j}$$

On a donc, pour $j \in [1, q]$, compte tenu des formules du § 5 :

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon_j^o \cdot \overline{\varepsilon_j^o} = b_j^o \cdot \overline{b_j^o} = \alpha^{(1)}_{\psi^o(j)} \ c_j^o \\ b_j^o \in \psi_i(\ell(k_j)) = \psi_i(\psi^o(j)) \ , \text{ et } \ c_j^o \in Z_{\ell(k_j)+1} = Z_{\psi^o(j)+1} \end{cases}$$

Dans ces conditions, nous dirons qu'une partie ordonnée $E = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q\}$ de $Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est un <u>système</u> (S) si

(S_1) pour tout $j \in [1, q]$, $\varepsilon_j / \varepsilon_j^o \in (\widetilde{Z}_{k_j+1})^\vee$

(S_2) il existe

– un recouvrement (I'_E , I''_E) de $[1, q]$, I'_E et I''_E étant disjoints

– une application $g_E : I''_E \longrightarrow J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7$

tels que

a_1 si $j \in I''_E$, alors $g_E(j) > k_j$

b_1 si $j \in I''_E$, alors il existe un élément b_j de $\psi_i(g_E(j))$ et un élément c_j de $Z_{g_E(j)+1}$ tels que

$$\varepsilon_j \cdot \bar{\varepsilon}_j = b_j \ \bar{b}_j = \alpha^{(1)}_{g_E(j)} \cdot c_j$$

c_1 si $j \in I'_E$, alors $\varepsilon_j \ \bar{\varepsilon}_j = 1$

Il est clair que la donnée d'un système (S) détermine complètement les objets I'_E , I''_E , g_E et c_j .

Nous attacherons à tout système (S) , soit E , deux entiers $\geqslant 0$. Le premier, que nous appellerons le poids de E , et noterons p(E) , sera défini par l'égalité

$$(9) \qquad p(E) = \sum_{j \in I''_E} g_E(j)$$

Le second, que nous appellerons le degré de E , et noterons d(E) sera défini par l'égalité

$$(10) \qquad d(E) = \mathrm{card}\,(I''_E) - \mathrm{card}\,(g_E(I''_E))$$

9. Quelques propriétés des systèmes (S) .

$\underline{R}_1$ Il existe des systèmes (S) : l'ensemble $E_o = \{\varepsilon_1^o, \ldots, \varepsilon_q^o\}$ en est un, et $I''_{E_o} = E_o$, $I'_{E_o} = \emptyset$, $g_{E_o} = \psi^o$. Cela résulte aussitôt des formules (8) et de ce que, compte tenu de la formule (5) du § 5 , on a, pour tout $j \in [1, q]$:

$$g_{E_o}(j) = \psi^o(j) = \ell(k_j) > k_j$$

$\underline{R}_2$ A tout système (S) , soit $E = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q\}$, correspond canoniquement une famille $F_E \in \mathcal{F}_o$, savoir

$$F_E = \Big(\prod_{j \in [1,\, q]} 0_2(k_j,\ \varepsilon_j/\varepsilon_j^o)\Big).F_1$$

Pour $j \in [1, q]$, $\varepsilon_j = \beta_{k_j}$ est l'homologue dans F_E de l'élément $\beta_{k_j}(1)$ de F_1 .

$\underline{R}_3$ Soit E un système (S) . Alors $0 \leqslant p(E) \leqslant (\dim \mathfrak{g})^2 = n^2$, et $0 \leqslant d(E) \leqslant n$; en outre g_E est injectif si et seulement si $d(E) = 0$. Cela résulte aussitôt des formules (9) et (10) ci-dessus.

$\underline{R}_4$ Soit $\tilde{E} = \{\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_q\}$ un système (S) . Si $d(\tilde{E}) = 0$, alors $F_{\tilde{E}}$ vérifie la propriété (Q_1) du § 7 (et on peut donc prendre $F_2 = F_{\tilde{E}}$) .

Soit en effet $\chi : [1, q] \longrightarrow J_5(B) \cup J_7(B)$ la bijection définie par les égalités

$$\chi(j) = k_j \quad , \quad j = 1, \ldots, q .$$

Posons

$$J' = \chi(I_{\tilde{E}}^{\prime}) \ , \quad J'' = \chi(I_{\tilde{E}}^{\prime\prime}) \ , \quad \psi = g_{\tilde{E}} \circ \chi^{-1}$$

et, pour $k \in J_5(B) \cup J_7(B)$,

$$\tilde{\beta}_k = \tilde{\varepsilon}_{\chi^{-1}(k)}$$

Par conséquent, pour tout $j \in [1, q]$, on a $\tilde{\beta}_{k_j} = \tilde{\beta}_{\chi(j)} = \tilde{\varepsilon}_j$, et donc (cf. $\underline{R}_2$) , $F_{\tilde{E}}$ se déduit de F_1 par substitution, pour tout $k \in J_5(B) \cup J_7(B)$, de $\tilde{\beta}_k$ à $\beta_k(1)$, $v_k \cdot \tilde{\beta}_k/\beta_k(1)$ à $v_k(1), \ldots$ etc. Par ailleurs, d'une part, comme χ est bijectif et que, d'après (S_2) , $I_{\tilde{E}}^{\prime} \cap I_{\tilde{E}}^{\prime\prime} = \emptyset$ et $I_{\tilde{E}}^{\prime} \cup I_{\tilde{E}}^{\prime\prime} = [1, q]$, les ensembles J', J'' sont disjoints et recouvrent $J_5(B) \cup J_7(B)$; d'autre part, comme $g_{\tilde{E}}$ est injectif puisque $d(\tilde{E}) = 0$ (cf. $\underline{R}_3$) , ψ est une application injective de $J_5(B) \cup J_7(B)$ dans $J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7$. Il reste donc à vérifier les conditions $\underline{a}$ à $\underline{d}$ de (Q_1) . Pour la condition $\underline{d}$, cela résulte aussitôt de la construction de $F_{\tilde{E}}$ (cf. $\underline{R}_2$) .

Si $k \in J'$, alors $\chi^{-1}(k) \in I_{\tilde{E}}^{\prime}$, et par conséquent (cf. (S_2) c_1)

$$\tilde{\beta}_k \cdot \overline{\tilde{\beta}_k} = \tilde{\varepsilon}_{\chi^{-1}(k)} \cdot \overline{\tilde{\varepsilon}_{\chi^{-1}(k)}} = 1$$

ce qui montre $\underline{c}$

Si $k \in J''$, alors $\chi^{-1}(k) \in I_{\tilde{E}}^{\prime\prime}$, et par conséquent (cf. (S_2) b_1) il existe un élément $z_k = \tilde{c}_{\chi^{-1}(k)} \in Z_{g_{\tilde{E}}(\chi^{-1}(k))+1} = Z_{\psi(k)+1}$ tel que

$$\tilde{\beta}_k \cdot \overline{\tilde{\beta}_k} = \tilde{\varepsilon}_{\chi^{-1}(k)} \cdot \overline{\tilde{\varepsilon}_{\chi^{-1}(k)}} = \alpha_{g_{\tilde{E}}(\chi^{-1}(k))}\, z_k = \alpha_{\psi(k)} \cdot z_k$$

ce qui montre $\underline{b}$.

Par ailleurs, la condition (S_2) $\underline{a}_1$ s'écrit avec nos notations

$$g_{\tilde{E}}(j) > \chi(j) \text{ , pour } j \in I''_{\tilde{E}}$$

donc, pour $k \in J''$

$$\psi(k) = g_{\tilde{E}}(\chi^{-1}(k)) > \chi(\chi^{-1}(k)) = k$$

ce qui montre $\underline{a}$ et établit $\underline{R}_4$.

<u>10</u>. Avec la présente formulation, la clé de la démonstration est alors la propriété suivante des systèmes (S)

$\underline{R}_5$ Soit E un système (S) . Alors il existe un système (S) , soit E' , tel que l'une au moins des deux éventualités suivantes soit réalisée, si $d(E) > 0$.

(A) $d(E') < d(E)$

(B) $d(E') = d(E)$ et $p(E') > p(E)$

<u>Démonstration</u>. Soit en effet $E = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q\}$ un système (S) tel que $d(E) > 0$. Posons $g = g_E$ et, pour $j \in I''_E$, notons c_j, b_j des objets vérifiant (S_2) (cf. § <u>8</u>). Comme g n'est pas injectif (cf. $\underline{R}_3$ § <u>9</u>) , il existe deux entiers $j_1, j_2 \in I''_E$ tels que $j_1 < j_2$ et $g(j_1) = g(j_2)$. On a alors d'après (S_2) a_1 et b_1 :

$$(11)\begin{cases} g(j_1) = g(j_2) \geqslant k_{j_2} + 1 > k_{j_1} + 1 & (11\text{-}1) \\ \varepsilon_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon_{j_1}} = b_{j_1} \cdot \overline{b_{j_1}} = \alpha_{g(j_2)} \; c_{j_1} & (11\text{-}2) \\ \varepsilon_{j_2} \cdot \overline{\varepsilon_{j_2}} = b_{j_2} \cdot \overline{b_{j_2}} = \alpha_{g(j_2)} \; c_{j_2} & (11\text{-}3) \\ c_{j_1} , c_{j_2} \in Z_{g(j_2)+1} & (11\text{-}4) \\ b_{j_1} , b_{j_2} \in \psi_i(g(j_2)) & (11\text{-}5) \end{cases}$$

Posant alors $b = b_{j_1}/b_{j_2}$, on déduit de (11-2), (11-3) et (11-4)

$$(12) \quad \frac{\varepsilon_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon_{j_1}}}{\varepsilon_{j_2} \cdot \overline{\varepsilon_{j_2}}} = \left(\frac{b_{j_1}}{b_{j_2}}\right) \cdot \left(\overline{\frac{b_{j_1}}{b_{j_2}}}\right) = b\,\bar{b} = \frac{c_{j_1}}{c_{j_2}} \in Z_{g(j_2)+1}$$

et de (11-5) (puisque $\psi_i(g(j_2))$ est un groupe)

$$(13) \quad b \in \psi_i(g(j_2))$$

Ces deux dernières formules, et la prop. 2 (ii) impliquent alors

$$(14) \quad b = b^o \cdot \tilde{b} \quad , \quad \text{avec } b^o \in \mathfrak{U} \; , \; \tilde{b} \in \psi_i(g(j_2) + 1)$$

Combinant (12) et (14) , on obtient

$$(15) \quad \frac{\varepsilon_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon_{j_1}}}{\varepsilon_{j_2} \cdot \overline{\varepsilon_{j_2}}} = b\,\bar{b} = \tilde{b} \cdot (\overline{\tilde{b}})$$

Nous distinguerons alors deux cas :

<u>a</u> $\tilde{b} \in \psi_A$

Comme $\tilde{b} \in \psi_i \; (g(j_2) + 1)$,d'après (14), il existe alors, en vertu de la prop. 2 (i) et de la définition de ψ_A (§ 2) , deux éléments

(16) $\quad \tilde{b}' \in \tilde{Z}_{g(j_2)+1}$ et $\tilde{b}'' \in \mathfrak{U}$

tels que

(17) $\quad \tilde{b} = \tilde{b}' \cdot \tilde{b}''$.

On a alors, compte tenu de (11-1) et (16), puisque $j_1 < j_2$ et $\varepsilon_{j_2} \in \tilde{Z}_{k_{j_2}}$

(18) $\quad \tilde{b}' \cdot \varepsilon_{j_2} \in \tilde{Z}_{g(j_2)+1} \cdot \tilde{Z}_{k_{j_2}} \subset \tilde{Z}_{k_{j_2}} \subset \tilde{Z}_{k_{j_1}+1}$

Soit alors $E' = \{\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_q\}$ la famille ordonnée définie par les égalités

$$(19 \quad \begin{cases} \varepsilon'_j = \varepsilon_j & \text{si } j \neq j_1 \\ \varepsilon'_{j_1} = \varepsilon_{j_1} \cdot (\tilde{b}' \cdot \varepsilon_{j_2})^{-1} \end{cases}$$

Il résulte alors de (15), (16), (17) et (19) que l'on a

$$\varepsilon'_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon'_{j_1}} = \varepsilon_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon_{j_1}} \cdot (\tilde{b}' \cdot (\overline{\tilde{b}'}))^{-1} \cdot (\varepsilon_{j_2} \cdot \overline{\varepsilon_{j_2}})^{-1}$$
$$= \frac{\varepsilon_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon_{j_1}}}{\varepsilon_{j_2} \cdot \overline{\varepsilon_{j_2}}} \cdot (\tilde{b}' \cdot (\overline{\tilde{b}'}))^{-1} = \frac{\tilde{b} \cdot (\overline{\tilde{b}})}{b' \cdot (\overline{\tilde{b}'})} = \tilde{b}'' \cdot (\overline{\tilde{b}''}) = 1$$

Soit

(20) $\quad \varepsilon'_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon'_{j_1}} = 1$

Il résulte alors des formules (18), (19) et (20) que E' est un système (S) , et que l'on a, puisque $g(j_1) = g(j_2)$

$$I'_{E'} = I'_E \cup \{j_1\} \quad , \quad I''_{E'} = I''_E - \{j_1\}$$

et $\qquad g_{E'}(I''_{E'}) = g(I''_E - \{j_1\}) = g(I''_E)$

Par suite, compte tenu de la définition du degré (§ 8 formule (10))

$$d(E') = \mathrm{card}(I''_{E'}) - \mathrm{card}(g_{E'}(I''_{E'})) = [\mathrm{card}(I''_E) - 1] - \mathrm{card}(g(I''_E))$$
$$= d(E) - 1 .$$

L'éventualité (A) est donc réalisée.

b $\tilde{b} \in \Psi_B$

Comme $\tilde{b} \in \Psi_i(g(j_2) + 1)$ (formule (14)) , il existe alors, en vertu de la prop. 2(i) et de la définition de Ψ_B (§ 2) , un entier ℓ_1 et 4 éléments $\tilde{b}_o, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ de $K(\tilde{\mathfrak{g}})$ tels que

$$(21)\begin{cases} \tilde{b} = \tilde{b}_o \cdot \tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_2 & (21\text{-}1)\\ \ell_1 = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 \cup J_7 \quad \text{et} \quad \ell_1 \geqslant g(j_2) + 1 & (21\text{-}2)\\ \tilde{b}_o \in \tilde{Z}_{g(j_2)+1} \;,\; \tilde{b}_1 \in \mathcal{U}(g(j_2)+1),\; \tilde{b}_2 \in \Psi_i(\ell_1) & (21\text{-}3)\\ \tilde{b}_3 \in Z_{\ell_1+1} & (21\text{-}4)\\ \tilde{b}_2 \cdot (\overline{\tilde{b}_2}) = \alpha_{\ell_1} \tilde{b}_3 & (21\text{-}5)\end{cases}$$

On a alors, compte tenu de (11-1) et de (21-3) , puisque $j_1 < j_2$ et $\varepsilon_{j_2} \in \tilde{Z}_{k_{j_2}}$

$$(22) \quad \tilde{b}_o \cdot \varepsilon_{j_2} \in \tilde{Z}_{g(j_2)+1} \cdot \tilde{Z}_{k_{j_2}} \subset \tilde{Z}_{k_{j_2}} \subset \tilde{Z}_{k_{j_1}+1} \quad .$$

Soit dans ces conditions $E'' = \{\varepsilon''_1 , \ldots, \varepsilon''_q\}$ la famille ordonnée définie par les égalités

$$(23)\begin{cases} \varepsilon''_j = \varepsilon_j \quad \text{si} \quad j \neq j_1\\ \varepsilon''_j = \varepsilon_{j_1} \quad (\tilde{b}_o \cdot \varepsilon_{j_2})^{-1}\end{cases}$$

Il résulte alors de (23), (15), (21-1) (23-1) et (21-5) que l'on a

$$\begin{aligned}\varepsilon''_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon''_{j_1}} &= \varepsilon_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon_{j_1}} \cdot (\tilde{b}_o \cdot \overline{(\tilde{b}_o)})^{-1} \cdot (\varepsilon_{j_2} \cdot \overline{\varepsilon_{j_2}})^{-1} \\ &= \frac{\varepsilon_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon_{j_1}}}{\varepsilon_{j_2} \cdot \overline{\varepsilon_{j_2}}} \cdot (\tilde{b}_o \cdot \overline{(\tilde{b}_o)})^{-1} = \frac{\tilde{b} \cdot \overline{(\tilde{b})}}{\tilde{b}_o \cdot \overline{(\tilde{b}_o)}} \\ &= (\tilde{b}_1 \cdot \overline{(\tilde{b}_1)})\,(\tilde{b}_2 \cdot \overline{(\tilde{b}_2)}) = \tilde{b}_2 \cdot \overline{(\tilde{b}_2)} = \alpha_{\ell_1}\ \tilde{b}_3\end{aligned}$$

Soit

$$(24) \qquad \varepsilon''_{j_1} \cdot \overline{\varepsilon''_{j_1}} = \tilde{b}_2 \cdot \overline{(\tilde{b}_2)} = \alpha_{\ell_1}\ \tilde{b}_3$$

Or, compte tenu de (21-2) et (11-1)

$$(25) \qquad \ell_1 \geqslant g(j_2) + 1 > k_{j_1} + 2 .$$

Il résulte alors de (23), (24) et (25) que E" est un système (S) , les objets $g_{E''}$, $I'_{E''}$, $I''_{E''}$ étant définis par les égalités

$$(26) \begin{cases} I'_{E''} = I'_E \qquad I''_{E''} = I''_E & (26\text{-}1) \\ g_{E''}(j) = g(j) \quad \text{si} \quad j \in I''_E - \{j_1\} & (26\text{-}2) \\ g_{E''}(j_1) = \ell_1 & (26\text{-}3) \end{cases}$$

Il vient dans ces conditions, compte tenu de la définition du poids d'un système (S) (§ 8 formule (9)) et de (26-2), (26-3) et (25) :

$$\begin{aligned}p(E'') &= \sum_{j \in I''_{E''}} g_{E''}(j) = \left(\sum_{j \in I''_{E''} - \{j_1\}} g_{E''}(j) \right) + g_{E''}(j_1) \\ &= \left(\sum_{j \in I''_E - \{j_1\}} g(j) \right) + g(j_1) - g(j_1) + \ell_1 \\ &= p(E\ ) + \ell_1 - g(j_1) = p(E) + \ell_1 - g(j_2) \geqslant p(E) + 1\end{aligned}$$

Soit

(27) $\quad p(E'') > p(E)$.

Il résulte par ailleurs de la définition du degré d'un système (S) (§ 8 formule (10)) et de (26-1) que l'on a

$$d(E'')-d(E) = \left[\operatorname{card}(I''_{E''}) - \operatorname{card}(g_{E''}(I''_{E''}))\right] - \left[\operatorname{card}(I''_{E}) - \operatorname{card}(g(I''_{E}))\right]$$

(28) $\quad d(E'') - d(E) = \operatorname{card}\,(g(I''_E)) - \operatorname{card}\,(g_{E''}(I''_{E''}))$

Or, on a compte tenu de (26-1), (26-2) et de ce que $g(j_1) = g(j_2)$:

$$g(I''_E) = g(I''_E - \{j_1\}) = g_{E''}(I''_{E''} - \{j_1\}) \subset g_{E''}(I''_{E''}) ,$$

ce qui implique, d'après (28) ,

(29) $\quad d(E'') \leq d(E)$.

Il résulte alors de (27) et (29) que l'une au moins des éventualités (A), (B) est réalisée, ce qui achève la démonstration de (R_5) .

<u>11.</u> On va construire un entier $n' \geq 0$ et une suite finie $\Sigma = (E_0, E_1,\ldots, E_{n'})$ de systèmes (S) tels que $d(E_{n'}) = 0$: compte tenu de $\underline{R}_4$, la famille $F_{E_{n'}}$ possèdera la propriété (Q_1) du § 7 . Partons de $E_0 = \{\varepsilon^0_1,\ldots \varepsilon^0_q\}$ défini au § <u>8</u> : c'est un système (S) (cf. $\underline{R}_1$ § <u>9</u>) . Si $d(F_0) = 0$, on prend $n' = 0$. Sinon $d(E_0)$ est > 0 (cf. $\underline{R}_3$ § <u>9</u>) , et on construit par récurrence Σ comme suit.

Supposons E_i déjà construit, $i \geq 0$. Si $d(E_i) = 0$, on prend $n' = i$ Sinon $d(E_i)$ est > 0 , et on construit E_{i+1} de sorte qu'on ait

ou bien $d(E_{i+1}) < d(E_i)$, ou bien $d(E_{i+1}) = d(E_i)$ et $p(E_{i+1}) > p(E_i)$, ce qui est possible d'après $\underline{R}_5$. Tout revient à montrer que la construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. Supposons le contraire. Comme $0 \leq d(E_i) \leq n$ (cf. $\underline{R}_3$ § $\underline{9}$), il existerait, pour tout entier $N > 0$, deux entiers > 0, i'_N, i''_N tels que

$$i''_N = i'_N + N \quad \text{et} \quad d(E_{i'_N}) = d(E_{i'_N+1}) = \ldots = d(E_{i''_N})$$

et par conséquent $p(E_{i+1}) \geq p(E_i) + 1$ pour tout $i \in [i'_N, i''_N - 1]$
Donc $p(E_{i''_N}) \geq p(E_{i'_N}) + N > N$. Or $p(E_{i''_N}) \leq (\dim \mathfrak{g})^2$ ($\underline{R}_3$ § $\underline{9}$) : notre hypothèse était absurde.

$\underline{12}$. On déduit alors d'une famille $F_2 \in \mathcal{F}_o$ ayant la propriété (Q_1) une famille $F_3 \in \mathcal{F}_o$ ayant la propriété (Q) du § $\underline{3}$ en posant, les notations étant celles du § 7

$$F_3 = \left(\prod_{k \in \psi(J'')} O_1(\psi(k), z_k) \right) \cdot F_2$$

Il résulte en effet aussitôt de (Q_1) que la famille F_3 ainsi définie vérifie (Q) si l'on prend, avec les notations des § $\underline{3}$ et $\underline{7}$

$$J^* = J'' \qquad \text{et} \qquad \varphi = \psi$$

$\underline{13}$. Soit donc $F_3 \in \mathcal{F}_o$ vérifiant (Q), et soient J^*, φ les objets définis au § $\underline{3}$. Nous poserons

$$J''_5 = J_5 \cap J^* \qquad J''_7 = J_7 \cap J^*$$
$$J'_5 = J_6 - J''_6 \qquad J'_7 = J_7 - J''_7$$

et, pour $k \in J^* = J''_5 \cup J''_7$

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k(3) \ , \quad \check{\eta}_k = \eta_k(3) \ .$$

Si $k \in J''_5 \cup J''_7$, on a donc

$$(30) \qquad (\tilde{\xi}_k)^2 + (\tilde{\eta}_k)^2 = \beta_k(3) \,.\, \beta_k(3) = \alpha_{\varphi(k)}(3)$$

Si $k \in J'_5 \cup J'_7 = (J_5 \cup J_7) - J^*$, on a

$$(\xi_k(3))^2 + (\eta_k(3))^2 = \beta_k(3) \,.\, \overline{\beta_k(3)} = 1$$

Il existe donc dans ces conditions un élément $\zeta_k \in Z_k$ tel que

$$(31) \qquad Z_{k+1}\,(\xi_k(3),\ \eta_k(3)) = Z_{k+1}(\zeta_k)$$

Cela étant, nous définirons par récurrence descendante sur k les objets B_k comme suit :

- $B_m = \emptyset$
- $B_k = B_{k+1}$ si $Z_k = Z_{k+1}$
- $B_k = B_{k+1} \cup \{\alpha_k(3)\}$ si $k \in J_o \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$
- $B_k = B_{k+1} \cup \{\zeta_k\}$ si $k \in J'_5$
- $B_k = (B_{k+1} - \{\alpha_{\varphi(k)}(3)\}) \cup \{\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k\}$ si $k \in J''_5$
- $B_k = B_{k+1} \cup \{x_k(3), y_k(3)\}$ si $k \in J_6$
- $B_k = B_{k+1} \cup \{\alpha_k(3), \zeta_k\}$ si $k \in J'_7$
- $B_k = (B_{k+1} - \{\alpha'_{\varphi(k)}(3)\}) \cup \{\alpha_k(3),\ \tilde{\xi}_k,\ \tilde{\eta}_k\}$ si $k \in J''_7$

Montrons d'abord par récurrence descendante sur k que $Z_k = \mathbb{R}(B_k)$ pour tout $k \in [0, m]$.

Cela résulte, de la prop. 1 si $k \notin J_5 \cup J_7$; de la prop. 1 et de (31) si $k \in J'_5 \cup J'_7$; de (30) et de la prop. 1 si $k \in J''_5 \cup J''_7$.

Il suffit dès lors, pour terminer la démonstration, de vérifier que pour tout $k \in [0, m]$, l'on a

$$(32) \qquad \mathrm{card}\,(B_k) = d\,(Z_k, \mathbb{R}) \,.$$

Il s'ensuivra en effet que, pour tout $k \in [0, m]$, B_k est algébriquement libre sur $\mathbb{R}$.

La vérification de (32) s'effectue encore par récurrence descendante sur k . Il s'agit de montrer que, pour tout $k \in [0, m-1]$,

$$\text{card } B_k - \text{card } B_{k+1} = d\,(Z_k, Z_{k+1}) .$$

Si $k \notin J^*$, cela résulte clairement de la prop. 1 et de la définition de B_k , puisque $d\,(Z_k, Z_{k+1}) = d(\check{Z}_k, \tilde{Z}_{k+1})$

Si $k \in J^*$, cela résulte encore de la prop. 1 , puisque, φ étant injectif, $\alpha_{\varphi(k)}(3) \in B_{k+1}$, et par suite

$$\text{card } (B_{k+1} - \{\alpha_{\varphi(k)}(3)\}) = (\text{card } B_{k+1}) - 1 .$$

*
* *

CHAPITRE V

Compléments divers

1. Nous avons obtenu des conditions suffisantes pour que le centre Z du corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps commutatif soit une extension pure de ce corps. En fait, le lemme (L) de II peut être considéré comme un algorithme assez commode (du moins en petite dimension) pour la détermination effective de Z . Nous nous proposons de donner des précisions supplémentaires sur Z , précisions qui dans bien des cas, simplifient sensiblement la mise en oeuvre de cet algorithme.

2. Notations et terminologie.

Nous gardons celles du chap. II et du § 1 du chap. III, et nous introduisons par ailleurs les notations suivantes.

a Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω . Nous noterons

- $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ l'idéal dérivé de $\mathfrak{g}$
- $D(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux minimaux ($\neq \{0\}$) de $\mathfrak{g}$
- $D_R(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{g}$ de dimension 1 .
- $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathfrak{h}_R(\mathfrak{g})$) l'idéal de $\mathfrak{g}$ égal à

$$\sum_{\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{g})} \mathfrak{p} \quad \text{(resp.} \sum_{\mathfrak{p} \in D_R(\mathfrak{g})} \mathfrak{p}) .$$

Nous appellerons <u>socle</u> de $\mathfrak{g}$ (resp. <u>socle réduit</u> de $\mathfrak{g}$) , l'idéal $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathfrak{h}_R(\mathfrak{g})$) .

Pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, nous noterons $z(\mathfrak{p})$ le centralisateur de $\mathfrak{p}$, i.e. l'idéal de $\mathfrak{g}$ formé des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $[x, \mathfrak{p}] = \{0\}$.

On a manifestement $D_R(\mathfrak{g}) \subset D(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{h}_R(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}(\mathfrak{g})$, et $z(\mathfrak{h}_R(\mathfrak{g})) \supset z(\mathfrak{h}(\mathfrak{g}))$. Par ailleurs $\mathfrak{p} \in D_r(\mathfrak{g}) \Longrightarrow z(\mathfrak{p}) \supset \mathcal{D}(\mathfrak{g})$; donc $z(\mathfrak{h}_R(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

b L'algèbre $\mathfrak{g}$ étant choisie comme ci-dessus, on notera

$$\Sigma(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_m \supset \mathfrak{g}_{m+1} = \{0\})$$

une suite de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module $\mathfrak{g}$ telle que les idéaux $z(\mathfrak{h}_R(\mathfrak{g}))$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ figurent parmi les $\mathfrak{g}_i$. On notera p l'indice tel que $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{p+1}$.

Si $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, alors $n = m$, les quatients $\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}$, $k \in [1, m]$ sont de dimension 1 . On notera alors λ_k un élément de $\mathfrak{g}^*$ et a_k un élément de $\mathfrak{g}_k - \mathfrak{g}_{k+1}$ tels que $[x, a_k] - \lambda_k(x)\, a_k \in \mathfrak{g}_{k+1}$, pour $(x, k) \in \mathfrak{g} \times [1, m]$. Il résulte alors du théorème de Jordan-Holder, d'une part que l'ensemble des éléments

λ_k de $\mathfrak{g}^*$ est indépendant du choix de $\Sigma(\mathfrak{g})$, et d'autre part que $\mathfrak{z}_R(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, donc $z(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = z(\mathfrak{z}_R(\mathfrak{g}))$. Nous dirons que les λ_k sont les <u>racines</u> de $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle, nous identifierons $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}^*$) à son image canonique dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ (resp. $(\tilde{\mathfrak{g}})^*$) . Si $\mathfrak{g}$ est résoluble réelle, il résulte du Théorème de Jordan-Holder qu'on peut attacher à chaque $k \in [1, m]$ un élément A_k de $\tilde{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{g}^2 \times (\tilde{\mathfrak{g}})^* \times [(\mathfrak{g})^*]^2$, élément qu'on notera $(a_k, a'_k, a''_k, \lambda_k, \lambda'_k, \lambda''_k)$, et ce de telle sorte que

1) les A_k vérifient le lemme 4-12 du chap. III

2) lorsque $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, les objets a_k , λ_k coïncident avec les objets pareillement désignés, déjà définis.

Nous appellerons alors <u>racines</u> de $\mathfrak{g}$ les racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$: ce sont les formes linéaires λ_k, $\bar{\lambda}_k$. Lorsque $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, les deux concepts de racine ainsi définis coïncident bien, moyennant nos identifications.

3. Cela étant, nous nous proposons l'étude des extensions

$$Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g})) \text{ de } \Omega \text{ , } Z(\mathfrak{g}) \cap K(z(\mathfrak{z}_R(\mathfrak{g}))) \text{ de } Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$$
$$\text{et } Z(\mathfrak{g}) \text{ de } Z(\mathfrak{g}) \cap K(z(\mathfrak{z}_R(\mathfrak{g}))) \text{ .}$$

Au § 4 , on donne, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, des conditions nécessaires, portant sur les racines, pour que $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$ soit $\neq \Omega$. Au § 5 , on montre l'inclusion $Z(\mathfrak{g}) \subset K(z(\mathfrak{z}_R(\mathfrak{g})))$. Au § 6 , on montre que $Z(\mathfrak{g})$ est une extension pure de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$, et qu'il existe lorsque Ω est de caractéristique 0 , une famille de générateurs de $Z(\mathfrak{g})$ sur $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$ d'une forme particulièrement simple ; enfin, un § 7 , les résultats précédents sont appliqués aux algèbres de Lie résolubles réelles.

4. Etude de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$ lorsque $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble.

4-1 Lemme 1. Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif.
- $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$
- $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{a}$
- a un élément de $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$
- λ l'élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $[x, a] - \lambda(x)\, a \in \mathfrak{b}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.
- μ un élément de $\mathfrak{g}^*$
- α un élément de $K(\mathfrak{a}) \cap S(\mu)$

On sait (I 4) que $K(\mathfrak{a})$ est le corps des quotients de $K(\mathfrak{b})\,\{a\}$. On note

- p le degré de α sur $K(\mathfrak{b})$ (cf. I 4-1)
- u le coefficient dominant de α (cf. I 4-1)

Alors $u \in S(\mu - p\,\lambda) \cap K(\mathfrak{b})$

Démonstration. Notons deg le degré par rapport à $K(\mathfrak{b})$ des éléments de $K(\mathfrak{a})$ (cf. I 4-1). Soit $(x, \beta) \in \mathfrak{g} \times (K(\mathfrak{a}) - \{0\})$. Des relations $[x, a] - \lambda(x)\, a \in \mathfrak{b}$, $D_x(K(\mathfrak{b})) \subset K(\mathfrak{b})$, et $D_x(\beta^{-1}) = -\beta^{-1}(D_x\,\beta)\,\beta^{-1}$, on déduit aussitôt, par récurrence et compte tenu de I prop. 1, qu'on a, pour tout $(x, p', \gamma) \in \mathfrak{g} \times \mathbb{Z} \times K(\mathfrak{a})$

(1) ou bien $D_x(a^{p'}) = p'(\lambda(x)\, a^{p'})$, ou bien $\deg(D_x(a^{p'}) - p\,\lambda(x)a^{p'}) < p'$

et

(2) ou bien $D_x\,\gamma = 0$, ou bien $\deg D_x\gamma \leqslant \deg \gamma$.

Par ailleurs (I 4, cor. 2 de la prop. 4) :

(3) ou bien $\alpha = u\, a^p$, ou bien $(\alpha - u\, a^p) < p$.

Par ailleurs, comme $\alpha \in S(\mu)$, on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
&[(D_x u) - (\mu - p\lambda)(x).u]\, a^p = \\
&= [D_x u.a^p + u.D_x(a^p)] - u.D_x(a^p) - (\mu(x) u\, a^p - \mu(x)\alpha) - \mu(x)\alpha + p\lambda(x).u\, a^p \\
&= D_x(u\, a^p) - u(D_x a^p - p\lambda(x)\, a^p) + \mu(x)(\alpha - u\, a^p) - D_x\alpha \\
&= D_x(u\, a^p - \alpha) - u(D_x a^p - p\lambda(x)\, a^p) + \mu(x)(\alpha - u\, a^p)
\end{aligned}$$

Le dernier membre de ces égalités est nul : sinon, compte tenu de (1), (2) et (3) , son degré serait $< p$, ce qui est absurde. Donc $D_x u = (\mu - p\lambda)(x)$, ce qui établit le lemme.

4-2 Proposition 1. Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique 0 , complètement résoluble.

- m l'entier $\geqslant 0$ et pour $k \in [1, m]$, $\mathfrak{g}_k$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ et λ_k la racine de $\mathfrak{g}$ associés à $\mathfrak{g}$ conformément au § 2 b .

Dans ces conditions, pour tout $k \in [1, m]$, si $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{g}_k) \neq Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{g}_{k+1})$, alors λ_k est combinaison linéaire à coefficients rationnels des racines λ_j d'indice $j > k$.

Démonstration. Pour tout $k \in [1, m]$, notons E_k l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tels que $S(\lambda) \cap K(\mathfrak{g}_k) \neq \emptyset$. Par récurrence sur k , on vérifie aussitôt, à l'aide du lemme 1 , que pour tout $k \in [1, m]$, E_k est contenu dans le $\mathbb{Z}$ - module engendré par les $\lambda_k^{(*)}$. Or, si $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{g}_k) \neq Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{g}_{k+1}))$, on sait (II lemme (L)) , qu'il existe un élément α de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{g}_k) = (S(0) \cap K(\mathfrak{g}_k)) \cup \{0\}$, de degré $p > 0$ sur $K(\mathfrak{g}_{k+1})$, et par conséquent (Lemme 1) $p\,\lambda_k \in E_{k+1}$. D'où la propositio

(*) Résultat obtenu indépendamment par J. Dixmier.

Remarques :

1 La proposition est triviale si $\lambda_k = 0$: elle est sous intérêt si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, et, de toute façon, ne fournit de renseignements que pour le corps $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$

2 La proposition reste évidemment valable quelle que soit la suite de Jordan-Holder du $\mathfrak{g}$ - module choisi.

5. 5-1 Lemme 2. Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω
- $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ une famille d'idéaux de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$

Alors $\bigcap\limits_{i \in I} K(\mathfrak{a}_i) = K\left(\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$.

Démonstration. Il est clair que $\bigcap\limits_{i \in I} K(\mathfrak{a}_i) \supset K\left(\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$. Pour établir l'inclusion inverse, remarquons d'abord qu'il existe une partie finie $I_o \subset I$ telle $\bigcap\limits_{i \in I_o} \mathfrak{a}_i = \bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$. On peut donc supposer I fini.

Soit $I = \{1,\ldots, q\}$. Le lemme est trivial si $q = 1$. Si $q > 1$, on se ramène aussitôt par récurrence au cas où $q = 2$. Soient donc $I = \{1, 2\}$, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}$; et soit $A = \{a_1,\ldots, a_r\}$ (resp. $B = \{b_1,\ldots, b_s\}$) une famille libre sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ d'éléments de $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) , engendrant $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Alors $A \cup B$ est libre sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.
Si $r s = 0$, le lemme est trivial, puisque $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Longrightarrow K(\mathfrak{a}) \subset K(\mathfrak{b})$ (resp. $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \Longrightarrow K(\mathfrak{b}) \subset K(\mathfrak{a})$) . Supposons donc $r s > 0$, et supposons le lemme établi pour les couples d'entiers $\geqslant 0$ (r', s') tels que $r' < r$ et $s' < s$. Notons

$\mathfrak{p}$ l'idéal engendré par $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cup (A - \{a_r\}) \cup (B - \{b_s\})$

$\mathfrak{a}_1$ " " " $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cup (A - \{a_r\})$

$\mathfrak{b}_1$ " " " $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cup (B - \{b_s\})$

Alors l'hypothèse de récurrence implique (III 4-6)

$$K(\mathfrak{a}) \cap K(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{a}_1) \quad \text{et} \quad K(\mathfrak{b}) \cap K(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{b}_1)$$

et $K(\mathfrak{a}_1) \cap K(\mathfrak{b}_1) = K(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1) = K(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$

Or on a (III 4–6) :

$$K(\mathfrak{p} + \Omega\, a_r) \cap K(\mathfrak{p} + \Omega\, b_s) = K(\mathfrak{p}) .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} K(\mathfrak{a}) \cap K(\mathfrak{b}) &= (K(\mathfrak{a}) \cap K(\mathfrak{p} + \Omega\, a_r)) \cap (K(\mathfrak{b}) \cap K(\mathfrak{p} + \Omega\, b_s)) \\ &= K(\mathfrak{a}) \cap K(\mathfrak{b}) \cap K(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{a}_1) \cap K(\mathfrak{b}_1) = K(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

<u>5–2</u> <u>Lemme 3</u>.

Les notations étant celles du § 2 , soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω de caractéristique 0 .

- $\mathfrak{p}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de dimension 1

Alors $Z(\mathfrak{g}) \subset K(z(\mathfrak{p}))$

Démonstration.

Le lemme est trivial si $\mathfrak{P}$ est un idéal central. Sinon il existe deux éléments non nuls x, a de $\mathfrak{g}$ tels que

$$\mathfrak{g} = \Omega x \oplus z(\mathfrak{P}) \ , \ \mathfrak{P} = \Omega a \quad \text{et} \quad [x, a] = a \ .$$

Si $Z(\mathfrak{g}) \not\subset K(z(\mathfrak{P}))$, alors (II lemme (L)) , il existe un élément de $Z(\mathfrak{g})$ de la forme $x + y$, avec $y \in K(z(\mathfrak{P}))$. Donc

$$0 = [a, x+y] = - a + [a, y] = - a$$

ce qui est absurde.

5-4 Proposition 2.

Le centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique 0 est contenu dans le corps enveloppant du centralisateur de son socle réduit (*).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des lemmes 2 et 3 et des remarques du § 2 a .

6. Structure de l'extension $Z(\mathfrak{g})$ de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$

Proposition 3. Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω de caractéristique 0 , distincte de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

- $(a_1, \ldots, a_p)$ une base d'un supplémentaire de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$

(*) C'est un cas particulier de résultats (non publiés) obtenus par J. Dixmier.

Dans ces conditions

(i) $Z(\mathfrak{g})$ est une extension pure de degré $d \leqslant p$ de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$

(ii) il existe, si $d > 0$

- une partie I de $[1, p]$
- une partition $(I_\tau)_{\tau \in [1, d]}$ de I
- une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$
- une famille $(\beta_\tau)_{\tau \in [1, d]}$ d'éléments de $K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$
- une famille $\Gamma = (\gamma_\tau)_{\tau \in [1, d]}$ d'éléments de $Z(\mathfrak{g})$

telles que

a pour tout $\tau \in [1, d]$, $\gamma_\tau = \beta_\tau + \sum_{i \in I_\tau} a_i \alpha_i$

b Γ est une famille algébriquement libre de générateurs de $Z(\mathfrak{g})$ sur $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{D}(\mathfrak{g}))$

Démonstration.

1 Notons S le groupe symétrique de l'ensemble $[1, p] = \{1, \dots, p\}$. Posons, pour $k \in [1, p]$

$$\mathfrak{g}_k = \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \oplus \Omega a_k \oplus \dots \oplus \Omega a_p$$

$$K_k = K(\mathfrak{g}_k) , \quad Z_k = Z(\mathfrak{g}) \cap K_k$$

et, plus généralement, pour $(\sigma, k) \in S \times [1, p]$

$$\mathfrak{g}_k^\sigma = \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \oplus \Omega a_{\sigma(k)} \oplus \Omega a_{\sigma(k+1)} \oplus \dots \oplus \Omega a_{\sigma(p)}$$

$$K_k^\sigma = K(\mathfrak{g}_k^\sigma) , \quad Z_k^\sigma = Z(\mathfrak{g}) \cap K_k^\sigma$$

Posons enfin, pour tout $\sigma \in S$

$$Z_1^\sigma = Z_1 = Z \quad (= Z(\mathfrak{g}))$$

$$\mathfrak{g}^{\sigma}_{p+1} = \mathfrak{g}_{p+1} = \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \ , \ K^{\sigma}_{p+1} = K_{p+1} = K(\mathfrak{g}_{p+1}) \ , \ Z^{\sigma}_{p+1} = Z_{p+1} = Z(\mathfrak{g}) \cap K_{p+1} \ .$$

Tout sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ étant un idéal de $\mathfrak{g}$, pour tout $(\sigma, k) \in S \times [1, p]$, $\mathfrak{g}^{\sigma}_{k}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et bien entendu $\dim (\mathfrak{g}^{\sigma}_{k} / \mathfrak{g}^{\sigma}_{k+1}) = 1$. L'assertion (i) résulte alors du lemme (L) de II, et, de surcroît, on peut construire l'extension Z de Z_{p+1} de $p\,!$ manières différentes. Notons d le degré de transcendance de Z sur Z_{p+1}.

2 Dans ce qui suit, σ désigne un élément arbitraire, variable, de S. Nous noterons $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}^{\sigma}$) l'ensemble des familles $L = (\ell_0(L), \ell_1(L), \ldots, \ell_d(L))$ d'entiers telles que

a $1 \leqslant \ell_d < \ell_{d-1} < \cdots < \ell_1 < \ell_0 = p + 1$

b pour tout $\tau \in [1, d]$, Z_{ℓ_τ} (resp. $Z^{\sigma}_{\ell_\tau}$) est extension pure de degré 1 de $Z_{\ell_{\tau-1}}$ (resp. $Z^{\sigma}_{\ell_{\tau-1}}$).

Par définition (de d), les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{\sigma}$ sont non vides. Pour tout $L \in \mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}^{\sigma}$), nous noterons $G(L) = (G_1(L), \ldots, G_d(L))$, la famille de parties $G_\tau(L)$ de Z (pour $\tau \in [1, d]$) définies comme suit :

$G_\tau(L)$ est l'ensemble des $\alpha \in Z$ tels que

$$Z_{\ell_\tau(L)} = Z_{\ell_{\tau-1}(L)}(\alpha) \quad (\text{resp. } Z^{\sigma}_{\ell_\tau(L)} = Z^{\sigma}_{\ell_{\tau-1}(L)}(\alpha))$$

Enfin nous noterons $\hat{Z}$ l'ensemble des éléments $\alpha \in Z$ pour lesquels il existe

- une partie $J(\alpha) \neq \emptyset$ de $[1, p]$
- un élément $\beta(\alpha)$ de K_{p+1}
- et une famille $(\alpha_j)_{j \in J(\alpha)}$ d'éléments de $Z_{p+1} - \{0\}$

tels que

$$\alpha = \beta(\alpha) + \sum_{j \in J(\alpha)} a_i \ \alpha_j$$

Nous montrerons d'abord (§ 3), que, pour tout $L \in \mathcal{L}$, on a $G_1(L) \cap \hat{Z} \neq \emptyset$. Il en résultera que pour tout $\sigma \in S$ et pour tout $L' \in \mathcal{L}^{\sigma}$, on aura encore : $G_1(L') \cap \hat{Z} \neq \emptyset$. On montrera ensuite (§ 4) que pour tout $(L_o, \tau) \in \mathcal{L} \times [2, d]$ il existe un élément σ_τ de S, un élément L_τ de $\mathcal{L}^{\sigma_\tau}$, et un élément α de $\hat{Z}$ tels que

$$\alpha \in G_\tau(L_o) \cap G_1(L_\tau) \quad \text{et} \quad J(\alpha) \subset [\ell_\tau(L_o), \ell_{\tau-1}(L_o)],$$

ce qui terminera la démonstration.

3 Soit $L = (\ell_o, \ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathcal{L}$. Montrons que

(1) $\quad G_1(L) \cap \hat{Z} \neq \emptyset$.

Pour ce faire, notons α_o un élément de $G_1(L)$; α_o a des expressions de la forme $u\,v^{-1}$, u, v étant des polynômes non commutatifs en les a_k d'indice $k \in [\ell_1, p]$. Soit J une partie de $[\ell_1, p]$ minimale parmi les parties J' de $[\ell_1, p]$ telles que α_o puisse s'exprimer en fonction des seuls α_k d'indice $k \in J'$. Soit $r = \text{card } J$ et soit $\sigma' \in S$ tel que $\sigma'(j) = j$ pour $j < \ell_1$, et que $J = \sigma'[p+1-r, p]$. Alors L s'identifie à un élément $\tilde{L}$ de $\mathcal{L}^{\sigma'}$, et $G_1(\tilde{L}) = G_1(L)$. Bref, on peut supposer que $J = [p+1-r, p]$. Notons alors, pour $i \in [1, r]$, σ_i la transposition échangeant $p+1-r$ et $p+1-i$. Il résulte alors du choix de J et de la définition de ℓ_1 qu'on a, pour tout $i \in [1, r]$

$$Z_{\ell_1} = Z_{p+1-r}^{\sigma_i} \neq Z_{p+2-r}^{\sigma_i} = Z_{p+1}$$

Donc (II lemme (L)), il existe pour tout $i \in [1, r]$, un élément $\beta_i \in K_{p+2-r}^{\sigma_i}$ et un élément α_i de $Z_{p+1-r}^{\sigma_i} = Z_{p+1-r}$ tels que

$$\alpha_i = a_{\sigma_i(p+1-r)} + \beta_i = a_{p+1-i} + \beta_i$$

et que α_i engendre Z_{ℓ_1} sur Z_{p+1}, ce qui montre (1) si $r = 1$. Il s'ensuit par ailleurs, si $r > 1$, que, pour $i \in [1, r-1]$, il existe une relation homographique E_i entre α_r et α_i de la forme

$$(2) \qquad E_i \qquad \alpha_r = \frac{\delta_i \alpha_i + \delta'_i}{\delta''_i \alpha_i + \delta'''_i} \quad , \text{ avec } \delta_i, \delta'_i, \delta''_i, \delta'''_i \in Z_{p+1}.$$

Soit d_i le degré de α_i par rapport à K_{p+2-r} (α_i étant considéré comme élément de K_{p+1-r}, K_{p+1-r} étant considéré comme le corps des fractions de $K_{p+2-r}\{a_{p+1-r}\}$. Si $\delta''_i \neq 0$, alors (cf. I 4), le second membre de (2) est de degré $d_i - d_i = 0$ par rapport à K_{p+2-r}, ce qui est absurde puisque $\alpha_r = a_{p+1-r} + \beta_r$ est de degré 1. Donc $\underline{\delta''_i = 0}$.

Prenant alors $\delta'''_i = 1$, on obtient

$$\alpha_r = \delta_i \alpha_i + \delta'_i$$

soit

$$(3) \qquad a_{p+1-r} + \beta_r = \delta_i (a_{p+1-i} + \beta_i) + \delta'_i$$

On en déduit, considérant les deux membres de (3) tour à tour comme éléments de $K_{p+2-r}\{a_{p+1-r}\}$ et comme élément de $K^{\sigma_i}_{p+2-r}\{a_{p+1-i}\}$, qu'on a :

$$(4) \quad \begin{cases} \delta_i \beta_i = a_{p+1-r} + \gamma_i & \gamma_i \in K_{p+2-r} \\ \beta_r = \delta_i a_{p+1-i} + \gamma'_i \quad , & \gamma'_i \in K^{\sigma_i}_{p+2-r} \end{cases}$$

donc, compte tenu de (3) et du lemme 2

$$(5) \qquad \gamma'_i = \gamma_i + \delta'_i \in K_{p+2-r} \cap K^{\sigma_i}_{p+2-r} = K(\mathfrak{g}_{p+2-r} \cap \mathfrak{g}^{\sigma_i}_{p+2-r}) .$$

Une nouvelle application du lemme 2 donne ensuite :

$$\beta_r - \sum_{i=1}^{r-1} \delta_i \, a_{p+1-i} = \gamma'_1 - \sum_{i=2}^{r-1} \delta_i \, a_{p+1-i}$$

$$= \gamma'_2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{r-1} \delta_i \, a_{p+1-i} = \dots =$$

$$= \gamma'_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r-1} \delta_i \, a_{p+1-i} = \dots = \gamma'_{r-1} - \sum_{i=1}^{r-2} \delta_i \, a_{p+1-i}$$

$$\in K\left(\bigcap_{i \in [1,r]} \mathcal{J}^{\sigma_i}_{p+2-r} \right) = K_{p+1} ,$$

ce qui montre que $\alpha_r \in \hat{Z}$ et établit (1)

4 Soit $L_o = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathcal{L}$ et soit $k \in [2, d]$. Supposons établit, pour les indices $\tau \in [1, k-1]$, l'existence d'éléments $\alpha_\tau \in G_\tau(L_o) \cap \hat{Z}$ tels que $J(\alpha_\tau) \subset [\ell_\tau , \ell_{\tau-1} - 1]$. On va montrer que, dans ces conditions, il existe un élément α de $G_k(L_o) \cap \hat{Z}$ tel que $J(\alpha) \subset [\ell_k, \ell_{k-1} - 1]$, ce qui terminera la démonstration. Soit $r = \ell_{k-1} - \ell_k$. Considérons un élément $\sigma_o \in S$ tel que

$$\sigma_o(j) = j \quad \text{pour} \quad j < \ell_k$$

$$\sigma_o[p+1-r, p] = [\ell_k, \ell_{k-1} - 1]$$

et que, pour $\tau \in [1, k-1]$

$$\sigma^o[\ell_\tau - r , \ell_{\tau-1} - r - 1] = [\ell_\tau , \ell_{\tau-1} - 1] .$$

Il résulte alors du lemme (L) de II que α_τ , qui est algébriquement indépendant sur $Z^{\sigma_o}_{\ell_\tau - 1}$, engendre $Z^{\sigma_o}_{\ell_\tau}$ sur $Z^{\sigma_o}_{\ell_\tau - 1}$. Comme $Z^{\sigma_o}_{\ell_k} = Z_{\ell_k}$ a un degré de transcendance sur Z_{p+1} égal à k par hypothèse, il s'ensuit que $Z^{\sigma_o}_{\ell_1}$ a un degré de transcendance sur Z_{p+1} égal à 1 . Posant alors

$$\ell'_\tau = \ell_\tau \quad \text{pour} \quad \tau > k \qquad , \qquad \ell'_c = p+1$$

$$\ell'_\tau = \ell_{\tau-1} - r \quad \text{pour} \quad \tau \in [2, k] \quad \text{et} \quad \ell'_1 = p + 1 - r$$

il est clair que $L' = (\ell'_0, \dots, \ell'_d) \in \mathcal{L}^{\sigma_0}$, et, compte tenu du § 3, $G_1(L') \cap \hat{Z}$ est $\neq \emptyset$. Soit $\alpha \in G_1(L') \cap \hat{Z}$. On a donc

$Z_{\ell_k} = Z_{p+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha)$, et il est clair dans ces conditions

que $\alpha \in G_k(L) \cap \hat{Z}$ et que $J(\alpha) \subset [\ell_k, \ell_{k-1} + 1]$.

7. Cas des algèbres de Lie résolubles réelles.

7-1 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle de dimension n. Associons lui les objets $\Sigma(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}_k$, λ_k introduits au § 2 ($k = 1, \dots, m$, $\mathfrak{g}_{m+1} = \{0\}$). Il résulte du Théorème de Jordan-Holder que tout $\mathcal{P} \in D(\mathfrak{g})$ est de dimension 1 ou 2 et qu'il lui correspond une racine $\lambda = \lambda(\mathcal{P})$ de $\mathfrak{g}$. Avec la terminologie de IV 1, λ est réelle, i.e $\lambda = \bar{\lambda}$ si et seulement si $\mathcal{P} \in D_r(\mathfrak{g})$. Il est clair qu'en général $D(\mathfrak{g}) \neq D_R(\mathfrak{g})$. Si $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, alors $\lambda = i\mu$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$, et il existe si $\lambda \neq 0$ une base (a, b) de $\mathcal{P}$ telle que pour tout $x \in \mathfrak{g}$

$$[x, a] = -\mu(x)\, b \quad \text{et} \quad [x, b] = \mu(x)\, a .$$

Cela étant, il est clair que les prop. 2 et 3 s'appliquent à $\mathfrak{g}$. On a en outre les précisions suivantes.

7-2 Proposition 4.

Les notations étant celles du § 6-1 ci-dessus, on désigne par $\mathcal{P}$ un élément de $D(\mathfrak{g})$, et par λ la racine de $\mathfrak{g}$ correspondante. Dans ces conditions.

(i) $z(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))^{\sim} = z(\mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{g}})) = z(\mathfrak{z}_R(\tilde{\mathfrak{g}}))$

(ii) $Z(\mathfrak{g}) \subset K(z(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})))$

(iii) $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathcal{P}) \neq \mathbb{R} \iff \lambda + \bar{\lambda} = 0$

(iv) si $Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{g}_k) \neq Z(\mathfrak{g}) \cap K(\mathfrak{g}_{k+1})$, pour $k \in [1, m]$ alors, ou bien $\lambda_k + \bar{\lambda}_k = 0$, ou bien λ_k et $\bar{\lambda}_k$ sont des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des λ_j d'indice $j > k$.

Démonstration.

Soit $\beta \in D(\tilde{\mathfrak{g}}) = D_r(\tilde{\mathfrak{g}})$. Alors $\bar{\beta} \in D_r(\tilde{\mathfrak{g}})$ et il existe $\beta_1 \in D(\mathfrak{g})$ tel que $\beta + \bar{\beta} = \tilde{\beta}_1$ et $z(\beta_1)^{\sim} = z(\beta) \cap z(\bar{\beta})$, d'où (i) ; (ii) résulte alors de III 4-1 et de la prop. 2 ; par ailleurs, III 4-1 et la prop. 1 impliquent (iv) .

Si $\lambda = 0$, P est central, donc $K(P) \subset Z(\mathfrak{g})$. Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, il existe $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $\mu \neq 0$, et une base (a, b) de P tels qu'on ait pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$[x, a] = -\mu(x)\, b \quad [x, b] = \mu(x)\, a \, .$$

Partant,

$$D_x(a^2 + b^2) = 2(a\, D_x a + b\, D_x b) = 2(-\mu(x)\, ab + \mu(x)\, ba) = 0 \, ,$$

donc $a^2 + b^2 \in Z(\mathfrak{g})$. Compte tenu de la prop. 1 et de III 4-1 , l'assertion (iii) résulte alors du lemme suivant:

Lemme 4. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif Ω de caractéristique 0 , P un élément de $D_r(\mathfrak{g})$.

Alors $[\mathfrak{g}, P] \neq \{0\} \iff Z(\mathfrak{g}) \cap K(P) \neq \Omega$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 1 .

*
* *

INDEX DES NOTATIONS

*
* *

INDEX TERMINOLOGIQUE

*
* *

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNAT (Pierre). - Sur le corps des quotients de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1712-1714.

[2] BERNAT (Pierre). - Sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 2713-2715.

[3] BERNAT (Pierre). - Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 82, 1965, p. 37-99 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 3, 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1044 ; Bourbaki, 7).
[Cf. 1, §.4, prop. 9.]

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitres 4 et 5, 2e édition. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1102 ; Bourbaki, 11).
[Cf. chap. 5, § 9, prop. 1.]

[6] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chapitre 8. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).
[Cf. § 1, corollaire de la proposition 1.]

[7] DIXMIER (Jacques). - Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II., Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 325-388.

[8] DUBREIL (Paul). - Algèbre, 3e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Cahiers scientifiques, 20).

[9] JACOBSON (Nathan). - Lie algebras. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 10).
[Cf. chap. 5, théorème 6.]

*
* *

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne - 28-11-66 - n° 2639