MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES MEYER

Nombres transcendants et répartition modulo 1

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 143-149
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__143_0>

Colloque Th. Nombres [1969, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 25, 1971, p. 143 à 149

NOMBRES TRANSCENDANTS ET REPARTITION MODULO 1 .

par

Y. MEYER

-:-:-:-

1. - Nous construisons une suite croissante d'entiers $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ telle que, pour tout nombre réel t , $(t\ \lambda_k)_{k\geq 1}$ soit équirépartie modulo 1 si et seulement si t est transcendant. Plus précisément :

THEOREME I. - <u>Soit</u> $E \subset \mathbb{R}$ <u>un ensemble dénombrable de nombre réels qui est aussi un espace vectoriel sur le corps</u> $\mathbb{Q}$ <u>des rationnels. Il existe une suite croissante</u> $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ <u>d'entiers telle que la suite</u> $(t\ \lambda_k)_{k\geq 1}$ <u>soit équirépartie modulo</u> 1 <u>si et seulement si</u> t <u>n'appartient pas à</u> E .

Quelques notations seront utilisées dans toute la suite. Soit a une fonction définie sur $\mathbb{Z}$, à valeurs complexes ; nous poserons $m(a_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} k^{-1}(a(1)+\ldots+a(k))$ si cette limite existe et $\bar{m}(a_k) = \overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\ k^{-1}(a(1) + \ldots + a(k)\ )$.

Le critère de H. Weyl nous apprend que $(t\ \lambda_k)_{k\geq 1}$ est équirépartie modulo 1 (on dira aussi que t est normal par rapport à la suite des $(\lambda_k)_{k\geq 1}$) si et seulement si $m\ (\exp 2\pi i n t \lambda_k) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

2. - Soit $\mathbb{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1 et $\mathbb{T}^\infty$ le produit d'une infinité dénombrable d'exemplaires de $\mathbb{T}$; $\mathbb{T}^\infty$ est un groupe abélien compact dont la mesure de Haar sera notée dx et normalisée de sorte que $\int_{\mathbb{T}^\infty} 1\, dx = 1$.

Le théorème I découle des théorèmes II et III.

THEOREME II. - <u>Soient</u>

- $K \subset \mathbb{T}^\infty$ <u>un compact intégrale au sens de Riemann</u> ;
- h <u>un homomorphisme de</u> $\mathbb{Z}$ <u>dans</u> $\mathbb{T}^\infty$ <u>d'image dense</u> ;
- $h(k) = (\exp 2\pi i k\omega_1\ , \ldots , \exp 2\pi i k \omega_j\ , \ldots)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Λ <u>l'ensemble des</u> λ <u>entiers positifs tels que</u> $h(\lambda) \in K$;
- $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\ , \ldots , \lambda_k\ , \ldots\}$ <u>où</u> $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$
- H <u>le</u> $\mathbb{Z}$ - <u>module libre composé de tous les nombres réels</u> t <u>s'écrivant comme une somme finie</u> $t = p_1\omega_1 + \ldots + p_k\ \omega_k + \ldots$ <u>où</u> $p_k \in \mathbb{Z}$.

- I_K la fonction caractéristique du compact K de $\mathbf{T}^{\infty}$, $\hat{I}_K$ la transformée de Fourier de I_K ;
- $p = (p_1,\dots,p_k,\dots)$ le caractère défini sur $\mathbf{T}^{\infty}$ par $p(z_1,\dots,z_k,\dots) = z_1^{p_1} \dots z_k^{p_k}$ (les entiers relatifs p_k sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini).

Alors si t n'appartient pas à H, $m(\exp 2\pi it\lambda_k) = 0$ si $t = p_1\omega_1 + \dots + p_k\omega_k + \dots$ $m(\exp 2\pi it\lambda_k) = \hat{I}_K(p) / \text{mes } K$.

THEOREME III. - On peut construire un compact K de $\mathbf{T}^{\infty}$, intégrable au sens de Riemann, dont la transformée de Fourier ne s'annule pas.

Le théorème I est un corollaire des théorèmes II et III. Appelons en effet $\omega_1,\dots,\omega_k,\dots$ une base de E sur $\mathbf{Q}$ (si E est de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, cette base est finie et l'on remplace $\mathbf{T}^{\infty}$ par $\mathbf{T}^n$; les changements à effectuer dans toute la suite sont alors évidents et nous ne considérons que le cas où E est de dimension infinie sur $\mathbf{Q}$). Nous définissons d'abord K grâce au théorème III puis $\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k,\dots)$ par le théorème II. Le théorème I résulte alors du critère de H. Weyl.

3. - Preuve du théorème II. Elle débute par un lemme classique

LEMME 1. - Soit G un groupe compact, h un homomorphisme de $\mathbf{Z}$ dans G d'image dense et f une fonction continue sur G à valeurs complexes. Alors $f \circ h$ est presque périodique sur $\mathbf{Z}$ et $m(f\circ h) = \int_G f(x)\,dx$ (dx est la mesure de Haar de G normalisée de sorte que $\int_G 1\,dx = 1$).

Puisque K est intégrable au sens de Riemann, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver deux fonctions f_ε et g_ε continues sur G, à valeurs dans $[0,1]$ telles que $0 \leq f_\varepsilon \leq I_K \leq g_\varepsilon$ et $\int_G |g_\varepsilon - f_\varepsilon|\,dx \leq \varepsilon$. Posons $a_\varepsilon = f_\varepsilon \circ h$, $b_\varepsilon = g_\varepsilon \circ h$ et soit Λ l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{N}$ tels que $h(\lambda) \in K$.

On a, pour tout entier $j \geq 0$, $0 \leq a_\varepsilon(j) \leq I_\Lambda(j) \leq b_\varepsilon(j)$ (I_Λ est la fonction caractéristique de Λ) et, grâce au lemme 1, $m(b_\varepsilon - a_\varepsilon) = m(|b_\varepsilon - a_\varepsilon|) \leq \varepsilon$. A fortiori on a $\bar{m}\,|I_\Lambda - a_\varepsilon| \leq \varepsilon$ et donc,

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\ \left|k^{-1}\sum_1^k I_\Lambda(j)\exp 2\pi ijt - k^{-1}\sum_1^k a_\varepsilon(j)\exp 2\pi ijt\right| \leq \varepsilon. \tag{3.I}$$

LEMME 2. - Si le nombre réel t n'appartient pas à H, $\lim_{k\to+\infty} k^{-1} \sum_{1}^{k} a_\varepsilon(j) \exp 2\pi ijt = 0$ tandis que si $t = p_1\omega_1 + \ldots + p_k\omega_k + \ldots$, cette limite vaut $\hat{f}_\varepsilon(p)$ ($p = (p_1,\ldots,p_k,\ldots)$).

En effet la fonction $a(j)$ est presque périodique sur $\mathbb{Z}$ et son spectre est contenu dans H. Le lemme 2 nous rappelle alors comment sont calculés les coefficients de Fourier d'une fonction presque périodique.

4. - Revenons à la preuve du théorème II. Si t n'appartient pas à H, (3.I) et les lemmes 1 et 2 entraînent que $m(I_\Lambda(k) \exp 2\pi ikt) = 0$. Si $t = p_1\omega_1 + \ldots + p_k\omega_k + \ldots$, $m(I_\Lambda(k) \exp 2\pi ikt) = \lim_{\varepsilon\to 0} \hat{f}_\varepsilon(p) = \hat{I}_K(p)$. En particulier $m(I_\Lambda(k))$, la densité de Λ vaut la mesure de K. On a donc
$m(\exp 2\pi i\lambda_j t) = m(I_\Lambda(k) \exp 2\pi ikt) / m(I_\Lambda(k)) = \hat{I}_K(p) / \text{mes } K$ si $t \in H$, $t = p_1\omega_1 + \ldots$ et $m(\exp 2\pi i\lambda_j t) = 0$ dans le cas contraire.

5. - Il nous reste à construire un compact K de $\mathbf{T}^\infty$, intégrable au sens de Riemann et tel que la transformée de Fourier $\hat{I}_K$ de la fonction caractéristique de K ne s'annule pas.

Nous allons d'abord indiquer un moyen de construire des compacts K de $\mathbf{T}^\infty$, intégrables au sens de Riemann, dépendant d'une infinité dénombrable de paramètres et ensuite indiquer comment ajuster ces paramètres pour que $\hat{I}_K$ ne s'annule pas.

Soit $\theta_1,\ldots,\theta_n,\ldots$ une suite de nombres réels, $\alpha_0, \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots$ une autre suite de nombres réels telle que $\sum_0^\infty |\alpha_n| < 1$, Ω le compact $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$ muni de la mesure P produit des mesures de Lebesgue sur chaque composante $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Soit φ l'application continue de Ω dans $\mathbf{T}^\infty$ définie par

$$\varphi(t_0,\ldots,t_n,\ldots) = (\exp 2\pi is, \exp 2\pi i(t_1+\theta_1 s),\ldots,\exp 2\pi i(t_n+\theta_n s),\ldots)$$

où $s = \alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_n t_n + \ldots$.

Soit K l'image de Ω par φ et μ la mesure image de P par φ. Soit dz_k la mesure de Haar sur la k-ième composante de $\mathbf{T}^\infty$, $x = (z_0,\ldots,z_n,\ldots)$ un point de $\mathbf{T}^\infty$ et $dx = dz_0 \otimes \ldots \otimes dz_n \otimes \ldots$ la mesure de Haar sur $\mathbf{T}^\infty$. Avec ces notations, on a l'important résultat suivant :

PROPOSITION 6.5. - Le compact K est intégrable au sens de Riemann et la mesure μ est $\frac{1}{|\alpha_0|} I_K\, dx$.

6. - Pour montrer la proposition 6.5. nous allons "approcher" $\mathbb{T}^\infty$ par une suite de tores $\mathbb{T}^{n+1}$, le compact K par une suite de compacts K_n, l'application φ par une suite φ_n à valeurs dans $\mathbb{T}^{n+1}$ et la mesure μ par une suite de mesures μ_n. Les vérifications des analogues de la proposition 6.5. où $\mathbb{T}^\infty$ sera remplacé par $\mathbb{T}^n$ seront immédiates. Plus précisément soient, pour tout $n \geq 0$,

- $\Omega_n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{n+1}$ muni de la mesure P_n produit des mesures de Lebesgue sur chaque composante
- φ_n l'application de Ω_n dans $\mathbb{T}^{n+1}$ définie par
  $\varphi_n(t_o,\ldots,t_n)=(\exp 2\pi i s_n, \exp 2\pi i(t_1+\theta_1 s_n),\ldots,\exp 2\pi i(t_n+\theta_n s_n))$
  où $s_n = \alpha_o t_o + \ldots + \alpha_n t_n$.
- U_n le compact de $\mathbb{T}^{n+1}$ image de Ω_n par φ_n
- ν_n la mesure image de P_n par φ_n
- y un point de $\mathbb{T}^{n+1}$, dy la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^{n+1}$
- K_n le compact de $\mathbb{T}^\infty$ qui est l'ensemble des $x = (z_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{T}^\infty$ tels que $(z_o,\ldots,z_n) \in U_n$, les z_k pour $k \geq n+1$ étant arbitraires
- μ_n la mesure définie sur $\mathbb{T}^\infty$ par $d\mu_n(x) = d\nu_n(z_o,\ldots,z_n)\otimes dz_{n+1}\otimes\cdots\otimes dz_k\otimes\cdots$
- dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^\infty$ $(dx = dy\otimes dz_{n+1}\otimes\ldots\otimes dz_k\otimes\ldots)$.

On peut alors énoncer une série de lemmes.

LEMME 3. - <u>La mesure</u> $d\mu_n$ <u>est</u> $\frac{1}{|\alpha_o|} I_{K_n} dx$.

Il suffit pour prouver le lemme 3 de montrer que $d\nu_n = \frac{1}{|\alpha_o|} I_{U_n} dy$. L'application φ_n est la composée de l'application linéaire ℓ_n de R^{n+1} dans lui-même définie par $\ell_n(t_o,\ldots,t_n) = (s_n, t_1+{}_1s_n,\ldots,t_n+\theta_n s_n)$ et de l'application canonique p_n de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{T}^{n+1}$ définie par $p_n(x_o,\ldots,x_n)=(\exp 2\pi i x_o,\ldots,\exp 2\pi i x_n)$. Soit C_n l'image par ℓ_n du pavé $|t_k| \leq 1/2$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ $(0\leq k\leq n)$. On vérifie, grâce à la condition $\sum_0^\infty |\alpha_k| < 1$ que deux points de l'intérieur du polyèdre C_n ne sont jamais congrus modulo $\mathbb{Z}^{n+1}$. On en déduit aussitôt que $\text{mes}(U_n) = \text{mes}\, C_n$ et que $d\nu_n = \frac{1}{\text{mes}\, C_n} I_{U_n} dy$. Par ailleurs un calcul immédiat donne : $\text{mes}\, C_n = |\alpha_o|$.

LEMME 4. - $\int_{\mathbb{T}^\infty} |I_K(x) - I_{K_n}(x)|\, dx \to 0 \quad (n \to +\infty)$.

Nous allons montrer pour cela que $\mathrm{mes}(K\setminus K_n)\to 0$ et $\mathrm{mes}(K_n\setminus K)\to 0$ $(n\to+\infty)$. On a posé $A\setminus B = A\cap \complement B$.

Examinons en effet quels sont les x de K n'appartenant pas à K_n ; si x appartient à K, $x=(z_o,\dots,z_n,\dots)$ où $z_o=\exp 2\pi is$, $z_1=\exp 2\pi i(t_1+\theta_1 s)$, ... $z_n=\exp 2\pi i(t_n+\theta_n s)$ et $s=\alpha_o t_o+\dots+\alpha_n t_n+\dots$. Si nous trouvons un t'_o dans l'intervalle $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ tel que $s=\alpha_o t'_o+\dots+\alpha_n t_n$, la forme des $n+1$ premières coordonnées de x montre que x appartient à K_n. Il suffit de poser $t'_o = t_o+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_o}t_{n+1}+\dots+\frac{\alpha_k}{\alpha_o}t_k+\dots$ et x appartient à K_n sauf si $|t_o+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_o}t_{n+1}+\dots+\frac{\alpha_k}{\alpha_o}t_k+\dots|>\frac{1}{2}$ ce qui entraîne, en posant

$2r_{n+1}=|\alpha_{n+1}|+\dots+|\alpha_k|+\dots$, $t_o\in[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+r_{n+1}]$ ou $[\frac{1}{2}-r_{n+1},\frac{1}{2}]$.

Appelons D_n^+ l'ensemble des points $x=(z_o,\dots,z_n,\dots z_k,\dots)$ de T^∞ tels que

$$z_o = \exp 2\pi i\left(\frac{\alpha_o}{2}+\alpha_1 t_1+\dots+\alpha_n t_n+u\right)$$
$$z_1 = \exp 2\pi i\left(\frac{\theta_1\alpha_o}{2}+t_1+\theta_1 s_n+\theta_1 u\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n = \exp 2\pi i\left(\frac{\theta_n\alpha_o}{2}+t_n+\theta_n s_n+\theta_n u\right)$$

les z_k, $k\ge n+1$, étant arbitraires, $|u|\le r_{n+1}$ et $s_n=\alpha_1 t_1+\dots+\alpha_n t_n$ et définissons D_n^- de façon analogue en remplaçant $\frac{1}{2}$ par $-\frac{1}{2}$. Alors $K\setminus K_n\subset D_n^+\cup D_n^-$, D_n^+ et D_n^- sont deux compacts dont les mesures sont majorées par celles des ensembles correspondants de $\mathbb{R}^{n+1}$. On obtient $\mathrm{mes}\,D_n^+\le 2r_{n+1}$, $\mathrm{mes}\,D_n^-\le 2r_{n+1}$.

Soit maintenant x un élément de K_n ; examinons quand il appartient à K. On a $x=(z_o,\dots,z_n,z_{n+1},\dots,z_k,\dots)$ où

$z_o=\exp 2\pi is_n$, $z_1=\exp 2\pi i(t_1+\theta_1 s_n),\dots,z_n=\exp 2\pi i(t_n+\theta_n s_n)$,

$z_{n+1}=\exp 2\pi i\,u_{n+1},\dots, z_k=\exp 2\pi i\,u_k,\dots$ et $s_n=\alpha_o t_o+\dots+\alpha_n t_n$.

Nous allons définir les nombres réels t_k, $k\ge n+1$ par

$$t_k\equiv u_k-\theta_k s_n \pmod 1$$

et
$$|t_k|\le\frac{1}{2}$$

et les t_k étant ainsi construits chercher un nombre réel t'_o tel que

$$\alpha_o t'_o+\alpha_1 t_1+\dots+\alpha_n t_n+\alpha_n t_n+\alpha_{n+1}t_{n+1}+\dots=\alpha_o t_o+\dots+\alpha_n t_n$$

et $|t'_o|\le\frac{1}{2}$

C'est possible sauf éventuellement si $t_o \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + r_{n+1}]$ ou $t_o \in [\frac{1}{2} - r_{n+1}, \frac{1}{2}]$. On en déduit que $K_n \setminus K$ est lui aussi contenu dans $D_n^+ \cup D_n^-$ et que $\text{mes}(K_n \setminus K) \to 0$ $(n \to +\infty)$.

Remarque : D_n^+ et D_n^- étant compacts, nous avons montré chemin faisant que $\text{mes}(\overline{K_n \setminus K}) \to 0$ et $\text{mes}(\overline{K \setminus K_n}) \to 0$ $(n \to +\infty)$.

Pour montrer que le compact K est intégrable au sens de Riemann, il nous suffit d'utiliser le lemme suivant dont la preuve, très simple, sera laissée au lecteur.

LEMME 5. - Soit E un espace localement compact muni d'une mesure de Radon et K une partie compacte de E. S'il existe une suite $(K_n)_{n \geq 1}$ de parties compactes de E intégrables au sens de Riemann telles que $\text{mes}(\overline{K \setminus K_n}) \to 0$ $(n \to +\infty)$ et $\text{mes}(\overline{K_n \setminus K}) \to 0$ $(n \to +\infty)$, alors K est intégrable au sens de Riemann.

Pour démontrer complètement la proposition 6.5., il faut encore montrer que la mesure μ image de P par φ est $\frac{1}{|\alpha_o|} I_K\, dx$. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 6. - Pour toute fonction continue $f(x)$ sur $\mathbb{T}^\infty$, à valeurs réelles ou complexes

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} f(x)\, d\mu_n(x) \to \int_{\mathbb{T}^\infty} f(x)\, d\mu(x)$$

Il suffit de le prouver pour un ensemble dense de fonctions continues sur $\mathbb{T}^\infty$. Si par exemple f ne dépend que des k premières coordonnées on appellera F la fonction définie sur $\mathbb{R}^k$ par $F(x_1,\ldots,x_k) = f(\exp 2\pi i\, x_1, \ldots, \exp 2\pi i\, x_k)$. Définissons sur Ω les deux fonctions G_n et G par

$G_n(t_o,\ldots,t_p\ldots) = F(\alpha_o t_o + \ldots + \alpha_n t_n\,,\ t_1 + \theta_1 s_n, \ldots, t_k + \theta_k\, s_n)$ et

$G(t_o,\ldots,t_p,\ldots) = F(s, t_1 + \theta_1 s, \ldots, t_k + \theta_k s)$ avec $s_n = \sum_0^n \alpha_k\, t_k$,

$s = \sum_0 \alpha_k\, t_k$. On a $\int_{\mathbb{T}^\infty} f(x)\, d\mu_n(x) = \int_\Omega G_n(\omega)\, dP_n(\omega) = \int_\Omega G_n(\omega)\, dP(\omega)$

(G_n ne dépend que des n premières coordonnées) et $\int_{\mathbb{T}^\infty} f(x)\, d\ (x) = \int_\Omega G(\omega)\, dP(\omega)$.

Or on vérifie immédiatement que G_n tend uniformément sur Ω vers G quand n tend vers l'infini ; le lemme est prouvé.

Nous terminons comme suit la preuve de la proposition 6.5. d'une part μ_n tend faiblement vers μ et d'autre part μ_n tend au sens de la norme vers $\frac{1}{|\alpha_o|} I_K dx$. Il en résulte que $d\mu = \frac{1}{|\alpha_o|} I_K\, dx$.

Indiquons enfin comment choisir les α_k et les θ_k pour que la transformée de Fourier de I_K ne s'annule pas. Le calcul de $\int_{T^\infty} \exp 2\pi i(p_o x_o+\ldots+p_n x_n)\, d\mu(x)$ se fait en regardant $d\mu$ comme l'image de dP par φ . En posant $\tau = p_o+\ldots+p_n\theta_n$, on obtient

$$\frac{\sin \pi \tau \alpha_o}{\pi \tau \alpha} \; \frac{\sin\pi\tau(p_1+\tau\times\alpha_1)}{\pi(p_1+\tau \alpha_1)} \cdots \frac{\sin \pi(p_n+\tau \alpha_n)}{p_n +\tau \alpha_n} \cdot \frac{\sin \pi \tau \alpha_{n+1}}{\pi \tau \alpha_{n+1}} \cdots \frac{\sin \pi \tau \alpha_k}{\pi \tau \alpha_k} \cdots$$

Nous supposerons en premier lieu que les nombres $1 , \theta_1 , \ldots , \theta_k , \ldots$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants et ensuite qu'aucun des nombres réels α_k^{-1} n'appartient à l'espace vectoriel sur Q engendré par $1 , \theta_1 , \ldots , \theta_k , \ldots$. Alors le produit infini convergent que nous venons d'écrire n'est pas nul.

Pour une autre preuve du théorème I on se reportera à [1] et [2] .

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. MEYER. - Nombres de Pisot, nombres de Salem et Analyse Harmonique. Lecture Notes n° 117, Springer Verlag.

[2] Y. MEYER. - Nombres algébriques, nombres transcendants et répartition modulo 1 Acta Arithmetica XVI (1970).

-:-:-:-

Université de Paris
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Bâtiment 425
91 - Orsay (France)