

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES MEYER

Nombres transcendants et répartition modulo 1

Mémoires de la S. M. F., tome 25 (1971), p. 143-149

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1971__25__143_0

© Mémoires de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOMBRES TRANSCENDANTS ET REPARTITION MODULO 1 .

par

Y. MEYER

--:--:--

1. - Nous construisons une suite croissante d'entiers $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ telle que, pour tout nombre réel t , $(t \lambda_k)_{k \geq 1}$ soit équirépartie modulo 1 si et seulement si t est transcendant. Plus précisément :

THEOREME I. - Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable de nombre réels qui est aussi un espace vectoriel sur le corps \mathbb{Q} des rationnels. Il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ d'entiers telle que la suite $(t \lambda_k)_{k \geq 1}$ soit équirépartie modulo 1 si et seulement si t n'appartient pas à E .

Quelques notations seront utilisées dans toute la suite. Soit a une fonction définie sur \mathbb{Z} , à valeurs complexes ; nous poserons $m(a_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-1}(a(1) + \dots + a(k))$ si cette limite existe et $\bar{m}(a_k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} k^{-1}(a(1) + \dots + a(k))$.

Le critère de H. Weyl nous apprend que $(t \lambda_k)_{k \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 (on dira aussi que t est normal par rapport à la suite des $(\lambda_k)_{k \geq 1}$) si et seulement si $m(\exp 2\pi i n \lambda_k) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

2. - Soit \mathbb{T} le groupe des nombres complexes de module 1 et \mathbb{T}^∞ le produit d'une infinité dénombrable d'exemplaires de \mathbb{T} ; \mathbb{T}^∞ est un groupe abélien compact dont la mesure de Haar sera notée dx et normalisée de sorte que $\int_{\mathbb{T}^\infty} 1 dx = 1$.

Le théorème I découle des théorèmes II et III.

THEOREME II. - Soient

- . $K \subset \mathbb{T}^\infty$ un compact intégrale au sens de Riemann ;
- . h un homomorphisme de \mathbb{Z} dans \mathbb{T}^∞ d'image dense ;
- . $h(k) = (\exp 2\pi i k \omega_1, \dots, \exp 2\pi i k \omega_j, \dots)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- . Λ l'ensemble des λ entiers positifs tels que $h(\lambda) \in K$;
- . $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\}$ où $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$
- . H le \mathbb{Z} -module libre composé de tous les nombres réels t s'écrivant comme une somme finie $t = p_1 \omega_1 + \dots + p_k \omega_k + \dots$ où $p_k \in \mathbb{Z}$.

- I_K la fonction caractéristique du compact K de T^∞ , \hat{I}_K la transformée de Fourier de I_K ;
- $p = (p_1, \dots, p_k, \dots)$ le caractère défini sur T^∞ par $p(z_1, \dots, z_k, \dots) = z_1^{p_1} \dots z_k^{p_k}$ (les entiers relatifs p_k sont tous nuls sauf éventuellement un nombre fini).

Alors si t n'appartient pas à H , $m(\exp 2\pi i t \lambda_k) = 0$ si $t = p_1 \omega_1 + \dots + p_k \omega_k + \dots$
 $m(\exp 2\pi i t \lambda_k) = \hat{I}_K(p) / \text{mes } K$.

THEOREME III. - On peut construire un compact K de T^∞ , intégrable au sens de Riemann, dont la transformée de Fourier ne s'annule pas.

Le théorème I est un corollaire des théorèmes II et III. Appelons en effet $\omega_1, \dots, \omega_k, \dots$ une base de E sur \mathbb{Q} (si E est de dimension finie sur \mathbb{Q} , cette base est finie et l'on remplace T^∞ par T^n ; les changements à effectuer dans toute la suite sont alors évidents et nous ne considérons que le cas où E est de dimension infinie sur \mathbb{Q}). Nous définissons d'abord K grâce au théorème III puis $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots)$ par le théorème II. Le théorème I résulte alors du critère de H. Weyl.

3. - Preuve du théorème II. Elle débute par un lemme classique

LEMME 1. - Soit G un groupe compact, h un homomorphisme de Z dans G d'image dense et f une fonction continue sur G à valeurs complexes. Alors $f \circ h$ est presque périodique sur Z et $m(f \circ h) = \int_G f(x) dx$ (dx est la mesure de Haar de G normalisée de sorte que $\int_G 1 dx = 1$).

Puisque K est intégrable au sens de Riemann, on peut, pour tout $\epsilon > 0$, trouver deux fonctions f_ϵ et g_ϵ continues sur G , à valeurs dans $[0,1]$ telles que $0 \leq f_\epsilon \leq I_K \leq g_\epsilon$ et $\int_G |g_\epsilon - f_\epsilon| dx \leq \epsilon$. Posons $a_\epsilon = f_\epsilon \circ h$, $b_\epsilon = g_\epsilon \circ h$ et soit Λ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{N}$ tels que $h(\lambda) \in K$.

On a, pour tout entier $j \geq 0$, $0 \leq a_\epsilon(j) \leq I_\Lambda(j) \leq b_\epsilon(j)$ (I_Λ est la fonction caractéristique de Λ) et, grâce au lemme 1, $m(b_\epsilon - a_\epsilon) = m(|b_\epsilon - a_\epsilon|) \leq \epsilon$. A fortiori on a $\overline{m} |I_\Lambda - a_\epsilon| \leq \epsilon$ et donc,

$$(3.I) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} |k^{-1} \sum_1^k I_\Lambda(j) \exp 2\pi i j t - k^{-1} \sum_1^k a_\epsilon(j) \exp 2\pi i j t| \leq \epsilon.$$

LEMME 2. - Si le nombre réel t n'appartient pas à H , $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-1} \sum_{j=1}^k a_\epsilon(j) \exp 2\pi i j t = 0$ tandis que si $t = p_1 \omega_1 + \dots + p_k \omega_k + \dots$, cette limite vaut $\hat{f}_\epsilon(p)$ ($p = (p_1, \dots, p_k, \dots)$).

En effet la fonction $a(j)$ est presque périodique sur \mathbb{Z} et son spectre est contenu dans H . Le lemme 2 nous rappelle alors comment sont calculés les coefficients de Fourier d'une fonction presque périodique.

4. - Revenons à la preuve du théorème II. Si t n'appartient pas à H , (3.I) et les lemmes 1 et 2 entraînent que $m(I_\Lambda(k) \exp 2\pi i k t) = 0$. Si $t = p_1 \omega_1 + \dots + p_k \omega_k + \dots$, $m(I_\Lambda(k) \exp 2\pi i k t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{f}_\epsilon(p) = \hat{I}_K(p)$. En particulier $m(I_\Lambda(k))$, la densité de Λ vaut la mesure de K . On a donc $m(\exp 2\pi i \lambda_j t) = m(I_\Lambda(k) \exp 2\pi i k t) / m(I_\Lambda(k)) = \hat{I}_K(p) / \text{mes } K$ si $t \in H$, $t = p_1 \omega_1 + \dots$ et $m(\exp 2\pi i \lambda_j t) = 0$ dans le cas contraire.

5. - Il nous reste à construire un compact K de \mathbb{T}^∞ , intégrable au sens de \mathbb{T}^∞ Riemann et tel que la transformée de Fourier \hat{I}_K de la fonction caractéristique de K ne s'annule pas.

Nous allons d'abord indiquer un moyen de construire des compacts K de \mathbb{T}^∞ , intégrables au sens de Riemann, dépendant d'une infinité dénombrable de paramètres et ensuite indiquer comment ajuster ces paramètres pour que \hat{I}_K ne s'annule pas.

Soit $\theta_1, \dots, \theta_n, \dots$ une suite de nombres réels, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ une autre suite de nombres réels telle que $\sum_0^\infty |\alpha_n| < 1$, Ω le compact $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$ muni de la mesure P produit des mesures de Lebesgue sur chaque composante $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Soit φ l'application continue de Ω dans \mathbb{T}^∞ définie par

$$\varphi(t_0, \dots, t_n, \dots) = (\exp 2\pi i s, \exp 2\pi i(t_1 + \theta_1 s), \dots, \exp 2\pi i(t_n + \theta_n s), \dots)$$

où $s = \alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n + \dots$.

Soit K l'image de Ω par φ et μ la mesure image de P par φ . Soit dz_k la mesure de Haar sur la k -ième composante de \mathbb{T}^∞ , $x = (z_0, \dots, z_n, \dots)$ un point de \mathbb{T}^∞ et $dx = dz_0 \otimes \dots \otimes dz_n \otimes \dots$ la mesure de Haar sur \mathbb{T}^∞ . Avec ces notations, on a l'important résultat suivant :

PROPOSITION 6.5. - Le compact K est intégrable au sens de Riemann et la mesure μ est $\frac{1}{|\alpha_0|} I_K dx$.

6. - Pour montrer la proposition 6.5. nous allons "approcher" \mathbb{T}^∞ par une suite de tores \mathbb{T}^{n+1} , le compact K par une suite de compacts K_n , l'application φ par une suite φ_n à valeurs dans \mathbb{T}^{n+1} et la mesure μ par une suite de mesures μ_n . Les vérifications des analogues de la proposition 6.5. où \mathbb{T}^∞ sera remplacé par \mathbb{T}^n seront immédiates. Plus précisément soient, pour tout $n \geq 0$,

- . $\Omega_n = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{n+1}$ muni de la mesure P_n produit des mesures de Lebesgue sur chaque composante
- . φ_n l'application de Ω_n dans \mathbb{T}^{n+1} définie par $\varphi_n(t_0, \dots, t_n) = (\exp 2\pi i s_n, \exp 2\pi i(t_1 + \theta_1 s_n), \dots, \exp 2\pi i(t_n + \theta_n s_n))$ où $s_n = \alpha_0 t_0 + \dots + \alpha_n t_n$.
- . U_n le compact de \mathbb{T}^{n+1} image de Ω_n par φ_n
- . ν_n la mesure image de P_n par φ_n
- . y un point de \mathbb{T}^{n+1} , dy la mesure de Haar sur \mathbb{T}^{n+1}
- . K_n le compact de \mathbb{T}^∞ qui est l'ensemble des $x = (z_k)_{k \geq 0}$ de \mathbb{T}^∞ tels que $(z_0, \dots, z_n) \in U_n$, les z_k pour $k \geq n+1$ étant arbitraires
- . μ_n la mesure définie sur \mathbb{T}^∞ par $d\mu_n(x) = d\nu_n(z_0, \dots, z_n) \otimes dz_{n+1} \otimes \dots \otimes dz_k \otimes \dots$
- . dx la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T}^∞ ($dx = dy \otimes dz_{n+1} \otimes \dots \otimes dz_k \otimes \dots$).

On peut alors énoncer une série de lemmes.

LEMME 3. - La mesure $d\mu_n$ est $\frac{1}{|\alpha_0|} I_{K_n} dx$.

Il suffit pour prouver le lemme 3 de montrer que $d\nu_n = \frac{1}{|\alpha_0|} I_{U_n} dy$. L'application φ_n est la composée de l'application linéaire ℓ_n de \mathbb{R}^{n+1} dans lui-même définie par $\ell_n(t_0, \dots, t_n) = (s_n, t_1 + \theta_1 s_n, \dots, t_n + \theta_n s_n)$ et de l'application canonique p_n de \mathbb{R}^{n+1} sur \mathbb{T}^{n+1} définie par $p_n(x_0, \dots, x_n) = (\exp 2\pi i x_0, \dots, \exp 2\pi i x_n)$. Soit C_n l'image par ℓ_n du pavé $|t_k| \leq 1/2$ de \mathbb{R}^{n+1} ($0 \leq k \leq n$). On vérifie, grâce à la condition $\sum_0^n |\alpha_k| < 1$ que deux points de l'intérieur du polyèdre C_n ne sont jamais congrus modulo \mathbb{Z}^{n+1} . On en déduit aussitôt que $\text{mes}(U_n) = \text{mes } C_n$ et que $d\nu_n = \frac{1}{\text{mes } C_n} I_{U_n} dy$. Par ailleurs un calcul immédiat donne : $\text{mes } C_n = |\alpha_0|$.

LEMME 4. - $\int_{\mathbb{T}} |I_K(x) - I_{K_n}(x)| dx \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$).

Nous allons montrer pour cela que $\text{mes}(K \setminus K_n) \rightarrow 0$ et $\text{mes}(K_n \setminus K) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$).
 On a posé $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Examinons en effet quels sont les x de K n'appartenant pas à K_n ; si x appartient à K , $x = (z_0, \dots, z_n, \dots)$ où $z_0 = \exp 2\pi i s$, $z_1 = \exp 2\pi i(t_1 + \theta_1 s)$, ..., $z_n = \exp 2\pi i(t_n + \theta_n s)$ et $s = \alpha_0 t_0 + \dots + \alpha_n t_n + \dots$. Si nous trouvons un t'_0 dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tel que $s = \alpha_0 t'_0 + \dots + \alpha_n t_n$, la forme des $n+1$ premières coordonnées de x montre que x appartient à K_n . Il suffit de poser

$$t'_0 = t_0 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_0} t_{n+1} + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_0} t_k + \dots \text{ et } x \text{ appartient à } K_n \text{ sauf si}$$

$$|t_0 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_0} t_{n+1} + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_0} t_k + \dots| > \frac{1}{2} \text{ ce qui entraîne, en posant}$$

$$2r_{n+1} = |\alpha_{n+1}| + \dots + |\alpha_k| + \dots, \quad t_0 \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + r_{n+1}] \text{ ou } [\frac{1}{2} - r_{n+1}, \frac{1}{2}].$$

Appelons D_n^+ l'ensemble des points $x = (z_0, \dots, z_n, \dots, z_k, \dots)$ de T^∞ tels que

$$z_0 = \exp 2\pi i \left(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n + u \right)$$

$$z_1 = \exp 2\pi i \left(\frac{\theta_1 \alpha_0}{2} + t_1 + \theta_1 s_n + \theta_1 u \right)$$

.....

$$z_n = \exp 2\pi i \left(\frac{\theta_n \alpha_0}{2} + t_n + \theta_n s_n + \theta_n u \right)$$

les $z_k, k \geq n+1$, étant arbitraires, $|u| \leq r_{n+1}$ et $s_n = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n$ et définissons D_n^- de façon analogue en remplaçant $\frac{1}{2}$ par $-\frac{1}{2}$. Alors $K \setminus K_n \subset D_n^+ \cup D_n^-$, D_n^+ et D_n^- sont deux compacts dont les mesures sont majorées par celles des ensembles correspondants de \mathbb{R}^{n+1} . On obtient $\text{mes} D_n^+ \leq 2r_{n+1}$, $\text{mes} D_n^- \leq 2r_{n+1}$.

Soit maintenant x un élément de K_n ; examinons quand il appartient à K . On a $x = (z_0, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_k, \dots)$ où

$$z_0 = \exp 2\pi i s_n, \quad z_1 = \exp 2\pi i(t_1 + \theta_1 s_n), \dots, z_n = \exp 2\pi i(t_n + \theta_n s_n),$$

$$z_{n+1} = \exp 2\pi i u_{n+1}, \dots, z_k = \exp 2\pi i u_k, \dots \text{ et } s_n = \alpha_0 t_0 + \dots + \alpha_n t_n.$$

Nous allons définir les nombres réels $t_k, k \geq n+1$ par

$$t_k \equiv u_k - \theta_k s_n \pmod{1}$$

et $|t_k| \leq \frac{1}{2}$

et les t_k étant ainsi construits chercher un nombre réel t'_0 tel que

$$\alpha_0 t'_0 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n + \alpha_n t_n + \alpha_{n+1} t_{n+1} + \dots = \alpha_0 t_0 + \dots + \alpha_n t_n$$

et $|t'_0| \leq \frac{1}{2}$

C'est possible sauf éventuellement si $t_0 \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + r_{n+1}]$ ou $t_0 \in [\frac{1}{2} - r_{n+1}, \frac{1}{2}]$. On en déduit que $K_n \setminus K$ est lui aussi contenu dans $D_n^+ \cup D_n^-$ et que $\text{mes}(K_n \setminus K) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty)$.

Remarque : D_n^+ et D_n^- étant compacts, nous avons montré chemin faisant que $\text{mes}(\overline{K_n \setminus K}) \rightarrow 0$ et $\text{mes}(\overline{K \setminus K_n}) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty)$.

Pour montrer que le compact K est intégrable au sens de Riemann, il nous suffit d'utiliser le lemme suivant dont la preuve, très simple, sera laissée au lecteur.

LEMME 5. - Soit E un espace localement compact muni d'une mesure de Radon et K une partie compacte de E. S'il existe une suite $(K_n)_{n \geq 1}$ de parties compactes de E intégrables au sens de Riemann telles que $\text{mes}(\overline{K \setminus K_n}) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty)$ et $\text{mes}(\overline{K_n \setminus K}) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty)$, alors K est intégrable au sens de Riemann.

Pour démontrer complètement la proposition 6.5., il faut encore montrer que la mesure μ image de P par φ est $\frac{1}{|\alpha_0|} \int_K dx$. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 6. - Pour toute fonction continue $f(x)$ sur T^∞ , à valeurs réelles ou complexes

$$\int_{T^\infty} f(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int_{T^\infty} f(x) d\mu(x)$$

Il suffit de le prouver pour un ensemble dense de fonctions continues sur T^∞ . Si par exemple f ne dépend que des k premières coordonnées on appellera F la fonction définie sur \mathbb{R}^k par $F(x_1, \dots, x_k) = f(\exp 2\pi i x_1, \dots, \exp 2\pi i x_k)$. Définissons sur Ω les deux fonctions G_n et G par

$$\begin{aligned} G_n(t_0, \dots, t_p, \dots) &= F(\alpha_0 t_0 + \dots + \alpha_n t_n, t_1 + \theta_1 s_n, \dots, t_k + \theta_k s_n) \quad \text{et} \\ G(t_0, \dots, t_p, \dots) &= F(s, t_1 + \theta_1 s, \dots, t_k + \theta_k s) \quad \text{avec} \quad s_n = \sum_0^n \alpha_k t_k, \\ s &= \sum_0^\infty \alpha_k t_k. \quad \text{On a} \quad \int_{T^\infty} f(x) d\mu_n(x) = \int_\Omega G_n(\omega) dP_n(\omega) = \int_\Omega G_n(\omega) dP(\omega) \\ (G_n \text{ ne dépend que des } n \text{ premières coordonnées}) \quad \text{et} \quad \int_{T^\infty} f(x) d(x) &= \int_\Omega G(\omega) dP(\omega). \end{aligned}$$

Or on vérifie immédiatement que G_n tend uniformément sur Ω vers G quand n tend vers l'infini ; le lemme est prouvé.

Nous terminons comme suit la preuve de la proposition 6.5. d'une part μ_n tend faiblement vers μ et d'autre part μ_n tend au sens de la norme vers $\frac{1}{|\alpha_0|} \int_K dx$. Il en résulte que $d\mu = \frac{1}{|\alpha_0|} \int_K dx$.

Indiquons enfin comment choisir les α_k et les θ_k pour que la transformée de Fourier de I_K ne s'annule pas. Le calcul de $\int_{\mathbb{T}^\infty} \exp 2\pi i(p_0 x_0 + \dots + p_n x_n) d\mu(x)$ se fait en regardant $d\mu$ comme l'image de dP par φ . En posant $\tau = p_0 + \dots + p_n \theta_n$, on obtient

$$\frac{\sin \pi \tau \alpha_0}{\pi \tau \alpha_0} \frac{\sin \pi \tau (p_1 + \tau \alpha_1)}{\pi (p_1 + \tau \alpha_1)} \dots \frac{\sin \pi (p_n + \tau \alpha_n)}{p_n + \tau \alpha_n} \frac{\sin \pi \tau \alpha_{n+1}}{\pi \tau \alpha_{n+1}} \dots \frac{\sin \pi \tau \alpha_k}{\pi \tau \alpha_k} \dots$$

Nous supposons en premier lieu que les nombres $1, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots$ sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants et ensuite qu'aucun des nombres réels α_k^{-1} n'appartient à l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} engendré par $1, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots$. Alors le produit infini convergent que nous venons d'écrire n'est pas nul.

Pour une autre preuve du théorème I on se reportera à [1] et [2].

--:--:--

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. MEYER. - Nombres de Pisot, nombres de Salem et Analyse Harmonique. Lecture Notes n° 117, Springer Verlag.
- [2] Y. MEYER. - Nombres algébriques, nombres transcendants et répartition modulo 1. Acta Arithmetica XVI (1970).

--:--:--

Université de Paris
 Département de Mathématiques
 Faculté des Sciences
 Bâtiment 425
 91 - Orsay (France)