MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J.-P. BERTRANDIAS

Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre *p*

Mémoires de la S. M. F., tome 5 (1966)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1966__5__3_0>

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 5, 1965, 106 p.

ESPACES DE FONCTIONS BORNÉES ET CONTINUES EN MOYENNE ASYMPTOTIQUE D'ORDRE p ,

par

Jean-Paul BERTRANDIAS (*)

-:-:-:-

TABLE DES MATIÈRES

(*) Thèse Sc. math. Paris, 1964.

Chapitre IX

<u>Etude de certains sous-espaces de $\mathcal{M}_c^2$</u>

-:-:-:-

TABLE DES NOTATIONS

$\mathfrak{A}^p$	espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires.	74
$\underset{\sim}{B}^p$	espace des fonctions presque-périodiques de Besicovitch.	69
$\underset{\sim}{C}(R)$	espace des fonctions continues sur R	19
$\mathcal{E}^p$	espace des éléments ergodiques de $\mathfrak{M}^p_c$	46
$\mathcal{E}^p_t$	espace des éléments totalement ergodiques de $\mathfrak{M}^p_c$	46
$\mathcal{E}^p_r$, $\mathcal{E}^p_{tr}$	respectivement : $\mathcal{E}^p \cap \mathfrak{M}^p_r$, $\mathcal{E}^p_t \cap \mathfrak{M}^p_r$	87-88
$\underset{\sim}{F}$	espace des transformées de Fourier-Stieltjes.	18
$\mathfrak{F}^p$	espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodiques.	64
$\mathfrak{F}^p_r$	$= \mathfrak{F}^p \cap \mathfrak{M}^p_r$	98
f_τ	translatée de la fonction f	12
$\mathcal{K}^2$	espace des fonctions ayant une mesure spectrale associée.	97
$\mathcal{K}^p$	espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-constantes.	42
$K_{(B)}$	noyaux de Bochner-Fejér.	55
(L) , (L_g)	ensembles de fonctionnelles de corrélation.	23
((L))	ensemble total de corrélation.	24
m(U)	fonction égale à $\frac{1}{2U}$ sur l'intervalle $[-U , U]$	45
M	moyenne ordinaire d'une fonction.	47
M_g	moyenne généralisée d'une fonction de $\mathfrak{M}^p$	45
$\underset{\sim}{M}$	espace des mesures de Radon.	18
$\mathfrak{M}^p$	espace des fonctions bornées en moyenne.	12
$\mathfrak{M}^p_c$	espace des fonctions bornées et continues en moyenne.	15
$\mathfrak{M}^p_r$	espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-régulières.	15
(N)	ensemble de semi-normes.	27
$\mathcal{P}^p$	espace des fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques.	69
$\underset{\sim}{P}^p$	espace des polynômes trigonométriques généralisés.	69
p , q	exposants conjugués : $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	12-13
$\mathcal{R}$	partie réelle d'un nombre complexe.	30
R	droite réelle (groupe additif).	18

-:-:-:-

INTRODUCTION

Le point de départ de ce travail est la théorie des fonctions pseudo-aléatoires développée par Jean BASS pour donner une bonne représentation de certains phénomènes physiques (turbulence).

Les expériences, par exemple l'enregistrement des vitesses ou des pressions dans un fluide turbulent, fournissent des courbes d'apparence compliquée, irrégulière, mais présentant cependant une certaine stabilité dans le temps. On a d'abord cherché à les étudier grâce aux moyennes temporelles (REYNOLDS-BOUSSINESQ), puis en introduisant la notion de corrélation (TAYLOR, KARMAN-HOWARTH). Ensuite par l'intermédiaire de théorèmes ergodiques assez incertains, on les a représentées par des fonctions aléatoires, les moyennes devenant alors des moyennes stochastiques (KAMPÉ de FÉRIET, BATCHELOR, etc.). Ces méthodes ne donnent qu'une description imprécise des courbes expérimentales, et on ne peut guère les utiliser pour trouver des solutions "turbulentes" des équations de l'hydrodynamique (équations de Navier-Stokes).

Pour lever ces difficultés, J. BASS a défini et étudié une classe de fonctions suffisamment irrégulières, à la fois localement et asymptotiquement, pour pouvoir représenter ces solutions turbulentes. Ce sont des fonctions ordinaires (non aléatoires) caractérisées par des propriétés de moyennes ordinaires dont la plus importante est l'existence d'une fonction de corrélation :

$$\gamma(R) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t+h)\, \overline{f(t)}\, dt .$$

Les propriétés de γ prises comme hypothèses de départ ont été suggérées par l'expérience et sont les suivantes : γ est continue, positive pour $h = 0$ et tend vers zéro à l'infini.

Ces fonctions appelées fonctions pseudo-aléatoires, ont été étudiées avec assez de détails (voir en particulier BASS [2]). On en connaît maintenant de nombreuses propriétés, on en a construit des classes très larges. Une analyse harmonique généralisée a été développée, permettant de trouver des solutions pseudo-aléatoires d'équations linéaires ou non linéaires. L'étude des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes a été abordée avec succès par MM. BASS et VO-KHAC.

Un inconvénient des fonctions pseudo-aléatoires est qu'elles ne forment pas un espace vectoriel, et l'espace vectoriel naturel dans lequel on peut les placer (l'espace de Besicovitch-Marcinkiewicz $\mathfrak{M}^2$) est un espace trop grand pour donner des résultats précis. Un des buts principaux de ce travail est de trouver des espaces vectoriels mieux adaptés, permettant une étude et une utilisation plus facile de ces fonctions.

Cela peut être réalisé en remarquant que les fonctions pseudo-aléatoires ont certaines propriétés de presque-périodicité pour la topologie faible de l'espace $\mathfrak{M}^2$ (Chap. VIII). On a donc été amené à étudier d'abord les différentes notions de presque-périodicité des fonctions bornées en moyenne asymptotique d'ordre $p \geqslant 1$ (Espaces $\mathfrak{M}^p$). Il a été commode de se limiter aux fonctions continues en normes dans ces espaces (Espaces $\mathfrak{M}^p_c$) et on a étudié un certain nombre de sous-espaces vectoriels complets de $\mathfrak{M}^p_c$.

1° L'espace $\mathcal{K}^p$ des fonctions k constante en norme (Chap. IV): $\|k_\tau - k\|_p = 0$ quel que soit τ . Il contient évidemment les constantes ordinaires et aussi d'autres fonctions dont la variation est assez lente comme par exemple

$$k(t) = \exp i \log t \quad .$$

2° L'espace $\mathcal{E}^p$ des fonctions ergodiques de $\mathfrak{M}^p_c$ (Chap. IV), c'est-à-dire l'espace des fonctions f ayant une moyenne généralisée a

$$a = \underset{g}{M}\, f(t) = \lim_{U\to\infty} \mathfrak{M}^p \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} f(t-u)\, du \quad ,$$

ainsi que l'espace $\mathcal{E}^p_t$ des fonctions totalement ergodiques ayant des coefficients de Fourier généralisés :

$$a_\lambda = \underset{g}{M}\, f(t) \exp(-i\lambda t) \qquad \text{(quel que soit } \lambda \text{ réel).}$$

3° L'espace $\mathcal{P}^p$ des fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques (Chap. VII) caractérisées par la compacité relative dans $\mathfrak{M}^p$ de l'ensemble $\{f_\tau\}$ des translatées de f (Définition du type Bochner). Elles peuvent aussi être caractérisées au moyen des presque-périodes dans $\mathfrak{M}^p$ (Définition du type Bohr-Besicovitch) ou encore par la fermeture dans $\mathfrak{M}^p$ de l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques à coefficient dans $\mathcal{K}^p$. L'espace $\mathcal{P}^p$ contient comme sous-espace vectoriel complet l'espace $\underset{\sim}{B}^p$ des fonctions presque-périodiques de Besicovitch, et contient aussi d'autres fonctions.

4° L'espace $\mathcal{A}^p$ des fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires (Chap. VIII) caractérisées par le fait que la fermeture dans la topologie faible de $\mathfrak{M}^p$ de $\{f_\tau\}$ est faiblement compacte et contient la fonction nulle. L'espace $\mathcal{A}^p$ contient, si $p \leqslant 2$, comme sous-espace (non vectoriel) l'ensemble des fonctions pseudo-aléatoires.

5° L'espace $\mathcal{F}^p$ des fonctions $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodiques (Chap. VI), fonctions telles que l'ensemble $\{f_\tau\}$ soit relativement faiblement compact dans $\mathfrak{M}^p$. On retrouve le résultat important, démontré par JACOBS [22] dans des conditions plus générales, que $\mathcal{F}^p$ est la somme directe des espaces $\mathcal{P}^p$ et $\mathcal{A}^p$, c'est-à-dire qu'une fonction de $\mathcal{F}^p$ peut se décomposer d'une façon unique en une fonction $\mathfrak{M}^p$-presque-périodique et une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire.

Les fonctions appartenant à ces différents espaces sont caractérisées au moyen de leurs fonctions de corrélation généralisées (Chap. III) provenant chacune d'une fonctionnelle linéaire continue définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}_f$ engendré dans $\mathfrak{M}^p$ par l'ensemble $\{f_\tau\}$ des translatées de f (Chap. II). L'ensemble de ces fonctionnelles contient tous les points extrémaux de la boule unité du dual $\mathcal{V}_f^*$ de $\mathcal{V}_f$, ce qui permet aux ensembles de fonctions de corrélation de refléter assez fidèlement les propriétés globales de f : ergodicité, presque périodicité forte ou faible, etc.

Le cas $p = 2$ est le cas le plus important et est étudié avec davantage de détails dans le chapitre IX en introduisant l'ensemble d'autocorrélation (γ) d'une fonction f de $\mathfrak{M}_c^2$. Si une telle fonction possède une certaine propriété de régularité $(f \in \mathfrak{M}_r^2)$ permettant d'être sûr que les différentes moyennes introduites pour définir (γ) sont invariantes par translation, l'ensemble d'autocorrélation est un ensemble de fonctions de type positif. On peut lui faire correspondre, grâce au théorème de Bochner, un ensemble (σ) de fonctions non décroissantes bornées : l'ensemble spectral énergétique. Ces deux ensembles (γ) et (σ) sont très utiles pour caractériser et étudier les sous-espaces de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$.

1° Si (σ) est compact pour la convergence uniforme, la fonction f appartient à $\mathcal{S}_{tr}^2$ (et réciproquement). Dans ce cas, on peut représenter l'espace $\mathcal{V}_f$ dans l'espace $\bigcap_{(\sigma)} L^2(\sigma)$, la correspondance étant telle que $f_\tau \to \exp i\tau\omega$, et on peut définir une fonction finiment additive d'intervalles $Y(I)$ à valeurs dans $\mathcal{V}_f$ et telle que

$$f(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\tau\omega \, dY(\omega) \quad . \tag{1}$$

2° Si (σ) est faiblement compact dans l'espace des fonctions à variation bornée, la fonction f appartient à $\mathcal{K}^2 \subseteq \mathcal{S}^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$. On peut définir une fonction $Y(E)$ dénombrablement additive sur les ensembles de Borel de la droite et à valeurs dans $\mathcal{V}_f$. On a encore (1), et on a un isomorphisme isométrique entre $\mathcal{V}_f$ et $\bigcap_{(\sigma)} L^2(\sigma)$ défini par

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)/dY(\omega) \quad ,$$

$$\|g\|_2 = \|C\|_{\cap L^2} = \sup_{(\sigma)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)|^2 \, d\sigma(\omega)\right]^{1/2} \quad .$$

3° Si (γ) est un ensemble fortement compact de fonctions de Bohr, f appartient à $\mathcal{P}^2$ (et réciproquement). Pour une telle fonction, on a un théorème de Parseval et un théorème de Riesz-Fischer-Besicovitch. En particulier, la série de Fourier généralisée de f converge en norme vers f et on a

$$\underset{g}{M} |f|^2 = \sum_{\lambda} |a_\lambda|^2 \quad .$$

Le théorème de décomposition de $\mathfrak{X}^2$ est alors tout à fait parallèle au théorème de décomposition des fonctions aléatoires stationnaires du second ordre, et on peut ainsi comparer d'une certaine façon les méthodes probabilistes et les méthodes pseudo-aléatoires dans le problème de la représentation des "fonctions turbulentes".

Pour aider le lecteur à retrouver rapidement la définition des différents espaces étudiés, une table des notations a été placée en tête de ce travail.

Pour un certain nombre de définitions et de propriétés classiques, on renverra au livre de DUNFORD et SCHWARTZ : "Linear operators, Part I. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, 7)", qui sera désigné dans le texte par les initiales D. S.

-:-:-:-

CHAPITRE I

Espaces de fonctions bornées en moyenne asymptotique
Définitions et généralités

1. Espaces de fonctions bornées en moyenne asymptotique.

(a) Définitions.

Soit p un nombre réel supérieur ou égal à 1, et soit $L^p(-T, T)$ l'espace vectoriel normé des fonctions complexes de puissance p-ième intégrable sur l'intervalle $(-T, T)$. On appellera $\mathfrak{M}^p$ (espace de Besicovitch-Marcinkiewicz) l'espace vectoriel des fonctions complexes de la variable réelle t bornées en moyenne asymptotique d'ordre p, c'est-à-dire l'espace des fonctions f appartenant à $L^p(-T, T)$ quel que soit T et telles que

$$(1) \qquad \|f\|_p = \left(\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad .$$

L'espace $\mathfrak{M}^\infty$ est l'espace des fonctions telles que

$$\|f\|_\infty = \limsup_{T\to\infty} \|f\|_{L^\infty(-T,T)} = \|f\|_{L^\infty(-\infty,\infty)} < \infty \quad .$$

L'élément "zéro" de l'espace vectoriel sera la classe θ des fonctions nulles en norme, et on conviendra d'identifier deux fonctions différant d'une fonction appartenant à la classe θ : chaque élément de $\mathfrak{M}^p$ est alors une classe de fonctions, et $\mathfrak{M}^p$ est un espace vectoriel sur lequel l'expression (1) définit bien une norme.

Avec cette convention, l'espace $\mathfrak{M}^\infty$ est identique à l'espace $L^\infty(-\infty, \infty)$. Dans toute la suite, sauf indication explicite, p désignera un nombre réel supérieur ou égal à 1 et ne pouvant prendre la valeur ∞ $(1 \leqslant p < \infty)$.

D'après un théorème de Marcinkiewicz [25], $\mathfrak{M}^p$ est un espace complet par rapport à la norme $\| \|_p$: toute suite de Cauchy de fonctions de $\mathfrak{M}^p$ tend vers un élément de $\mathfrak{M}^p$ au sens de la norme $\| \|_p$.

(b) Premières propriétés des fonctions de $\mathfrak{M}^p$.

– (α) La norme $\| \|_p$ est invariante par translation. – On notera par f_τ la fonction déduite de f par la translation τ :

$$f_\tau(t) = f(t + \tau) \quad .$$

On vérifie immédiatement que $\|f_\tau\|_p = \|f\|_p$.

– (β) Si on modifie la fonction f sur un intervalle de longueur finie, on obtient le même élément de $\mathfrak{M}^p$. - Cela provient du fait qu'une fonction nulle en dehors d'un intervalle est une fonction de la classe θ .

On utilisera cette propriété pour représenter chaque élément f de $\mathfrak{M}^p$ par une fonction f_0 telle que

$$\sup_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f_0(t)|^p \, dt \leqslant \|f(t)\|_p^p + \varepsilon$$

où ε est un nombre positif qu'on peut choisir arbitrairement petit.

En effet, étant donnée une fonction f_1 représentant l'élément f , il existe un nombre T_0 tel que

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f_1(t)|^p \, dt \leqslant \|f\|_p^p + \varepsilon \quad \text{dès que} \quad T \geqslant T_0 \quad .$$

Si on remplace la fonction f_1 par la fonction f_0 définie par

$$\begin{cases} f_0(t) = 0 & \text{si} \quad |T| < T_0 , \\ f_0(t) = f(t) & \text{si} \quad |T| \geqslant T_0 , \end{cases}$$

cette fonction aura bien la propriété requise.

(c) Transformation $\sim$.

Dans toute la suite, on associera à chaque valeur de l'exposant p $(1 \leqslant p < \infty)$ l'"exposant conjugué" q défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A l'espace $\mathfrak{M}^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, il sera souvent utile de faire correspondre l'espace conjugué $\mathfrak{M}^q$. Cela peut se faire en introduisant la "transformation $\sim$ " qui, à une fonction f de $\mathfrak{M}^p$, associe la fonction $\tilde{f}$ de $\mathfrak{M}^q$, définie par

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = |f(t)|^p \, f^{-1}(t) & \text{si} \quad f(t) \neq 0 \quad , \\ \tilde{f}(t) = 0 & \text{si} \quad f(t) = 0 \quad . \end{cases}$$

Si $p = 2$, c'est la transformation "imaginaire conjuguée" : $\tilde{f}(t) = \bar{f}(t)$.

On va étudier quelques propriétés de cette transformation.

- (α) Relation entre les normes. - Si $1 < p < \infty$, on a

$$|\tilde{f}(t)|^q = |f(t)|^{pq} \, |f(t)|^{-q} = |f(t)|^p \quad .$$

On a donc

$$\|\tilde{f}\|_q^q = \|f\|_p^p \quad .$$

Dans le cas où $p = 1$, $\|\tilde{f}\|_\infty = 1$ si $\|f\|_1 \neq 0$. Si $\|f\|_1 = 0$, on a aussi

$\|\tilde{f}\|_\infty = 1$ dès que f n'est pas nulle presque partout sur $(-\infty, \infty)$.

- (β) Transformation conjuguée. - Si $1 < p < \infty$, on peut aussi définir la transformation $\sim$ sur $\mathfrak{M}^q$. A une fonction g de $\mathfrak{M}^q$, on associera la fonction $\tilde{g}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{g}(t) = |g(t)|^q \, g^{-1}(t) & \text{si} \quad g(t) \neq 0 \ , \\ \tilde{g}(t) = 0 & \text{si} \quad g(t) = 0 \ . \end{cases}$$

On trouve de manière évidente que $\tilde{\tilde{f}}(t) = f(t)$ et $\tilde{\tilde{g}}(t) = g(t)$.

Une fonction quelconque g de $\mathfrak{M}^q$ est la transformée de la fonction $\tilde{g}$ de $\mathfrak{M}^p$: toute fonction de $\mathfrak{M}^q$ peut donc être obtenue à partir d'une fonction de $\mathfrak{M}^p$ $(1 < p < \infty)$.

- (γ) Transformation des translatées. - D'après la définition, on a $(\widetilde{f_\tau}) = \tilde{f}_\tau$. La transformée d'une translatée de f est la translatée de la transformée.

- (δ) La transformation $\sim$ n'est pas linéaire. - On a $\widetilde{\lambda f(t)} = \tilde{\lambda}\,\tilde{f}(t)$ avec $\tilde{\lambda} = |\lambda|^p \lambda^{-1}$. Si $p = 2$, $\overline{\lambda f(t)} = \overline{\lambda}\,\overline{f}(t)$.

En général,

$$\widetilde{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)} \neq \tilde{\lambda}_1 \tilde{f}_1(t) + \tilde{\lambda}_2 \tilde{f}_2(t) \quad ,$$

mais si $p = 2$, la transformation est semi-linéaire :

$$\overline{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)} = \overline{\lambda}_1 \overline{f}_1(t) + \overline{\lambda}_2 \overline{f}_2(t) \quad .$$

- (ε) Propriétés de continuité. - Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathfrak{M}^p$ $(1 < p < \infty)$; on a

$$\|\widetilde{f_1 + f_2} - \tilde{f}_1\|_q^q = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \frac{|f_1 + f_2|^p}{f_1 + f_2} - \frac{|f_1|^p}{f_1} \right|^q dt \quad .$$

Or si z est un nombre complexe quelconque, il existe des constantes $K(p)$ et $H(p)$ ne dépendant que de p, et telles que

$$\left| \frac{|1 + z|^p}{1 + z} - 1 \right|^q \leqslant K(p) \ |z|^p + H(p) \ |z|^p \quad .$$

En posant $z = \dfrac{z_2}{z_1}$, on en déduit

$$\left| \frac{|z_1 + z_2|^p}{z_1 + z_2} - \frac{|z_1|^p}{z_1} \right|^q \leqslant K(p) \ |z_2|^p + H(p) \ |z_2|^q \ |z_1|^{p-q} \quad .$$

En appliquant cette inégalité aux fonctions f_1 et f_2, en intégrant et en passant aux limites supérieures, on obtient

$$\|\widetilde{f_1 + f_2} - \widetilde{f}_1\|_q^q \leq K(p)\|f_2\|_p^p + H(p)\| |f_2|^q \ |f_1|^{p-q}\|_1 \quad .$$

Si on applique à la dernière norme l'inégalité de Hölder :

$$\|\widetilde{f_1 + f_2} - \widetilde{f}_1\|_q^q \leq K(p)\|f_2\|_p^p + H(p)\|f_2\|_p^q \ \|f_1\|_p^{p-q} \quad .$$

On en déduit :

1° Si $\|f_2\|_p = 0$, on a $\widetilde{f_1 + f_2} = \widetilde{f}_1$ dans $\mathfrak{M}^q$, c'est-à-dire : <u>si</u> $f_1 = f_2$ <u>dans</u> $\mathfrak{M}^p$, <u>on a</u> $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$ <u>dans</u> $\mathfrak{M}^q$.

La transformation $\sim$ est bien une transformation de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}^p$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{M}^q$ (considérés comme espaces de classes de fonctions).

2° Si $\|f_n\|_p$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, $\widetilde{f_1 + f_n}$ tend vers f_1 c'est-à-dire : <u>si une suite</u> $\{f_n\}$ <u>est une suite de Cauchy dans</u> $\mathfrak{M}^p$, $\{\widetilde{f}_n\}$ <u>est une suite de Cauchy dans</u> $\mathfrak{M}^q$.

Dans le cas où $p = 1$, les relations entre normes vues ci-dessus (α) montrent que la transformation $\sim$ entre $\mathfrak{M}^1$ et $\mathfrak{M}^\infty$ n'a aucune propriété de continuité.

2. <u>Espaces de fonctions continues et régulières en moyenne asymptotique</u>.

(a) <u>Espaces de fonctions continues en moyenne asymptotique</u>.

On dira qu'une fonction f appartenant à $\mathfrak{M}^p$ est <u>une fonction continue en moyenne asymptotique d'ordre</u> p si elle est telle que $\|f_\tau - f\|_p$ tend vers zéro lorsque τ tend vers zéro.

On appellera $\mathfrak{M}_c^p$ le sous-espace de $\mathfrak{M}^p$ constitué par ces fonctions.

La fonction vectorielle $\tau \longrightarrow f_\tau$ est une fonction uniformément continue définie sur l'axe réel R et à valeurs dans $\mathfrak{M}^p$. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{M}_c^p$ <u>est un sous-espace vectoriel complet de</u> $\mathfrak{M}^p$.

(b) <u>Espaces de fonctions régulières en moyenne asymptotique</u>.

On dira qu'une fonction f de $\mathfrak{M}^p$ est $\mathfrak{M}^p$-<u>régulière</u> si, quel que soit le nombre réel ℓ, on a

$$\lim_{T \to \pm\infty} \frac{1}{2T} \int_{T-\ell}^{T} |f(t)|^p \, dt = 0 \quad . \tag{1}$$

On appellera $\mathfrak{M}_r^p$ l'ensemble des fonctions $\mathfrak{M}^p$-régulières.

Comme on a

$$(2) \qquad \limsup_{T\to\pm\infty} \left|\frac{1}{2T}\int_{T-\ell}^{T} |f(t)|^p \, dt\right| \leq \|f\|_p^p \ ,$$

les fonctions nulles dans $\mathfrak{M}^p$ appartiennent à $\mathfrak{M}_r^p$. On peut considérer $\mathfrak{M}_r^p$ comme un espace de classes de fonctions et $\mathfrak{M}_r^p$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}^p$. L'inégalité de Minkowski montre immédiatement que l'espace $\mathfrak{M}_r^p$ est vectoriel, et l'inégalité (2) permet de démontrer que toute limite dans $\mathfrak{M}^p$ de fonctions de $\mathfrak{M}_r^p$ est encore dans $\mathfrak{M}_r^p$: $\mathfrak{M}_r^p$ <u>est un sous-espace vectoriel complet de</u> $\mathfrak{M}^p$.

La condition (1) implique une certaine régularité de la fonction f qui ne peut prendre des valeurs trop grandes sur des intervalles de longueur finie. Elle sera utile pour les changements d'origine dans le calcul de moyennes attachées à f : celles-ci sont invariantes par translation en ce sens que si $\{T_\nu\}$ est une suite de valeurs de T, tendant vers l'infini, telle qu'existe la limite

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t)\, g(t)\, dt = \langle g\ ,\ f\rangle_{\{T_\nu\}} \qquad (f\in\mathfrak{M}_r^p\ ,\quad g\in\mathfrak{M}^q)\ ,$$

on a, quel que soit le nombre réel τ,

$$\langle g_\tau\ ,\ f_\tau\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle g\ ,\ f\rangle_{\{T_\nu\}}\ .$$

En effet

$$|\langle g_\tau\ ,\ f_\tau\rangle_{\{T_\nu\}} - \langle g\ ,\ f\rangle_{\{T_\nu\}}| \leq \lim_{T_\nu\to\infty}\frac{1}{2T_\nu}\left[\int_{T_\nu}^{T_\nu+\tau} - \int_{-T_\nu}^{-T_\nu+\tau}\right] f(t)\, g(t)\, dt$$

qui est bien nulle d'après l'inégalité de Hölder et la condition (1).

(c) <u>Conditions pour qu'une fonction de</u> $\mathfrak{M}^p$ <u>appartienne à</u> $\mathfrak{M}_r^p$.

<u>Une condition suffisante pour qu'une fonction</u> f <u>de</u> $\mathfrak{M}^p$ <u>appartienne à</u> $\mathfrak{M}_r^p$ <u>est que l'expression</u> $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^p\, dt$ <u>ait une limite lorsque</u> T <u>augmente indéfiniment.</u>

En effet $\frac{1}{2T}\int_{-T+\ell}^{T-\ell}|f(t)|^p\, dt$ tend vers la même limite et $\frac{1}{2T}\int_{T-\ell}^{T}|f(t)|^p\, dt$ est majoré par la différence de deux fonctions tendant vers la même limite. On a donc

$$\lim_{T\to\pm\infty}\left|\frac{1}{2T}\int_{T-\ell}^{T}|f(t)|^p\, dt\right| = 0\ .$$

Une autre condition intéressante est la suivante :

<u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction</u> f <u>de</u> $\mathfrak{M}^p$ <u>appar-</u>

<u>tienne à</u> $\mathfrak{M}_r^p$ <u>est que, quel que soit le nombre réel</u> τ , <u>on ait</u>

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[|f(t+\tau)|^p - |f(t)|^p\right] dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{T}^{T+\tau} - \int_{-T}^{-T+\tau}\right] |f(t)|^p\, dt = 0 \quad .$$

La condition est évidemment nécessaire et elle est suffisante d'après une démonstration qui sera donnée au chapitre IV, § 1 (d).

3. Rapports entre les espaces $\mathfrak{M}^p$, $\mathfrak{M}_c^p$, $\mathfrak{M}_r^p$.

(a) <u>Inégalités de Hölder</u>.

Soit p' un exposant tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{s} \leqslant 1$, et soit $f.g$ le produit ponctuel $t \longrightarrow f(t).g(t)$ des fonctions f et g . Les inégalités de Hölder classiques donnent immédiatement :

$$\|f.g\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \qquad \text{(première inégalité de Hölder)}$$

$$\|f.g\|_s \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_{p'} \qquad \text{(seconde inégalité de Hölder).}$$

(b) <u>Produits de fonctions</u>.

On démontre sans difficultés au moyen des inégalités de Hölder, de l'inégalité triangulaire dans $\mathfrak{M}^s$ et de l'inégalité (1) du § 2, les relations suivantes :

<u>Si</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{M}^p$ <u>et</u> g <u>à</u> $\mathfrak{M}^{p'}$, <u>le produit</u> $f.g$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{M}^s$.

<u>Si</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{M}_c^p$ <u>et</u> g <u>à</u> $\mathfrak{M}_c^{p'}$, <u>le produit</u> $f.g$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{M}_c^s$.

<u>Si</u> f <u>appartient à</u> $\mathfrak{M}_r^p$ <u>et</u> g <u>à</u> $\mathfrak{M}^{p'}$, <u>le produit</u> $f.g$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{M}_r^s$.

(c) <u>Relations d'inclusion</u> (p <u>constant</u>).

Pour une valeur fixe de p , les différents espaces $\mathfrak{M}^p$ vérifient les conditions d'inclusion strictes :

$$\mathfrak{M}_c^p \subset \mathfrak{M}^p \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_r^p \subset \mathfrak{M}^p \quad ,$$

mais il n'existe pas de relation d'inclusion entre $\mathfrak{M}_c^p$ et $\mathfrak{M}_r^p$. En effet, la fonction f_1 : $t \longrightarrow \exp it^2$ appartient à $\mathfrak{M}_r^p$ mais n'appartient pas à $\mathfrak{M}_c^p$ (quel que soit p), et la fonction f_2 , définie par

$$\begin{cases} f_2(t) = n^{n/p} & \text{pour } n^n \leqslant t \leqslant n^n + 1 \, , \quad n = 1 \, , 2 \, , \ldots \\ f_2(t) = 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

appartient à $\mathfrak{M}_c^p$ sans appartenir à $\mathfrak{M}_r^p$.

(d) Relations d'inclusion (p variable).

Si $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$, et si f appartient à $\mathcal{M}^{p_2}$, f appartient aussi à $\mathcal{M}^{p_1}$ et est telle que $\|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2}$.

Cela résulte de la propriété correspondante des normes dans les espaces L^{p_1} et L^{p_2} . D'une manière plus précise, on peut montrer, à partir de l'inégalité de Hölder ordinaire, que f appartient à $\mathcal{M}_r^{p_1}$. On en déduit la relation d'inclusion $\mathcal{M}^{p_2} \subset \mathcal{M}^{p_1}$ qui est une relation d'inclusion stricte. En effet, la fonction $f^{(\lambda)}$, définie par

$$f^{(\lambda)}(t) = n^{1/\lambda} \quad \text{si} \quad n^2 \leqslant t < n^2 + 1 \qquad (n = 1 , 2 , 3 , \dots ; \; p_1 < \lambda < p_2) ,$$
$$f^{(\lambda)}(t) = 0 \qquad \text{ailleurs,}$$

appartient à $\mathcal{M}_r^{p_1}$ sans appartenir à $\mathcal{M}^{p_2}$ car

$$\|f^{(\lambda)}\|_p = \infty \quad \text{si} \quad p > \lambda , \qquad \|f^{(\lambda)}\|_p = 0 \quad \text{si} \quad p < \lambda \quad .$$

4. Convolutions par des mesures de Radon.

(a) Mesures de Radon. Transformées de Fourier-Stieltjes.

Une mesure de Radon sur la droite réelle R est une fonction d'ensemble $\int_E d\mu(t)$ définie sur le corps de Borel de R , dénombrablement additive et régulière (D. S., p. 137). On la notera μ , et on l'identifiera avec la fonction à variation bornée qui lui est associée :

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{t} d\mu(t') \quad .$$

On désignera par $\underset{\sim}{M}$ l'espace vectoriel normé des mesures de Radon bornées, la norme étant donnée par la variation totale de μ :

$$\|\mu\|_{\underset{\sim}{M}} = \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu|(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \quad .$$

$\underset{\sim}{M}$ est un espace de Banach isomorphe au dual de l'espace $\underset{\sim}{C}_0(R)$ des fonctions continues nulles à l'infini, la norme étant la norme de la convergence uniforme.

L'espace $\underset{\sim}{M}$ peut s'identifier à l'espace $\underset{\sim}{F}$ des transformées de Fourier-Stieltjes définies par

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\, ith)\, d\mu(t) \; , \qquad \mu \in \underset{\sim}{M} \; ,$$

la norme étant toujours la variation totale de $d\mu(\omega)$. Les fonctions $\gamma(h)$ sont bornées et uniformément continues : $\underset{\sim}{F}$ est un sous-espace vectoriel (algébrique) de l'espace $\underset{\sim}{C}(R)$ des fonctions continues et bornées sur R . On a

(1) $$\sup_h |\gamma(h)| = \|\gamma\|_{\underset{\sim}{C}} \leqslant \|\gamma\|_{\underset{\sim}{F}} = \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \quad .$$

(b) Définition de la convolution par une mesure de Radon.

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}^p$ et soit μ une mesure de Radon. Si Δ est un intervalle fini, posons :

$$g_{(\Delta)}(t) = \int_\Delta f(t-u)\, d\mu(u) \quad .$$

D'après l'inégalité de Hölder,

$$|g_{(\Delta)}(t)| \leqslant \left[\int_\Delta |f(t-u)|^p\, d|\mu|(u)\right]^{1/p} \left[\int_\Delta d|\mu|\right]^{1/q} \quad .$$

D'après le théorème de Fubini, la fonction $g_{(\Delta)}$ appartient localement à L^p , et comme la fonction $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t-u)|^p\, dt$ est uniformément bornée sur Δ pour $T \geqslant T_0 > 0$, le théorème de Lebesgue montre que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_\Delta |f(t-u)|^p\, d|\mu|(u) \leqslant \int_\Delta \|f\|_p^p\, d|\mu| = \|f\|_p^p \int_\Delta d|\mu| \quad .$$

On en déduit que

(2) $$\|g_{(\Delta)}\|_p \leqslant \|f\|_p \int_\Delta d|\mu| \quad .$$

Cette inégalité montre que la fonction de A , à valeurs dans $\mathfrak{M}^p$

$$\int_0^A f(t-u)\, d\mu(u)$$

vérifie une condition de Cauchy lorsque A augmente indéfiniment par valeurs positives ou négatives. On peut donc définir de manière unique une fonction g de $\mathfrak{M}^p$ par

$$g(t) = \lim_{A,B\to\infty} \mathfrak{M}^p \int_{-A}^{B} f(t-u)\, d\mu(u) \quad .$$

On la notera $g = g \star \mu$, et on écrira

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+u)\, d\mu(u) \quad .$$

L'inégalité (2) donne une majoration de la norme de g :

(3) $$\|g\|_p \leqslant \|f\|_p\, \|\mu\|_{\underset{\sim}{M}} \quad .$$

La convolution ainsi définie est un opérateur linéaire continu de $\mathfrak{M}^p$ sur lui-même, de norme bornée par $\|\mu\|_{\underset{\sim}{M}}$. On obtient d'ailleurs ainsi une représentation de l'<u>algèbre de convolution</u> $\underset{\sim}{M}$ sur l'espace de Banach $\mathfrak{M}^p$ car les relations de continuité (2) et (3) permettent de montrer que

$$[f \star \mu] \star \nu = [f \star \nu] \star \mu = f \star [\nu \star \mu] \quad .$$

L'opérateur "convolution par μ " commutte avec l'opérateur "translation" :

$$[f \star \mu]_h = f_h \star \mu \quad .$$

Enfin, si ρ est une fonction de $L^1(R)$, on peut lui associer la mesure de Radon absolument continue μ_ρ : $d\mu_\rho(t) = \rho(t)\, dt$, et définir le produit de convolution de f par ρ :

$$(f \star \rho)(t) = (f \star \mu_\rho)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, \rho(u)\, du$$

et alors $\|f \star \rho\|_p \leqslant \|f\|_p\, \|\rho\|_{L^1}$.

(c) <u>Convolution des fonctions de</u> $\mathfrak{M}_c^p$.

Si f est une fonction de $\mathfrak{M}_c^p$, l'espace vectoriel V_f engendré dans $\mathfrak{M}_c^p$ par l'ensemble $\{f_\tau\}$ des translatées de f est séparable. On peut alors définir la convolution $f \star \mu$ par une intégrale vectorielle et obtenir des propriétés plus précises.

Considérons la fonction vectorielle constante par intervalle, définie par

$$\tau \longrightarrow f\binom{n}{\tau} = \sum_k f_{k/n}\, \chi_{k/n}(\tau) \ , \qquad n = 1,2,3,\dots \ , \quad k = \dots -2,-1,0,1,2\ ,\dots \ ,$$

$\chi_{k/n}$ étant la fonction caractéristique de l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$. On a

$$\sup_\tau \|f\binom{n}{\tau} - f_\tau\|_p \leqslant \sup_{0<\lambda\leqslant\frac{1}{n}} \|f_\lambda - f\|_p = \varepsilon_n \quad ;$$

ε_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, car f est continue en norme. En appliquant l'inégalité (3) à chaque intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, on trouve :

$$\| g - \sum_k f_{-(k+1)/n} \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} d\mu(u)\|_p = \|\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t-u) - f\binom{n}{-u}\right] d\mu(u)\|_p \leqslant \varepsilon_n \|\mu\|_{\underset{\sim}{M}} \quad .$$

On déduit facilement de cette inégalité les propriétés suivantes :

- (α) g est limite dans $\mathfrak{M}^p$ de combinaisons linéaires de translatées de f . <u>La fonction</u> $g = f \star \mu$ <u>appartient à l'espace</u> V_f .

- (β) Si μ est une mesure non négative de norme 1 , <u>la fonction</u> g <u>correspondante appartient à l'enveloppe convexe fermée dans</u> $\mathfrak{M}^p$ <u>de l'ensemble</u> $\{f_\tau\}$.

- (γ) Si ℓ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{V}_f$, on a

$$\langle \ell , f \star \mu \rangle = \langle \ell , \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, d\mu(u) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ell , f_{-u} \rangle \, d\mu(u) \quad .$$

- (δ) La fonction f_τ , définie sur R et à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{V}_f$, est μ-intégrable (D. S., Chap. III) et on peut écrire

$$g = f \star \mu = \int_R f_{-u} \, d\mu(u) \quad .$$

-:-:-:-

CHAPITRE II

Sous-espaces vectoriels séparables de $\mathfrak{M}^p$

1. Fonctionnelles de corrélation.

Soit $\mathcal{Y}$ un sous-espace vectoriel séparable et complet de $\mathfrak{M}^p$, et soit $\mathcal{Y}^*$ son espace dual (espace vectoriel normé des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{Y}$).

On va caractériser certains éléments de $\mathcal{Y}^*$ associés à une fonction quelconque g de $\mathfrak{M}^q$.

Soit $\{f_{(i)}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{Y}$ dense dans $\mathcal{Y}$. D'après l'inégalité de Hölder

$$\limsup_{T\to\infty} \left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_{(1)}(t)\; g(t)\; dt\right| \leq \|f_{(1)}\|_p\; \|g\|_q \quad ,$$

on peut faire correspondre à la fonction $f_{(1)}$ au moins une suite $\{T_{1\nu}\}$ de valeurs de T croissant vers l'infini telle que la limite

$$\lim_{T_{1\nu}\to\infty} \frac{1}{2T_{1\nu}}\int_{-T_{1\nu}}^{T_{1\nu}} f_{(1)}(t)\; g(t)\; dt$$

existe. On la notera $\langle \ell\ ,\ f_{(1)}\rangle$ ou $\langle g\ ,\ f_{(1)}\rangle_{\{T_{1\nu}\}}$.

De la suite $\{T_{1\nu}\}$, on peut extraire une suite $\{T_{2\nu}\}$ telle que

$$\lim_{T_{2\nu}\to\infty} \frac{1}{2T_{2\nu}}\int_{-T_{2\nu}}^{T_{2\nu}} f_{(2)}(t)\; g(t)\; dt = \langle \ell\ ,\ f_{(2)}\rangle \quad .$$

En continuant ainsi, on peut construire une suite de suites emboitées définissant une limite $\langle \ell\ ,\ f_{(i)}\rangle$ pour chacune des fonctions $f_{(i)}$. Si on considère la suite diagonale $\{T_\nu\} = \{T_{\nu\nu}\}$, on a

$$\langle \ell\ ,\ f_{(i)}\rangle = \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\; g(t)\; dt \quad .$$

D'après l'inégalité de Hölder, la fonctionnelle définie par $\langle \ell\ ,\ f_{(i)}\rangle$ sur l'ensemble $\{f_{(i)}\}$ est continue sur cet ensemble. On peut donc la prolonger en une fonctionnelle ℓ continue sur l'espace $\mathcal{Y}$. Elle sera définie par

$$\langle \ell\ ,\ f\rangle = \langle g\ ,\ f\rangle_{\{T_\nu\}} = \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t)\; g(t)\; dt \quad .$$

On l'appellera "fonctionnelle de corrélation" entre $\mathcal{Y}$ et g. C'est un élément de $\mathcal{Y}^*$ dont la norme $\|\ell\|$ est telle que

(1) $$\|\ell\| \leqslant \|g\|_q \ .$$

2. Ensembles de fonctionnelles de corrélation.

En général, la moyenne $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\, g(t)\, dt$ n'existe pas et la fonctionnelle déterminée ci-dessus n'est pas définie de manière unique. On appellera (L_g) l'ensemble des fonctionnelles de corrélation entre $\mathcal{Y}$ et g c'est-à-dire l'ensemble de toutes les fonctionnelles ℓ qu'on peut obtenir par le procédé ci-dessus à partir de la fonction g .

(L_g) est un ensemble borné de $\mathcal{Y}^*$ qui est compact dans la $\mathcal{Y}$-topologie de $\mathcal{Y}^*$.

On appellera $\mathcal{Y}$-topologie de $\mathcal{Y}^*$ la topologie admettant comme base de voisinages de zéro tous les ensembles de $\mathcal{Y}^*$ qui sont définis par un nombre fini d'inégalités

$$|\langle \ell \ , f_{(n)}\rangle| < \varepsilon \ , \qquad 1 \leqslant n \leqslant N \ ,$$

où les $f_{(n)}$ sont des éléments quelconques de $\mathcal{Y}$.

D'après l'inégalité 1 - (1), (L_g) est borné et d'après les propriétés de la $\mathcal{Y}$-topologie de $\mathcal{Y}^*$ (théorème d'Alaoglu : D. S., p. 424, et théorème de métrisabilité : D. S., p. 426), l'ensemble (L_g) est relativement compact dans la $\mathcal{Y}$-topologie de $\mathcal{Y}^*$, c'est-à-dire que de toute suite $\{\ell_j\}$ d'éléments de (L_g) , on peut extraire une suite $\{\ell'_j\}$ qui converge dans la $\mathcal{Y}$-topologie vers un élément ℓ_0 de $\mathcal{Y}^*$.

Pour montrer que (L_g) est compact, il suffit de montrer que ℓ_0 appartient aussi à (L_g) . D'après leur procédé de construction, on peut toujours supposer que les fonctionnelles de corrélation ℓ'_j sont définies par des suites $\{T^j_\nu\}$ telles que

$$\left|\frac{1}{2T^j_\nu}\int_{-T^j_\nu}^{T^j_\nu} f_{(i)}(t)\, g(t)\, dt - \langle \ell'_j \ , f_{(i)}\rangle\right| \leqslant \frac{1}{j}$$

quel que soit i . On construit alors une suite $\{T_\nu\}$ de la manière suivante :

1° $T_1 = T^1_1$

2° $T_2 = T^2_{\nu_2}$ $\qquad \nu_2$ tel que $T^2_{\nu_2} > 2T_1$

3° $T_3 = T^3_{\nu_3}$ $\qquad \nu_3$ tel que $T^3_{\nu_3} > 2T_2$ $\qquad$ ... etc.

Pour chaque valeur de i , on a

$$\left|\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\, g(t)\, dt - \langle \ell'_\nu \ , f_{(i)}\rangle\right| \leqslant \frac{1}{\nu} \ .$$

D'après l'hypothèse, $\langle \ell'_\nu , f_{(i)}\rangle$ tend vers $\langle \ell_0 , f_{(i)}\rangle$ lorsque ν augmente indéfiniment. Donc

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\, g(t)\, dt = \langle \ell_0 , f_{(i)}\rangle \quad .$$

Par conséquent, ℓ_0 est la fonctionnelle de corrélation correspondant à la suite $\{T_\nu\}$ qu'on vient de déterminer. Elle appartient bien à l'ensemble (L_g) .

3. Ensemble de toutes les fonctionnelles de corrélation.

On notera $((L))$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles de corrélation entre $\mathcal{Y}$ et toutes les fonctions g dont la norme dans $\mathfrak{M}^q$ ne dépasse pas 1 :

$$((L)) = \bigcup_{\|g\|_q\leqslant 1} (L_g) \quad .$$

Cet ensemble a des propriétés analoques à celles des ensembles (L_g) :

(a) $((L))$ est un ensemble borné dans $\mathcal{Y}^*$.

C'est même un sous-ensemble de la sphère unité de $\mathcal{Y}^*$ d'après (1) du § 1 : si $\ell \in ((L))$, on a

$$\|\ell\| \leqslant \|g\|_q \leqslant 1 \quad .$$

(b) $((L))$ est compact dans la $\mathcal{Y}$-topologie de $\mathcal{Y}^*$.

Soit $\{\ell_j\}$ une suite de fonctionnelles de $((L))$ convergeant vers une fonctionnelle ℓ_0 dans la $\mathcal{Y}$-topologie de $\mathcal{Y}^*$. On peut supposer que les fonctionnelles ℓ_j sont définies par des suites $\{T^j_\nu\}$ telles que

$$(1) \qquad \left|\frac{1}{2T^j_\nu}\int_{-T^j_\nu}^{T^j_\nu} f_{(i)}(t)\, g_{(j)}(t)\, dt - \langle \ell_j , f_{(i)}\rangle\right| \leqslant \frac{1}{j}$$

quel que soit i . Les fonctions $f_{(i)}$ et $g_{(j)}$ peuvent d'autre part être choisies telles que (I-1-(b)-(β)) :

$$(2) \qquad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f_{(i)}(t)|^p\, dt \leqslant 2\|f_{(i)}\|_p^p$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |g_{(j)}(t)|^q\, dt \leqslant \left(1+\frac{1}{2^j}\right)\|g_{(j)}\|_q^q \quad (\text{si } p>1).$$

On construit deux suites $\{T_\nu\}$, $\{T'_\nu\}$ et une fonction g de la manière suivante.

1° $T_1 = T_1'$ et $g(t) = g_{(1)}(t)$ dans $[-T_1, T_1]$,

2° $T_1' = 2^2 T_1$ et $g(t) = 0$ dans $[-T_1', -T_1[\, , \,]T_1, T_1']$,

3° $T_2 = T^2_{\nu_2}$ avec ν_2 tel que $T^2_{\nu_2} \geqslant 2^2 T_1' = 2^4 T_1$

et $g(t) = g_{(2)}(t)$ dans $[-T_2, -T_1'[\, , \,]T_1', T_2]$,

4° $T_2' = 2^3 T_2$ et $g(t) = 0$ dans $[-T_2', -T_2[\, , \,]T_2, T_2']$,

5° $T_3 = T^3_{\nu_3}$ avec ν_3 tel que $T^3_{\nu_3} \geqslant 2^3 T_2' = 2^6 T_2$

et $g(t) = g_{(3)}(t)$ dans $[-T_3, -T_2'[\, , \,]T_2', T_3]$;

on continue ainsi de manière à avoir toujours :

$$(4) \qquad \begin{aligned} T'_{\nu-1} &= 2^\nu T_{\nu-1} \\ T_\nu &\geqslant 2^\nu T'_{\nu-1} = 2^{2\nu} T_{\nu-1} \quad . \end{aligned}$$

Montrons d'abord que la fonction g ainsi obtenue est bien telle que $\|g\|_q \leqslant 1$. Si on introduit les quantités

$$\lambda_\nu = \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} |g(t)|^q \, dt \ , \qquad \lambda'_\nu = \frac{1}{2T'_\nu} \int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} |g(t)|^q \, dt \ ,$$

on a

$$\lambda'_\nu = \frac{1}{2^{\nu+1}} \lambda_\nu$$

et

$$\lambda_\nu = \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} |g_{(\nu)}(t)|^q \, dt - \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T'_{\nu-1}}^{T'_{\nu-1}} |g_{(\nu)}(t)|^q \, dt + \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_{\nu-1}}^{T_{\nu-1}} |g(t)|^q \, dt \ ,$$

$$\lambda_\nu \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^\nu}\right)\left(1 + \frac{1}{2^\nu}\right) + \frac{1}{2^{2\nu}} \lambda_{\nu-1} \quad .$$

On voit facilement qu'on a certainement $\lambda_\nu \leqslant 1 + \frac{1}{2^{\nu-2}}$.

Si T est compris entre T_ν et T'_ν , on a

$$(5) \qquad \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(t)|^q \, dt = \frac{2T_\nu}{2T} \lambda_\nu \leqslant \lambda_\nu \leqslant 1 + \frac{1}{2^{\nu-2}} \quad .$$

Si T est compris entre T'_ν et $T_{\nu+1}$, on a

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g(t)|^q\,dt = \frac{2T'_\nu}{2T}\lambda'_\nu + \frac{1}{2T}\left(\int_{T'_\nu}^{T} + \int_{-T}^{-T'_\nu}\right)|g_{(\nu+1)}(t)|^q\,dt$$

$$\leqslant \lambda'_\nu + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g_{(\nu+1)}(t)|^q\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{\nu+1}}\left(1+\frac{1}{2^{\nu-2}}\right) + \left(1+\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{2^{\nu-1}} \quad .$$

Par suite, on a bien

(6) $$\|g\|_q = \limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g(t)|^q\,dt \leqslant 1 \quad .$$

Montrons maintenant que $\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\,g(t)\,dt$ tend, lorsque ν augmente indéfiniment, vers une limite qui est précisément $\langle \ell_0 , f_{(i)}\rangle$. Si on pose

$$\Delta_\nu = \left|\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\,g(t)\,dt - \langle \ell_0 , f_{(i)}\rangle\right| \quad ,$$

on a

$$\Delta_\nu \leqslant \left|\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\left[g(t) - g_{(\nu)}(t)\right]dt\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\,g_{(\nu)}(t)\,dt - \langle \ell_\nu , f_{(i)}\rangle\right| + \left|\langle \ell_\nu - \ell_0 , f_{(i)}\rangle\right| \quad .$$

Pour le premier terme du second membre, on a :

$$\left|\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\left[g(t) - g_{(\nu)}(t)\right]dt\right| = \left|\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_{\nu-1}}^{T_{\nu-1}} f_{(i)}(t)\left[g(t) - g_{(\nu)}(t)\right]dt\right| \leqslant$$

$$\frac{T_{\nu-1}}{T_\nu}\left[\frac{1}{2T_{\nu-1}}\int_{-T_{\nu-1}}^{T_{\nu-1}}|f_{(i)}(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\frac{1}{2T_{\nu-1}}\int_{-T_{\nu-1}}^{T_{\nu-1}}|g(t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{2T_{\nu-1}}\int_{-T_{\nu-1}}^{T_{\nu-1}}|g_{(\nu)}(t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

D'après les majorations (4), (2), (5) et (3), ce terme se majore par

$$\varepsilon_\nu = \frac{1}{2^{2\nu}}\,2^{1/p}\,\|f_{(i)}\|_p\left\{\left[1+\frac{1}{2^{\nu-3}}\right]^{1/q} + \left[1+\frac{1}{2^\nu}\right]^{1/q}\right\} \quad .$$

En tenant compte de (1), on obtient donc

$$\Delta_\nu \leqslant \varepsilon_\nu + \frac{1}{\nu} + \left|\langle \ell_\nu - \ell_0 , f_{(i)}\rangle\right| \quad ,$$

et Δ_ν tend bien vers zéro lorsque ν augmente indéfiniment, c'est-à-dire, quel que soit $f_{(i)}$

$$\lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f_{(i)}(t)\, g(t)\, dt = \langle \ell_0 , f_{(i)} \rangle \quad .$$

La fonctionnelle linéaire limite ℓ_0 appartient donc aussi à $((L))$ qui, par suite, est compact dans la $\mathcal{V}$-topologie de $\mathcal{V}^*$.

Cette démonstration s'adapte facilement au cas $p = 1$, $q = \infty$.

4. Ensemble (N) de semi-normes sur $\mathcal{V}$.

Dans ce paragraphe, on va définir sur le sous-espace vectoriel séparable $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{M}^p$ un ensemble (N) de semi-normes. L'espace $\mathcal{V}$ muni de chacune de ces semi-normes a des propriétés ressemblant à celles des espaces L^p et la norme $\|f\|_p$ dans $\mathfrak{M}^p$ d'un élément de $\mathcal{V}$ est la borne supérieure de toutes les semi-normes de (N) .

(a) Définition de l'ensemble (N) .

De chaque suite $\{T_\nu\}$ définissant une fonctionnelle de corrélation, on peut extraire, par le procédé diagonal, au moins une sous-suite $\{T'_\nu\}$ telle que

$$\left[\frac{1}{2T'_\nu} \int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} |f_{(i)}(t)|^p\, dt\right]^{1/p}$$

converge vers une fonctionnelle $\|f_{(i)}\|_{T'_\nu}$ définie sur l'ensemble $\{f_{(i)}\}$. Comme on a

$$\limsup_{T'_\nu \to \infty} \frac{1}{2T'_\nu} \int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} |f_{(i)}(t) - f_{(j)}(t)|^p\, dt \leqslant \|f_{(i)} - f_{(j)}\|_p^p \quad ,$$

on peut prolonger par continuité cette fonctionnelle à tout l'espace $\mathcal{V}$. D'après l'inégalité de Minkowski, cette fonctionnelle est sous-additive et elle est positivement homogène de degré 1 . Elle définit donc sur $\mathcal{V}$ une semi-norme

$$\|f\|_{T'_\nu} = \left(\lim_{T'_\nu \to \infty} \frac{1}{2T'_\nu} \int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \quad . \tag{1}$$

On appellera (N) l'ensemble de toutes les semi-normes pouvant être définies sur $\mathcal{V}$ de cette façon. L'ensemble (N) ne dépend pas de la fonction $g(t)$ mais uniquement de l'espace $\mathcal{V}$. En effet, considérons une suite $\{T'_\nu\}$ telle que la limite intervenant dans (1) existe quelle que soit f dans $\mathcal{V}$; étant donnée une fonction g , on peut toujours, par le procédé diagonal, lui associer au moins une fonctionnelle de corrélation correspondant à une sous-suite de $\{T'_\nu\}$ et à cette sous-suite correspond la même semi-norme qu'à $\{T'_\nu\}$.

Cet ensemble (N) permet de définir la norme $\| \ \|_p$ dans $\mathcal{V}$ par la formule

(2) $$\| \ \|_p = \sup_{(N)} \| \ \|_{T'_\nu} \quad .$$

Pour un élément f de $\mathcal{V}$, on a en effet

$$\|f\|_p^p = \lim_{T\to\infty} \sup \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^p \, dt = \lim_{T^0_\nu\to\infty} \frac{1}{2T^0_\nu} \int_{-T^0_\nu}^{T^0_\nu} |f(t)|^p \, dt$$

pour une certaine suite $\{T^0_\nu\}$. Par le procédé diagonal, on peut en extraire une sous-suite $\{T^1_\nu\}$ définissant une semi-norme de (N) et on a $\|f\|_p = \|f\|_{T^1_\nu}$. Or, d'après la définition de $\|f\|_p$, on a $\|f\|_{T'_\nu} \leqslant \|f\|_p$. On en déduit bien (2).

(b) <u>Propriétés de</u> $\mathcal{V}$ <u>muni d'une semi-norme</u> (N) .

L'espace vectoriel (algébrique) $\mathcal{V}$ muni de la semi-norme $\| \ \|_{T'_\nu}$ a une propriété intéressante : <u>il est uniformément convexe</u> (si $1 < p < \infty$) .

On dit qu'un espace vectoriel normé est uniformément convexe si, quel que soit $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon \leqslant 2)$, il existe un nombre strictement positif $\delta(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε et tel que les conditions $\|f_1\| \leqslant 1$, $\|f_2\| \leqslant 1$ et $\|f_1 - f_2\| \geqslant \varepsilon$ entraînent que

$$\|\tfrac{1}{2}(f_1 + f_2)\| \leqslant 1 - \delta(\varepsilon) \quad .$$

On sait que les espaces L^p $(1 < p < \infty)$ sont uniformément convexes (CLARKSON [17]). On va en déduire la propriété cherchée.

On peut écrire

$$\|f\|^p_{T'_\nu} = \lim_{T'_\nu\to\infty} \frac{1}{2T'_\nu} \int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} |f(t)|^p \, dt = \lim_{\nu\to\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(2T'_\nu \, u)|^p \, du$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \|f(2T'_\nu \, u)\|^p_{L^p} \quad ,$$

cette dernière norme étant prise dans l'espace $L^p(-\frac{1}{2} , \frac{1}{2})$.

Supposons que $\|f_1\|_{T'_\nu} \leqslant 1$, $\|f_2\|_{T'_\nu} \leqslant 1$, $\|f_1 - f_2\|_{T'_\nu} \geqslant \varepsilon$. Etant donné un nombre η tel que $0 < \eta < 1$, il existe un nombre T_0 tel que, pour tout $T'_\nu \geqslant T_0$, on ait

$$\|f_1(2T'_\nu \, u)\|_{L^p} \leqslant 1 + \eta \ , \quad \|f_2(2T'_\nu \, u)\|_{L^p} \leqslant 1 + \eta$$

et

$$\|f_1(2T'_\nu\, u) - f_2(2T'_\nu\, u)\|_{L^p} \geq \frac{\varepsilon}{4}(1 + \eta) \quad .$$

D'après la propriété de convexité uniforme de l'espace $L^p(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, il existe un nombre $\delta(\varepsilon)$ tel que :

$$\left\|\frac{1}{2}\left[f_1(2T'_\nu\, u) + f_2(2T'_\nu\, u)\right]\right\|_{L^p} \leq \left[1 - \delta(\tfrac{\varepsilon}{4})\right](1 + \eta) \quad .$$

Comme η peut être pris arbitrairement proche de zéro, on a

$$\lim_{\nu\to\infty} \left\|\frac{1}{2}\left[f_1(2T'_\nu\, u) + f_2(2T'_\nu\, u)\right]\right\|_{L^p} \leq 1 - \delta(\tfrac{\varepsilon}{4}) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\left\|\frac{1}{2}\left[f_1 + f_2\right]\right\|_{T'_\nu} \leq 1 - \delta(\tfrac{\varepsilon}{4}) \quad ,$$

ce qui montre bien que l'espace Y muni de la semi-norme $\| \ \|_{T'_\nu}$ est uniformément convexe.

L'espace Y n'est peut-être pas complet par rapport à la semi-norme $\| \ \|_{T'_\nu}$; si on considère l'espace vectoriel normé complet qui lui est associé, c'est un espace de Banach réflexif d'après un théorème de Milman et Pettis (PETTIS [26]).

5. Fonction associée à un sous-espace vectoriel séparable de $\mathfrak{M}^p$.

(a) Condition de convergence vers zéro d'une suite d'éléments de $\mathfrak{M}^p$.

On va d'abord énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence vers zéro dans $\mathfrak{M}^p$ qui ne servira pas directement dans la suite, mais qui est intéressante en elle-même. Elle montre une propriété particulière des espaces $\mathfrak{M}^p$ et amène à une nouvelle expression de la norme dans Y .

Condition de convergence : Pour qu'une suite de fonctions $f_{(n)}$ de $\mathfrak{M}^p$ converge en norme vers zéro, il faut et il suffit que l'expression

$$\eta_n(g) = \limsup_{T\to\infty} \left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_n(t)\, g(t)\, dt\right| \tag{1}$$

tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment pour toutes les fonctions de $\mathfrak{M}^q$.

On notera que cette condition est plus forte qu'une condition de convergence faible ; cela provient essentiellement de l'emploi dans (1) d'une limite supérieure au lieu de limites ordinaires.

La condition est nécessaire d'après l'inégalité de Hölder. Pour montrer qu'elle est suffisante, on peut raisonner par l'absurde et construire alors avec des morceaux des fonctions $f_{(n)}$ une fonction ψ de $\mathfrak{M}^q$ telle que $\limsup_{n\to\infty} \eta_n(\psi) > 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.

En perfectionnant ce procédé et en le généralisant à une suite $\{f_{(n)}\}$, dense dans un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{M}^p$, on obtient le résultat suivant qui, évidemment, donne bien davantage que la condition énoncée ci-dessus :

(b) Construction d'une fonction ψ associée à $\mathcal{V}$.

Au sous-espace séparable $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{M}^p$, on peut associer une fonction ψ de $\mathfrak{M}^q$ telle que d'une part :

$$\|\psi\|_q = 1 \quad ,$$

d'autre part :

$$(1) \qquad \|f\|_p = \limsup_{T\to\infty} \left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,\psi(t)\,dt\right|$$

$$(1') \qquad = \limsup_{T\to\infty} \mathcal{R}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,\psi(t)\,dt \quad (\,\mathcal{R} = \text{partie réelle})$$

quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{V}$.

On aura ainsi une nouvelle expression de la norme d'un élément de $\mathcal{V}$.

Soit $\{f_{(i)}\}$ une suite d'éléments de $\mathcal{V}$ dense dans $\mathcal{V}$. On peut supposer que

$$(2) \qquad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f_{(i)}(t)|^p\,dt \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^{[i(i+1)]/2}}\right) \|f_{(i)}\|_p^p \quad .$$

Considérons les fonctions φ_i et ψ_i de norme 1 respectivement dans $\mathfrak{M}^p$ et $\mathfrak{M}^q$ et définies par

$$(3) \qquad \varphi_i(t) = \frac{f_{(i)}(t)}{\|f_{(i)}\|_p} \quad \text{et} \quad \psi_i(t) = \widetilde{\varphi}_i(t) \qquad (\text{notation de I-1-(c)}).$$

Si $1 < p < \infty$, on a

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi_i(t)|^p\,dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\psi_i(t)|^q\,dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi_i(t)\,\psi_i(t)\,dt \leqslant 1 + 2^{-[i(i+1)]/2} \quad . \end{aligned}$$

Construisons deux suites $\{T_\nu\}$, $\{T'_\nu\}$ et une fonction ψ répondant aux conditions suivantes :

1° La suite T_1, T'_1, T_2, T'_2, ... est une suite croissante telle que d'abord

$$(5) \qquad T'_\nu = 2^{\nu+1}\,T_\nu \quad .$$

2° Dans les intervalles $[-T'_\nu , -T_\nu[\, , \,]T_\nu , T'_\nu]$, on pose

(6) $$\psi(t) = 0 \quad .$$

3° Dans les intervalles $[-T_\nu , -T'_{\nu-1}[\, , \,]T'_{\nu-1} , T_\nu]$, on pose

(7) $$\psi(t) = \psi_j(t) \quad ,$$

ν et j étant mis en correspondance de la manière suivante :

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$j(\nu)$	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	...

Une valeur j_0 de j apparaît pour la première fois pour $\nu_0 = \dfrac{j_0(j_0+1)}{2}$.

4° On choisit T_ν tel que

$$\begin{cases} T_\nu \geqslant 2^\nu \, T'_{\nu-1} = 2^{2\nu} \, T_{\nu-1} \quad , & (8) \\[2mm] 1 - \dfrac{1}{2^\nu} \leqslant \dfrac{1}{2T_\nu} \displaystyle\int_{-T_\nu}^{T_\nu} |\psi_j(t)|^q \, dt \leqslant 1 + \dfrac{1}{2^\nu} \quad , & (9) \\[2mm] \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} |\psi_j(t)|^q \, dt \leqslant 1 + \dfrac{1}{2^{\nu'}} \quad \text{pour tout} \quad T \geqslant T_\nu \quad , & (10) \end{cases}$$

ν' étant le plus petit indice tel que $\nu' > \nu$ et $j(\nu') = j(\nu)$.

Posons maintenant

$$\lambda_\nu = \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} |\psi(t)|^q \, dt \ , \qquad \lambda'_\nu = \frac{1}{2T'_\nu} \int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} |\psi(t)|^q \, dt \quad .$$

On a immédiatement d'après (5) et (6) :

(11) $$\lambda'_\nu = \frac{1}{2^{\nu+1}} \lambda_\nu$$

et d'autre part, en tenant compte de (7) et (6) :

(12) $$\lambda_\nu = \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} |\psi_j(t)|^q \, dt - \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T'_{\nu-1}}^{T'_{\nu-1}} |\psi_j(t)|^q \, dt + \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_{\nu-1}}^{T_{\nu-1}} |\psi(t)|^q \, dt \quad .$$

Dans le second membre,

- le premier terme est compris entre $1 - \dfrac{1}{2^\nu}$ et $1 + \dfrac{1}{2^\nu}$ d'après (9),
- le second terme est majoré par $\dfrac{1}{2^\nu}(1 + \dfrac{1}{2^\nu})$ d'après (8) et soit (10), soit (4),
- le troisième terme est majoré par $\dfrac{1}{2^{2\nu}} \lambda_{\nu-1}$ d'après (8).

On en déduit que

$$(13)\qquad 1-\frac{1}{2^\nu}-\frac{1}{2^\nu}\left(1+\frac{1}{2^\nu}\right)\leqslant\lambda_\nu\leqslant\left(1+\frac{1}{2^\nu}\right)\left(1+\frac{1}{2^\nu}\right)+\frac{1}{2^{2\nu}}\lambda_{\nu-1}\quad,$$

d'où facilement :

$$(14)\qquad 1-\frac{1}{2^{\nu-2}}\leqslant\lambda_\nu\leqslant 1+\frac{1}{2^{\nu-1}}\quad.$$

Comme au paragraphe 3, il résulte de la majoration de λ_ν et de (11) que

$$(15)\qquad \|\psi\|_q^q=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi(t)|^q\,dt\leqslant 1\quad.$$

Mais on a aussi

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\psi(t)|^q\,dt\geqslant\lim_{T_\nu\to\infty}\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu}|\psi(t)|^q\,dt=\lim_{\nu\to\infty}\lambda_\nu=1\quad.$$

On a donc exactement

$$(16)\qquad \|\psi\|_q=1\quad.$$

Montrons maintenant que

$$(17)\qquad \limsup_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_i(t)\,\psi(t)\,dt\right|=\limsup_{T\to\infty}\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_i(t)\,\psi(t)\,dt=1\quad.$$

Comme cette limite supérieure ne dépasse pas $\|\varphi_i\|_p\,\|\psi\|_q=1$, il suffit de montrer que, pour une suite $\{T_{\nu'}\}$ bien choisie, on a

$$(18)\qquad \lim_{T_{\nu'}\to\infty}\frac{1}{2T_{\nu'}}\int_{-T_{\nu'}}^{T_{\nu'}}\varphi_i(t)\,\psi(t)\,dt=1\quad.$$

Comme suite $\{T_{\nu'}\}$, on peut prendre la suite des T_ν tels que

$$\psi(t)=\psi_i(t)\quad\text{dans}\quad]T'_{\nu-1}\,,\,T_\nu]\quad,$$

c'est-à-dire que la suite des valeurs ν' de ν est telle que $j(\nu')=i$. On a

$$\frac{1}{2T_{\nu'}}\int_{-T_{\nu'}}^{T_{\nu'}}\varphi_i(t)\,\psi(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2T_{\nu'}}\int_{-T_{\nu'}}^{T_{\nu'}}|\psi(t)|^q\,dt-\frac{1}{2T_{\nu'}}\int_{-T_{\nu'-1}}^{T_{\nu'-1}}|\psi(t)|^q\,dt+\frac{1}{2T_{\nu'}}\int_{-T_{\nu'-1}}^{T_{\nu'-1}}\varphi_i(t)\,\psi(t)\,dt\quad,$$

$$\left|\frac{1}{2T_{\nu'}}\int_{-T_{\nu'}}^{T_{\nu'}} \varphi_i(t)\,\psi(t)\,dt - \lambda_{\nu'}\right|$$

$$\leqslant \frac{T_{\nu'-1}}{T_{\nu'}}\lambda_{\nu'-1} + \frac{T_{\nu'-1}}{T_{\nu'}}\left(\frac{1}{2T_{\nu'-1}}\int_{-T_{\nu'-1}}^{T_{\nu'-1}} |\varphi_i(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2T_{\nu'-1}}\int_{-T_{\nu'-1}}^{T_{\nu'-1}} |\psi(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \frac{T_{\nu'-1}}{T_{\nu'}}\left[\lambda_{\nu'-1} + 2^{\frac{1}{p}}(\lambda_{\nu'-1})^{\frac{1}{q}}\right] .$$

Le second membre tend vers zéro lorsque ν' augmente indéfiniment et $\lambda_{\nu'}$ tend vers 1. On obtient donc bien l'égalité (18), donc (17).

En revenant à la définition (3) de φ_i, on a

$$\limsup_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_{(i)}(t)\,\psi(t)\,dt\right| = \limsup_{T\to\infty}\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_{(i)}(t)\,\psi(t)\,dt = \|f_{(i)}\|_p$$

et comme $\{f_{(i)}\}$ est dense dans $\mathcal{V}$, on en déduit facilement (1) et (1').

Dans le cas où $p = 1$, $q = \infty$, on peut construire ψ de la même façon. Si $\mathcal{V}$ n'est pas formé uniquement de fonctions nulles, la relation (16) est évidente et la fin de la démonstration s'adapte facilement.

6. Nouvelles expressions de la norme dans $\mathfrak{M}^p$.

(a) Expression de la norme au moyen des fonctions de $\mathfrak{M}^q$.

(1) $$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q\leqslant 1}\ \limsup_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,g(t)\,dt\right|$$

(2) $$= \sup_{\|g\|_q\leqslant 1}\ \limsup_{T\to\infty}\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,g(t)\,dt .$$

On a en effet :

(3) $$\limsup_{T\to\infty}\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,g(t)\,dt \leqslant \limsup_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q$$

et d'autre part, en considérant la fonction $g_1 = \tilde{f}\|f\|_p^{-p/q}$ qui est de norme 1, on obtient :

$$\limsup_{T\to\infty}\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,g_1(t)\,dt = \|f\|_p \leqslant \sup_{\|g\|_q\leqslant 1}\ \limsup_{T\to\infty}\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,g(t)\,dt .$$

En comparant avec l'inégalité (3), on obtient le résultat cherché.

(b) Expression de la norme au moyen des fonctionnelles de corrélation.

Si f appartient à un sous-espace vectoriel séparable $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{M}^p$, on peut utiliser les ensembles $((L))$ ou (L_ψ) pour définir la norme :

(4) $$\|f\|_p = \sup_{((L))} |\langle \ell , f\rangle| = \sup_{((L))} \mathcal{R} \langle \ell , f\rangle$$

(5) $$= \sup_{(L_\psi)} |\langle \ell , f\rangle| = \sup_{(L_\psi)} \mathcal{R} \langle \ell , f\rangle \ .$$

Dans les deux cas, on a en effet

(6) $$\mathcal{R} \langle \ell , f\rangle \leqslant |\langle \ell , f\rangle| \leqslant \|f\|_p \, \|\ell\| \ ,$$

et pour avoir une inégalité en sens inverse, on considère une fonctionnelle de corrélation de f avec ψ et définie par une suite $\{T_\nu\}$ telle que

$$\lim_{T_\nu \to\infty} \mathcal{R} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t)\, \psi(t)\, dt = \limsup_{T\to\infty} \mathcal{R} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, \psi(t)\, dt = \|f\|_p \ .$$

On obtient :

$$\|f\|_p \leqslant \sup_{(L_\psi)} \mathcal{R} \langle \ell , f\rangle \ ,$$

d'où les relations cherchées par comparaison avec l'inégalité (6).

(c) Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{V}^*$.

On dit qu'un point x d'un ensemble convexe K est un point extrémal de K s'il n'appartient à aucun segment ouvert ayant des points de K pour extrémités, c'est-à-dire s'il ne peut se mettre sous la forme

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \ , \quad 0 < \lambda < 1$$

x_1 et x_2 étant deux points distincts de K .

Les ensembles de fonctionnelles de corrélation $((L))$ ou (L_ψ) contiennent tous les points extrémaux de la boule unité s^* de $\mathcal{V}^*$, espace dual de $\mathcal{V}$.

On peut démontrer ce résultat d'une façon analogue à celle qui est utilisée par DUNFORD-SCHWARTZ (D. S., p. 441) pour des espaces de fonctions continues.

Comme $(L_\psi) \subseteq ((L))$, il suffit de considérer l'ensemble (L_ψ) . Soit $C(L_\psi)$ la fermeture dans la $\mathcal{V}$-topologie de $\mathcal{V}^*$ des combinaisons convexes finies d'éléments de (L_ψ) . Les propriétés élémentaires des ensembles convexes (D. S., p. 415) montrent que $C(L_\psi) \subseteq s^*$.

Pour obtenir une inégalité en sens inverse, considérons une fonctionnelle ℓ_0 n'appartenant pas à $C(L_\psi)$. D'après un théorème de séparation (D. S., p. 418), il existe un élément x de $\mathcal{Y}$ (considéré comme dual de $\mathcal{Y}^*$ muni de la $\mathcal{Y}$-topologie) tel que

$$\mathcal{R}\,\langle \ell_\psi\,,\,x\rangle \leqslant c-\varepsilon < c \leqslant \mathcal{R}\,\langle \ell_0\,,\,x\rangle$$

quel que soit ℓ_ψ appartenant à (L_ψ) .

D'après les résultats de (b), on a $\|x\|_p \leqslant c-\varepsilon$, et donc $\|\ell_0\| \geqslant \frac{c}{c-\varepsilon} > 1$. ℓ_0 n'appartient pas à s^* , ce qui donne $s^* \subseteq C(L_\psi)$. On a donc exactement

$$C(L_\psi) = s^* \quad .$$

D'après une réciproque du théorème de Krein-Milman (D. S., p. 440), on déduit que tout point extrémal de la boule unité s^* appartient à (L_ψ) .

-:-:-:-

CHAPITRE III

Fonctions et ensembles de corrélation

Dans ce chapitre, on s'intéressera au groupe des opérateurs "translation" défini dans l'espace $\mathfrak{M}^p$ par

$$T_\tau f = f_\tau , \qquad \tau \in R : \text{groupe additif des nombres réels.}$$

Comme la norme dans $\mathfrak{M}^p$ est invariante par translation, ce sont des opérateurs de norme 1 :

$$\|T_\tau\| = 1 \quad \text{quel que soit} \quad \tau \ .$$

Si on restreint à l'espace $\mathfrak{M}^p_c$ le domaine dans lequel opèrent ces transformations, la correspondance $\tau \longrightarrow T_\tau$ est une représentation fortement continue de R dans un groupe d'opérateurs uniformément borné sur l'espace $\mathfrak{M}^p_c$.

Soit f une fonction appartenant à $\mathfrak{M}^p_c$ et soit $\mathcal{V}_f$ le sous-espace vectoriel complet engendré dans $\mathfrak{M}^p$ (ou $\mathfrak{M}^p_c$) par l'ensemble $\{f_\tau\} = \{T_\tau f\}$ des translatées de f . Comme f est continue en norme dans $\mathfrak{M}^p$, $\mathcal{V}_f$ peut être engendré par l'ensemble dénombrable $\{f_{\tau_i}\}$, où $\{\tau_i\}$ est une suite dense sur R . Par conséquent $\mathcal{V}_f$ est un sous-espace vectoriel séparable de $\mathfrak{M}^p$ auquel on peut appliquer les résultats du chapitre précédent.

1. Fonctions de corrélation.

(a) Définition.

Etant donnée une fonction g de $\mathfrak{M}^q$, à toute fonctionnelle de corrélation entre $\mathcal{V}_f$ et g correspond une fonction de la variable réelle h

$$\text{(1)} \qquad \gamma(h) = \langle \ell , f_h \rangle = \langle g , f_h \rangle_{\{T_\nu\}} = \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t+h)\, g(t)\, dt \ .$$

On appellera cette fonction "fonction de corrélation" entre f et g .

Inversement, à toute suite $\{T_\nu\}$ telle que la limite (1) existe, il correspond une fonctionnelle de corrélation entre $\mathcal{V}_f$ et g .

(b) Propriétés.

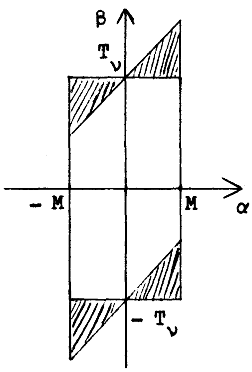
L'inégalité de Hölder montre immédiatement qu'une fonction de corrélation γ est une fonction bornée par $\|f\|_p \, \|g\|_q$ et uniformément continue sur R .

D'une manière plus précise, si $p > 1$, on a le résultat suivant : Une fonction de corrélation relative à une fonction f de $\mathfrak{M}^p_c \cap \mathfrak{M}^p_r$ $(p > 1)$ est une fonction faiblement presque-périodique (fonction d'Eberlein) (voir la définition et les propriétés des fonctions d'Eberlein au Chapitre V-B).

Soit en effet γ une fonction de corrélation entre f et g définie par la suite $\{T_\nu\}$. On considère l'espace V_f muni de la semi-norme définie par une sous-suite $\{T'_\nu\}$ de $\{T_\nu\}$ comme au paragraphe 4-(b) du chapitre II. Dans cet espace (supposé complété) le groupe des opérateurs "translation" T_τ est encore une représentation fortement continue du groupe additif R et ces transformations sont uniformément bornées car la semi-norme est invariante par translation. D'après un théorème d'Eberlein, rappelé en V-B-2-(h), et d'après II-3-(b), on obtient bien le résultat cherché.

(c) Convolutions par des mesures de Radon.

Toujours dans le cas où f appartient à $\mathfrak{M}_c^p \cap \mathfrak{M}_r^p$, les moyennes sont invariantes par translation (I-2-(b)), ce qui donne



(1) $$\gamma(h) = \langle g\,,\, f_h\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle g_{-h}\,,\, f\rangle_{\{T_\nu\}}$$

et si μ est une mesure de Radon (I-4), on a, avec $\mu^-(t) = \mu(-t)$:

(2) $$\langle g\,,\, f \star \mu\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle g \star \mu^-\,,\, f\rangle_{\{T_\nu\}}$$

(3) $$\langle g\,,\, (f \star \mu)_h\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle g \star \mu^-\,,\, f_h\rangle_{\{T_\nu\}} \;.$$

En effet, soit $\Delta = [-M\,,\,M]$ un intervalle symétrique de R. En considérant le changement de variable $\alpha = -u$, $\beta = t - u$:

$$\frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} g(t) \int_\Delta f(t-u)\, d\mu(u) = \frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(\beta)\int_\Delta g(\beta-\alpha)\, d\mu^-(\alpha) + I_\nu \;,$$

I_ν étant une intégrale étendue au domaine haché de la figure. Soit D le domaine formé des deux carrés

$$-M < \alpha < M\,,\; T_\nu - M < \beta < T_\nu + M \quad \text{et} \quad -M < \alpha < M\,,\; -T_\nu - M < \beta < -T_\nu + M \;.$$

On peut majorer I_ν par une intégrale étendue à D, puis par l'inégalité de Hölder :

$$|I_\nu| \leqslant \frac{1}{2T_\nu}\iint_D |f(\beta)\, g(\alpha-\beta)|\; d|\mu^-|(\alpha)\, d\beta$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2T_\nu}\iint_D |f(\beta)|^p\, d|\mu^-|(\alpha)\, d\beta\right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1}{2T_\nu}\iint_D |g(\alpha-\beta)|^q\, d|\mu^-|(\alpha)\, d\beta\right]^{\frac{1}{q}} \;.$$

Lorsque ν augmente indéfiniment, le second terme reste borné (I-4-(b)), et le premier terme tend vers zéro car f appartient à $\mathcal{M}_r^p$. En faisant tendre M vers l'infini, et en tenant compte de la continuité des opérateurs de convolution (I-4-(b)), on obtient bien (2), et comme $(f \star \mu)_h = f_h \star \mu$, on en déduit (3).

2. Ensembles de corrélation.

Lorsque la fonctionnelle ℓ parcourt l'ensemble (L_g), on obtient une famille (Γ_g) de fonctions de corrélation qui sera appelée ensemble de corrélation des fonctions f et g.

Lorsque ℓ parcourt $((L))$, on obtient un ensemble $((\Gamma))$ qui sera appelé ensemble total de corrélation de la fonction f.

D'après les propriétés des ensembles de fonctionnelles (§ 2 et 3 du chapitre II) les ensembles de corrélation (Γ_g) ou $((\Gamma))$ sont des ensembles uniformément bornés et compacts par rapport à la convergence ponctuelle. D'après l'inégalité de Hölder, ils sont équicontinus et sont donc aussi compacts par rapport à la convergence uniforme sur les ensembles compacts de R.

L'ensemble $((\Gamma))$ a une propriété importante : il est toujours invariant par translation.

Supposons en effet que

$$\gamma(h) = \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t+h)\, g(t)\, dt \tag{1}$$

et considérons la translatée γ_k de γ définie par

$$\gamma(h+k) = \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu+k}^{T_\nu+k} f(t+h)\, g(t-k)\, dt \quad . \tag{2}$$

On peut toujours supposer, en extrayant au besoin une sous-suite, que

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{T_{\nu-1}}{T_\nu} = 0 \quad . \tag{3}$$

Soit g' la fonction telle que

$$\begin{cases} g'(t) = 0 \quad \text{pour } t \text{ appartenant à l'intervalle } [-T_\nu - k\,,\, -T_\nu + k]\,, \\ g'(t) = g(t-k) \quad \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4}$$

On a

$$(5)\qquad \left| \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu+k}^{T_\nu+k} f(t+h)\, g(t-k)\, dt - \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu-k}^{T_\nu+k} f(t+h)\, g'(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2T_\nu} \sum_{n=1}^{\nu-1} \int_{-T_n-k}^{T_n+k} |f(t+h)\, g(t-k)|\, dt \quad .$$

On peut majorer en module cette dernière quantité par

$$\left[\frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_{\nu-1}-k}^{T_{\nu-1}+k} |f(t+h)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_{\nu-1}-k}^{T_{\nu-1}+k} |g(t-k)|^q\, dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \frac{T_{\nu-1}+k}{T_\nu} \left[\frac{1}{2(T_{\nu-1}+k)} \int_{-T_{\nu-1}-k}^{T_{\nu-1}+k} |f(t+h)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1}{2(T_{\nu-1}+k)} \int_{-T_{\nu-1}-k}^{T_{\nu-1}+k} |g(t-k)|^q\, dt\right]^{\frac{1}{q}} .$$

Cette quantité tend vers zéro lorsque T_ν augmente indéfiniment à cause de (3). En prenant les limites dans (5), et en tenant compte de (2), on obtient

$$\gamma(h+k) = \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2(T_\nu + k)} \int_{-T_\nu-k}^{T_\nu+k} f(t+h)\, g'(t)\, dt \quad .$$

γ_k est donc aussi une fonction de corrélation correspondant à la fonction g' et à la suite $\{T_\nu + k\}$. Comme on a évidemment $\|g'\|_q \leqslant \|g\|_q \leqslant 1$, γ_k appartient aussi à $((\Gamma))$.

Si on considère l'ensemble $\bigcup_k (\Gamma_{g_k})$, il n'est pas en général invariant par translation. Une condition suffisante pour qu'il le soit est que soit f , soit g appartienne à l'espace $\mathfrak{M}_r$ correspondant, et une condition suffisante pour que $\bigcup_k (\Gamma_{g_k})$ soit invariant par translation, quelle que soit g , est que f appartienne à $\mathfrak{M}_r^p$.

3. Expressions de la norme d'une fonction de $\mathfrak{M}_c^p$.

Si f appartient à l'espace $\mathfrak{M}_c^p$, les évaluations de la norme données au paragraphe 6-(b) du chapitre II peuvent se traduire immédiatement sur les ensembles de corrélation. On obtient

$$\|f\|_p = \sup_{((\Gamma))} |\gamma(0)| = \sup_{((\Gamma))} \mathcal{R}\, \gamma(0) \quad ,$$

$$\|f_h\|_p = \sup_{((\Gamma))} |\gamma(h)| = \sup_{((\Gamma))} \mathcal{R}\, \gamma(h) \quad .$$

La norme étant invariante par translation, on peut écrire

$$\|f\|_p = \sup_{((\Gamma))} |\gamma(h)| = \sup_h \sup_{((\Gamma))} |\gamma(h)| = \sup_{((\Gamma))} \sup_h |\gamma(h)| \quad ,$$

$$= \sup_{((\Gamma))} \mathcal{R}\,\gamma(h) = \sup_h \sup_{((\Gamma))} \mathcal{R}\,\gamma(h) = \sup_{((\Gamma))} \sup_h \mathcal{R}\,\gamma(h) \quad .$$

En introduisant la fonction ψ relative à $\mathcal{V}_f$:

$$\|f\|_p = \sup_{(\Gamma_\psi)} |\gamma(0)| = \sup_{(\Gamma_\psi)} |\gamma(h)| = \sup_h \sup_{(\Gamma_\psi)} |\gamma(h)| = \sup_{(\Gamma_\psi)} \sup_h |\gamma(h)| \quad ,$$

$$= \sup_{(\Gamma_\psi)} \mathcal{R}\,\gamma(0) = \sup_{(\Gamma_\psi)} \mathcal{R}\,\gamma(h) = \sup_h \sup_{(\Gamma_\psi)} \mathcal{R}\,\gamma(h) = \sup_{(\Gamma_\psi)} \sup_h \mathcal{R}\,\gamma(h) \quad .$$

4. Opérations sur les ensembles de corrélation.

(a) Translations.

Si (Γ) est un ensemble de corrélation entre f et g, formé des fonctions γ, l'ensemble de corrélation entre f_k et g est formé des fonctions γ_k.

Comme l'ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ de f est invariant par translation, toutes les fonctions f_k l'admettent comme ensemble total de corrélation.

(b) Sommes de fonctions.

Soient (Γ') et (Γ'') les ensembles de corrélation correspondant à deux fonctions f' et f'' et à une même fonction g, et soit (Γ) l'ensemble correspondant à $\lambda_1 f'(t) + \lambda_2 f''(t)$.

D'après la définition des fonctions de corrélation au moyen du procédé diagonal, on a

$$(\Gamma) \subseteq \lambda_1(\Gamma') + \lambda_2(\Gamma'') \quad ,$$

$\lambda(\Gamma)$ étant l'ensemble formé des produits par λ des fonctions de (Γ) et $(\Gamma') + (\Gamma'')$ l'ensemble formé des sommes d'une fonction quelconque de (Γ') et d'une fonction quelconque de (Γ'').

(c) Passage à la limite. Convolutions.

Soit $\{f^{(n)}\}$ une suite de fonctions de $\mathfrak{M}_c^p$ qui converge dans $\mathfrak{M}_c^p$ vers f, et soit $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel complet engendré dans $\mathfrak{M}_c^p$ par les espaces $\mathcal{V}_{f^{(n)}}$. C'est un espace séparable qui contient l'espace $\mathcal{V}_f$. Chaque fonctionnelle de corrélation entre un espace $\mathcal{V}_{f^{(n)}}$ (ou $\mathcal{V}_f$) et une fonction g de $\mathfrak{M}^q$ se prolonge par le procédé diagonal en au moins une fonctionnelle de corrélation entre $\mathcal{V}$ et g et, inversement, à une telle fonctionnelle, correspond une fonctionnelle de corrélation entre chaque $\mathcal{V}_{f^{(n)}}$ (ou $\mathcal{V}_f$) et g. On en déduit en particulier :

- (α) Toutes les fonctions de corrélation de f s'obtiennent à partir de toutes les fonctionnelles de corrélation :

$$\gamma(h) = \langle \ell , f_h \rangle \quad \text{avec} \qquad \ell \in (L_g) \iff \gamma \in (\Gamma_g)$$
$$\text{ou} \quad \ell \in ((L)) \iff \gamma \in ((\Gamma)) \quad .$$

- (β) Toute fonction de corrélation de f est limite uniforme de fonctions de corrélation des $f^{(n)}$:

$$\langle \ell , f_h \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \ell , f_h^{(n)} \rangle \qquad \text{(uniformément en } h \text{).}$$

- (γ) Si $f \star \mu$ est la convolution de f par une mesure de Radon μ , les fonctions de corrélation γ' de $f \star \mu$ se déduisent de celles de f par l'opération de convolution ordinaire $\gamma' = \gamma \star \mu$ car d'après I-4-(b) et (c) :

$$\gamma'(h) = \langle \ell , (f \star \mu)_h \rangle = \langle \ell , f_h \star \mu \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ell , f_{h-u} \rangle \, d\mu(u)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(h-u) \, d\mu(u) = (\gamma \star \mu)(h) \quad .$$

Comme $V_{f\star\mu} = V_f$ (I-4-(c), (α)), on obtient ainsi toutes les fonctions de corrélation de $f \star \mu$.

-:-:-:-

CHAPITRE IV

Fonctions $\mathfrak{M}^p$-constantes. Moyennes généralisées

1. Fonctions $\mathfrak{M}^p$-constantes.

(a) Définitions.

On appellera fonction $\mathfrak{M}^p$-constante une fonction k de $\mathfrak{M}^p$ constante en norme, c'est-à-dire telle que $\|k_\tau - k\|_p = 0$ quel que soit le nombre réel τ.

On appellera $\mathfrak{K}^p$ l'ensemble des fonctions $\mathfrak{M}^p$-constantes. $\mathfrak{K}^p$ est évidemment un sous-espace de $\mathfrak{M}^p_c$, et il est facile de voir que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}^p$, complet par rapport à la norme $\|\ \|_p$.

(b) Exemples de fonctions $\mathfrak{M}^p$-constantes.

Exemple 1 : $k(t) = k$ (constante).

Exemple 2 : $k(t) = \exp i \log|t|$; $\|k\|_p = 1$ quel que soit $p \geqslant 1$ (fonction bornée, sans moyenne et ayant une moyenne quadratique).

Exemple 3 : $k(t) = 1 + \exp i \log|t|$; $\|k\|_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (fonction bornée, sans moyenne, sans moyenne quadratique).

Exemple 4 : $\left.\begin{cases} k(t) = n^{1/2p} & \text{si } n^2 \leqslant t < n^2 + \sqrt{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ k(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}\right\} \|k\|_p = \dfrac{1}{4^{1/p}}$

(fonction non bornée, de moyenne nulle et ayant une moyenne d'ordre p).

Exemple 5 : $\left.\begin{cases} k(t) = n^{(2n-1)/2p} & \text{si } n^n \leqslant t < n^n + \sqrt{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ k(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}\right\} \|k\|_p = \dfrac{1}{2^{1/p}}$

(fonction non bornée, de moyenne nulle et sans moyenne d'ordre p).

(c) Rapports entre les espaces $\mathfrak{K}^p$.

- (α) Soient k' et k'' deux fonctions appartenant respectivement aux espaces $\mathfrak{K}^p$ et $\mathfrak{K}^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{s} \leqslant 1$.

Le produit ponctuel $k = k'.k''$ appartient à l'espace $\mathfrak{K}^s$. Conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire dans $\mathfrak{M}^s$ et de la seconde inégalité de Hölder.

- (β) Si k appartient à $\mathfrak{K}^p$ $(1 < p < \infty)$, $\widetilde{k}$ appartient à $\mathfrak{K}^q$. On a en effet $k_\tau = k$ (dans $\mathfrak{M}^p$) et, d'après les résultats de I-1-(c), $\widetilde{k}_\tau = \widetilde{k}$ (dans $\mathfrak{M}^q$).

- (γ) Si k appartient à $\mathfrak{K}^p$, $|k|^p$ appartient à $\mathfrak{K}^1$. Si $1 < p < \infty$, cela résulte immédiatement de (α) et (β) et si $p = 1$, cela provient de l'inégalité

$$\Big|\,|k(t+\tau)| - |k(t)|\,\Big| \leqslant |k(t+\tau) - k(t)|$$

qui donne

$$\| |k_\tau| - |k| \|_1 \leqslant \|k_\tau - k\|_1 = 0 \quad .$$

(d) Fonctions et ensembles de corrélation.

Si ℓ est une fonctionnelle de corrélation entre $\mathscr{V}_k$ et g , on a

$$\gamma(\tau) = \langle \ell \, , \, k_\tau \rangle = \langle \ell \, , \, k \rangle = 0 \quad .$$

Toutes les fonctions de corrélation d'une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante sont des constantes ordinaires et les ensembles de corrélation sont des ensembles bornés de fonctions constantes.

(e) Les fonctions $\mathfrak{M}^p$-constantes sont $\mathfrak{M}^p$-régulières.

Il faut démontrer que si $k(t)$ est une $\mathfrak{M}^p$-constante, on a

(1) $$\limsup_{T\to\pm\infty} \frac{1}{2T} \int_T^{T+h} |k(t)|^p \, dt = 0$$

quel que soit le nombre réel h .

Comme $|k(t)|^p$ appartient à $\mathfrak{X}'$, on peut écrire

(2) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[|k(t+h)|^p - |k(t)|^p \right] dt = 0 \quad ,$$

ce qui donne

(3) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-T+h} - \int_T^{T+h} \right) |k(t)|^p \, dt = 0 \quad .$$

En changeant T et h en $T - h$ et $- h$, puis en $T - 2h$ et h , $T - 3h$ et $- h$, etc.

(4) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-T+h} - \int_{T-2h}^{T-h} \right) |k(t)|^p \, dt = 0 \quad ,$$

(5) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T+2h}^{-T+3h} - \int_{T-2h}^{T-h} \right) |k(t)|^p \, dt = 0 \quad ,$$

(6) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T+2h}^{-T+3h} - \int_{T-4h}^{T-3h} \right) |k(t)|^p \, dt = 0 \quad , \text{etc.}$$

Supposons alors qu'il existe un nombre h et une suite $\{T_\nu\}$, tendant vers l'infini, telle que

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{T_\nu}^{T_\nu+h} |k(t)|^p \, dt = \varepsilon > 0$$

ou, ce qui est équivalent d'après (3),

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{-T_\nu+h} |k(t)|^p \, dt = \varepsilon > 0 \quad .$$

On va montrer que cette hypothèse est en contradiction avec le fait que $k(t)$ appartient à $\mathfrak{M}^p$. D'après (4), (5), (6), ...,

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{T_\nu-2h}^{T_\nu-h} |k(t)|^p \, dt = \varepsilon \quad ,$$

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu+2h}^{-T_\nu+3h} |k(t)|^p \, dt = \varepsilon \quad , \text{etc.}$$

Considérons alors un entier n tel que $n > \|k\|_p^p/\varepsilon$. On a

$$(7) \quad \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \left(\int_{T_\nu}^{T_\nu+h} + \int_{T_\nu-2h}^{T_\nu-h} + \dots + \int_{T_\nu-2nh}^{T_\nu-(2n-1)h} \right) |k(t)|^p \, dt = (n+1)\varepsilon > \|k\|_p^p \quad .$$

Comme $\{T_\nu\}$ tend vers l'infini, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont supérieurs à $2nh$. Le premier membre de (7) est donc certainement inférieur à

$$(8) \qquad \limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu-h}^{T_\nu+h} |k(t)|^p \, dt \leqslant \|k\|_p^p \quad .$$

Les deux inégalités (7) et (8) sont contradictoires si ε est différent de zéro. On doit donc avoir

$$\lim_{T\to\pm\infty} \frac{1}{2T} \int_T^{T+h} |k(t)|^p \, dt = 0$$

k appartient bien à $\mathfrak{M}_r^p$, et on a $\mathcal{K}^p \subseteq \mathfrak{M}_r^p$.

L'inclusion est une inclusion stricte : $\mathcal{K}^p \subset \mathfrak{M}_r^p$ car, par exemple, la fonction $f : t \longrightarrow \exp 2i\pi t$ appartient à $\mathfrak{M}_r^p$ quel que soit p et

$$\|\exp 2i\pi(t+\tau) - \exp 2i\pi t\|_p = |\exp 2i\pi\tau - 1| \neq 0 \quad \text{si } \tau \text{ n'est pas entier.}$$

<u>Remarque</u>. - On n'a utilisé le fait que k est une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante que pour obtenir l'égalité (2) et la suite de la démonstration s'appuie uniquement sur cette égalité. On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}^p$ appartienne à $\mathfrak{M}_r^p$ est que (2) ou (3) soit vérifiée quel que soit h (I-2-(c)).

2. Fonctions $a(U)$ associées à une fonction de $\mathfrak{M}^p_c$.

Etant donnée une fonction f appartenant à $\mathfrak{M}^p_c$, on va chercher à lui associer une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante ayant certaines des propriétés formelles des moyennes au sens habituel. Ce sera la limite dans $\mathfrak{M}^p$ (si elle existe) des fonctions

$$a(U) = f \star m(U) \quad ,$$

définies par

$$a(U) = \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} f(t - u)\, du \quad ,$$

$m(U)$ étant la fonction égale à $\frac{1}{2U}$ dans l'intervalle $[- U , U]$ et à zéro ailleurs. On appellera moyenne généralisée cette limite et on la notera $\underset{g}{M} f$:

$$a = \underset{g}{M}\, f = \lim_{U\to\infty} \mathfrak{M}^p\, a(U) = \lim_{U\to\infty} \mathfrak{M}^p\, f \star m(U) \quad .$$

Les propriétés de la convolution (I-4-(c)) montrent immédiatement que :

- (a) $a(U)$ appartient à $\mathcal{V}_f$ (I-4-(c), (α))

$$\|a(U)\|_p \leqslant \|f\|_p\, \|m(U)\|_{L^1} = \|f\|_p$$

$$\|a_\tau(U) - a(U)\|_p \leqslant \|f\|_p\, \|m_\tau(U) - m(U)\|_{L^1} = \|f\|_p \frac{\tau}{U} \quad .$$

- (b) Si $a(U)$ converge dans $\mathfrak{M}^p$, elle converge vers une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante.

Cela résulte de cette dernière inégalité et de l'inégalité triangulaire dans $\mathfrak{M}^p$.

- (c) $a(U)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{f_\tau\}$, car $m(U)$ est non négative et de norme 1 (I-4-(c), (β)).

- (d) Si (Γ) est un ensemble de corrélation de f , l'ensemble (Γ') correspondant de $a(U)$ est constitué par les fonctions

$$\gamma' = \gamma \star m(U) \quad , \qquad \gamma \in (\Gamma)$$

$$\gamma'(h) = \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} \gamma(h - u)\, du \qquad \text{(III-4-(c), }(\gamma)\text{)}.$$

3. Conditions d'ergodicité.

(a) Définitions.

Lorsque la fonction f de $\mathfrak{M}^p_c$ possède une moyenne généralisée a , on dira que f est une fonction ergodique de $\mathfrak{M}^p_c$.

Si, quel que soit λ réel, la fonction $f_{(\lambda)}$: $t \longrightarrow f(t) \exp i\lambda t$ est une fonction ergodique, on dira que f est une fonction totalement ergodique de $\mathfrak{M}^p_c$. La moyenne généralisée

$$a_\lambda = \underset{g}{M} f_{(\lambda)}$$

sera appelée coefficient de Fourier généralisé de f relatif à λ .

On appellera $\mathcal{E}^p$ et $\mathcal{E}^p_t$ respectivement l'ensemble des fonctions ergodiques et totalement ergodiques de $\mathfrak{M}^p_c$.

(b) Caractérisation des éléments ergodiques.

On va caractériser les éléments de $\mathcal{E}^p$ d'après les propriétés de leurs ensembles de corrélation.

Pour que $a(U)$ converge, il faut et il suffit que $\|a(U) - a(V)\|_p$ tende vers zéro lorsque U et V tendent simultanément et indépendamment vers l'infini. On peut utiliser les expressions de la norme (au moyen des ensembles de corrélation), données au paragraphe 3 du chapitre III,

$$\|a(U) - a(V)\|_p = \sup_{((\Gamma)) \text{ ou } (\Gamma_\psi)} \left| \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} \gamma(u)\, du - \frac{1}{2V} \int_{-V}^{V} \gamma(v)\, dv \right|$$

ψ étant toujours la fonction associée à l'espace V_f .

Pour que $a(U)$ tende vers une limite, il faut donc d'abord que toutes les fonctions de corrélation de f aient une moyenne : cela est certainement réalisé si f appartient à $\mathfrak{M}^p_c \cap \mathfrak{M}^p_r$ $(1 < p < \infty)$ (d'après III-1-(b) et V-B-2-(c)).

Il faut ensuite que cette moyenne soit atteinte uniformément sur l'ensemble de corrélation considéré : on dira dans ce cas qu'un tel ensemble est uniformément moyennable. D'après les expressions de la norme, ces conditions sont aussi suffisantes. On peut donc énoncer :

THÉORÈME. - Pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}^p_c$ ait une moyenne généralisée, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :

1° L'ensemble de corrélation de f et d'une fonction quelconque de $\mathfrak{M}^q$ est uniformément moyennable.

2° L'ensemble de corrélation de f et de la fonction ψ associée à V_f est uniformément moyennable.

3° L'ensemble total de corrélation de f est uniformément moyennable.

(c) Exemples de fonctions ergodiques.

On voit immédiatement que si k est une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante, on a

$$k * m(U) = k \text{ , d'où } \quad \underset{g}{M}\, k = k \quad .$$

D'autre part, dans tous les espaces $\mathfrak{M}^p$, on a

$$\underset{g}{M} \exp i\lambda t = 0 \text{ si } \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \underset{g}{M} \exp i\lambda t = 1 \text{ si } \lambda = 0 \ .$$

On en déduit que les fonctions $\exp i\lambda t$ appartiennent aux espaces $\mathcal{E}_t^p$ et que $\mathfrak{X}^p \subset \mathcal{E}_t^p$.

4. Propriétés de la moyenne généralisée.

(a) Norme de la moyenne généralisée.

D'après 2-(a), on a $\|a\|_p = \|\underset{g}{M} f\|_p \leqslant \|f\|_p$.

On peut avoir une expression précise de la norme au moyen des ensembles de corrélation. On a

$$\|a(U)\|_p = \sup_{((\Gamma)) \text{ ou } (\Gamma_\downarrow p)} \left| \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} \gamma(u) \, du \right|$$

Si $a(U)$ converge vers une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante a , on obtient en tenant compte de la propriété d'uniformité des ensembles de corrélation

$$\|a\|_p = \|\underset{g}{M} f\|_p = \sup_{((\Gamma))} |M\gamma| = \sup_{(\Gamma_\downarrow)} |M\gamma|$$

en notant $M\gamma$ la moyenne ordinaire de la fonction γ :

$$M\gamma = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{2H} \int_{-H}^{H} \gamma(h) \, dh \ .$$

(b) Propriétés de l'ensemble des translatées d'une fonction de $\mathcal{E}^p$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_c^p$ appartienne à $\mathcal{E}^p$ est que l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{f_\tau\}$ de ses translatées contienne une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante. Cette fonction est unique et est la moyenne généralisée de f .

D'après la définition de $\mathcal{E}^p$ et 2-(c), la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons qu'il existe une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante a dans l'enveloppe convexe fermée de $\{f_\tau\}$, et montrons qu'elle est limite dans $\mathfrak{M}^p$ de $f \star m(U)$ lorsque U augmente indéfiniment. Elle sera bien la moyenne généralisée de f et sera unique, car $f \star m(U)$ ne peut pas converger simultanément vers deux éléments différents de $\mathfrak{M}^p$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe une mesure de Radon c non négative, de support fini et de norme 1 , telle que

$$\|f \star c - a\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

D'autre part, on peut toujours trouver un nombre $U(\varepsilon)$ tel que $U \geqslant U(\varepsilon)$ entraîne que

$$\|c \star m(U) - m(U)\|_M \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|_p} \quad .$$

Alors, dès que $U \geqslant U(\varepsilon)$, on a :

$$\|a - f \star m(U)\|_p \leqslant \|a \star m(U) - f \star c \star m(U)\|_p + \|f \star [c \star m(U)] - m(U)\|_p \leqslant \varepsilon \quad .$$

Lorsque U augmente indéfiniment, $f \star m(U)$ tend donc bien vers a et f appartient à $\mathcal{E}^p$.

(c) Relation entre la moyenne généralisée et la moyenne ordinaire.

Une fonction ayant une moyenne généralisée n'admet pas toujours une moyenne au sens ordinaire Mf (1-(b), exemples 2 et 3) et inversement, une fonction ayant une moyenne ordinaire n'admet pas toujours de moyenne généralisée (5-(c), (γ) 4°). On a cependant une relation entre la norme de la moyenne généralisée et la moyenne supérieure

$$\overline{M}f = \limsup_{T\to\infty} \left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt\right| = |\langle \ell_0 \,,\, f\rangle| \quad ,$$

ℓ_0 étant une certaine fonctionnelle de corrélation entre γ_f et la fonction constante et égale à 1 . On a d'abord

$$|\langle \ell_0 \,,\, a(U)\rangle| \leqslant \|a(U)\|_p \leqslant \|a(U)\|_1$$

et d'autre part, dès que f appartient à $\mathcal{M}'_r$ [ou à $\mathcal{M}^p$ pour $p > 1$ (I-3-(d))],

$$\langle 1 \,,\, f \star m(U)\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle 1 \star m(U) \,,\, f\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle \ell_0 \,,\, f\rangle$$

d'après III-1-(c). En passant à la limite sur U , on en déduit que

$$\begin{aligned} \overline{M}f &\leqslant \|a\|_1 \quad \text{si } f \in \mathcal{E}' \cap \mathcal{M}'_r \text{ ou } \mathcal{E}^p \ (p > 1) \\ &\leqslant \|a\|_p = \sup_{((\Gamma)) \text{ ou } (\Gamma_\psi)} |M\gamma| \quad \text{si } f \in \mathcal{E}^p \quad . \end{aligned}$$

5. Propriétés des espaces $\mathcal{E}^p$ et $\mathcal{E}^p_t$.

(a) $\mathcal{E}^p$ et $\mathcal{E}^p_t$ sont des sous-espaces vectoriels complets de $\mathcal{M}^p_c$.

Il est facile de voir que les deux espaces $\mathcal{E}^p$ et $\mathcal{E}^p_t$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}^p_c$. Sur $\mathcal{E}^p$ (ou $\mathcal{E}^p_t$), les opérateurs $f \longrightarrow f \star m(U)$, $f \longrightarrow \underset{g}{M} f$ et $f \longrightarrow \underset{g}{M} f_{(\lambda)}$ sont des opérateurs linéaires de norme 1 d'après 2-(a) et 4-(a). On en déduit que toute limite dans $\mathcal{M}^p$ de fonctions de $\mathcal{E}^p$ (ou $\mathcal{E}^p_t$) appartient aussi à $\mathcal{E}^p$ (ou $\mathcal{E}^p_t$) et que, par conséquent, $\mathcal{E}^p$ et $\mathcal{E}^p_t$ sont des espaces complets.

(b) Relations entre les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{K}$.

Soient k et f des fonctions appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{K}^p$ et $\mathcal{E}^{p'}$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{s}\leqslant 1$.

Le produit ponctuel $k.f$ appartient à $\mathcal{E}^s$, et on a $\underset{g}{M}\, k.f = k \underset{g}{M}\, f$.

L'enveloppe convexe fermée dans $\mathfrak{M}^s$ de l'ensemble $\{(k.f)_k\} = \{k_\tau . f_\tau\}$ est celle de l'ensemble $\{k.f_\tau\}$. Elle contient donc la fonction $\mathfrak{M}^s$-constante $k \underset{g}{M}\, f$. D'après 4-(b), on en déduit le résultat.

(c) Relations d'inclusion.

- (α) Si $p > p'$, $\mathcal{E}^p \subset \mathcal{E}^{p'}$ et $\mathcal{E}^p_t \subset \mathcal{E}^{p'}_t$. - Cela résulte de l'inégalité entre les normes des espaces $\mathfrak{M}^p$ (I-3-(d)). Les inclusions sont strictes, car si on considère les fonctions k définies dans (1-(b), exemple 4) qui sont $\mathfrak{M}^p$-constantes et appartiennent donc à $\mathcal{E}^p$ et $\mathcal{E}^p_t$, on a $\|k_{p'}\|_p = \infty$.

- (β) Il n'y a pas de relation d'inclusion entre $\mathcal{E}^p$ et $\mathfrak{M}^p_r$. - La fonction f_2 considérée au paragraphe I-3-(c) n'appartient pas à $\mathfrak{M}^p_r$, mais, si $p > 1$, elle est telle que $a = 0$, car $\|a(U)\|_p$ tend vers zéro avec $\frac{1}{U}$. Si $p = 1$, il suffit de considérer la fonction $t \longrightarrow f_2(t) \exp 2i\pi t$.

- (γ) On a $\mathcal{E}^p_t \subset \mathcal{E}^p \subset \mathfrak{M}^p_c$. - Les relations d'inclusion faibles proviennent des définitions. Pour montrer que ces inclusions sont strictes, on va construire une fonction de $\mathfrak{M}^p_c$ n'ayant pas de moyenne généralisée.

Dans les intervalles $]-(\nu+1)!\,,\,-\nu![\,,\,]\nu!\,,\,(\nu+1)![$, on pose

$$f(t) = \exp 2i\pi\frac{t}{j}\ ,\quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots$$

les entiers ν et j étant mis en correspondance comme au paragraphe 5, 3° du chapitre II.

1° La fonction f est bornée, de module 1 . Elle appartient donc à $\mathfrak{M}^p$ et $\mathfrak{M}^p_r$ quel que soit p : $\|f\|_p = 1$.

2° Elle est continue car j divise toujours $\nu!$, et elle est uniformément continue car l'ensemble des fonctions $\exp 2i\pi\frac{t}{j}$ est équicontinu. Elle est donc certainement continue en moyenne asymptotique.

3° L'ensemble de corrélation de f avec f contient en particulier les fonctions γ définies par

$$\gamma(h) = \exp 2i\pi\frac{h}{j_0}\ ,\quad j_0 = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots$$

obtenues par des suites $\{T_{\nu'}\}$ telles que $T_{\nu'} = (\nu'+1)!$ avec $\nu' = \nu(j_0)$. Cet ensemble n'est pas uniformément moyennable. f n'appartient pas à $\mathcal{E}^p$ et par suite $\mathcal{E}^p \subset \mathfrak{M}^p_c$.

4° La moyenne ordinaire de f existe cependant : si $\nu! \leqslant T \leqslant (\nu + 1)!$,

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{T}\int_{\nu!}^{T} \exp 2i\pi\frac{t}{j}\,dt\right| \leqslant \frac{j}{\pi\nu!}$$

qui tend vers zéro si T augmente indéfiniment.

5° Considérons maintenant la fonction $g(t) = f(t) \exp 4i\pi t$. On a

$$|b(U)| = \left|\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} g(t+u)\,du\right| = \left|\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} f(t+u) \exp 4i\pi u\,du\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2U} \sup_{j} \frac{1}{2i\pi(\frac{1}{j}+2)} = \frac{1}{4\pi U} \quad .$$

$b(U)$ tend vers zéro uniformément et à plus forte raison dans $\mathfrak{M}^p$. La fonction g appartient donc à $\mathcal{E}^p$ mais elle n'appartient pas à $\mathcal{E}^p_t$ car

$$t \longrightarrow f(t) = g(t) \exp 4i\pi t$$

n'a pas de moyenne généralisée. On a donc l'inclusion stricte $\mathcal{E}^p_t \subset \mathcal{E}^p$.

6. Convolutions généralisées.

(a) Polynômes trigonométriques généralisés.

Si k est une fonction $\mathfrak{M}^p$-constante, le produit ponctuel

$$k_{(\lambda)} : t \longrightarrow k(t) \exp i\lambda t$$

appartient aussi à $\mathcal{E}^p_t$ et, d'après 3-(c) et 4-(b) :

$$\underset{g}{M}\, k_{(t)} = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda \neq 0 \quad .$$

Comme l'espace $\mathcal{E}^p_t$ est vectoriel, on voit que l'espace $\underset{\sim}{P}^p$ des polynômes trigonométriques à coefficients $\mathfrak{M}^p$-constants (polynômes trigonométriques généralisés) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}^p_t$.

(b) Convolutions généralisées.

Dans le cas de fonctions appartenant à $\mathcal{E}^p_t$, on peut étendre la famille des opérateurs de convolution par des mesures de Radon par certaines limites de tels opérateurs. Ces limites peuvent se représenter par des moyennes généralisées qui existent d'après la définition de $\mathcal{E}^p_t$.

Soit p un polynôme trigonométrique ordinaire

$$p(t) = \sum_{\mu} d_{\mu} \exp i\mu t \quad ,$$

dont les coefficients de Fourier d_{μ} sont des constantes ordinaires et soit $p(U)$ la fonction définie par

$$p(t\ ,\ U) = \frac{1}{2U}\, p(t) \qquad \text{si} \quad -U \leqslant t < U$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs.}$$

Si f est une fonction de $\mathcal{E}_t^p$, la convolution $f \star p(U)$ converge dans $\mathfrak{M}^p$ lorsque U augmente indéfiniment vers une limite qu'on notera $f \mathbin{\hat{\star}} p$ (convolution généralisée de f par le polynôme trigonométrique ordinaire p). Cette limite est le polynôme trigonométrique généralisé

$$(f \mathbin{\hat{\star}} p)(t) = \sum_{\mu} d_{\mu}\, a_{\mu}(t) \exp i\mu t \quad ,$$

où les fonctions $\mathfrak{M}^p$-constantes a_{μ} sont les coefficients de Fourier généralisés de f relatifs aux exposants μ .

(c) Propriétés de la convolution généralisée.

L'ensemble des polynômes trigonométriques ordinaires est une algèbre par rapport à la convolution au sens moyen qu'on vient de définir. La convolution généralisée permet une représentation de cette algèbre sur l'espace $\mathcal{E}_t^p$. On a évidemment

$$[f \mathbin{\hat{\star}} p'] \mathbin{\hat{\star}} p'' = [f \mathbin{\hat{\star}} p''] \mathbin{\hat{\star}} p' = f \mathbin{\hat{\star}} [p' \mathbin{\hat{\star}} p'']$$

$$\|f \star p(U)\|_p \leqslant \|f\|_p \frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} |p(t)|\ dt \leqslant \|f\|_p\, \|p\|_c$$

d'où $\|f \mathbin{\hat{\star}} p\|_p < \|f\|_p\, \|p\|_c$.

La convolution généralisée par un polynôme trigonométrique est un opérateur borné de $\mathcal{E}_t^p$ sur $\underset{\sim}{P}^p$. D'une manière plus précise, comme les fonctions $f \star p(U)$ appartiennent toutes à l'espace V_f (I-4-(c) et (α)), $f \mathbin{\hat{\star}} p$ appartient aussi à V_f et la convolution généralisée est un opérateur de V_f sur $V_f \cap \underset{\sim}{P}^p$.

(d) Ensembles de corrélation d'une convolution généralisée.

D'après III-4-(c), (γ), si (Γ) est un ensemble de corrélation de f , l'ensemble de corrélation (Γ') correspondant de $f \mathbin{\hat{\star}} p$ est constitué par les convolutions (en moyenne) $\gamma' = \gamma \mathbin{\hat{\star}} p$, $\gamma \in (\Gamma)$, où la convolution (en moyenne) $\hat{\star}$ est définie par la limite ordinaire

$$\gamma'(h) = \lim_{U\to\infty} \frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} \gamma(h-u)\ p(u)\ du \quad .$$

-:-:-:-

CHAPITRE V

Fonctions presque-périodiques ordinaires

Avant d'étudier les différentes notions de presque-périodicité dans les espaces $\mathfrak{M}^p_c$, on va rappeler dans ce chapitre les définitions et les principales propriétés des fonctions presque-périodiques continues ordinaires et en particulier les propriétés des ensembles compacts de telles fonctions.

A. Fonctions presque-périodiques

1. Définitions.

Un ensemble E de nombres réels est dit relativement dense s'il existe une longueur $\ell > 0$ (longueur d'inclusion) telle que tout intervalle de longueur supérieure à ℓ contienne au moins un point de E .

Soit x une fonction complexe de la variable réelle t . Un nombre τ est appelé nombre de translation de x par rapport à ε si

$$\sup_t |x(t-\tau) - x(t)| < \varepsilon \quad .$$

On appellera $E(\varepsilon , x)$ l'ensemble de ces nombres de translation.

Une fonction x est appelée fonction presque-périodique ou fonction de Bohr si elle est continue et si, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble $E(\varepsilon , x)$ est relativement dense.

2. Propriétés élémentaires (BESICOVITCH [16]).

(a) Une fonction presque-périodique est bornée et uniformément continue.

(b) Théorème de Bochner. - Une fonction x continue et bornée de la variable réelle t est presque-périodique si et seulement si l'ensemble $\{x_\tau\}$ de ses translatées est relativement compact dans l'espace $\underset{\sim}{C}(R)$ des fonctions continues et bornées de la variable réelle t munie de la norme de la convergence uniforme

$$\|x\|_{\underset{\sim}{C}} = \sup_t |x(t)| \quad .$$

(c) Espace des fonctions presque-périodiques. - L'espace $\underset{\sim}{U}$ de toutes les fonctions presque-périodiques est un espace de Banach complexe par rapport à la norme de la convergence uniforme.

(d) Le produit de deux fonctions presque-périodiques est encore presque-périodique et l'imaginaire conjuguée d'une fonction presque-périodique est presque-périodique : $\underset{\sim}{U}$ a une structure d'algèbre de Banach involutive.

(e) Existence de la moyenne. - Une fonction presque-périodique a une moyenne

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+a)\, dt = Mx \quad [\text{ou}\ \ M_t\, x(t)\ ],$$

la convergence étant uniforme par rapport à a .

(f) Convolution. - Si x et y sont deux fonctions presque-périodiques, la convolution définie par les moyennes

$$z(t) = (x \hat{\star} y)(t) = M_s\, x(t-s)\, y(s) = M_s\, x(s)\, y(t-s)$$

est aussi une fonction presque-périodique.

(g) Série de Fourier d'une fonction presque-périodique. - Soit λ une variable réelle. La fonction $\exp i\lambda t$ étant presque-périodique, on peut définir une fonction de λ (transformée de Fourier-Bohr de x) par la formule

$$a_\lambda = M_t\, x(t) \exp(-\, i\lambda t) = Mx_{(\lambda)} \quad .$$

Cette fonction est différente de zéro pour un ensemble $(\Lambda) = \{\lambda_n\}$ des valeurs de λ qui est au plus dénombrable. L'ensemble (Λ) est appelé spectre de x , et le nombre a_λ , coefficient de Fourier de x relatif à λ . La série $\sum\limits_{(\Lambda)} a_{\lambda_n} \exp i\lambda t$ est la série de Fourier de x .

(h) Equation de Parseval. - Pour toute fonction presque-périodique x , on a

$$\sum_{(\Lambda)} |a_{\lambda_n}|^2 = M_t\, |x(t)|^2$$

et la série de Fourier converge en moyenne quadratique vers x .

(i) Unicité de la série de Fourier. - Deux fonctions presque-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier sont identiques.

(j) Théorème de Bohr. - Soit P l'ensemble des polynômes trigonométriques (combinaisons linéaires finies d'exponentielles imaginaires : $\sum\limits_{j=1}^{j} c_j \exp i\lambda_j t$). La fermeture de P dans $\underset{\sim}{U}$ est l'espace $\underset{\sim}{U}$ tout entier. Cela peut s'exprimer de la façon suivante : Toute fonction presque-périodique est limite d'une suite uniformément convergente de polynômes trigonométriques.

On peut former une telle suite à partir de la série de Fourier au moyen des polynômes de Bochner-Fejér (voir paragraphe 4).

3. Ensembles compacts de fonctions presque-périodiques.

(a) Critère de compacité.

Soit (K) un ensemble de fonctions presque-périodiques. On dit que c'est un ensemble homogène (BESICOVITCH [16], p. 43) s'il possède les deux propriétés suivantes :

- Il est équicontinu, c'est-à-dire qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ dès que $|t_1 - t_2| < \delta$ quel que soit x appartenant à (K).

- Il est uniformément presque-périodique, c'est-à-dire que l'ensemble

$$E(\varepsilon , K) = \bigcap_{x \in (K)} E(\varepsilon , x)$$

des nombres de translation communs à toutes les fonctions x de (K) est relativement dense quel que soit $\varepsilon > 0$.

On démontre par les méthodes classiques le théorème suivant :

THÉORÈME. - Un ensemble borné de fonctions presque-périodiques est relativement compact dans l'espace $\underset{\sim}{C}(R)$ si, et seulement si, il est un ensemble homogène (D. S., p. 345).

(b) Ensembles compacts. Spectre d'un ensemble compact.

Soit (K) un ensemble relativement compact de fonctions presque-périodiques et soit $(\overline{K})$ son complété par rapport à la convergence uniforme. $(\overline{K})$ est un sous-espace métrique compact de $\underset{\sim}{C}(R)$; il est séparable, et il existe une suite $\{x^{(n)}\}$ dense dans $(\overline{K})$.

L'ensemble (Λ_n) des valeurs de λ pour lesquelles

$$M_t \, x^{(n)}(t) \exp(- i\lambda t) = M \, x^{(n)}_{(\lambda)} \neq 0$$

est au plus dénombrable et par conséquent, l'ensemble $(\Lambda_{\overline{K}}) = \bigcup_n (\Lambda_n)$ est au plus dénombrable. Soit alors une fonction quelconque de $(\overline{K})$. On peut l'approcher uniformément par une sous-suite $\{x^{(j)}\}$ extraite de $\{x^{(n)}\}$ et on a

$$Mx_{(\lambda)} = \lim_{j \to \infty} M \, x^{(j)}_{(\lambda)} \quad .$$

Le spectre de x est donc inclus dans $(\Lambda_{\overline{K}})$ qu'on appellera le spectre de l'ensemble compact $(\overline{K})$.

4. Polynômes de Bochner-Fejér.

(a) Définitions (BESICOVITCH [16]).

On appelle noyau de Bochner-Fejér la fonction $K_{(B)}$, définie par

$$K_{(B)}(t) = \sum_{|\nu_i|<n_i} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\left(1 - \frac{|\nu_2|}{n_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{|\nu_\mu|}{n_\mu}\right) \exp i(\nu_1\beta_1+\nu_2\beta_2+\ldots+\nu_p\beta_p)t$$

où β_1, β_2, ..., β_p sont p nombres réels linéairement indépendants. Ce noyau est réel : il n'est jamais négatif et sa valeur moyenne est 1.

Etant donnée une fonction presque-périodique x, on lui associe un polynôme trigonométrique (polynôme de Bochner-Fejér) par la formule de convolution :

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} \sigma^x_{(B)}(t) &= [x \hat{\star} K_{(B)}](t) = M_u\, x(t-u)\, K_{(B)}(u) \\ &= \sum_{|\nu_i|<n_i} \left(1 - \frac{|\nu_1|}{n_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{|\nu_p|}{n_p}\right) a_{\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_p\beta_p} \exp i(\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_p\beta_p)t\ , \end{aligned}$$

a_λ désignant le coefficient de Fourier de x correspondant à λ.

(b) Propriétés.

On obtient facilement l'inégalité $|\sigma^x_{(B)}| \leqslant \sup_t |x(t)| = \|x\|_{\underset{\sim}{C}}$. Par suite des propriétés de la convolution en moyenne (voir IV-6), l'opérateur

$$x \longrightarrow \sigma^x_{(B)} = x \hat{\star} K_{(B)}$$

est un opérateur linéaire borné de $\underset{\sim}{U}$ dans P de norme égale à 1.

On en déduit que l'ensemble des polynômes de Bochner-Fejér d'une fonction est un ensemble relativement compact et que l'ensemble des polynômes de Bochner-Fejér des fonctions d'un ensemble relativement compact est relativement compact.

En suivant BESICOVITCH [16] (p. 49) on peut montrer, qu'étant données m fonctions presque-périodiques $x^{(1)}$, ..., $x^{(m)}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un noyau de Bochner-Fejér tel que

$$M\left|\sigma^{x^{(i)}}_{(B)} - x^{(i)}\right|^2 < \varepsilon\ .$$

On peut donc trouver une suite de noyaux tels que les polynômes correspondants convergent en moyenne quadratique vers les $x^{(i)}$:

$$\lim_{\nu\to\infty} M\left|\sigma^{x^{(i)}}_{(B_\nu)} - x\right|^2 = 0\ .$$

Or dans un ensemble relativement compact (ou homogène) la convergence en moyenne quadratique est équivalente à la convergence uniforme (BESICOVITCH [16], p. 43). Les polynômes $\sigma^{x^{(i)}}_{(B_\nu)}$ convergent donc uniformément vers les fonctions $x^{(i)}$ correspondantes. On en déduit, <u>qu'étant donné</u> $\eta > 0$, <u>il est possible de trouver un noyau de Bochner-Fejér tel que</u>

$$\sup_t \left|\sigma^{x^{(i)}}_{(B)} - x^{(i)}\right| < \eta \quad \underline{\text{pour}} \quad i = 1 , 2 , \dots , m \quad .$$

(c) <u>Approximation des fonctions d'un ensemble compact</u>.

Soit (H) un ensemble compact dans $\underset{\sim}{C}(R)$ de fonctions presque-périodiques, et soit (Λ_H) son spectre. Soit $\{x^{(n)}\}$ un ensemble dense dans (H) .

On peut définir une suite $\{K_{(B_\nu)}\}$ de noyaux de Bochner-Fejér telle que, pour toute valeur de n , on ait

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x^{(n)} \hat{\star} K_{(B_\nu)} - x^{(n)}\|_{\underset{\sim}{C}} = 0 \quad .$$

Il suffit pour cela de se donner une suite η_ν de nombres positifs tendant vers zéro et de prendre pour noyau $K_{(B_\nu)}$ le noyau tel que

$$\|\sigma^{x^{(i)}}_{(B_\nu)} - x^{(i)}\|_{\underset{\sim}{C}} < \eta_\nu \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 , \dots , \nu \quad ,$$

ce qui est possible d'après le résultat précédent.

Or les applications de (H) sur l'ensemble des polynômes trigonométriques de spectre (Λ_H) définies par $x \longrightarrow x \hat{\star} K_{(B_\nu)}$ forment une suite équicontinue d'applications de (H) dans $\underset{\sim}{U}$. On a

$$\|x \hat{\star} K_{(B_\nu)} - x\|_{\underset{\sim}{C}} \leq \|(x - x^{(n)}) \hat{\star} K_{(B_\nu)}\|_{\underset{\sim}{C}} + \|x^{(n)} \hat{\star} K_{(B_\nu)} - x^{(n)}\|_{\underset{\sim}{C}} + \|x^{(n)} - x\|_{\underset{\sim}{C}}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x \hat{\star} K_{(B_\nu)} - x\|_{\underset{\sim}{C}} \leq 2\|x - x^{(n)}\|_{\underset{\sim}{C}} \quad .$$

Comme la suite $\{x^{(n)}\}$ est dense dans (H) , on a

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x \hat{\star} K_{(B_\nu)} - x\|_{\underset{\sim}{C}} = 0 \quad .$$

La suite des applications $x \longrightarrow x \hat{\star} K_{(B_\nu)}$ converge pour chaque x dans (H) vers la transformation identique et comme la suite est équicontinue, la convergence est uniforme, c'est-à-dire que

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup_{(H)} \|x \hat{\star} K_{(B_\nu)} - x\|_{\underset{\sim}{C}} = 0 \quad .$$

B. Fonctions faiblement presque-périodiques

1. Définitions.

((a) Topologie faible d'un espace de Banach.

Soient B un espace de Banach et B^* son espace dual (espace des fonctionnelles linéaires continues sur B), les espaces B et B^* étant mis en dualité par la forme bilinéaire $\langle x^* , x\rangle$.

La topologie faible de B est la topologie admettant comme base de voisinages de zéro tous les ensembles d'éléments x de B qui sont définis par un nombre fini d'inégalités

$$|\langle x^*_{(n)} , x\rangle| < \varepsilon \qquad 1 \leqslant n \leqslant N$$

où les $x^*_{(n)}$ sont des éléments quelconques de B^* .

Pour la topologie faible, les différentes notions de compacité coïncident (théorème d'Eberlein : D. S., p. 430), et on peut se borner à une définition au moyen des suites : un sous-ensemble X de B est dit faiblement compact (resp. relativement faiblement compact) si de toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de X , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers un élément de X (resp. vers un élément de B).

(b) Fonctions d'Eberlein.

Une fonction x de $\underline{C}(R)$ est appelée fonction faiblement presque-périodique (fonction d'Eberlein) si l'ensemble de ses translatées $\{x_\tau\}$ est relativement faiblement compact dans $\underline{C}(R)$.

Exemples de fonctions faiblement presque-périodiques (EBERLEIN [19]) :

- (α) Les fonctions presque-périodiques de Bohr.
- (β) Les fonctions continues nulles à l'infini : $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$.
- (γ) Les transformées de Fourier-Stieltjes :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\,i\omega t)\ d\sigma(\omega) \quad .$$

($\sigma(\omega)$ fonction à variation bornée sur $(-\infty , \infty)$).

2. Propriétés élémentaires (EBERLEIN [19]).

(a) Espace des fonctions faiblement presque-périodiques.

Soit $\underline{W}$ cet espace. C'est un espace de Banach complexe par rapport à la norme de

$\underset{\sim}{C}(R)$ et c'est aussi une algèbre de Banach involutive par rapport au produit ordinaire.

(b) Une fonction faiblement presque-périodique est uniformément continue.

(c) Existence de la moyenne.

Une fonction faiblement presque-périodique a une moyenne

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+a)\, dt = Mx \quad ,$$

la convergence étant uniforme en a .

(d) Convolution.

Si x et y sont deux fonctions faiblement presque-périodiques, la convolution définie par la moyenne

$$z(t) = (x \hat{\star} y)(t) = M_s\, x(t-s)\, y(s) = M_s\, x(s)\, y(t-s)$$

est une fonction de Bohr.

(e) Série de Fourier.

Mêmes définitions que pour les fonctions presque-périodiques.

(f) Equation de Parseval.

Pour toute fonction faiblement presque-périodique x , on a

$$\sum_{(\Lambda)} |a_{\lambda_n}|^2 = M_t\, |x(t)|^2$$

et la série de Fourier converge en moyenne quadratique vers x :

$$\lim_{N\to\infty} M_t \left| x(t) - \sum_{n=1}^{N} a_{\lambda_n} \exp i\lambda_n t \right|^2 = 0 \quad .$$

(g) Théorème de décomposition (EBERLEIN [20]).

La série de Fourier d'une fonction d'Eberlein x est la série de Fourier d'une fonction de Bohr x' . Toute fonction d'Eberlein x se décompose de manière unique $x = x' + x''$, x' étant la fonction de Bohr ayant la même série de Fourier, et x'' étant une fonction de moyenne quadratique nulle $M|x''|^2 = 0$.

Soit $\underset{\sim}{V}$ l'ensemble des fonctions d'Eberlein de moyenne quadratique nulle. Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions continues et bornées de moyenne quadratique nulle est un sous-espace vectoriel complet de $\underset{\sim}{C}(R)$. $\underset{\sim}{V}$ est donc un sous-espace vectoriel complet de $\underset{\sim}{W}$. Le théorème de décomposition d'Eberlein peut s'énoncer de la façon suivante : $\underset{\sim}{W}$ est la somme directe des deux espaces $\underset{\sim}{U}$ et $\underset{\sim}{V}$: $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{U} \oplus \underset{\sim}{V}$.

On peut former à partir de x une suite de polynômes trigonométriques (polynômes de Bochner-Fejér) qui convergent uniformément vers x' (voir paragraphe 5).

(h) Génération des fonctions faiblement presque-périodiques.

Soit $t \longrightarrow U_t$ une représentation fortement continue du groupe R dans un groupe de transformations linéaires uniformément bornées d'un espace de Banach B . Si l'ensemble $\{U_t\, \alpha\}$ est relativement faiblement compact pour un élément α de B , la fonction x définie par $x(t) = \langle \ell , U_t\, \alpha\rangle$, $\ell \in B^*$ est une fonction faiblement presque-périodique.

D'après le théorème de Banach sur la compacité faible de la boule unité de B (D. S., p. 425), cela est réalisé en particulier si B est réflexif.

3. Ensembles faiblement compacts de fonctions continues.

Dans ce paragraphe, on va énoncer quelques propriétés relatives à la topologie faible des ensembles de fonctions continues et bornées (fonctions appartenant à $\underset{\sim}{C}(R)$).

(a) Condition de compacité faible dans $\underset{\sim}{C}(R)$ (GROTHENDIECK [21]).

Un ensemble (E) de fonctions continues est relativement faiblement compact dans $\underset{\sim}{C}(R)$ si et seulement si :

1° (E) est uniformément borné.

2° Pour toutes les suites $\{x_j\}$ de fonctions de (E) et toutes les suites $\{t_i\}$ de nombres réels, on a

$$\lim_j \lim_i x_j(t_i) = \lim_i \lim_j x_j(t_i)$$

lorsque chacune des deux limites existe.

On en déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $\underset{\sim}{C}(R)$ soit une fonction d'Eberlein est qu'il n'existe pas de suites $\{t_i\}$ et $\{t'_j\}$ de nombres réels telles que les deux limites

$$\lim_j \lim_i x(t_i + t'_j) \quad \text{et} \quad \lim_i \lim_j x(t_i + t'_j)$$

existent et soient distinctes.

(b) Condition de convergence faible dans $\underset{\sim}{C}(R)$.

Une suite $\{x^{(j)}\}$ de fonctions continues converge faiblement vers une fonction

x continue si et seulement si :

1° $|x^{(j)}|$ est uniformément bornée.

2° De toute suite $\{t_i\}$ de nombres réels, on peut extraire une suite $\{t'_i\}$ telle que :

$$\lim_j \lim_i x^{(j)}(t'_i) = \lim_i \lim_j x^{(j)}(t'_i) = \lim_i x(t'_i) \quad .$$

(c) Topologie faible sur un ensemble faiblement compact.

Soit (E) un ensemble faiblement compact de fonctions continues. Sur cet ensemble, la topologie faible est équivalente à la topologie de la convergence ponctuelle : une suite $\{x^{(j)}\}$ de fonctions de (E) converge faiblement vers $x^{(0)}$ si et seulement si elle converge ponctuellement.

Si on suppose de plus l'ensemble (E) équicontinu, la topologie faible est une topologie métrique.

4. Ensembles faiblement compacts invariants par translation.

Si un ensemble (H) de fonctions continues est faiblement compact et invariant par translation, il est formé de fonctions faiblement presque-périodiques. Les propriétés de ces ensembles sont assez semblables aux propriétés correspondantes des fonctions faiblement presque-périodiques.

(a) Un ensemble (H) faiblement compact invariant par translation est équicontinu.

On le démontre par une adaptation facile de la démonstration donnée par EBERLEIN [19] de la continuité uniforme d'une fonction faiblement presque-périodique.

D'après 3-(c), on en déduit que la topologie faible sur (H) est une topologie métrique et que par conséquent (H) est faiblement séparable : il existe une suite $\{x^{(n)}\}$ telle que toute fonction x de (H) soit limite faible (ou limite ponctuelle) d'une sous-suite $\{x^{(j)}\}$ de $\{x^{(n)}\}$.

(b) Un ensemble (H) faiblement compact invariant par translation est uniformément moyennable, c'est-à-dire que la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$$

tend vers la moyenne Mx uniformément sur (H) .

Supposons que la moyenne ne soit pas atteinte uniformément. Il existe alors un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $\{U_j\}$ de nombres réels tendant vers l'infini tels que

$$\left|\frac{1}{2U_j}\int_{-U_j}^{U_j} x^{(j)}(u)\,du - Mx^{(j)}\right| \geqslant \varepsilon_0$$

pour une certaine suite $\{x^{(j)}\}$ de fonctions de (H) qu'on peut toujours supposer faiblement convergente vers une limite x.

Si on considère les fonctions $\varphi^{(j)}$, définies par

$$\varphi^{(j)}(t) = \frac{1}{2U_j}\int_{-U_j}^{U_j} x^{(j)}(t+u)\,du \quad ,$$

elles appartiennent à l'enveloppe convexe fermée de (H) qui, d'après le théorème de Krein-Smulian (D. S., p. 434), est aussi faiblement compacte. On peut donc supposer (en considérant au besoin une sous-suite de $\{U_j\}$) que $\varphi^{(j)}$ converge faiblement vers une fonction d'Eberlein φ. On a

$$(1) \qquad M\varphi = \lim_{j\to\infty} M\varphi^{(j)} = \lim_{j\to\infty} Mx^{(j)} = Mx \quad .$$

Montrons maintenant que φ est une fonction constante, c'est-à-dire que si τ est une constante quelconque,

$$\varphi(t+\tau) - \varphi(t) = 0 \quad .$$

On a en effet

$$\varphi^{(j)}(t+\tau) - \varphi^{(j)}(t) = \frac{1}{2U_j}\left(\int_{U_j}^{U_j+\tau} - \int_{-U_j}^{-U_j+\tau}\right) x^{(j)}(t+u)\,du \quad ,$$

$$\lim_{j\to\infty} |\varphi^{(j)}(t+\tau) - \varphi^{(j)}(t)| \leqslant \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2U_j}\, 2\tau \|x^{(j)}\|_{\underset{\sim}{C}} = 0 \quad ,$$

et comme $\varphi_\tau^{(j)} - \varphi^{(j)}$ tend faiblement vers $\varphi_\tau - \varphi$, on en déduit bien que φ est une constante. On a donc

$$M\varphi = \varphi(t) = Mx \qquad \text{d'après (1)},$$

ce qui est en contradiction avec le fait que

$$|\varphi(0) - Mx| = \lim_{j\to\infty} |\varphi^{(j)}(0) - Mx^{(j)}| \geqslant \varepsilon_0 \quad .$$

L'ensemble (H) est donc bien uniformément moyennable.

(c) <u>Un ensemble (H) faiblement compact invariant par translation de fonctions presque-périodiques de Bohr est fortement compact.</u>

De toute suite $\{x^{(n)}\}$ de fonctions de (H), on peut extraire une sous-suite $\{x^{(n')}\}$ faiblement convergente vers une fonction de Bohr x. Montrons par l'absurde que $\{x^{(n')}\}$ tend fortement vers x . Dans le cas contraire il existerait un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $\{u_j\}$ tels que

$$|x^{(j)}(u_j) - x(u_j)| \geqslant \varepsilon_0$$

pour une certaine sous-suite $\{x^{(j)}\}$ qu'on peut toujours supposer telle que la suite $\{x^{(j)}_{u_j} - x_{u_j}\}$ converge faiblement vers une fonction de Bohr φ . On a

$$M|\varphi|^2 = \lim_{j\to\infty} M|x^{(j)}_{u_j} - x_{u_j}|^2 = \lim_{j\to\infty} M|x^{(j)} - x|^2 \quad .$$

Or $|x^{(j)} - x|^2$ tend faiblement vers zéro. Donc $M|\varphi|^2 = 0$, d'où $\varphi(t) \equiv 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que

$$\varphi(0) = \lim_{j\to\infty} |x^{(j)}(u_j) - x(u_j)| \geqslant \varepsilon_0 \quad .$$

5. <u>Décomposition des ensembles faiblement compacts invariants par translation</u>.

Soit x une fonction d'Eberlein dont la décomposition est

$$x = x' + x'' \,, \qquad x' \in \underset{\sim}{U} \,, \quad x'' \in \underset{\sim}{V} \quad .$$

Si on associe à x les polynômes de Bochner-Fejér $x \mathbin{\hat{\star}} K_{(B)}$ (voir A-4-(a)), on a $x \mathbin{\hat{\star}} K_{(B)} = x' \mathbin{\hat{\star}} K_{(B)}$ et $\sup_t |[x \mathbin{\hat{\star}} K_{(B)}](t)| \leqslant \sup_t |x(t)| = \|x\|_{\underset{\sim}{C}}$. Si on considère une suite de polynômes de Bochner-Fejér qui converge vers x' , on obtient

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup_t |[x' \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)}](t)| = \|x'\|_{\underset{\sim}{C}} \leqslant \|x\|_{\underset{\sim}{C}}$$

et par suite

$$\|x''\|_{\underset{\sim}{C}} \leqslant 2\|x'\|_{\underset{\sim}{C}} \quad .$$

Les transformations qui, à chaque fonction d'Eberlein x , associe respectivement sa composante x' sur $\underset{\sim}{U}$ et sa composante x'' sur $\underset{\sim}{V}$ sont des projections fortement continues sur $\underset{\sim}{W}$ respectivement sur $\underset{\sim}{U}$ et $\underset{\sim}{V}$. Elles sont aussi faiblement continues (D. S., p. 422). D'autre part, elles commutent avec la transformation "translation". Par suite, la projection sur $\underset{\sim}{U}$ d'un ensemble faiblement compact (H) de fonctions d'Eberlein invariant par translation est un ensemble (H_1) de fonctions de Bohr invariant par translation et faiblement compact. D'après 4-(c), cet ensemble (H_1) est fortement compact et d'après les résultats de A-3 et A-4, on en déduit :

(a) <u>L'ensemble des coefficients de Fourier de</u> (H) <u>est au plus dénombrable</u>.

(b) <u>Il existe une suite de noyaux de Bochner-Fejér</u> $\{K_{(B_\nu)}\}$ <u>tels qu'on puisse</u>

<u>approcher les fonctions de</u> (H_1) <u>par une suite de polynômes de Bochner-Fejér uniformément sur</u> (H) , c'est-à-dire tels que :

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup_{(H)} \| x \hat{\star} K_{(B_\nu)} - x' \|_{\underset{\sim}{C}} = 0 \quad .$$

-:-:-:-

CHAPITRE VI

Fonctions $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodiques

1. Définitions.

On va maintenant étudier certaines notions de presque-périodicité dans l'espace $\mathfrak{M}^p$. Comme pour les fonctions d'Eberlein, on prendra comme point de départ une définition du type Bochner (V-A-2-(b)) : la topologie utilisée dans ce chapitre sera la topologie faible de l'espace de Banach $\mathfrak{M}^p$.

Une fonction f appartenant à $\mathfrak{M}^p_c$ sera dite $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodique si l'ensemble $\{f_\tau\}$ de ses translatées est relativement faiblement compact dans $\mathfrak{M}^p$.

On s'intéresse seulement aux fonctions de $\mathfrak{M}^p$ qui sont continues en norme ; l'avantage de ces fonctions est de posséder des ensembles de corrélation dont les propriétés permettent de les caractériser et de les étudier facilement. Une fonction de $\mathfrak{M}^p$ n'appartenant pas à $\mathfrak{M}^p_c$ peut cependant être telle que l'ensemble de ses translatées soit relativement faiblement compact. Un exemple simple en est donné dans $\mathfrak{M}^2$ par la fonction $t \longrightarrow \exp it^2$.

On appellera $\mathfrak{F}^p$ l'ensemble des fonctions $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodiques.

Exemples de fonctions $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodiques : voir VII-2 et VIII-2.

2. Caractérisation des fonctions de $\mathfrak{F}^p$.

THÉORÈME. - Une fonction f de $\mathfrak{M}^p_c$ est $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodique si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est réalisée :

1° L'ensemble de corrélation de f et d'une fonction quelconque de $\mathfrak{M}^q$ est un ensemble faiblement compact (dans $\underset{\sim}{C}(R)$).

2° L'ensemble de corrélation de f et de la fonction ψ associée à l'espace V_f est un ensemble faiblement compact (dans $\underset{\sim}{C}(R)$).

3° L'ensemble total de corrélation de f est faiblement compact (dans $\underset{\sim}{C}(R)$).

Comme les différents ensembles de corrélation sont compacts pour la convergence uniforme sur les ensembles compacts de R (III-2), on a immédiatement
3° $\Longrightarrow$ 1° $\Longrightarrow$ 2°.

(a) Les conditions sont nécessaires.

Supposons que l'ensemble $\{f_\tau\}$ soit relativement faiblement compact, et considérons l'enveloppe convexe fermée C_f de cet ensemble. D'après les théorèmes classiques sur la topologie faible d'un espace de Banach (D. S., chapitre V), C_f est un ensemble faiblement fermé, faiblement compact et faiblement complet : de toute suite $\{\tau_i\}$ de valeurs de τ , on peut extraire une sous-suite $\{\tau_i'\}$ telle que $\{f_{\tau_i'}\}$ converge faiblement vers une fonction φ appartenant à $\mathcal{C}_f$.

Considérons alors une suite $\{\gamma^{(j)}\}$ de fonctions de corrélation appartenant à l'ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ et correspondant à une suite $\{\ell_j\}$ de fonctionnelles de corrélation. L'ensemble $((\Gamma))$ étant compact pour la convergence ponctuelle, on peut en extraire une sous-suite $\{\gamma^{(j')}\}$ qui converge pour chaque valeur de h vers une fonction de corrélation $h \longrightarrow \gamma_0(h) = \langle \ell_0 , f_h \rangle$, la suite des fonctionnelles ℓ_j' convergeant vers ℓ_0 dans la $\mathcal{V}_f$-topologie de $\mathcal{V}_f^*$. Il suffit alors de démontrer que la suite $\{\gamma^{(j')}\}$ converge aussi faiblement vers γ_0 en utilisant le critère de convergence faible énoncé au paragraphe V-B-3-(a).

On a $|\gamma^{(j')}(\tau_i')| \leqslant \|f\|_p$ (III-1-(b)), et d'autre part,

$$\lim_j \lim_i \gamma^{(j')}(\tau_i') = \lim_j \lim_i \langle \ell_j' , f_{\tau_i'} \rangle = \lim_j \langle \ell_j' , \varphi \rangle = \langle \ell_0 , \varphi \rangle$$

$$\lim_i \lim_j \gamma^{(j')}(\tau_i') = \lim_i \lim_j \langle \ell_j' , f_{\tau_i'} \rangle = \lim_i \langle \ell_0 , f_{\tau_i'} \rangle = \langle \ell_0 , \varphi \rangle$$

$$= \lim_j \lim_i \gamma^{(j')}(\tau_i') \quad .$$

L'ensemble $((\Gamma))$ est donc faiblement compact. La condition 3° est vérifiée, et par suite les conditions 1° et 2° le sont aussi.

(b) Les conditions sont suffisantes.

Il suffit de montrer que la condition 2° est suffisante. Cela résulte du fait que l'ensemble (L_Φ) des fonctionnelles de corrélation entre $\mathcal{V}_f$ et Φ contient tous les points extrémaux de la boule unité du dual de $\mathcal{V}_f$ (II-6-(c)) et d'un théorème de Grothendieck [21] sur la compacité faible dans les espaces de Banach : Un ensemble (E) d'un espace de Banach B est relativement faiblement compact si et seulement si :

1° (E) est borné en norme.

2° Pour toutes les suites $\{x_j\}$ d'éléments de (E) et toutes les suites $\{x_i^*\}$ d'éléments de l'ensemble des points extrémaux de la boule unité du dual B^* de B, on a

$$\lim_j \lim_i \langle x_i^* , x_j \rangle = \lim_i \lim_j \langle x_i^* , x_j \rangle$$

lorsque chacune des limites existe.

Appliquons ce théorème à l'espace $\mathcal{V}_f$ et à l'ensemble $(E) = \{f_\tau\}$ des translatées de f . Cet ensemble est borné en norme par $\|f\|_p$ et, comme

$$\langle x_i^*, x_j\rangle = \gamma^{(i)}(\tau_j) \quad ,$$

la seconde condition résulte de la compacité faible de (Γ_ψ) d'après le critère du paragraphe V-B-3-(a). Donc, si (Γ_ψ) est faiblement compact dans $\underset{\sim}{C}(R)$ l'ensemble $\{f_\tau\}$ est relativement compact dans $\mathcal{V}_f$, donc dans $\mathfrak{M}^p$.

(c) Remarque.

Si f est $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodique, l'ensemble $((\Gamma))$ est faiblement compact et comme, d'autre part, il est invariant par translation (III-2), l'ensemble des translatées d'une fonction de corrélation de f est relativement faiblement compact dans $\underset{\sim}{C}(R)$: toutes les fonctions de corrélation d'une fonction de $\mathfrak{F}^p$ sont des fonctions d'Eberlein.

3. Propriétés de l'espace $\mathfrak{F}^p$.

(a) $\mathfrak{F}^p$ est un sous-espace vectoriel complet de $\mathfrak{M}^p$.

D'après la définition, il est évident que l'espace $\mathfrak{F}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_c^p$ et que ce sous-espace est invariant par translation.

Pour démontrer qu'il est complet (EBERLEIN [19]), considérons une suite de Cauchy (dans $\mathfrak{M}^p$) de fonctions $f^{(n)}$ de $\mathfrak{F}^p$, et montrons que la limite f appartient aussi à $\mathfrak{F}^p$. Soit $\{\tau_i\}$ une suite de nombres réels. Par le procédé diagonal, on peut en extraire une suite $\{\tau_i'\}$ telle que $\{f^{(n)}_{\tau_i'}\}$ converge faiblement quel que soit n , vers une fonction limite $\varphi^{(n)}$ appartenant à $\mathfrak{M}_c^p$. Comme

$$\|f^{(n)}_{\tau_i'} - f^{(m)}_{\tau_i'}\|_p \leqslant \varepsilon(m , n) \quad ,$$

$\varepsilon(m , n)$ tendant vers zéro lorsque m et n augmentent indéfiniment, on a

$$\|\varphi^{(n)} - \varphi^{(m)}\|_p = \sup_{\|\ell\|\leqslant 1} |\langle \ell , \varphi^{(n)} - \varphi^{(m)}\rangle| = \sup_{\|\ell\|\leqslant 1} \lim_{i\to\infty} |\langle \ell , f^{(n)}_{\tau_i'} - f^{(m)}_{\tau_i'}\rangle|$$

$$\leqslant \sup_{\|\ell\|\leqslant 1} \lim_{i\to\infty} \|\ell\| \, \|f^{(n)}_{\tau_i'} - f^{(m)}_{\tau_i'}\|_p \leqslant \varepsilon(m , n) \quad ,$$

et la suite $\{\varphi^{(n)}\}$ est une suite de Cauchy convergeant vers φ . Montrons alors que f_{τ_i} converge faiblement vers φ : si ℓ est une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathfrak{M}^p$, on a

$$\langle \ell , f_{\tau_i'} - \varphi\rangle = \langle \ell , f - f^{(n)}_{\tau_i'}\rangle + \langle \ell , f^{(n)}_{\tau_i'} - \varphi^{(n)}\rangle + \langle \ell , \varphi^{(n)} - \varphi\rangle \quad .$$

En choisissant n assez grand, on a

$$|\langle \ell , f_{\tau'_i} - \varphi\rangle| \leqslant 2\varepsilon + |\langle \ell , f^{(n)}_{\tau'} - \varphi^{(n)}\rangle|$$

$$\limsup_{i\to\infty} |\langle \ell , f_{\tau'_i} - \varphi\rangle| \leqslant 2\varepsilon ,$$

et comme ε peut être choisi arbitrairement petit :

$$\lim_{i\to\infty} |\langle \ell , f_{\tau'_i} - \varphi\rangle| = 0 .$$

L'ensemble des translatées de f est donc bien relativement faiblement compact et f appartient aussi à $\mathfrak{F}^p$.

(b) Moyenne généralisée. Coefficients de Fourier généralisés.

L'ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ d'une fonction f de $\mathfrak{F}^p$ est faiblement compact et invariant par translation (III-2). Il est donc uniformément moyennable (V-B-4-(b)). D'après le théorème IV-3-(b), f appartient à l'espace $\mathcal{E}^p$, c'est-à-dire qu'elle admet une moyenne généralisée :

$$a = \underset{g}{M} f = f \mathbin{\hat{\star}} 1 = \lim_{U\to\infty} \mathfrak{M}^p \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} f(t-u)\, du .$$

Considérons maintenant la fonction $f_{(\lambda)}(t) \longrightarrow f(t)\exp(-i\lambda t)$. Son ensemble total de corrélation $((\Gamma_\lambda))$ est formé des fonctions $h \longrightarrow \gamma(h)\exp(-i\lambda h)$, γ étant une fonction quelconque de $((\Gamma))$. Si $((\Gamma))$ est faiblement compact, $((\Gamma_\lambda))$ l'est aussi, et $f_{(\lambda)}$ appartient aussi à $\mathfrak{F}^p$. f appartient donc à l'espace $\mathcal{E}^p_t$, c'est-à-dire qu'elle admet des coefficients de Fourier généralisés $a_\lambda = \underset{g}{M} f_{(\lambda)}$.

D'après les expressions de la norme (IV-4-(a)) :

$$\|a_\lambda\|_p = \sup_{((\Gamma_\lambda))} |M\gamma| = \sup_{((\Gamma))} |M_h\, \gamma(h)\exp(-i\lambda h)| = \sup_{(\Gamma_\downarrow)} |M_h\, \gamma(h)\exp(-i\lambda h)| .$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles a_λ est différent de zéro (dans $\mathfrak{M}^p$) est au plus dénombrable (V-B-5-(a)) : c'est le spectre (Λ_Γ) de l'ensemble faiblement compact $((\Gamma))$. On peut donc définir la série de Fourier généralisée d'une fonction de $\mathfrak{F}^p$:

$$\sum_{(\Lambda_\Gamma)} a_\lambda \exp i\lambda t , \qquad (a_\lambda \in \mathfrak{K}^p)$$

(c) Relations entre les espaces $\mathfrak{F}^p$.

D'après les résultats du paragraphe I-3-(d), si $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$ et si f est une fonction de $\mathfrak{M}^{p_2}$, on a $\|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2}$.

La transformation associant à une fonction de $\mathfrak{M}^{p_2}$ la même fonction considérée comme fonction de $\mathcal{M}^{p_1}$ est donc une transformation linéaire bornée de $\mathcal{M}^{p_2}$ dans $\mathcal{M}^{p_1}$.

Si l'ensemble $\{f_\tau\}$ est relativement faiblement compact dans $\mathcal{M}^{p_2}$, il est aussi relativement faiblement compact dans $\mathcal{M}^{p_1}$. On a donc $\mathcal{F}^{p_2} \subset \mathcal{F}^{p_1}$. L'inclusion est stricte car on peut trouver, comme au paragraphe I-3-(d), une fonction de norme nulle dans $\mathcal{M}^{p_1}$ mais n'appartenant même pas à $\mathcal{M}^{p_2}$.

(d) <u>Relations entre les espaces</u> $\mathcal{K}$ <u>et</u> $\mathcal{F}$.

Soient k et f deux fonctions appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{K}^p$ et $\mathcal{F}^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{s} \leqslant 1$.

<u>Le produit ponctuel</u> k.f <u>appartient à</u> $\mathcal{F}^s$.

La transformation $f \longrightarrow k.f$ est une application linéaire continue de $\mathcal{M}^{p'}$ sur $\mathcal{M}^s$. Si l'ensemble $\{f_\tau\}$ est relativement faiblement compact dans $\mathcal{M}^{p'}$, l'ensemble $\{(k.f)_\tau\} = \{k_\tau . f_\tau\} = \{k.f_\tau\}$ l'est aussi dans $\mathcal{M}^s$, d'où le résultat.

-:-:-:-

CHAPITRE VII

Fonctions $\mathcal{M}^p$-presque-périodiques

1. Définitions.

Comme pour les fonctions $\mathcal{M}^p$-faiblement-presque-périodiques, on s'intéresse seulement aux fonctions qui sont continues en norme.

Une fonction f appartenant à $\mathcal{M}^p_c$ sera dite $\mathcal{M}^p$-presque-périodique si l'ensemble $\{f_\tau\}$ de ses translatées est relativement compact dans $\mathcal{M}^p$.

On appellera $\mathcal{P}^p$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{M}^p$-presque-périodiques.

Comme ailleurs, les valeurs de p sont telles que $1 \leqslant p < \infty$, mais il sera parfois commode de définir $\mathcal{P}^\infty$ comme l'espace des classes de fonctions égales presque partout à une fonction de Bohr : $\mathcal{P}^\infty$ sera l'espace de Banach $\underset{\sim}{U}$.

2. Exemples de fonctions $\mathcal{M}^p$-presque-périodiques.

D'après la définition, on voit immédiatement que les fonctions suivantes sont $\mathcal{M}^p$-presque-périodiques :

- les fonctions constantes ordinaires : $f(t) = k$,
- les fonctions exponentielles imaginaires : $f(t) = \exp i\lambda t$,
- les fonctions $\mathcal{M}^p$-constantes : $\mathcal{K}^p \subset \mathcal{P}^p$,
- les exponentielles imaginaires à coefficients dans $\mathcal{K}^p$: $f(t) = a_\lambda(t) \exp i\lambda t$.

Par suite des propriétés linéaires de $\mathcal{P}^p$ (ci-dessous : § 4), les polynômes trigonométriques à coefficients $\mathcal{M}^p$-constants (polynômes trigonométriques généralisés) appartiennent aussi à $\mathcal{P}^p$. L'ensemble $\underset{\sim}{P}^p$ de ces polynômes est un sous-espace vectoriel (incomplet) de $\mathcal{P}^p$; on verra qu'il est dense dans $\mathcal{P}^p$ (théorème III).

L'espace $\underset{\sim}{B}^p$ des fonctions B^p-presque-périodiques de Besicovitch est un sous-espace vectoriel complet de $\mathcal{P}^p$ (ci-dessous : § 3).

3. Caractérisation des fonctions $\mathcal{M}^p$-presque-périodiques.

La définition donnée au paragraphe 1 est l'analogue de la définition de Bochner pour les fonctions de Bohr (V-A-2-(b)), mais on peut, comme dans la théorie classique, caractériser les fonctions de $\mathcal{P}^p$ au moyen des presque-périodes et des nombres de translation (V-A-1) :

THÉORÈME I. - Une fonction f de $\mathcal{M}^p_c$ est $\mathcal{M}^p$-presque-périodique si, et seulement si, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble $E(\varepsilon, f)$ des nombres τ tels que $\|f_\tau - f\|_p < \varepsilon$ est relativement dense.

La démonstration de cette propriété se fait exactement de la même façon que dans le cas des fonctions de Bohr, en remplaçant l'espace de Banach $\underset{\sim}{C}(R)$ par l'espace de Banach $\mathfrak{M}_c^p$.

Les fonctions B^p-presque-périodiques sont elles aussi des fonctions continues en norme dans $\mathfrak{M}^p$, et ayant des presque-périodes. Mais elles sont caractérisées par une condition supplémentaire assurant une certaine uniformité de la fonction (BESICOVITCH [16], p. 78).

On peut aussi avoir une autre caractérisation des fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques au moyen des ensembles de corrélation.

THÉORÈME II. - Une fonction f de $\mathfrak{M}_c^p$ est $\mathfrak{M}^p$-presque-périodique si, et seulement si, l'une des trois conditions suivantes est réalisée :

1° L'ensemble de corrélation de f et d'une fonction quelconque de $\mathfrak{M}^q$ est un ensemble compact (dans $\underset{\sim}{C}(R)$).

2° L'ensemble de corrélation de f et de la fonction ψ associée à l'espace V_f est un ensemble compact (dans $\underset{\sim}{C}(R)$).

3° L'ensemble total de corrélation de f est compact (dans $\underset{\sim}{C}(R)$).

On remarque d'abord que 3° $\Longrightarrow$ 1° $\Longrightarrow$ 2° et que la 3e condition entraîne que toutes les fonctions de corrélation sont des fonctions de Bohr.

(a) Les conditions sont nécessaires.

L'inégalité de Hölder donne

$$|\gamma(h + k) - \gamma(h)| \leqslant \|f_k - f\|_p \, \|g\|_q$$

quelle que soit la fonction γ appartenant à un ensemble de corrélation (Γ) qui peut être (Γ_g) , (Γ_ψ) ou $(\!(\Gamma)\!)$.

L'ensemble $E(\varepsilon , f)$ est donc un ensemble de nombres de translation communs à toutes les fonctions de (Γ) et correspondant à $\varepsilon' = \varepsilon\|g\|_q$. Comme d'autre part, l'ensemble (Γ) est uniformément continu, il est un ensemble homogène et donc un ensemble relativement compact (V-A-3(a)). Comme les ensembles de corrélation sont fermés par rapport à la convergence ponctuelle, ils sont bien compacts par rapport à la norme dans $\underset{\sim}{C}(R)$.

(b) Les conditions sont suffisantes.

Il suffit de montrer que la 2e condition est suffisante. L'ensemble (Γ_ψ) étant un ensemble homogène, il est uniformément presque-périodique, c'est-à-dire que l'ensemble $E(\varepsilon , \Gamma_\psi)$ est relativement dense quel que soit $\varepsilon > 0$ (V-A-3-(a)). Or, d'après (III-3),

$$\|f_\tau - f\|_p = \sup_{(\Gamma_\downarrow)} \sup_h |\gamma(h+\tau) - \gamma(h)| \quad .$$

$E(\varepsilon , \Gamma_\downarrow)$ est l'ensemble des nombres de translation de f dans $\mathfrak{M}^p$ par rapport à la même valeur de ε . Comme cet ensemble est relativement dense quel que soit ε , f est bien $\mathfrak{M}^p$-presque-périodique d'après le théorème I.

4. Propriétés de l'espace $\mathcal{P}^p$.

(a) Une fonction $\mathfrak{M}^p$-presque-périodique est $\mathfrak{M}^p$-faiblement-presque-périodique.

En effet, si l'ensemble $\{f_\tau\}$ des translatées de f est relativement compact, il est aussi relativement faiblement compact. On a donc $\mathcal{P}^p \subseteq \mathcal{F}^p$, et on en déduit immédiatement des propriétés de $\mathcal{F}^p$ (VI-3-(b)) :

- Une fonction de $\mathcal{P}^p$ admet une moyenne généralisée : $\mathcal{P}^p \subseteq \mathcal{E}^p$.
- Une fonction de $\mathcal{P}^p$ admet des coefficients de Fourier $a_\lambda = \underset{g}{M} f_{(\lambda)}$ et une série de Fourier : $\sum\limits_{(\Lambda)} a_\lambda(t) \exp i\lambda t$.

(b) $\mathcal{P}^p$ est un sous-espace vectoriel complet de $\mathfrak{M}^p$.

D'après la définition, il est évident que l'espace $\mathcal{P}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}^p_c$ et que ce sous-espace est invariant par translation. On démontre qu'il est complet en transposant la démonstration montrant que $\underset{\sim}{U}$ est un sous-espace complet de $\underset{\sim}{C}(R)$ (D. S., p. 285).

5. Théorème d'approximation.

L'espace $\underset{\sim}{P}^p$ des polynômes trigonométriques généralisés est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}^p$. Comme dans le cas des fonctions presque-périodiques classiques, on a un théorème d'approximation : la fermeture de $\underset{\sim}{P}^p$ dans $\mathfrak{M}^p$ est exactement $\mathcal{P}^p$:

THÉORÈME III. - Une fonction f de $\mathfrak{M}^p_c$ est $\mathfrak{M}^p$-presque-périodique si, et seulement si, elle est limite dans $\mathfrak{M}^p$ d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés.

Les polynômes trigonométriques généralisés sont des fonctions $\mathfrak{M}^p$-presque-périodiques (§ 2), et comme l'espace $\mathcal{P}^p$ est complet, toute limite de polynômes trigonométriques généralisés est $\mathfrak{M}^p$-presque-périodique.

Il reste à montrer que toute fonction f de $\mathcal{P}^p$ peut être obtenue comme limite de polynômes trigonométriques généralisés. Comme dans la théorie classique, on utilise les polynômes de Bochner-Fejér.

Considérons l'ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ de f . D'après le théorème II, il est compact et on peut lui appliquer les résultats du paragraphe V-A-4-(c) : il existe une suite de noyaux de Bochner-Fejér $\{K_{(B_\nu)}\}$ tels que

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup_{((\Gamma))} \|\gamma \hat{\star} K_{(B_\nu)} - \gamma\|_{\underset{\sim}{C}} = 0 \quad .$$

D'après IV-6-(d), les fonctions de corrélation des fonctions $f \hat{\star} K_{(B_\nu)} - f$ sont justement $\gamma \hat{\star} K_{(B_\nu)} - \gamma$.

D'après les expressions de la norme dans $\mathfrak{M}^p$ données au paragraphe III-3,

$$\lim_{\nu\to\infty} \|f \hat{\star} K_{(E_\nu)} - f\|_p = 0 \quad .$$

f est donc limite dans $\mathfrak{M}^p$ de la suite de polynômes trigonométriques généralisés $\{f \hat{\star} K_{(B_\nu)}\}$.

Conséquence. - Comme dans la théorie classique, on déduit du théorème III le théorème d'unicité :

Si deux fonctions de $\mathcal{P}^p$ ont les mêmes coefficients de Fourier généralisés, elles sont égales (dans $\mathfrak{M}^p$).

Une autre conséquence importante est que :

Toute fonction de $\mathcal{P}^p$ appartient à l'espace $\mathfrak{M}^p_r$.

En effet, d'après les propriétés des $\mathfrak{M}^p$-constantes (IV-1-(d)), la fonction $t \longrightarrow a_\lambda(t) \exp i\lambda t$ appartient à $\mathfrak{M}^p_r$. Comme $\mathfrak{M}^p_r$ est un espace vectoriel, on a $\underset{\sim}{P}^p \subseteq \mathfrak{M}^p_r$ et comme il est complet, $\mathcal{P}^p \subseteq \mathfrak{M}^p_r$.

6. Relations entre les espaces $\mathcal{P}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}_t$.

(a) Si $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$, on a $\mathcal{P}^{p_2} \subset \mathcal{P}^{p_1}$.

Même raisonnement qu'au paragraphe VI-3-(c).

(b) Produits de fonctions.

Soient f une fonction de $\mathcal{P}^p$ et g', g'', g''' des fonctions appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{E}_t^{p'}$, $\mathcal{S}^{p'}$, $\mathcal{P}^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{s} \leqslant 1$, $1 < p \leqslant \infty$, $q \leqslant p' < \infty$.

Les produits ponctuels $f.g'$, $f.g''$, $f.g'''$ appartiennent respectivement aux espaces $\mathcal{E}_t^s$, $\mathcal{S}^s$, $\mathcal{P}^s$.

Le résultat est vrai si f est une exponentielle imaginaire à coefficient $\mathfrak{M}^p$-constant (IV-5-(b), VI-3-(d)), donc si f appartient à $\underset{\sim}{P}^p$, car les espaces $\mathcal{E}_t^s$, $\mathcal{S}^s$, $\mathcal{P}^s$ sont vectoriels. Comme ils sont complets, le théorème III et la seconde inégalité de Hölder permettent d'achever la démonstration.

(c) Si f appartient à $\wp^p$ $(1 < p < \infty)$, $\tilde{f}$ appartient à $\wp^q$.

Cela résulte immédiatement des propriétés de la transformation $\sim$ (I-1-(c)) et du théorème I par exemple.

(d) Si f appartient à $\wp^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $|f|^p$ appartient à $\wp^1$.

Conséquence immédiate de (b) et (c) et, si $p = 1$, de l'inégalité

$$\| |f_1| - |f_2| \|_1 \leqslant \|f_1 - f_2\|_1 \quad .$$

-:-:-:-

CHAPITRE VIII

Fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires

1. Définitions.

Dans ce chapitre, on va donner une généralisation des fonctions pseudo-aléatoires de J. BASS [2], [3] en caractérisant certaines fonctions de $\mathfrak{S}^p$ qui jouent en quelque sorte le même rôle que les fonctions d'Eberlein de moyenne quadratique nulle (espace $\underset{\sim}{V}$) par rapport aux fonctions d'Eberlein générales (espace $\underset{\sim}{W}$: chapitre V-B). On obtient un théorème de décomposition de l'espace $\mathfrak{S}^p$ en somme directe de l'espace $\mathcal{P}^p$ et d'un espace $\mathfrak{A}^p$, théorème parallèle à celui d'Eberlein : $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{U} \oplus \underset{\sim}{V}$ (V-B-2-(g)).

Une fonction appartenant à $\mathfrak{M}^p_c$ sera dite $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire si son ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ est un ensemble faiblement compact de fonctions continues de moyenne quadratique nulle.

On appellera $\mathfrak{A}^p$ l'ensemble des fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires.

2. Exemples de fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires.

Les fonctions pseudo-aléatoires de J. BASS sont des fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires pour $p = 2$ (voir plus loin : § IX) et, par suite, pour $1 \leqslant p \leqslant 2$ (ci-dessous : 3-(c)).

Un exemple de nature assez différente est donné par la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(t) = (n)^{n/p} & \text{si} \quad n^n \leqslant t \leqslant n^n + 1 \quad (n = 1 , 2 , \ldots) \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \qquad (1 < p < \infty) \quad . \end{cases}$$

Pour montrer que cette fonction est $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire, on utilise le fait qu'un ensemble $((\Gamma))$ compact pour la convergence ponctuelle de fonctions s'annulant à l'infini est faiblement compact dans $\underset{\sim}{C}(R)$ (d'après V-B-3-(a)). On va donc montrer que si g est une fonction quelconque de $\mathfrak{M}^q$, toute fonction de corrélation γ entre f et g tend vers zéro lorsque $|h|$ augmente indéfiniment. Supposons que γ soit définie par la suite $\{T_\nu\}$ et que γ ne tende pas vers zéro lorsque h tend vers $+\infty$. Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite $\{h_\mu\}$ de valeurs de h tels que $|\gamma(h_\mu)| \geqslant \varepsilon$ et $h_{\mu+1} \geqslant h_\mu + 1$ quel que soit $\mu = 1 , 2 , 3 , \ldots$

On a

$$\left| \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t + h_\mu) \, g(t) \, dt \right| \geqslant \varepsilon \quad .$$

Si $n = n(\nu , \mu)$ est le plus grand entier tel que $n^n - h_\mu \leqslant T_\nu$, on a

$$\limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{n^n-h_\mu} |f(t+h_\mu)|^p\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n-h_\mu}\sum_{k=1}^{n-1} k^k = 0 \quad .$$

L'inégalité de Hölder donne alors

$$\left(\limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{n^n-h_\mu}^{T'_\nu} |f(t+h_\mu)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{n^n-h_\mu}^{T'_\nu} |g(t)|^q\, dt\right)^{1/q} \geqslant \varepsilon \quad ,$$

T'_ν étant tel que

$$\begin{cases} T'_\nu = T_\nu & \text{si } T_\nu \leqslant n^n - h_\nu + 1 \quad , \\ T'_\nu = n^n - h_\nu + 1 & \text{si } T_\nu \geqslant n^n - h_\nu + 1 \quad . \end{cases}$$

Comme

$$\limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{n^n-h_\mu}^{T'_\nu} n^n\, dt = \limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{n^n(T'_\nu - n^n + h_\nu)}{2T_\nu} \leqslant \frac{1}{2} \quad ,$$

on a

$$\limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{n^n-h_\mu}^{T'_\nu} |g(t)|^q\, dt \geqslant 2^{q/p}\,\varepsilon^q \quad .$$

En sommant par rapport à μ , on a

$$\limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\sum_{\mu=1}^{N}\int_{n^n-h_\mu}^{T'_\nu} |g(t)|^q\, dt \geqslant N\, 2^{q/p}\,\varepsilon^q \quad ,$$

et comme $h_{\mu+1} \geqslant h_\mu + 1$, on peut écrire, dès que T_ν est assez grand,

$$\sum_{\mu=1}^{N}\int_{n^n-h}^{T'_\nu} |g(t)|^q\, dt \leqslant \int_{-T_\nu}^{T_\nu} |g(t)|^q\, dt \quad .$$

D'où

$$\limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} |g(t)|^q\, dt \geqslant N\, 2^{p/q}\,\varepsilon^q \quad .$$

Comme on peut choisir N supérieur à $\dfrac{\|g\|_q^q}{2^{q/p}\,\varepsilon^q}$, on aboutit à une contradiction si on suppose que ε n'est pas nul. $\gamma(h)$ tend vers zéro lorsque h tend vers $+\infty$. On peut faire une démonstration analogue si h tend vers $-\infty$. Toutes les fonctions de corrélation de f tendent vers zéro à l'infini et l'ensemble $((\Gamma))$ est faiblement compact : f est une fonction $\mathcal{M}^p$-pseudo-aléatoire.

On remarque que f n'est pas $\mathfrak{M}^p$-régulière. Contrairement à l'espace $\mathcal{P}^p$, l'espace $\mathcal{A}^p$ (et donc $\mathcal{S}^p$) n'est pas sous-espace de $\mathfrak{M}^p_r$.

3. Propriétés de l'espace $\mathcal{A}^p$.

(a) Une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire appartient à $\mathcal{S}^p$: $\mathcal{A}^p \subset \mathcal{S}^p$.

Cette propriété résulte immédiatement de la définition et du théorème du paragraphe VI-2.

Les fonctions de corrélation d'une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire sont des fonctions d'Eberlein (VI-2-(c)) de moyenne quadratique nulle : elles appartiennent à l'espace $\underset{\sim}{V}$ défini au paragraphe V-B-2-(g).

Une fonction de $\mathcal{A}^p$ qui est en même temps $\mathfrak{M}^p$-presque-périodique a un ensemble total de corrélation constitué de fonctions de Bohr de moyenne quadratique nulle ; cet ensemble contient donc uniquement la fonction nulle : l'intersection de $\mathcal{A}^p$ et $\mathcal{P}^p$ est constituée par la fonction nulle (dans $\mathfrak{M}^p$) :

$$\mathcal{A}^p \cap \mathcal{P}^p = 0 \quad .$$

Comme les ensembles $\mathcal{P}^p$ et $\mathcal{A}^p$ ne sont pas vides, les inclusions $\mathcal{P}^p \subset \mathcal{S}^p$ et $\mathcal{A}^p \subset \mathcal{S}^p$ sont strictes.

(b) $\mathcal{A}^p$ est un sous-espace vectoriel complet de $\mathcal{S}^p$.

Soient $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ deux fonctions de $\mathcal{A}^p$ dont les ensembles totaux de corrélation sont $((\Gamma^1))$ et $((\Gamma^2))$. Si λ_1 et λ_2 sont des constantes complexes, l'ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ de la fonction $f = \lambda_1 f^{(1)} + \lambda_2 f^{(2)}$ est tel que (III-4-(b)) :

$$((\Gamma)) \subseteq \lambda_1 ((\Gamma^1)) + \lambda_2 ((\Gamma^2)) \quad .$$

$\mathcal{S}^p$ étant vectoriel ainsi que l'espace $\underset{\sim}{V}$, f est une fonction de $\mathcal{S}^p$ telle que toutes ses fonctions de corrélation appartiennent à $\underset{\sim}{V}$: f appartient à $\mathcal{A}^p$ qui est bien un espace vectoriel.

Pour montrer qu'il est complet dans $\mathfrak{M}^p$, considérons une suite $\{f^{(n)}\}$ de fonctions de $\mathcal{A}^p$ convergeant dans $\mathfrak{M}^p$ vers une fonction f qui appartient à $\mathcal{S}^p$ (VI-3-(a)). D'après III-4(c), toute fonction de corrélation γ de f est limite uniforme d'une suite $\{\gamma^{(n)}\}$ de fonctions de corrélation des $f^{(n)}$. Comme l'espace $\underset{\sim}{V}$ est un sous-espace complet de $\underset{\sim}{C}(R)$, γ appartient aussi à $\underset{\sim}{V}$ et f appartient à $\mathcal{A}^p$. $\mathcal{A}^p$ est donc un sous-espace complet de $\mathfrak{M}^p$.

D'après III-4(a), $\mathcal{A}^p$ est invariant par translation.

(c) <u>Si</u> $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, <u>on a</u> $\mathfrak{A}^{p_2} \subset \mathfrak{A}^{p_1}$.

Soit f une fonction de $\mathfrak{A}^{p_2}$ dont l'ensemble total de corrélation est $((\Gamma''))$. D'après VI-3-(c), elle appartient aussi à $\mathfrak{S}^{p_1}$ et, dans cet espace, son ensemble total de corrélation $((\Gamma'))$ est tel que $((\Gamma')) \subseteq ((\Gamma''))$ d'après I-3-(d). $((\Gamma'))$ est aussi formé de fonctions de $\underset{\sim}{V}$ et f appartient à $\mathfrak{A}^{p_1}$. L'inclusion $\mathfrak{A}^{p_2} \subset \mathfrak{A}^{p_1}$ est stricte (voir VI-3-(c)).

4. Propriétés des fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires.

(a) Coefficients de Fourier généralisés.

Une fonction de $\mathfrak{A}^p$ appartenant aussi à $\mathfrak{S}^p$, elle admet une moyenne généralisée ou, plus généralement, des coefficients de Fourier généralisés. D'après la formule du paragraphe VI-3-(b) :

$$\|a_\lambda\|_p = \sup_{((\Gamma))} |M_h\ \gamma(h)\ \exp(-\ i\lambda h)| \leqslant \sup_{((\Gamma))} [M|\gamma|^2]^{1/2} \quad ,$$

ces coefficients sont tous nuls (dans $\mathfrak{M}^p$).

Inversement, une fonction de $\mathfrak{S}^p$, dont tous les coefficients de Fourier généralisés sont nuls, est $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire car, d'après la même formule, les coefficients de Fourier ordinaires des fonctions d'Eberlein γ sont tous nuls, et, d'après la relation de Parseval, $M|\gamma|^2 = 0$.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME I. – <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $\mathfrak{S}^p$ soit une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire est que tous ses coefficients de Fourier généralisés soient nuls.</u>

D'après les relations entre moyenne généralisée et moyenne ordinaire (IV-4-(c)), on voit que si $1 < p < \infty$, les fonctions $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoires ont des coefficients de Fourier ordinaires et ces coefficients sont tous nuls :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\ \exp(-\ i\lambda t)\ dt = 0 \quad .$$

Ces fonctions sont presque périodiques au sens de S. HARTMAN (KAHANE [23]). Cette propriété caractérise les fonctions de $\mathfrak{A}^p$ pour $1 < p < \infty$:

THÉORÈME II. – <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $\mathfrak{S}^p$ $(1 < p < \infty)$ soit une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire est que tous ses coefficients de Fourier ordinaires existent et soient nuls.</u>

La partie "condition suffisante" sera une conséquence immédiate du théorème de décomposition (théorème V).

(b) Ensembles de corrélation d'une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire.

THÉORÈME III. - Une fonction f de $\mathfrak{M}_c^p$ est $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

1° L'ensemble de corrélation de f et d'une fonction quelconque de $\mathfrak{M}^q$ est un ensemble faiblement compact de fonctions continues de moyenne quadratique nulle.

2° L'ensemble de corrélation de f et de la fonction ψ associée à γ_f est un ensemble faiblement compact de fonctions continues de moyenne quadratique nulle.

Si f appartient à $\mathfrak{a}^p$, ces deux conditions sont réalisées d'après la définition et le théorème du paragraphe VI-2.

Inversement, comme 1° $\Longrightarrow$ 2°, il suffit de montrer que la seconde condition entraîne que f appartient à $\mathfrak{a}^p$. Cela résulte du calcul de la norme des coefficients de Fourier (VI-3-(b)) qui existent car on sait déjà, d'après VI-2, que f appartient à $\mathfrak{S}^p$:

$$\|a_\lambda\|_p = \sup_{(\Gamma_\psi)} |M_h\, \gamma(h) \exp(-\, i\lambda h)| \leqslant \sup_{(\Gamma_\psi)} \left|M|\gamma|^2\right|^{1/2} = 0 \quad .$$

Si toutes les fonctions de corrélation entre f et ψ ont une moyenne quadratique nulle, on a $\|a_\lambda\|_p = 0$ quel que soit λ. Le théorème I montre alors que f appartient à $\mathfrak{a}^p$.

(c) Propriété de l'ensemble des translatées.

Pour définir les espaces $\mathfrak{S}^p$ et $\mathfrak{P}^p$, nous avons considéré des propriétés topologiques de l'ensemble $\{f_\tau\}$ des translatées d'une fonction f de $\mathfrak{M}_c^p$. On aurait pu définir directement $\mathfrak{a}^p$ à partir de cet ensemble :

THÉORÈME IV. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f de $\mathfrak{S}^p$ soit une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire est que la fonction nulle appartienne à la fermeture faible de l'ensemble $\{f_\tau\}$ de ses translatées.

Une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire est un "Fluchtvektor" de l'espace vectoriel $\mathfrak{S}^p$ par rapport au groupe des translations (JACOBS [22]).

1° La condition est suffisante.

La transformation de $\mathfrak{M}^p$ sur lui-même qui associe à f la fonction $f_{(\lambda)}$: $t \longrightarrow f(t) \exp(-\, i\lambda t)$ est continue. La fonction nulle appartient donc aussi à la fermeture faible de l'ensemble des translatées de la fonction $f_{(\lambda)}$. D'après un théorème de Mazur (D. S., p. 422), l'enveloppe convexe fermée de cet ensemble est faiblement fermée. Elle contient donc la fonction nulle et par suite de l'unicité de la moyenne (IV-4-(b)), on a $\underset{g}{M} f_{(\lambda)} = 0$ quel que soit λ. D'après le théorème II, la fonction f est bien $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire.

2° La condition est nécessaire.

Soit f une fonction $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire, et soit ℓ une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathfrak{M}^p$. La fonction $\tau \longrightarrow \langle \ell , f_\tau \rangle$ est une fonction d'Eberlein (V-B-2-(h)) appartenant à $\underset{\sim}{V}$ car tous ses coefficients de Fourier sont nuls (VI-3-(b)) :

$$\lim_{U\to\infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} \exp(- i\lambda u) \langle \ell , f_u \rangle \, du = \langle \ell , f \,\hat{\star}\, \exp(- i\lambda t) \rangle = 0 \quad .$$

On ne peut donc pas avoir $|\langle \ell , f_\tau \rangle| > \varepsilon > 0$ quel que soit τ et par conséquent, tout voisinage faible de la fonction zéro contient au moins une fonction de l'ensemble $\{f_\tau\}$.

5. Relations entre les espaces $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{P}$.

Soient f une fonction de $\mathfrak{A}^p$ et g une fonction de $\mathfrak{P}^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{s} \leqslant 1$ $1 \leqslant p < \infty$, $q \leqslant p' \leqslant \infty$.

Le produit ponctuel $f.g$ appartient à $\mathfrak{A}^s$.

D'après IV-5-(b) et le théorème I, le produit de f par une exponentielle imaginaire à coefficient $\mathfrak{M}^{p'}$-constant appartient à $\mathfrak{A}^s$. Comme en VII-6-(b) on en déduit le résultat et de plus, d'après le théorème II, la moyenne ordinaire d'une fonction de $\mathfrak{A}^{p'}$ $(1 < p < \infty)$ par une fonction de $\mathfrak{P}^{p'}$ $(q \leqslant p' \leqslant \infty)$ existe et est nulle.

6. Théorème de décomposition.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de Jacobs (JACOBS [22]).

THÉORÈME V. - Toute fonction f de $\mathfrak{S}^p$ se décompose de manière unique en une somme de deux fonctions : $f = f' + f''$, f' étant une fonction de $\mathfrak{P}^p$ ayant même série de Fourier généralisée que f et f'' étant une fonction de $\mathfrak{A}^p$.

Considérons l'ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ de f. C'est un ensemble faiblement compact (VI-2) et invariant par translation (III-2) de fonctions d'Eberlein On peut lui appliquer les résultats des paragraphes V-B-4 et 5.

Chaque fonction de corrélation γ se décompose en une fonction de Bohr γ' et une fonction de moyenne quadratique nulle γ'' : $\gamma = \gamma' + \gamma''$. L'ensemble $((\Gamma'))$ des fonctions γ' est fortement compact et l'ensemble $((\Gamma''))$ des fonctions γ'' est faiblement compact. Il existe une suite de noyaux de Bochner-Fejér $\{K_{(B_\nu)}\}$

tels que

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup_{((\Gamma))} \|\gamma \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)} - \gamma'\|_{\underset{\sim}{C}} = 0$$

ou

$$\lim_{\nu,\mu\to\infty} \sup_{((\Gamma))} \|\gamma \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)} - \gamma \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\mu)}\|_{\underset{\sim}{C}} = 0 \quad .$$

Or d'après IV-6-(d), les fonctions $\gamma \mathbin{\hat{\star}} (K_{(B_\nu)} - K_{(B_\mu)})$ sont toutes les fonctions de corrélation du polynôme trigonométrique généralisé $f \mathbin{\hat{\star}} (K_{(B_\nu)} - K_{(B_\mu)})$. D'après l'expression de la norme dans $\mathfrak{M}^p$ (III-3) :

$$\|f \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)} - f \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\mu)}\|_p = \sup_{((\Gamma))} \|\gamma \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)} - \gamma \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\mu)}\|_{\underset{\sim}{C}} \quad ,$$

la suite des polynômes trigonométriques $f \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)}$ est une suite de Cauchy dans $\mathfrak{M}^p$ qui converge vers une fonction f' appartenant à $\mathcal{P}^p$.

Considérons maintenant la fonction

$$f'' = f - f' = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{M}^p\, (f - f \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)}) \quad .$$

Ses fonctions de corrélation sont données par (IV-6-(d)) :

$$\gamma'' = \lim_{\nu\to\infty} (\gamma - \gamma \mathbin{\hat{\star}} K_{(B_\nu)}) = \gamma - \gamma' \qquad \gamma \in ((\Gamma)) \quad .$$

L'ensemble de corrélation de f'' est donc exactement $((\Gamma''))$ et f'' est bien $\mathfrak{M}^p$-pseudo-aléatoire.

La décomposition de f ainsi obtenue $f = f' + f''$ est unique, car si on avait une autre décomposition $f = \varphi' + \varphi''$, on devrait avoir $f' - \varphi' = \varphi'' - f''$. Comme une fonction de $\mathcal{P}^p$ ne peut appartenir aussi à $\mathfrak{A}^p$ sans être nulle (VIII-3-(a)), les deux membres de cette égalité sont nuls (dans $\mathfrak{M}^p$).

Enfin, les coefficients de Fourier généralisés de f'' étant nuls, f' a bien les mêmes coefficients de Fourier généralisés que f .

-:-:-:-

CHAPITRE IX

Etude de certains sous-espaces de $\mathfrak{M}_c^2$

Dans le cas de l'espace $\mathfrak{M}_c^2$, on peut étudier de manière plus détaillée que dans le cas général les différents sous-espaces. Les simplifications proviennent surtout du fait que la transformation $\sim$ (I-1-(c)), qui est ici la transformation imaginaire conjuguée, a des propriétés linéaires.

On étudiera dans ce chapitre les fonctions de $\mathfrak{M}_c^2$ qui sont $\mathfrak{M}^2$-régulières. Dans ce cas, les fonctions de corrélation entre f et $\overline{f}$ sont des fonctions de type positif et l'ensemble $(\gamma) = (\Gamma_{\overline{f}})$ permet de caractériser de manière intéressante les différents sous-espaces de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$.

On notera $\|f\|$ (sans indice) la norme dans $\mathfrak{M}^2$, et $\langle g , f \rangle_{\{T_\nu\}}$ la valeur de la fonctionnelle de corrélation correspondant à la fonction $\overline{g}$ et à la suite $\{T_\nu\}$:

$$\langle g , f \rangle_{\{T_\nu\}} = \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t)\, \overline{g}(t)\, dt \quad .$$

1. Ensemble d'autocorrélation et ensemble spectral énergétique.

(a) Fonctions d'autocorrélation.

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_c^2$. La fonction $\overline{f}$ appartient aussi à $\mathfrak{M}_c^2$. On appellera fonction d'autocorrélation toute fonction de corrélation entre f et $\overline{f}$. On appellera ensemble d'autocorrélation l'ensemble $(\gamma) = (\Gamma_{\overline{f}})$ des fonctions d'autocorrélation.

Supposons de plus que f appartienne à $\mathfrak{M}_r^2$: alors toutes les fonctions d'autocorrélation sont des fonctions de type positif.

En effet, une fonction d'autocorrélation γ est continue car f appartient à $\mathfrak{M}_c^2$. Il suffit donc de montrer qu'étant donnés n nombres complexes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ et n nombres réels $h_1 , h_2 , \ldots , h_n$, on a toujours

$$\sum_{i,j} \gamma(h_i - h_j)\, \xi_i\, \overline{\xi}_j \geq 0 \quad .$$

Si la fonction γ est définie par la suite $\{T_\nu\}$, on a

$$\sum_{i,j} \gamma(h_i - h_j)\, \xi_i\, \overline{\xi}_j = \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} \sum_{i,j} f(t+h_i-h_j)\, \overline{f}(t)\, dt$$

$$= \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} \sum_{i,j} f(t+h_i)\, \overline{f(t+h_j)}\, \xi_i\, \overline{\xi}_j\, dt \quad \text{(d'après I-2(b))}$$

$$= \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} \left| \sum_i f(t+h_i)\, \xi_i \right|^2 dt$$

qui est bien toujours non négative.

(b) Ensemble spectral énergétique.

D'après le théorème de Bochner (LOEVE [24], p. 207), on peut dire que chaque fonction d'autocorrélation γ peut se représenter sous la forme

$$\gamma(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\sigma(\omega)$$

où σ est une mesure de Radon non négative. Cette mesure (ou plutôt la fonction σ non décroissante qui lui est associée) sera appelée fonction spectrale énergétique et l'ensemble (σ) de toutes les fonctions spectrales énergétiques sera appelé l'ensemble spectral énergétique de f.

D'après les propriétés générales des ensembles de corrélation (III-2), (γ) est un ensemble borné, équicontinu et compact pour la convergence ponctuelle (ou la convergence uniforme sur les ensembles compacts).

D'après les propriétés classiques des fonctions de répartition (LOEVE [24], paragraphes 11 et 12), (σ) est un ensemble borné, compact pour la "convergence complète", c'est-à-dire que de toute suite $\{\sigma_j\}$ on peut extraire une suite $\{\sigma_{j'}\}$ convergeant vers une fonction σ_0 de la façon suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{j'\to\infty} \sigma_{j'}(\omega) = \sigma_0(\omega) & \text{en tout point où } \sigma_0 \text{ est continue,} \\ \lim\limits_{j'\to\infty} \sigma_{j'}(\infty) = \sigma_0(\infty) & . \end{cases}$$

De plus, comme (γ) est équicontinu, il existe un nombre $A = A(\varepsilon) > 0$ tel que, $\varepsilon > 0$ étant donné, on ait

$$(2) \qquad \sup_{(\sigma)} \left[\int_{-\infty}^{-A} d\sigma(\omega) + \int_{A}^{\infty} d\sigma(\omega) \right] \leqslant \varepsilon \quad .$$

On démontre enfin les relations suivantes entre normes et ensembles (γ) ou (σ):

(3) $$\|f\|^2 = \sup_{(\gamma)} |\gamma(0)| = \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\omega)$$

(4) $$\|f_\tau - f\|^2 = \sup_{(\gamma)} 2\, \mathcal{R}[\gamma(0) - \gamma(\tau)] \ .$$

Ce sont des conséquences immédiates du calcul du paragraphe suivant.

(c) Convolutions dans $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$.

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ et soit μ une mesure de Radon dont on note $\mu_{(\Delta)}$ la restriction à l'intervalle Δ . Comme en I-4-(b), on pose $g_{(\Delta)} = f * \mu_{(\Delta)}$ et d'après III-1-(c), on a

$$\lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} |g_{(\Delta)}(t)|^2\, dt = \langle f * \mu_{(\Delta)} \ , \ f * \mu_{(\Delta)} \rangle_{\{T_\nu\}} = \langle f \ , \ f * \mu_{(\Delta)} * \overline{\bar{\mu}_{(\Delta)}} \rangle_{\{T_\nu\}} .$$

La norme de $g_{(\Delta)}$ est donc, d'après I-4-(c),

$$\begin{aligned} \|g_{(\Delta)}\|^2 &= \sup_{(\gamma)} \int_\Delta \int_\Delta d\mu(u)\, d\overline{\mu(v)}\ \gamma(v-u) \\ &= \sup_{(\sigma)} \int_\Delta \int_\Delta d\mu(u)\, d\mu(v) \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega(v-u)\, d\sigma(\omega) \ . \end{aligned}$$

En tenant compte de b-(2), on obtient

$$\|g_{(\Delta)}\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_\Delta \exp(-\,i\omega u)\, d\mu(u) \right|^2 d\sigma(\omega) \ .$$

En prenant pour Δ un intervalle $(A \ , \ B)$ et en faisant tendre A et B vers l'infini :

$$\|f * \mu\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2\, d\sigma(\omega) \ ,$$

W étant la transformée de Fourier de la mesure μ :

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\,i\omega u)\, d\mu(u) \ .$$

(d) Espace $\bigcap_{(\sigma)} L^2(\sigma)$.

On voit dès maintenant qu'il est intéressant d'associer à chaque fonction f de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ l'espace $\cap L^2 = \bigcap_{(\sigma)} L^2(\sigma)$ des classes de fonctions boréliennes de carré intégrable par rapport à toutes les mesures σ et telles que

$$\|W\|_{\cap L^2} = \left[\sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega)|^2\, d\sigma(\omega) \right]^{1/2} < \infty \ .$$

On vérifie facilement que c'est un espace vectoriel sur lequel cette expression définit une norme. On montre qu'il est complet en adaptant la démonstration correspondante pour les espaces $L^2(\sigma)$ (D. S., p. 146).

Si on appelle fonction simple, une fonction borélienne ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on démontre par les méthodes classiques que l'espace vectoriel de ces fonctions est dense dans $\cap L^2$ (D. S., p. 125). Mais, contrairement aux espaces $L^2(\sigma)$, il n'est pas sûr que l'espace des fonctions continues à support compact ou l'espace des fonctions en escalier soient denses dans l'espace $\cap L^2$ (voir 4-(e) et 5-(d)).

2. Fonctionnelles linéaires sur $\mathcal{V}_f$.

Soit f une fonction appartenant à $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ et soit $\mathcal{V}_f$ l'espace vectoriel complet engendré dans $\mathfrak{M}^2$ par l'ensemble $\{f_\tau\}$ des translatées de f.

On va montrer que si ℓ est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{V}_f$, on a

$$\langle \ell , f_h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu(\omega) \tag{1}$$

μ étant une mesure de Radon dont la norme est bornée par $4\|f\| \, \|\ell\|$.

Pour cela, on reconstitue l'espace $\mathcal{V}_f^*$ à partir des fonctionnelles de corrélation (chapitres II et III). En divisant $f(t)$ au besoin par $\|f\|$, on peut supposer d'abord que $\|f\| = 1$.

(a) Soit g une fonction de $\mathcal{V}_f$ telle que $\|g\| \leqslant 1$ et soit ℓ la fonctionnelle de corrélation entre $\mathcal{V}_f$ et $\overline{g}$ définie par la suite $\{T_\nu\}$. On vérifie facilement qu'on a

$$\langle \ell , f_h \rangle = \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f(t+h) \, \overline{g(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu(\omega) \tag{2}$$

avec

$$\mu(\omega) = \frac{1}{4} \left[\sigma_1(\omega) - \sigma_{-1}(\omega) + i\sigma_i(\omega) - i\sigma_{-i}(\omega)\right] , \tag{3}$$

les fonction σ_ε étant définies par la formule :

$$\gamma_\varepsilon(h) = \lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} \left[f(t+h) + \varepsilon g(t+h)\right] \left[\overline{f(t) + \varepsilon g(t)}\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\sigma_\varepsilon(\omega) ,$$

ε prenant les valeurs 1, -1, i et $-i$. μ est une mesure de Radon telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_{\varepsilon}(\omega) \leqslant \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon}\|f + \varepsilon g\|^2 \tag{4}$$
$$\leqslant [\|f\| + \|g\|]^2 \leqslant 4 \quad .$$

(b) Soit maintenant g une fonction quelconque de $\mathfrak{M}^2$ telle que $\|g\| \leqslant 1$. La fonctionnelle de corrélation ℓ entre $\mathcal{V}_f$ et g peut être définie par une suite $\{T'_\nu\}$ caractérisant une norme (N) (II-4-(a)). L'espace $\mathcal{V}_f$ muni de cette norme est un espace préhilbertien dont le produit scalaire est

$$\lim_{T'_\nu\to\infty} \frac{1}{2T'_\nu}\int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} x(t)\ \overline{y(t)}\ dt = \langle y\ ,\ x\rangle_{\{T'_\nu\}} \quad .$$

La fonctionnelle ℓ peut donc être représentée par une suite de Cauchy $\{y^{(n)}\}$ dans cet espace. On peut la choisir telle que $\|y^{(n)}\| \leqslant 1$. Si on pose

$$\gamma^{(n)}(h) = \langle \ell_n\ ,\ f_h\rangle = \lim_{T'_\nu\to\infty} \frac{1}{2T'_\nu}\int_{-T'_\nu}^{T'_\nu} f(t + h)\ \overline{y^{(n)}(t)}\ dt \quad ,$$

on a

$$\gamma(h) = \langle \ell\ ,\ f_h\rangle = \lim_{n} \gamma^{(n)}(h) \quad ,$$

la convergence étant uniforme par rapport à h . D'après (a),

$$\gamma^{(n)}(h) = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h\ d\sigma_{\varepsilon,n}(\omega) = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon}\varepsilon\ \gamma_{\varepsilon,n}(h) \quad . \tag{5}$$

Le théorème de Helly montre qu'on peut choisir la suite ℓ_n de façon que $\{\sigma_{\varepsilon,n}\}$ tende ponctuellement vers une limite σ_ε pour $\varepsilon = 1\ ,\ -1\ ,\ i$ et $-i$. La variation totale de σ_ε est encore bornée par 4 . Si on pose

$$\gamma_\varepsilon(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h\ d\sigma_\varepsilon(\omega) \quad ,$$

le théorème de Helly-Bray (LOEVE [24], p. 190) donne

$$\int_0^u \gamma_\varepsilon(h)\ dh = \lim_{n\to\infty}\int_0^u \gamma_{\varepsilon,n}(h)\ dh \quad .$$

Par suite de la convergence uniforme de $\gamma^{(n)}$ vers γ , on a

$$\int_0^u \gamma(h)\ dh = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon}\int_0^u \gamma_\varepsilon(h)\ dh \quad ,$$

et, les fonctions γ intervenant ici étant continues, on obtient

$$\gamma(h) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon} \gamma_{\varepsilon}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu(h) \tag{6}$$

avec

$$\mu(\omega) = \frac{1}{4} \sum \varepsilon \, \sigma_{\varepsilon}(\omega) \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \leqslant 4 \quad . \tag{7}$$

<u>Toute fonction de l'ensemble total de corrélation</u> $((\Gamma))$ <u>admet donc une représentation de cette forme.</u>

(c) L'ensemble $((L))$ des fonctionnelles de corrélation qu'on vient d'étudier contient tous les points extrémaux de la boule unité s^* de Y_f^* (II-6-(c)). Par suite des propriétés de la boule unité du dual d'un espace de Banach séparable et du théorème de Krein-Milman (D. S., chapitre V), toute fonctionnelle ℓ appartenant à s^* peut être approchée dans la Y_f-topologie de Y_f^* par une suite de combinaisons linéaires convexes $\{\ell_{c,n}\}$ de fonctionnelles de $((L))$. On a :

$$\langle \ell \ , \ f_h \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \ell_{c,n} \ , \ f_h \rangle \quad .$$

Ces fonctions de h étant équicontinues, la convergence est uniforme sur les ensembles compacts de R .

Pour les combinaisons linéaires convexes, on a évidemment une représentation de la forme (6), (7), et un raisonnement analogue à celui qui a été fait en (b) montre que, pour toute fonctionnelle linéaire de norme bornée par 1 , on a encore

$$\langle \ell \ , \ f_h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu(\omega)$$

avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \leqslant 4 \quad .$$

On notera (μ) l'ensemble des mesures μ correspondant aux fonctionnelles de s^* .

(d) Des propriétés linéaires des fonctionnelles, on déduit que si f a pour norme $\|f\|$, et si ℓ est une fonctionnelle linéaire de norme $\|\ell\|$, on a :

$$\langle \ell \ , \ f_h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu(\omega) \qquad \text{avec} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \leqslant 4\|f\| \ \|\ell\| \quad .$$

La correspondance $\ell \longrightarrow \mu$ est une transformation linéaire bornée de l'espace Y_f^* sur un certain sous-espace vectoriel M_f de l'espace $\underset{\sim}{M}$ des mesures de Radon.

(e) Enfin, soit L une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace $\mathfrak{M}^2$. Il lui correspond une fonctionnelle linéaire ℓ de Y_f^* définie par

$$\langle L , x\rangle = \langle \ell , x\rangle \quad \text{quel que soit } x \text{ dans } \mathcal{V}_f .$$

A chaque fonctionnelle L, on peut donc associer une mesure μ telle que

$$\langle L , f_h\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu(\omega) \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d|\mu| \leqslant 4\|f\| \, \|L\| .$$

3. Eléments ergodiques et totalement ergodiques de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$.

(a) Caractérisation de $\mathcal{E}^2 \cap \mathfrak{M}_r^2 = \mathcal{E}_r^2$.

Une fonction f de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ appartient à $\mathcal{E}^2$ si la convolution $a(U) = f \star m(U)$ converge dans $\mathfrak{M}^2$ lorsque U augmente indéfiniment (IV-2). La transformée de Fourier de $m(U)$ est

$$\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} \exp(-\, i\omega t)\, dt = \frac{\sin \omega U}{\omega U} .$$

On aura donc

$$\|a(U) - a(V)\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \omega U}{\omega U} - \frac{\sin \omega V}{\omega V}\right|^2 d\sigma(\omega) .$$

En posant

$$\begin{cases} \sigma_s(\omega) = 0 & \text{pour } x < 0 , \\ \sigma_s(\omega) = \sigma(0_+) - \sigma(0_-) & \text{pour } x \geqslant 0 , \end{cases}$$

et

$$\sigma(\omega) = \sigma_c(\omega) + \sigma_s(\omega) ,$$

on peut aussi écrire :

$$\|a(U) - a(V)\|^2 = \sup_{(\sigma_c)} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \omega U}{\omega U} - \frac{\sin \omega V}{\omega V}\right|^2 d\sigma_c(\omega) .$$

On va déduire de cette formule le résultat suivant :

THÉORÈME I. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ appartienne à $\mathcal{E}_r^2$ est que son ensemble spectral énergétique (σ) soit équicontinu à gauche et à droite pour $\omega = 0$.

1° La condition est suffisante. - Supposons que l'ensemble (σ_c) soit équicontinu à l'origine. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut d'abord choisir $\zeta > 0$ tel que

$$\sup_{(\sigma_c)} \int_{-\zeta}^{\zeta} d\sigma_c(\omega) < \frac{\varepsilon}{2}$$

puis $U_0 > 0$ tel que $\dfrac{2}{\zeta U_0\|f\|^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On obtient alors, pour U et V supérieurs à U_0 , $\|a(U) - a(V)\|^2 < \varepsilon$. La suite $a(U)$ est une suite de Cauchy dans $\mathfrak{M}^2$ et converge vers une fonction $\mathfrak{M}^2$-constante a .

2° La condition est nécessaire. - Supposons que l'ensemble (σ_c) ne soit pas équicontinu à l'origine. On va montrer que la suite $a(U)$ n'est certainement pas une suite de Cauchy. En effet, il existe un nombre $\varepsilon > 0$, une suite $\{\omega_j\}$ de valeurs de ω convergeant vers zéro et une suite $\{\sigma_j\}$ de fonctions de (σ_c) telles que $|\sigma_j(\omega_j) - \sigma_j(0)| > \varepsilon$ quel que soit j . La fonction σ_j étant continue pour $\omega = 0$, il existe toujours un nombre ω'_j compris entre 0 et ω_j et tel que $|\sigma_j(\omega_j) - \sigma_j(\omega'_j)| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Si on pose $U_j = \frac{\pi}{2\omega_j}$ et $V_j = \frac{\pi}{\omega'_j}$, on a

$$\|a(U_j) - a(V_j)\|^2 \geqslant \left|\int_{\omega'_j}^{\omega_j} \left|\frac{\sin \omega U_j}{\omega U_j} - \frac{\sin \omega V_j}{\omega V_j}\right|^2 d\sigma_j(\omega)\right|$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi^2}\left|\int_{\omega'_j}^{\omega_j} d\sigma_j(\omega)\right| > \frac{\varepsilon}{2\pi^2} \quad .$$

Comme U_j et V_j augmentent indéfiniment, la suite $a(U)$ ne peut pas converger dans $\mathfrak{M}^2$. Une condition nécessaire pour que f appartienne à $\mathcal{E}^2_r$ est donc que (σ_c) soit équicontinu pour $\omega = 0$, c'est-à-dire que (σ) soit équicontinu à gauche et à droite de $\omega = 0$.

(b) Caractérisation de $\mathcal{E}^2_t \cap \mathfrak{M}^2_r = \mathcal{E}^2_{tr}$.

Soit $(\sigma) = \{\sigma\}$ l'ensemble spectral énergétique de f . L'ensemble spectral énergétique de la fonction $f_{(\lambda)}$: $t \longrightarrow f(t)\exp(-i\lambda t)$ est l'ensemble translaté $(\sigma)_\lambda = \{\sigma_{-\lambda}\}$. D'après le théorème I, pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}^2_c \cap \mathfrak{M}^2_r$ appartienne à $\mathcal{E}^2_t$, il faut et il suffit que son ensemble spectral énergétique (σ) soit équicontinu à gauche et à droite de chaque point. Cela peut se traduire ainsi:

THÉORÈME II. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $\mathfrak{M}^2_c \cap \mathfrak{M}^2_r$ appartienne à $\mathcal{E}^2_{tr}$ est que son ensemble spectral énergétique (σ) soit compact pour la convergence uniforme.

1° La condition est suffisante. - Supposons que (σ) soit compact pour la convergence uniforme et supposons qu'il ne soit pas équicontinu à droite de $\omega = 0$ par exemple. Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$, une suite $\{\omega_j\}$ de valeurs de ω convergeant vers zéro et une suite $\{\sigma_j\}$ de fonctions de (σ) telles que

$$\sigma_j(\omega_j) - \sigma_j(0_+) > \varepsilon \ .$$

On peut toujours supposer, en considérant au besoin une sous-suite de $\{\sigma_j\}$, que σ_j converge uniformément vers une fonction σ_0 appartenant aussi à (σ) . On a

$$\lim_{j\to\infty} \left|\sigma_0(\omega_j) - \sigma_0(0_+)\right|$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left|\sigma_0(\omega_j) - \sigma_j(\omega_j) + \sigma_j(\omega_j) - \sigma_j(0_+) + \sigma_j(0_+) - \sigma_0(0_+)\right| \geqslant \varepsilon ,$$

ce qui est en contradiction avec la continuité à droite de $\omega = 0$ de la fonction σ_0 . (σ) est donc équicontinu à droite de $\omega = 0$. On démontrerait de même que (σ) est équicontinu à gauche et à droite de chaque valeur de ω .

2° La condition est nécessaire. - Supposons que (σ) ne soit pas compact pour la convergence uniforme. Il existe alors une suite $\{\sigma_j\}$ convergeant vers une fonction σ_0 de (σ) complètement (1-(b)) mais non uniformément. Il existe donc un nombre ε , et une suite $\{\omega_j\}$ de valeurs de ω telles que $|\sigma_j(\omega_j) - \sigma_0(\omega_j)| > \varepsilon$

En utilisant la formule I-b-(2), on voit que, pour j assez grand, ω_j appartient à l'intervalle $(- A(2\varepsilon) , A(2\varepsilon))$. La suite $\{\omega_j\}$ a donc au moins un point d'accumulation ω_0 à distance finie, et la suite σ_j n'est certainement pas équicontinue en ce point. f ne pourrait pas alors appartenir à $\mathcal{E}^2_{tr}$. Donc si f appartient à $\mathcal{E}^2_{tr}$, l'ensemble (σ) est compact.

(c) Norme des coefficients de Fourier généralisés.

Les fonctions d'autocorrélation de $a(U)$ se déduisent de celles de f par la formule :

$$\gamma_U(h) = \frac{1}{4U^2}\int_{-U}^{U}\int_{-U}^{U} \gamma(h - u + v)\, du\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \left|\frac{1}{2U}\int_{-U}^{U} \exp(- i\omega u)\, du\right|^2 d\sigma(\omega) .$$

D'après I-b-(3), la norme de la moyenne généralisée, quand elle existe, est donnée par

$$\|a\|^2 = \lim_{U\to\infty} \|a(U)\|^2 = \lim_{U\to\infty} \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \omega U}{\omega U}\right|^2 d\sigma(\omega) .$$

En décomposant σ comme au paragraphe 3-(a), on a

$$\lim_{U\to\infty} \sup_{(\sigma_c)} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \omega U}{\omega U}\right|^2 d\sigma_c(\omega) = 0$$

car (σ_c) est équicontinu au voisinage de $\omega = 0$. Il reste

$$\|a\|^2 = \lim_{U\to\infty} \sup_{(\sigma_s)} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \omega U}{\omega U}\right| d\sigma_s(\omega) = \sup_{(\sigma)} [\sigma(0_+) - \sigma(0_-)] .$$

Soit $\Delta_\lambda\, \sigma$ le saut de la fonction σ au point $\omega = \lambda$. Ce saut est égal au coefficient de Fourier correspondant à l'exposant λ de la fonction γ . On peut donc écrire :

(1) $$\|a\|^2 = \sup_{(\sigma)} \Delta_0\, \sigma = \sup_{(\gamma)} M_h\, \gamma(h)$$

et en remplaçant f par $f_{(\lambda)}$:

(2) $$\|a_\lambda\|^2 = \sup_{(\sigma)} \Delta_\lambda\, \sigma = \sup_{(\gamma)} M_h\, \gamma(h)\, \exp(-\, i\lambda h)$$

D'après les inégalités du paragraphe IV-4(c), on a

(3) $$|\overline{M}\, f(t)|^2 \leqslant \|a\|^2 = \sup_{(\sigma)} \Delta_0\, \sigma$$

(4) $$|\overline{M}\, f(t)\, \exp(-\, i\lambda t)|^2 \leqslant \|a_\lambda\|^2 = \sup_{(\sigma)} \Delta_\lambda\, \sigma \quad .$$

(d) Fonctions quasi-pseudo-aléatoires.

Pour certaines applications faisant intervenir des propriétés de moyennes ordinaires (BERTRANDIAS [10]), il est intéressant de considérer l'espace des fonctions de $\mathcal{S}^2_{tr}$ ayant tous leurs coefficients de Fourier généralisés nuls. On peut les définir de la façon suivante : Une fonction f de $\mathfrak{M}^2_c \cap \mathfrak{M}^2_r$ sera dite quasi-pseudo-aléatoire si son ensemble d'autocorrélation (γ) est formé de fonctions de moyenne quadratique nulle (ou de manière équivalente : si son ensemble spectral énergétique (σ) est formé de fonctions continues).

- (α) Une fonction quasi-pseudo-aléatoire appartient à $\mathcal{S}^2_{tr}$.

En effet, son ensemble (σ) est équicontinu en chaque point. S'il ne l'était pas en $\omega = \omega_0$ par exemple, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$, une suite $\{\omega_j\}$ de valeurs de ω convergeant vers ω_0 et une suite de fonctions $\{\sigma_j\}$ telles que $|\sigma_j(\omega_j) - \sigma_j(\omega_0)| > \varepsilon$. On peut toujours supposer, en considérant au besoin une sous-suite, que σ_j converge ponctuellement vers une fonction σ_0 appartenant à (σ) . On aurait alors

$$\lim_{j\to\infty} |\sigma_0(\omega_j) - \sigma(\omega_0)| \geqslant \varepsilon$$

et la fonction σ_0 serait discontinue en $\omega = \omega_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

- (β) Les coefficients de Fourier généralisés d'une fonction quasi-pseudo-aléatoire sont tous nuls.

En effet

$$\|a_\lambda\|^2 = \sup_{(\gamma)} M_h\, \gamma(h)\, \exp(-\, i\lambda h) \leqslant \sup_{(\gamma)} M\, |\gamma|^2 = 0 \quad .$$

Inversement, si une fonction de $\mathcal{S}^2_{tr}$ a tous ses coefficients de Fourier généralisés nuls, elle est quasi-pseudo-aléatoire.

- (γ) La moyenne ordinaire et les coefficients de Fourier ordinaires d'une fonction quasi-pseudo-aléatoire sont nuls. Cela résulte des inégalités 1-(b), (3) et (4).

- (δ) Le produit d'une fonction quasi-pseudo-aléatoire par une fonction $\mathfrak{M}^2$-presque périodique appartient à $\mathcal{E}_t^! \cap \mathfrak{M}_r^!$ et a une moyenne ordinaire nulle.

Voir les paragraphes VIII-5, I-3-(b).

- (ε) L'ensemble total de corrélation $((\Gamma))$ d'une fonction quasi-pseudo-aléatoire est formé de fonctions d'Eberlein de moyenne quadratique nulle.

Les fonctions de corrélation sont des fonctions d'Eberlein d'après III-1-(b), et leurs coefficients de Fourier sont tous nuls car, d'après IV-4-(a) :

$$\|a_\lambda\|_2 = 0 = \sup_{((\Gamma))} |M_h\ \gamma(h)\ \exp(-\ i\lambda h)| \quad .$$

- (ζ) L'ensemble des fonctions quasi-pseudo-aléatoires est un sous-espace vectoriel complet de $\mathfrak{M}^2$.

Même démonstration que dans VIII-3-(b).

4. Analyse harmonique des fonctions de $\mathcal{E}_{tr}^2$.

Soit f une fonction de $\mathcal{E}_{tr}^2$. La convolution de f par une mesure de Radon appartient à $\mathcal{Y}_f$. Mais si on considère l'ensemble de toutes ces convolutions, on n'obtiendra pas en général tout l'espace $\mathcal{Y}_f$. On peut donc chercher à prolonger l'opérateur de convolution par des mesures de Radon de manière à avoir une bonne représentation de l'espace $\mathcal{Y}_f$ qui s'obtiendra en fait par l'intermédiaire d'une représentation de $\mathcal{Y}_f$ dans l'espace $\cap\ L^2$.

On définira d'abord sur l'ensemble Σ des réunions finies de semi-intervalles $]a\ ,\ b]$ une mesure spectrale $Y(I)$ à valeurs dans $\mathcal{Y}_f$. On la construira par un procédé de "filtrage" employé par J. BASS [3] dans le cas où (σ) se compose d'une seule fonction (voir 5-(e)) et qui est utilisé dans L^2 pour l'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires du second ordre.

(a) Construction de la mesure spectrale $Y(I)$.

Considérons un semi-intervalle $I =]a\ ,\ b]$ et soit ε un nombre strictement compris entre 0 et $b - a$. Soit $\Phi_\varepsilon(I)$ la fonction continue définie par

$$\begin{cases} \Phi_\varepsilon(\omega\ ,\ I) = 0 & \text{si}\ \ \omega \leqslant a\ \ \text{ou}\ \ \omega \geqslant b + \varepsilon\ , \\ \Phi_\varepsilon(\omega\ ,\ I) = 1 & \text{si}\ \ a + \varepsilon \leqslant \omega \leqslant b\ , \\ \text{et linéaire dans les deux intervalles restants.} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier inverse est

$$\varphi_\varepsilon(t\ ,\ I) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{b+\varepsilon} \Phi_\varepsilon(\omega\ ,\ I)\ \exp i\omega t\ d\omega\quad .$$

Elle appartient à $L'(R)$. On peut donc définir la convolution $Y_\varepsilon(I) = f \star \varphi_\varepsilon(I)$

$$Y_\varepsilon(I) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\ \varphi_\varepsilon(t\ ,\ I)\ du\quad ,$$

et on a, d'après 1-(c) :

$$\|f \star [\varphi_\varepsilon(I) - \varphi'_\varepsilon(I)]\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\varepsilon(\omega\ ,\ I) - \Phi_{\varepsilon'}(\omega\ ,\ I)|^2\ d\sigma(\omega)\quad .$$

Si f appartient à $\mathcal{E}^2_{tr}$, l'ensemble (σ) est équicontinu à droite de $\omega = a$ et $\omega = b$. Par conséquent, lorsque ε et ε' tendent vers zéro simultanément et indépendamment, le second membre de cette égalité tend vers zéro. La fonction $f \star \varphi_\varepsilon(t\ ,\ I)$ satisfait une condition de Cauchy en ε et converge vers une fonction de $\mathcal{Y}_f$:

$$Y(I) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{M}^2\ f \star \varphi_\varepsilon(I)\quad .$$

Si les N semi-intervalles $I_1\ ,\ I_2\ ,\ \ldots\ ,\ I_N$ sont disjoints, on pose

$$I = \bigcup_{n=1}^{N} I_n \qquad \text{et} \qquad \varphi_\varepsilon(t\ ,\ I) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_\varepsilon(t\ ,\ I_n)$$

$$Y(I) = \sum_{n=1}^{N} Y(I_n) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{M}^2\ f(t) \star \varphi_\varepsilon(t\ ,\ I)\quad .$$

On a ainsi défini une fonction $Y(I)$ sur le corps Σ des réunions finies de semi-intervalles. Cette fonction est finiment additive sur Σ .

(b) <u>Caractérisation faible de la mesure spectrale</u> $Y(I)$.

Soit ℓ une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{Y}_f$ et soit μ la mesure qui lui est associée (paragraphe 2) :

$$\langle \ell\ ,\ f_h\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h\ d\mu(\omega)\quad .$$

I étant un ensemble de Σ , on a :

$$\langle \ell\ ,\ Y(I)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \langle \ell\ ,\ f \star \varphi_\varepsilon(I)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ell\ ,\ f_{-u}\rangle\ \varphi_\varepsilon(u\ ,\ I)\ du$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega u)\ \varphi_\varepsilon(u\ ,\ I)\ du\ d\mu(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\omega\ ,\ I)\ d\mu(\omega)$$

$$\langle \ell\ ,\ Y(I)\rangle = \int_I d\mu(\omega)\quad .$$

La correspondance $\ell \longrightarrow \int_I d\mu(\omega)$ définit une fonctionnelle linéaire sur Y_f^*, bornée par $4\|f\|$ d'après 2-(d). Cette fonctionnelle est un élément de Y_f^{**} qui, ici, peut être représenté par l'élément $Y(I)$ qu'on vient de définir. Celui-ci est donc caractérisé de manière unique par la condition :

$$\langle \ell \, , \, Y(I) \rangle = \int_I d\mu(\omega) \quad \text{quelle que soit} \quad \ell \in Y_f^* \ .$$

(c) <u>Propriétés de la mesure spectrale</u> $Y(I)$.

Soient f' et f'' deux fonctions de $\mathcal{S}_{tr}^2$. Considérons une suite $\{T_\nu\}$ telle que

$$\lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f'(t+h)\, \overline{f''(t)}\, dt = \langle f'' \, , \, f'_h \rangle_{\{T_\nu\}} = \gamma(h) \ .$$

La fonction f'' et la suite $\{T_\nu\}$ définissent sur $Y_{f'}$, une fonctionnelle de corrélation ℓ_2 . De même, f' et $\{T_\nu\}$ définissent sur $Y_{f''}$ une fonctionnelle de corrélation ℓ_1 . On peut donc écrire de manière symétrique :

$$\lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} f'(t+h)\, \overline{f''(t+k)}\, dt = \langle f''_k \, , \, f'_h \rangle_{\{T_\nu\}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega(h-k)\, d\mu(\omega) \ .$$

Soient $Y'(I)$ et $Y''(I)$ les mesures spectrales de f' et f'' respectivement. $\chi(I)$ étant la fonction caractéristique de l'ensemble I , on a

$$\langle \ell_2 \, , \, Y'(t \, , \, I_1) \rangle = \int_{I_1} \exp(-i\omega k)\, d\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega k)\, \chi(I_1)\, d\mu(\omega)$$

$$= \langle f''_k \, , \, Y'(I_1) \rangle_{\{T_\nu\}} \ .$$

En intervertissant les rôles de $Y'(I_1)$ et f''_k , on a

$$\langle Y'(I_1) \, , \, f''_k \rangle_{\{T_\nu\}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega k\, \chi(I_1)\, d\overline{\mu(\omega)}$$

et donc

$$\langle Y'(I_1) \, , \, Y''(I_2) \rangle_{\{T_\nu\}} = \int_{I_2} \chi(I_1)\, d\overline{\mu(\omega)} = \int_{I_1 \cap I_2} d\overline{\mu(\omega)} \ ,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} Y'(t \, , \, I_1)\, \overline{Y''(t \, , \, I_2)}\, dt = \int_{I_1 \cap I_2} d\mu(\omega) \ .$$

On déduit en particulier de cette formule :

1° Une relation d'orthogonalité. - Si I_1 et I_2 sont disjoints :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} Y'(t\ ,\ I_1)\ \overline{Y''(t\ ,\ I_2)}\ dt = 0 \quad .$$

2° La norme de la mesure spectrale. - Si $f' = f'' = f$ et $I_1 = I_2 = I$:

$$\lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} |Y(t\ ,\ I)|^2\ dt = \int_I d\sigma(\omega)$$

$$\|Y(I)\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_I d\sigma(\omega) \quad .$$

3° Une relation entre les ensembles (μ) et (σ). - La norme pouvant être définie à partir des fonctionnelles linéaires de norme 1 (2-(c)), on a

$$\|Y(I)\|^2 = \sup_{s^*} |\langle \ell\ ,\ Y(I)\rangle|^2 = \sup_{(\mu)} \left|\int_I d\mu(\omega)\right|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_I d\sigma(\omega) \quad .$$

(d) Intégration par rapport à $Y(I)$.

Soit S une fonction en escalier, c'est-à-dire une fonction ayant des valeurs constantes $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_j$ sur un nombre fini de semi-intervalles $I_1\ ,\ I_2\ ,\ \ldots\ ,\ I_j$ formant une partition de R . Considérons la fonction $\mathcal{Y}_f$ définie par

$$g_S = \sum_{j=1}^{J} a_j\ Y(I_j) \quad .$$

D'après les relations d'orthogonalité de (b), on a :

$$\|g_S\|^2 = \lim_{T\to\infty} \sup \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{j=1}^{J} |a_j|^2\ |Y(t\ ,\ I_j)|^2\ dt$$

qui peut s'évaluer comme au paragraphe 1-(c) :

$$\|g_S\|^2 = \sup_{(\sigma)} \sum_{j=1}^{J} |a_j|^2 \int_{I_j} d\sigma(\omega)$$

$$= \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\ d\sigma(\omega) = \|S\|^2_{\cap L^2} \quad .$$

Les fonctions en escaliers forment un sous-espace vectoriel de $\cap\ L^2$, et cette formule établit un isomorphisme isométrique entre ce sous-espace et le sous-espace formé dans $\mathcal{Y}_f$ par les fonctions g_S . Par conséquent, si on considère une fonction C qui est limite dans $\cap\ L^2$ d'une suite $\{S_n\}$ de fonctions en escalier, on peut lui associer la fonction g_C de $\mathcal{Y}_f$ définie par

$$g_C = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}^2\ g_{S_n} \quad .$$

Cette fonction ne dépend que de C et non de la suite particulière $\{S_n\}$ convergeant vers C .

La fonction g_S peut être considérée comme l'intégrale de la fonction en escalier S par rapport à la mesure vectorielle $Y(I)$. On peut aussi dire que g_C est l'intégrale de C par rapport à $Y(I)$, et on la notera

$$g_C = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\ dY(\omega) \quad .$$

Cette intégrale vectorielle a bien les propriétés linéaires d'une intégrale. Si C est limite dans $\cap\, L^2$ d'une suite de fonctions en escalier, on dira que C est intégrable par rapport à $Y(I)$. On voit immédiatement que les fonctions continues à support compact ou, à cause de 1-(b)(2), les fonctions continues et bornées sont intégrables par rapport à $Y(I)$.

(e) <u>Caractérisation faible de l'intégrale par rapport à</u> $Y(I)$.

On peut procéder comme au paragraphe (b). Soit ℓ une fonctionnelle linéaire continue sur V_f et μ la mesure qui lui est associée. On a :

$$\langle \ell\ ,\ g_{S_n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\ d\mu(\omega) \quad .$$

En passant à la limite dans V_f et dans $\cap\, L^2$:

$$\langle \ell\ ,\ g_C \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\ d\mu(\omega) \quad .$$

La correspondance $\ell \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\ d\mu(\omega)$ est une fonctionnelle linéaire continue sur V_f^* . La condition

$$\langle \ell\ ,\ g_C \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\ d\mu(\omega) \qquad \text{quelle que soit } \ell \in V_f^*$$

peut servir à caractériser l'intégrale g_C de C par rapport à $Y(I)$ dont on sait déjà qu'elle existe.

On déduit alors immédiatement de la formule de définition de μ :

$$\langle \ell\ ,\ f_h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h\ d\mu(\omega)$$

que f_h est l'intégrale de $\exp i\omega h$ par rapport à $Y(I)$:

$$f_h = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h\ dY(\omega)$$

et, en particulier

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} dY(\omega) \quad .$$

Si w est une mesure de Radon, sa transformée de Fourier W est continue et bornée, donc intégrable par rapport à $Y(I)$. On a :

$$\langle \ell , f * w \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ell , f_{-u} \rangle \, dw(u) = \iint \exp(- i\omega u) \, d\mu(\omega) \, dw(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \, d\mu(\omega) \quad .$$

Donc

$$f * w = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \, dY(\omega) \quad .$$

Cette formule montre en quel sens on peut dire que la transformation $f \longrightarrow g_C$ définie par

$$g_C = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \, dY(\omega)$$

donne une généralisation de la convolution de f par une mesure de Radon.

En résumé, cette formule met en correspondance isométrique tout l'espace $\mathcal{V}_f$ avec le sous-espace fermé engendré dans $\cap L^2$ par les fonctions en escalier, la correspondance étant telle que

$$f \longrightarrow 1 \ , \qquad f_\tau \longrightarrow \exp i\omega\tau$$

$$Y(I) \longrightarrow \chi(I) \ , \qquad f * w \longrightarrow W \ .$$

Il est facile de voir que le sous-espace de $\cap L^2$ considéré peut être engendré

- soit par les fonctions en escalier ;
- soit par les fonctions continues à support compact ;
- soit par les fonctions continues et bornées ;
- soit par les fonctions $\{\exp i\omega h\}$, h variant de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire par les polynômes trigonométriques ordinaires.

(f) Relations bilinéaires entre deux sous-espaces $\mathcal{V}_f$ de $\mathcal{E}^2_{tr}$.

En reprenant les notations du paragraphe 4-(c), soient f' et f'' deux fonctions de $\mathcal{E}^2_{tr}$, C' et C'' deux fonctions intégrables respectivement par rapport à $Y'(I)$ et $Y''(I)$. Si on pose

$$g' = \int C'(\omega) \, dY'(\omega) \ , \qquad g'' = \int C''(\omega) \, dY''(\omega) \ ,$$

on trouve par le même calcul qu'en 4-(c) :

$$\lim_{T_\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{-T_\nu}^{T_\nu} g'(t) \, \overline{g''(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} C'(\omega) \, \overline{C''(\omega)} \, d\mu(\omega)$$

et on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} C'(\omega) \, \overline{C''(\omega)} \, d\mu(\omega) \right| \leqslant \|C'\|_{\cap_1 L^2} \, \|C''\|_{\cap_2 L^2} \ .$$

5. Prolongement de la mesure spectrale $Y(I)$. Espace $\mathcal{K}^2$.

On va maintenant chercher dans quels cas on peut obtenir une représentation de Y_f sur tout l'espace $\cap L^2$, c'est-à-dire dans quel cas le symbole

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, dY(\omega)$$

peut avoir un sens lorsque C est une fonction quelconque de $\cap L^2$.

Pour cela, il faut étendre la mesure vectorielle $Y(I)$ finiment additive sur l'ensemble Σ des réunions finies de semi-intervalles en une mesure dénombrablement additive sur le σ-corps engendré par les semi-intervalles, c'est-à-dire sur le corps de Borel B de R .

(a) Définition de la mesure spectrale $Y(E)$.

On peut essayer de faire ce prolongement au moyen de la caractérisation faible donnée au paragraphe 4-(b). En effet, si ℓ est une fonctionnelle linéaire continue sur Y_f , la mesure de Radon μ qui lui est associée est dénombrablement additive sur le corps de Borel et, si E est un ensemble de Borel, l'intégrale $\int_E d\mu(\omega)$ est parfaitement définie quelle que soit la fonctionnelle ℓ . La correspondance $\ell \longrightarrow \int_E d\mu(\omega)$ définit une fonctionnelle linéaire bornée sur Y_f^* et donc un élément de Y_f^{**} . Si cet élément peut se représenter par un élément de Y_f, on l'appellera $Y(E)$, et il sera défini par

$$\langle \ell \, , \, Y(E)\rangle = \int_E d\mu(\omega) \qquad \text{quelle que soit } \ell \in Y_f^* \ ,$$

ou encore, en se plaçant dans $\mathfrak{M}^2$ (2-(e)) :

$$\langle L \, , \, Y(E)\rangle = \int_E d\mu(\omega) \qquad \text{quelle que soit } L \in \mathfrak{M}^{2*} \ .$$

Une question qui se pose alors est de savoir s'il existe des fonctions f de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ telles que la mesure vectorielle $Y(E)$ soit définie quel que soit l'ensemble de Borel E . On appellera $\mathcal{K}^2$ l'ensemble de ces fonctions.

(b) Caractérisation des fonctions de $\mathcal{K}^2$.

On peut caractériser les fonctions de $\mathcal{K}^2$ sur leurs ensembles (σ) ou (γ) :

THÉORÈME III. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ appartienne à $\mathcal{K}^2$ est que son ensemble spectral énergétique (σ) soit faiblement compact dans l'espace $\underset{\sim}{M}$ (ou que son ensemble d'autocorrélation (γ) soit faiblement compact dans l'espace $\underset{\sim}{F}$).

1° La condition est nécessaire. - Si f est une fonction de $\mathcal{K}^2$, la mesure vectorielle $Y(E)$ qui lui est associée est faiblement dénombrablement additive sur B

(D. S., p. 318) car les mesures μ sont dénombrablement additives sur B . D'après un théorème de Pettis (D. S., p. 318), $Y(E)$ est aussi dénombrablement additive sur B et l'ensemble (μ) des mesures $\{\mu\}$ correspondant aux fonctionnelles linéaires bornées par 1 est relativement faiblement compact dans $\underset{\sim}{M}$ (D. S., p. 319) Comme les fonctions spectrales énergétiques σ sont définies à partir des fonctionnelles de corrélation entre Y_f et $\bar{f}$, l'ensemble (σ) est aussi un ensemble relativement faiblement compact dans $\underset{\sim}{M}$. Enfin, (σ) étant compact pour la convergence complète (I-(b)), les fonctions appartenant à la fermeture faible de (σ) appartiennent à (σ) (D. S., p. 308) qui est donc bien faiblement compact dans $\underset{\sim}{M}$.

2° La condition est suffisante. - Supposons que (σ) soit faiblement compact dans $\underset{\sim}{M}$. Il existe alors (D. S., p. 341) une mesure λ telle que

$$\lim_n \int_{E_n} d\lambda(\omega) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \lim_n \int_{E_n} d\sigma(\omega) = 0$$

uniformément sur (σ) . On en déduit d'abord que (σ) est équicontinu à gauche et à droite de chaque point et donc que f appartient à $\mathcal{E}^2_{tr}$ (4-(b)). Par suite, on peut construire la mesure spectrale $Y(I)$ sur l'ensemble Σ .

Cette mesure peut être étendue à l'ensemble B des ensembles de Borel par les méthodes classiques (D. S., p. 132) : étant donné un ensemble de Borel E , on peut considérer les suites décroissantes $\{I_n\}$ d'ensembles de Σ contenant E et telles que

$$\lim_n \int_{I_n} d\lambda(\omega) = \int_E d\lambda(\omega) \quad .$$

D'après 4-(c), on a :

$$\|Y(I_n) - Y(I_m)\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_{I_n - I_m} d\sigma(\omega) \ , \qquad (n \geqslant m) \quad .$$

Les suites $\{Y(I_n)\}$ sont des suites de Cauchy convergeant dans Y_f vers une limite $Y(E)$ qui est indépendante de la suite I_n considérée. Comme on a :

$$\langle \ell \ , Y(E)\rangle = \lim_n \langle \ell \ , Y(I_n)\rangle = \lim_n \int_{I_n} d\mu(\omega) = \int_I d\mu(\omega) \quad ,$$

la fonction f appartient bien à l'espace $\mathcal{K}^2$.

(c) Propriétés de l'espace $\mathcal{K}^2$.

L'espace $\mathcal{K}^2$ est un sous-espace vectoriel complet de $\mathcal{S}^2 \cap \mathfrak{M}^2_r = \mathcal{S}^2_r$.

En effet, soient f' et f'' deux fonctions de $\mathcal{K}^2$ dont les mesures spectrales sont respectivement $Y'(E)$ et $Y''(E)$. Si L est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathfrak{M}^2$, il lui correspond deux mesures μ' et μ'' telles que (2-(e)) :

$$\langle L , f_h' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu'(\omega) \quad , \quad \langle L , f_h'' \rangle = \int \exp i\omega h \, d\mu''(\omega) \quad .$$

On a donc :

$$\langle L , f_h' + f_h'' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d[\mu'(\omega) + \mu''(\omega)] \quad .$$

Or

$$\langle L , Y'(E) + Y''(E) \rangle = \langle L , Y'(E) \rangle + \langle L , Y''(E) \rangle$$
$$= \int_E d[\mu'(\omega) + \mu''(\omega)] \text{ quel que soit } E \quad .$$

$Y'(E) + Y''(E)$ peut donc être considérée comme la mesure spectrale associée à la fonction $f = f' + f''$ qui, par suite, appartient aussi à $\mathfrak{K}^2$. D'autre part, si α est un nombre complexe, on peut associer à $\alpha f(t)$ la mesure $\alpha Y(E)$: $\mathfrak{K}^2$ est bien un espace vectoriel.

C'est un sous-espace de $\mathfrak{F}_r^2 = \mathfrak{F}^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$: d'après 2-(b) et le théorème III, $((\Gamma))$ est un ensemble faiblement compact dans $\underset{\sim}{F}$ et donc dans $\underset{\sim}{C}(R)$, car la transformation identique de $\underset{\sim}{F}$ dans $\underset{\sim}{C}(R)$ est faiblement continue (I-4-(a)) : le théorème du paragraphe VI-2 montre alors qu'une fonction de $\mathfrak{K}^2$ est $\mathfrak{M}^2$-faiblement-presque-périodique.

Enfin $\mathfrak{K}^2$ est un espace complet : si $\{f^{(n)}\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathfrak{M}^2$ de fonctions de $\mathfrak{K}^2$ convergeant vers une fonction f, on va montrer que f appartient à $\mathfrak{K}^2$. La suite $\{Y^{(n)}(E)\}$ des mesures spectrales des fonctions $f^{(n)}$ est, pour chaque E, une suite de Cauchy car

$$|\langle L , Y^{(n)}(E) - Y^{(m)}(E) \rangle| \leqslant 4\|L\| \, \|f^{(n)} - f^{(m)}\| \quad .$$

La suite des mesures $\{\mu^{(n)}\}$, définies par la fonctionnelle L,

$$\langle L , f_h^{(n)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu^{(n)}(\omega) = \gamma^{(n)}(h)$$

est telle que la limite

$$\lim_n \int_E d\mu^{(n)}(\omega) = \lim_n \langle L , Y^{(n)}(E) \rangle$$

existe quel que soit l'ensemble de Borel E. La suite $\{\mu^{(n)}\}$ est faiblement convergente dans $\underset{\sim}{M}$ vers une limite $\mu^{(0)}$ (D. S., p. 308) et, par conséquent, la suite $\{\gamma^{(n)}\}$ converge faiblement dans $\underset{\sim}{F}$ vers $\gamma^{(0)}$. Or $\{\gamma^{(n)}\}$ converge uniformément vers la fonction γ :

$$\gamma(h) = \langle L , f_h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp i\omega h \, d\mu(\omega) \quad ,$$

qui coïncide donc avec $\gamma^{(0)}$. Par suite

$$\langle L\ ,\ Y(E)\rangle = \int_E d\mu^{(0)}(\omega) = \int_E d\mu(\omega) \quad ,$$

et la fonction limite f appartient bien aussi à $\mathcal{H}^2$.

(d) Intégration par rapport à $Y(E)$.

Pour la mesure spectrale $Y(E)$ associée à une fonction f de $\mathcal{H}^2$, on peut faire les mêmes calculs que ceux qui ont été faits en 4-(c) pour la mesure $Y(I)$ associée à une fonction de $\mathcal{E}^2_{tr}$. En particulier, les relations d'orthogonalité sont valables et l'expression de la norme est analogue :

$$\|Y(E)\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_E d\sigma(\omega) \quad .$$

L'intégration par rapport à la mesure $Y(E)$ peut donc être définie de manière parallèle.

Soit S une fonction simple, c'est-à-dire une fonction ayant des valeurs constantes a_1 , a_2 , ... , a_J sur un nombre fini d'ensembles de Borel $E_1, E_2, \dots, E_J$ formant une partition de R . Considérons la fonction g_S de $\mathcal{Y}_f$ définie par

$$g_S = \sum_{j=1}^{J} a_j\ Y(E_j) \quad .$$

D'après les relations d'orthogonalité, on a (4-(d)) :

$$\|g_S\|^2 = \sup_{(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2\ d\sigma(\omega) = \|S\|^2_{\cap L^2} \quad .$$

Les fonctions simples forment un sous-espace vectoriel de $\cap\ L^2$ dense dans tout $\cap\ L^2$ (1-(d)). On peut donc définir par passage à la limite l'intégrale d'une fonction quelconque C de $\cap\ L^2$ par rapport à la mesure $Y(E)$: C est la limite dans $\cap\ L^2$ d'une suite de fonctions simples $\{S_n\}$ (La suite des fonctions $\{g_{S_n}\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{Y}_f$). Elle converge vers une fonction g_C qui ne dépend pas de la suite des fonctions $\{S_n\}$ convergeant vers C .

On pourra donc poser :

$$g_C = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\ dY(\omega)$$

et on a

$$\|g_C\| = \|C\|_{\cap L^2} \quad .$$

Cette formule établit un isomorphisme isométrique entre les espaces de Banach $\cap\ L^2$ et $\mathcal{Y}_f$, la correspondance étant telle que

$$f \longrightarrow 1 \;, \qquad f_\tau \longrightarrow \exp i\omega\tau \;,$$
$$Y(E) \longrightarrow \chi(E) \;, \qquad f \star \omega \longrightarrow W \;.$$

On peut aussi, comme au paragraphe 4-(e), donner une définition faible de l'intégrale par rapport à $Y(E)$: si C est une fonction quelconque de $\cap L^2$, son intégrale g_C par rapport à la mesure spectrale $Y(E)$ est parfaitement définie par la condition :

$$\langle \ell \;,\; g_C \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, d\mu(\omega) \qquad \text{quelle que soit } \ell \in Y_f^* \;,$$

ou encore, en se plaçant dans $\mathfrak{M}^2$:

$$\langle L \;,\; g_C \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, d\mu(\omega) \qquad \text{quelle que soit } L \in \mathfrak{M}^{2*} \;.$$

En comparant avec les résultats de 4-(e), on voit que les espaces vectoriels suivants sont denses dans <u>tout</u> $\cap L^2$:

- l'espace des fonctions en escalier,
- l'espace des fonctions continues à support compact (ou bornées),
- l'espace des polynômes trigonométriques.

D'une manière générale, on peut démontrer que ces espaces sont des sous-espaces denses de $\bigcap_{(\sigma)} L^2(\sigma)$ si, et seulement si, (σ) est relativement faiblement compact dans $\underset{\sim}{M}$.

(e) <u>Fonctions pseudo-aléatoires</u>.

La définition initiale donnée par J. BASS [1] des fonctions pseudo-aléatoires est la suivante : ce sont des fonctions f complexes, bornées, nulles pour $t < 0$ et dont la fonction de corrélation

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t + h)\, \overline{f(t)}\, d\mu$$

existe, est continue, n'est pas nulle pour $h = 0$, et tend vers zéro à l'infini.

On peut donner une définition un peu plus générale conservant les mêmes propriétés à ces fonctions (BERTRANDIAS [10]) : fonctions appartenant à $\mathfrak{M}^2$ et dont la fonction de corrélation existe, est continue pour $h = 0$, et a une moyenne quadratique nulle.

Ces fonctions sont continues en norme (1-(b)-(4)) :

$$\|f_\tau - f\|^2 = 2\, \mathcal{R}\, [\gamma(0) - \gamma(\tau)] \leq 2|\gamma(0) - \gamma(\tau)|$$

et sont $\mathfrak{M}^2$-régulières (I-2-(c)). L'ensemble (σ) existe et contient une seule fonction : $\cap L^2$ se réduit à un seul espace $L^2(\sigma)$. <u>Les fonctions pseudo-aléatoi-</u>

res appartiennent donc à $\mathcal{K}^2$.

D'autre part, leurs coefficients de Fourier généralisés sont nuls (3-(d)). Ce sont donc aussi des fonctions $\mathfrak{M}^2$-pseudo-aléatoires (VIII-4-(a)).

6. Fonctions $\mathfrak{M}^2$-presque-périodiques.

(a) Caractérisation des fonctions $\mathfrak{M}^2$-presque-périodiques.

On sait que les fonctions de $\mathcal{P}^2$ sont $\mathfrak{M}^2$-régulières (VII-5). On peut leur associer un ensemble d'autocorrélation (γ) et les caractériser au moyen de cet ensemble :

THÉORÈME IV. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $\mathfrak{M}_c^2 \cap \mathfrak{M}_r^2$ appartienne à $\mathcal{P}^2$ est que son ensemble d'autocorrélation (γ) soit un ensemble fortement compact dans $\underset{\sim}{C}(R)$ de fonctions de Bohr.

La condition est nécessaire d'après VII-3, théorème II. Pour montrer qu'elle est suffisante, on démontre l'existence de presque-périodes (VII-3, théorème I). L'ensemble (γ) est uniformément presque-périodique (V-A-3-(a)), c'est-à-dire qu'étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe une suite relativement dense de nombres τ tels que $\sup\limits_{(\gamma)} \sup\limits_{h} |\gamma(h) - \gamma(h + \tau)| < \varepsilon$. Or on a (1-(b)-(4)) :

$$\|f_\tau - f\|^2 = 2 \sup_{(\gamma)} \mathcal{R}[\gamma(0) - \gamma(\tau)] \leqslant 2 \sup_{(\gamma)} |\gamma(0) - \gamma(\tau)| \quad .$$

En choisissant les mêmes valeurs pour τ , on a $\|f_\tau - f\|^2 \leqslant 2\varepsilon$ pour une suite relativement dense, f est donc bien une fonction $\mathfrak{M}^2$-presque-périodique.

(b) Les fonctions $\mathfrak{M}^2$-presque-périodiques sont des fonctions de $\mathcal{K}^2$.

Si on considère un polynôme trigonométrique généralisé

$$p(t) = \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda_1} k_\lambda(t) \exp i\lambda t \qquad k_\lambda \in \mathcal{K}^2 \quad ,$$

il est facile de voir qu'il appartient à $\mathcal{K}^2$; sa mesure spectrale est donnée par

$$Y(t\ , E) = \sum_{\lambda\in E} k_\lambda(t) \exp i\lambda t \quad .$$

Comme l'espace $\underset{\sim}{P}^2$ des polynômes trigonométriques généralisés est dense dans $\mathcal{P}^2$ (VII-5), et comme $\mathcal{K}^2$ est complet (4-(d)), on en déduit que les fonctions $\mathfrak{M}^2$-presque-périodiques sont des fonctions de $\mathcal{K}^2$: $\mathcal{P}^2 \subseteq \mathcal{K}^2$. D'après 5-(e), l'inclusion est stricte.

(c) <u>Séries de Fourier des fonctions $\mathcal{M}^2$-presque-périodiques</u>.

- (α) <u>Inégalité de Bessel</u>. - Soit f une fonction $\mathcal{M}^2$-presque-périodique. La fonction $|f|^2 = f.\overline{f}$ appartient à $\mathcal{P}^1$ (VII-6-(d)). D'après III-1-(c),

$$\langle 1 \ , \ |f|^2 \star m(U)\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle 1 \star m(U) \ , \ |f|^2\rangle_{\{T_\nu\}} = \langle 1 \ , \ |f|^2\rangle_{\{T_\nu\}} \quad ,$$

$$\| \, |f|^2 \star m(U)\|_1 = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt = \| \, |f|^2\|_1 = \|f\|_2^2 \quad .$$

Il en résulte que

$$\|\underset{g}{M} \ |f|^2\|_1 = \| \, |f|^2\|_1 = \|f\|_2^2 \quad . \tag{1}$$

Soient a_λ les coefficients de Fourier généralisés de f. Les fonctions $|a_\lambda|^2$ sont des fonctions $\mathcal{M}^1$-constantes (IV-1-(c)-(γ)). Si Λ_0 est un ensemble fini de valeurs de λ, on a :

$$\underset{g}{M} \ |f(t) - \sum_{\Lambda_0} a_\lambda(t) \exp i\lambda t|^2 = \underset{g}{M} \ |f|^2 - \sum_{\Lambda_0} |a_\lambda|^2 \qquad (\text{dans } \mathcal{M}^1). \tag{2}$$

On en déduit une inégalité de Bessel :

$$\|\sum_{\Lambda_0} |a_\lambda|^2\|_1 \leqslant \|\underset{g}{M} \ |f|^2\|_1 = \|f\|_2^2 \quad .$$

- (β) <u>Relation de Parseval</u>. - On va d'abord montrer que la série de Fourier d'une fonction f de $\mathcal{P}^2$ converge dans $\mathcal{M}^2$ vers f.

On peut écrire la somme partielle $\sum_{\Lambda_0} a_\lambda(t) \exp i\lambda t$ sous la forme

$$\sum_{\Lambda_0} a_\lambda \exp i\lambda t = f \mathbin{\hat{\star}} \sum_{\Lambda_0} \exp i\lambda t \quad .$$

Soit γ une fonction d'autocorrélation de f obtenue à partir d'une suite $\{T_\nu\}$ et dont les coefficients de Fourier sont les constantes ordinaires α_λ. D'après III-1-(c) et IV-6, on a

$$\begin{aligned}\langle f - f \mathbin{\hat{\star}} \sum_{\Lambda_0} \exp i\lambda t \ , \ f_h - f_h \mathbin{\hat{\star}} \sum_{\Lambda_0} \exp i\lambda t\rangle_{\{T_\nu\}} &= \gamma(h) - \gamma \mathbin{\hat{\star}} \sum_{\Lambda_0} \exp i\lambda h \\ &= \gamma(h) - \sum_{\Lambda_0} \alpha_\lambda \exp i\lambda h \quad .\end{aligned}$$

D'après la compacité faible dans $\underset{\sim}{M}$ de l'ensemble (σ), les quantités

$$\sup_h |\gamma(h) - \sum_{\Lambda_0} \alpha_\lambda \exp i\lambda h| = \sum_{\Lambda-\Lambda_0} \alpha_\lambda$$

tendent vers zéro uniformément sur (γ) lorsque Λ_0 tend vers Λ et comme

$$\|f - \sum_{\Lambda_0} a_\lambda \exp i\lambda t\|^2 = \sup_{(\gamma)} \|\gamma(0) - \sum_{\Lambda_0} \alpha_\lambda\|_{\underset{\sim}{C}}$$

$$= \sup_{(\gamma)} \sum_{\Lambda-\Lambda_0} \alpha_\lambda \ ,$$

la série $\sum\limits_{\Lambda_0} a_\lambda \exp i\lambda t$ tend dans $\mathfrak{M}^2$ vers f . D'après les inégalités (1) et (2) la série $\sum\limits_{\Lambda_0} |a_\lambda|^2$ tend dans $\mathfrak{M}^1$ vers $\underset{g}{M} |f|^2$:

$$\sum_{\Lambda} |a_\lambda|^2 = \underset{g}{M} |f|^2 \qquad \text{(relation de Parseval).}$$

– (γ) <u>Théorème de Fischer-Riesz-Besicovitch</u>. – Soit $\{a_\lambda\}$ un ensemble au plus dénombrable de fonctions de $\mathcal{K}^2$ telles que la série $\sum\limits_\lambda |a_\lambda|^2$ converge dans $\mathcal{K}^1$. D'après les inégalités (1) et (2), on voit que la série $\sum\limits_\lambda a_\lambda \exp i\lambda t$ converge dans $\mathfrak{M}^2$ vers une fonction de $\mathcal{P}^2$ qui admet les fonctions a_λ comme coefficients de Fourier généralisés.

On peut résumer ces résultats sous la forme suivante :

<u>Si</u> f <u>est une fonction</u> $\mathfrak{M}^2$-<u>presque-périodique, ses coefficients de Fourier généralisés sont tels que</u>

$$\sum_{\Lambda} |a_\lambda|^2 = \underset{g}{M} |f|^2 \qquad\qquad (\text{dans } \mathfrak{M}^1)$$

$$\|\sum_{\Lambda} |a_\lambda|^2\|_1 = \|\underset{g}{M} |f|^2\|_1 = \|f\|_2^2 \ .$$

<u>et la série de Fourier converge en norme dans</u> $\mathfrak{M}^2$ <u>vers</u> f .

<u>Inversement, à toute série</u> $\sum\limits_\Lambda a_\lambda \exp i\lambda t$ <u>à coefficients dans</u> $\mathcal{K}^2$ <u>telle que</u> $\sum\limits_\Lambda |a_\lambda|^2$ <u>converge dans</u> $\mathcal{K}^1$, <u>il correspond une fonction</u> $\mathfrak{M}^2$-<u>presque-périodique l'admettant pour série de Fourier.</u>

–:–:–:–

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (Jean). - Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 1-64.

[2] BASS (Jean). - Les fonctions pseudo-aléatoires. - Paris, Gauthier-Villars, 1962 (Mémorial des Sciences mathématiques, 153).

[3] BASS (Jean). - Espaces de Besicovitch, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 39-61.

[4] BASS (Jean). - Quelques propriétés linéaires des fonctions pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 266-268.

[5] BASS (Jean). - Fonctions presque-périodiques, fonctions pseudo-aléatoires, moyennes de fonctions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2501-2503.

[6] BASS (Jean). - Transformées de Fourier des fonctions pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 3072-3074.

[7] BASS (Jean). - Espaces vectoriels de fonctions pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 2353-2355.

[8] BASS (Jean) et VO-KHAC Khoan. - Limite d'une suite de fonctions pseudo-aléatoires dérivée d'une fonction pseudo-aléatoire, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 3346-3348.

[9] BASS (Jean). - Suites stationnaires dans l'espace d'Hilbert ; fonctions spectrales dans les espaces P , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 1432-1434.

[10] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1 [1962. Nijenrode], Comp. Math., t. 16, 1964, p. 23-28.

[11] BERTRANDIAS (Jean-Paul) et BASS (Jean). - Moyennes de sommes trigonométriques et fonctions d'autocorrélation, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 2457-2461.

[12] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Formation d'une classe de fonctions pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 513-515.

[13] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Sur l'analyse harmonique généralisée des fonctions pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 253, 1961, p. 2829-2831.

[14] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Fonctions pseudo-aléatoires et fonctions presque-périodiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 2226-2228.

[15] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Décomposition des fonctions admettant une fonction de corrélation temporelle en somme de trois fonctions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 1659-1662.

[16] BESICOVITCH (A. S.). - Almost periodic functions. - Cambridge, Cambridge University Press, 1932 ; [Reissue of the first edition] New York, Dover Publications, 1954.

[17] CLARKSON (J. A.). - Uniformly convex spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 40, 1936, p. 396-414.

[18] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). - Linear operators, Part 1. - New York, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, 7).

[19] EBERLEIN (W. F.). - Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 67, 1949, p. 217-240.

[20] EBERLEIN (W. F.). - The point spectrum of weakly almost periodic functions, Mich. J. of Math., t. 3, 1956, p. 137-139.

[21] GROTHENDIECK (Alexander). - Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, Amer. J. of Math., t. 74, 1952, p. 168-186.

[22] JACOBS (K.). - Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1960 (Ergebnisse der Mathematik, 29).

[23] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide, Stud. Math., t. 21, 1962, p. 231-236.

[24] LOEVE (Michel). - Probability theory, 3rd edition. - Princeton, D. Van Nostrand, 1963.

[25] MARCINKIEWICZ (J.). - Une remarque sur les espaces de A. S. Besicovitch, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 208, 1939, p. 157-159.

[26] PETTIS (B. J.). - A proof that every uniformly convex space is reflexive, Duke math. J., t. 5, 1939, p. 249-253.

[27] VO-KHAC Khoan. - Fonctions de fonctions pseudo-aléatoires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 4580-4583.

[28] VO-KHAC Khoan. - Solutions pseudo-aléatoires des équations de Navier-Stokes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 4822-4824.

[29] VO-KHAC Khoan. - Q-fonctions à valeurs dans un espace de Banach, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257, 1963, p. 3800-3803.

[30] VO-KHAC Khoan. - Q-solutions faibles des équations différentielles opérationnelles linéaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 47-50.

Joseph FLOCH, Maître-Imprimeur à Mayenne -15-3-1966 - n°2540