Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 124
Nouvelle série

CHANGEMENT DE BASE ET INDUCTION AUTOMORPHE POUR GL_n EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Guy HENNIART, Bertrand LEMAIRE

2 0 1 1

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 30 € ($ 45)
Abonnement Europe : 255 €, hors Europe : 290 € ($ 435)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-85629-311-9

Directrice de la publication : Aline BONAMI

MÉMOIRES DE LA SMF 124

CHANGEMENT DE BASE ET INDUCTION AUTOMORPHE POUR GL_n EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Guy Henniart

Bertrand Lemaire

Société Mathématique de France 2011

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Guy Henniart
Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,
UMR 8628 du CNRS, F–91405 Orsay Cedex.
E-mail : guy.henniart@math.u-psud.fr

Bertrand Lemaire
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 du CNRS,
Université Aix-Marseille II, Case Postale 907, F–13288 Marseille Cedex 9.
E-mail : lemaire@iml.univ-mrs.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 22E50.

Mots-clefs. – corps local non archimédien, caractéristique non nulle, groupe linéaire, représentation admissible, correspondance de Langlands locale, changement de base local, induction automorphe locale; algèbre de Hecke sphérique, isomorphisme de Satake, extension non ramifiée, lemme fondamental pour le changement de base (resp. pour l'induction automorphe); σ-intégrale orbitale, caractère σ-tordu, représentation σ-discrète, fonction élémentaire, application norme, identité "à la Shintani"; κ-intégrale orbitale, caractère κ-tordu, représentation κ-discrète, facteur de transfert, identité de caractères, modèle de Whittaker; corps de fonctions, représentation automorphe, groupe de Weil, correspondance de Langlands globale, changement de base global, induction automorphe globale.

CHANGEMENT DE BASE ET INDUCTION AUTOMORPHE POUR GL_n EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Guy Henniart, Bertrand Lemaire

Résumé. – Soit E/F une extension cyclique de corps (commutatifs) locaux ou globaux, de degré fini d. La théorie du changement de base de $\mathrm{GL}_n(F)$ à $\mathrm{GL}_n(E)$ et celle de l'induction automorphe de $\mathrm{GL}_m(E)$ à $\mathrm{GL}_{md}(F)$ sont deux illustrations du principe de fonctorialité de Langlands: pour F local, elles correspondent côté galoisien à la restriction des représentations de W'_F à W'_E et à l'induction des représentations de W'_E à W'_F, où W'_F désigne le groupe Weil-Deligne de F, W'_E celui de E. Si F est une extension finie d'un corps p-adique $\mathbb{Q}_p$, ces deux théories existent depuis longtemps (Arthur-Clozel, Henniart-Herb). On les étend dans ce mémoire au cas où F est un corps localement compact non archimédien de caractéristique non nulle. On montre aussi, pour un corps global de fonctions F, que ces deux théories locales sont compatibles aux applications globales de changement de base et d'induction automorphe déduites, via la correspondance de Langlands établie par Lafforgue, de la restriction et de l'induction des représentations galoisiennes globales.

Abstract **(Base change and automorphic induction for GL_n in positive characteristic)**

Let E/F be a finite cyclic extension of local or global fields, of degree d. The theory of base change from $\mathrm{GL}_n(F)$ to $\mathrm{GL}_n(E)$ and the theory of automorphic induction from $\mathrm{GL}_m(E)$ to $\mathrm{GL}_{md}(F)$ are two instances of Langlands' functoriality principle: when F is local, they correspond respectively to restriction to E of representations of the Weil-Deligne group of F, and induction to F of representations of the Weil-Deligne group of E. If F is a finite extension of a p-adic field $\mathbb{Q}_p$, these theories were established long ago (Arthur-Clozel, Henniart-Herb). In this memoir we extend them to the case where F is a non-Archimedean locally compact field of positive characteristic. We also prove, for a global functions field F, that these two local theories are compatible with the global maps of base change and automorphic induction deduced, via the Langlands correspondence proved by Lafforgue, from restriction and induction of global Galois representations.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le changement de base et l'induction automorphe pour le groupe linéaire sont deux illustrations du principe de fonctorialité de Langlands qui peuvent s'exprimer en termes de la correspondance de Langlands. Dans le cas qui nous intéresse principalement, le corps de base F est un corps commutatif localement compact non archimédien, et la correspondance de Langlands [**31, 36, 58**] relie les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ aux représentations de dimension n du groupe de Weil-Deligne W'_F de F. Si l'on fixe une extension cyclique E/F, de degré fini d, le *changement de base* de $\mathrm{GL}_n(F)$ à $\mathrm{GL}_n(E)$ correspond, via la correspondance de Langlands, à la restriction des représentations de W'_F au sous-groupe W'_E, et l'*induction automorphe* de $\mathrm{GL}_m(E)$ à $\mathrm{GL}_{md}(E)$ correspond à l'induction à W'_F des représentations de W'_E. Bien entendu, l'intérêt est de construire a priori changement de base et induction automorphe, sans passer par la correspondance de Langlands; d'ailleurs, quand F est de caractéristique nulle, les deux constructions sont utilisées pour établir la correspondance! Les constructions directes décrivent changement de base et induction automorphe en termes d'identités de caractères — pour des précisions, voir ci-dessous.

Si F est de caractéristique nulle, les théories du changement de base et de l'induction automorphe existent depuis longtemps: elles sont dues à Arthur-Clozel [**1**] pour la première, à Henniart-Herb [**38**] pour la seconde. Il y a quelques années, nous avons décidé d'étendre ces deux théories au cas où F est un corps localement compact non archimédien de caractéristique non nulle. En effet — c'est la motivation principale de ce travail — Bushnell et Henniart utilisent les identités de caractères correspondantes, en caractéristique quelconque, dans leur travail commun [**11**] sur la correspondance de Langlands locale explicite.

Signalons une autre application possible de ce travail. Pour F de caractéristique nulle, les travaux de Labesse et Langlands [**53**] sur $\mathrm{SL}_2(F)$ ont récemment été généralisés à $\mathrm{SL}_n(F)$ par Hiraga et Saito [**42**]. Ce mémoire devrait permettre d'étendre tout cela au cas où F est de caractéristique non nulle.

Le projet d'étendre les théories du changement de base et de l'induction automorphe à la caractéristique non nulle est désormais achevé. La rédaction comporte sept parties. Les trois premières sont déjà publiées [**39, 40, 41**], tandis que les quatre suivantes ont été regroupées dans ce mémoire, dont elles forment les quatre chapitres — on s'y référera par **I**, ..., **IV**:

— Chapitre I: *Le lemme fondamental pour le changement de base pour* GL_n *sur un corps local de caractéristique non nulle.*

— Chapitre II: *Sur le changement de base local pour* GL_n.

— Chapitre III: *Formules de caractères pour l'induction automorphe, II.*

— Chapitre IV: *Sur le changement de base et l'induction automorphe pour les corps de fonctions.*

Suivant le conseil de l'éditeur, nous nous sommes efforcés de les faire ressembler à des chapitres d'un "vrai"mémoire, plutôt qu'à une collection d'articles. En particulier nous avons unifié les notations et les références — ces dernières sont regroupées dans une bibliographie commune en fin d'ouvrage —, et éliminé autant que faire se peut les redites. Chacun des chapitres a conservé néanmoins une relative indépendance et peut être lu séparément, ce qui représente aussi un avantage. L'objet final est, on l'espère, d'une lecture agréable.

Pour préciser les identités de caractères exprimant changement de base et induction automorphe, fixons aussi un générateur σ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$, et un générateur κ du groupe $\mathfrak{K}(E/F)$ des caractères complexes lisses de $F^\times$ qui sont triviaux sur le groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$.

La théorie du changement de base est une application de relèvement $\pi \mapsto \pi_E$ entre classes d'isomorphisme de représentations (complexes, lisses) irréductibles π de $\mathrm{GL}_n(F)$ et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles *σ-stables* π_E de $\mathrm{GL}_n(E)$: une représentation Π de $\mathrm{GL}_n(E)$ est dite σ-stable si elle isomorphe à $\Pi^\sigma = \Pi \circ \sigma$. Cette application est caractérisée, si π est tempérée — ou même, plus généralement, générique unitaire — par une identité de caractères reliant le caractère σ-tordu de $\Pi = \pi_E$ au caractère ordinaire de π: fixé un isomorphisme A entre Π et Π^σ, il existe une constante $c = c(\pi, \Pi, A) \neq 0$ telle que

$$\Theta_\Pi^A(\delta) = c\Theta_\pi(\gamma)$$

pour toute paire d'éléments réguliers (δ, γ) de $\mathrm{GL}_n(E) \times \mathrm{GL}_n(F)$ tels que γ soit conjugué dans $G(E)$ à $N(\delta) = \delta\delta^\sigma \cdots \delta^{\sigma^{d-1}}$; ici Θ_Π^A désigne la fonction caractère associée à la distribution $\mathrm{tr}(\Pi \circ A)$ sur $\mathrm{GL}_n(E)$, et Θ_π celle associée à la distribution $\mathrm{tr}(\pi)$ sur $\mathrm{GL}_n(F)$.

De même, la théorie de l'induction automorphe est une application de relèvement $\pi \mapsto \pi^F$ entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles π de $\mathrm{GL}_m(E)$ et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles *κ-stables* π^F de $\mathrm{GL}_{md}(F)$: une représentation Π de $\mathrm{GL}_{md}(F)$ est dite κ-stable si elle isomorphe à $\kappa\Pi = \Pi \otimes (\kappa \circ \det)$.

Comme pour le changement de base, cette application est caractérisée, du moins si ρ est générique unitaire, par une identité de caractères reliant le caractère κ-tordu de $\Pi = \pi^F$ au "caractère pondéré"de π: fixés un plongement de $\mathrm{GL}_m(E)$ dans $\mathrm{GL}_{md}(F)$, des facteurs de transferts, et un isomorphisme A entre $\kappa\Pi$ et Π, il existe une constante $c' = c'(\pi, \Pi, A) \neq 0$ telle que

$$\Theta_\Pi^A(\gamma) = c'\widetilde{\Theta}_\pi(\gamma)$$

pour tout élément régulier γ de $\mathrm{GL}_m(E)$; ici le caractère pondéré $\widetilde{\Theta}_\pi$ de π en γ est une somme de valeurs du caractère ordinaire Θ_π en des conjugués de γ sous $\mathrm{GL}_{md}(F)$, pondérée par les facteurs de transfert.

Dans les deux théories, la construction du relèvement se fait par voie globale, après réduction du problème au cas où π est une série discrète. L'ingrédient essentiel dans cette construction est le "lemme fondamental". Le relèvement d'une série discrète est, dans le cas du changement de base, une *série σ-discrète*, et dans le cas de l'induction automorphe, une *série κ-discrète*. L'existence de l'application de relèvement est assurée par celle de pseudo-coefficients pour le caractère ordinaire d'une série discrète, et sa surjectivé est obtenue grâce à l'existence de pseudo-coefficients pour le caractère tordu d'une série σ-discrète (resp. κ-discrète).

Décrivons brièvement le contenu des chapitres de ce mémoire (on renvoie à l'introduction de chacun d'eux pour une description plus détaillée). Le corps F est maintenant supposé de caractéristique non nulle.

Dans le chapitre I, on démontre le lemme fondamental pour le changement de base, à partir de la méthode de Labesse [**50**] en caractéristique nulle.

Dans le chapitre II, on construit l'application de relèvement pour le changement de base, et l'on décrit ses principales propriétés, comme dans le premier chapitre du livre d'Arthur-Clozel [**1**]. Notons que si Π est un relèvement à $\mathrm{GL}_n(E)$ d'une représentation irréductible générique unitaire de $\mathrm{GL}_n(F)$, alors Π est encore générique. On peut donc normaliser l'isomorphisme A entre Π et Π^σ grâce aux modèles de Whittaker. Notant $I_\sigma(\Pi)$ l'opérateur normalisé, on a $c(\pi, \Pi, I_\sigma(\Pi)) = 1$ avec les notations plus haut. Dans ce chapitre, on établit aussi le transfert des fonctions à support dans les éléments réguliers, ainsi que l'existence de pseudo-coefficients pour les caractères tordus des séries σ-discrètes.

Dans le chapitre III, on construit l'application de relèvement dans le cas de l'induction automorphe. Contrairement au cas du changement de base, une partie du travail a déjà été écrite: le lemme fondamental pour l'induction automorphe a été démontré dans [**39, 40**], tandis que l'existence de pseudo-coefficients pour les caractères tordus des séries κ-discrètes a été établie dans [**41**]. Si Π est un relèvement à $\mathrm{GL}_n(F)$ d'une représentation irréductible générique unitaire π de $\mathrm{GL}_m(E)$, alors Π est encore générique, et l'on peut comme pour le changement de base normaliser l'isomorphisme A entre $\kappa\Pi$ et Π grâce aux modèles de Whittaker. Notons $I_\kappa(\Pi)$ cet opérateur normalisé. Comme dans [**40**], on montre que la constante $c'(\pi, \Pi, I_\kappa(\Pi))$ ne dépend pas de π ni de Π, mais seulement des choix effectués au départ.

Dans le chapitre IV, on montre que les applications de changement de base local et d'induction automorphe locale établies aux chapitres II et III, sont compatibles au changement de base global et à l'induction automorphe globale déduits, via la correspondance de Langlands globale établie par Lafforgue [**55**], de la restriction et de l'induction des représentations galoisiennes.

Chaque chapitre de ce mémoire est divisé en sections — celles indiquées dans la table des matières —, elles-mêmes subdivisées en sous-sections. Les numéros des sections et des sous-sections sont précédés du numéro du chapitre. Les théorèmes (resp. propositions, définitions, etc.) ne sont pas numérotés, sauf lorsqu'il y a plus d'un théorème à l'intérieur d'une même sous-section, auquel cas on les appelle théorème 1, théorème 2, etc. Lorsqu'on fera référence à un résultat à l'intérieur d'un chapitre, on omettra le numéro du chapitre devant la sous-section: par exemple, s'agissant du chapitre II, on écrira "d'après le lemme 1 de 5.11"ou "d'après **II**.5.11, lemme 1", suivant que l'on est à l'intérieur ou à l'extérieur du chapitre II.

CHAPITRE I

LE LEMME FONDAMENTAL POUR LE CHANGEMENT DE BASE POUR GL_n SUR UN CORPS LOCAL DE CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Soit E/F une extension finie non ramifiée de corps commutatifs localement compacts non archimédiens de caractéristique > 0, et soit $n \geq 1$ un entier. Dans ce chapitre on montre, en suivant la méthode qu'a utilisée Labesse en caractéristique nulle, le lemme fondamental pour le changement de base de $\mathrm{GL}(n, F)$ à $\mathrm{GL}(n, E)$.

I.1. Introduction

I.1.1. – Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, et soit E une extension finie non ramifiée de F, de degré l. Choisissons un générateur σ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$. Fixons un entier $n \geq 1$, et notons G le schéma en groupes GL_n. On note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F, et $K = G(\mathfrak{o}_F)$ le groupe des points $\mathfrak{o}_F$-rationnels de G; c'est un sous-groupe compact maximal de $G(F)$. De même, on note K_E le sous-groupe compact maximal $G(\mathfrak{o}_E)$ de $G(E)$. Soient dg et dg_E les mesures de Haar sur $G(F)$ et sur $G(E)$ qui donnent le volume 1 à K et à K_E. Si δ est un élément de $G(E)$, l'ensemble des $g \in G(E)$ tels que $g^{-1}\delta g^{\sigma} = \delta$, est un groupe unimodulaire, qu'on appelle le *σ-centralisateur* de δ dans $G(E)$; il est noté $G_{\delta}^{\sigma}(F)$. Si de plus la *σ-orbite* de δ dans $G(E)$ — c'est-à-dire l'ensemble des $g^{-1}\delta g^{\sigma}$ pour $g \in G(E)$ — est fermée dans $G(E)$, le choix d'une mesure de Haar dg_{δ}^{σ} sur $G_{\delta}^{\sigma}(F)$ définit une distribution $\Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\cdot, \delta)$ sur $G(E)$:

$$\Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\phi, \delta) = \int_{G_{\delta}^{\sigma}(F)\backslash G(E)} \phi(g^{-1}\delta g^{\sigma}) \frac{dg_E}{dg_{\delta}^{\sigma}}$$

pour toute fonction (à valeurs complexes) ϕ sur $G(E)$ localement constante et à support compact. D'autre part, si γ est un élément de $G(F)$, le choix d'une mesure de Haar dg_γ sur le centralisateur $G_\gamma(F)$ de γ dans $G(F)$, définit une distribution $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$ sur $G(F)$:

$$\Lambda^{G(F)}(f,\gamma) = \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma}$$

pour toute fonction f sur $G(F)$, localement constante et à support compact — on sait que l'intégrale ci-dessus converge absolument, que l'orbite de γ dans $G(F)$ soit fermée ou non dans $G(F)$.

I.1.2. – On dispose d'une norme

$$G(E) \to G(E),\ \delta \mapsto N(\delta) = \delta\delta^\sigma \cdots \delta^{\sigma^{l-1}}$$

qui induit une application injective entre l'ensemble des classes de σ-conjugaison (i.e. les σ-orbites) dans $G(E)$ et l'ensemble des classes de conjugaison (i.e. les orbites) dans $G(F)$: si δ est un élément de $G(E)$, alors $N(\delta)$ est conjugué dans $G(E)$ à un élément $\gamma \in G(F)$, et l'orbite de γ dans $G(F)$ est uniquement déterminée par la σ-orbite de δ dans $G(E)$. On dit que deux éléments $\delta \in G(E)$ et $\gamma \in G(F)$ sont *associés* s'il existe un $g \in G(E)$ tel que $g^{-1}N(\delta)g = \gamma$; notons qu'alors on a $\gamma = N(g^{-1}\delta g^\sigma)$. Un élément de $G(F)$ est dit *régulier* si son polynôme caractéristique est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts (on ne demande pas que ces derniers soient séparables sur F). Soit $(\delta,\gamma) \in G(E) \times G(F)$ une paire d'éléments associés. Si γ est régulier, la σ-orbite de δ dans $G(E)$ est fermée dans $G(E)$, et il existe un $x \in G(E)$ tel que $x^{-1}G_\delta^\sigma(F)x = G_\gamma(F)$. On suppose dans ce cas que dg_γ est la mesure déduite de dg_δ^σ via l'isomorphisme de groupes topologiques $G_\delta^\sigma(F) \to G_\gamma(F)$, $g \mapsto xgx^{-1}$; cette mesure dg_γ est bien définie (i.e. elle ne dépend pas du choix de x), et on l'appelle la *mesure associée* à dg_δ^σ.

On dit que deux fonctions localement constantes et à support compact ϕ sur $G(E)$ et f sur $G(F)$ *concordent*, ou sont *associées*, ou *se transfèrent*, si $\Lambda^{G(F)}(f,\gamma) = 0$ pour tout élément régulier γ de $G(F)$ qui n'est pas une norme de $G(E)$, et si

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta) = \Lambda^{G(F)}(f,\gamma)$$

pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E) \times G(F)$ telle que γ soit régulier — on dit aussi que ϕ et f *concordent en* (δ,γ) si l'égalité précédente vaut.

I.1.3. – Notons $\mathscr{H}_F = \mathscr{H}(G(F),K)$ l'algèbre de Hecke sphérique, formée des fonctions sur $G(F)$ qui sont bi-invariantes par K et à support compact. De la même manière, on définit $\mathscr{H}_E = \mathscr{H}(G(E),K_E)$. Via les isomorphismes de Satake pour $\mathscr{H}_E$ et pour $\mathscr{H}_F$, est défini un homomorphisme d'algèbres $b : \mathscr{H}_E \to \mathscr{H}_F$. Le "lemme fondamental"pour le changement de base s'énonce comme suit: *pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, ϕ et $b(\phi)$ concordent.*

I.1.4. – Si F est de caractéristique nulle, ce lemme fondamental est démontré non seulement pour $G = \mathrm{GL}_n$ [**1, 47**], mais plus généralement pour tout groupe réductif connexe G défini et *non ramifié* sur F — c'est-à-dire quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de F — [**19, 49, 50**]. La première partie de la démonstration est due à Kottwitz [**47, 49**]: *les unités de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$ concordent.* Le cas général [**1, 19, 50**] s'obtient par voie globale, par comparaison d'une formule des traces pour $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ et d'une formule des traces tordue pour $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$, où $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ est une extension finie de corps de nombres telle qu'en une place finie v_0 de $\mathbf{F}$ inerte dans $\mathbf{E}$, l'extension de corps $\mathbf{E}_{v_0}/\mathbf{F}_{v_0}$ est isomorphe à E/F.

Si maintenant F est de caractéristique > 0, le résultat de Kottwitz est encore valable [**57**]: les unités de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$ concordent. Quant aux autres éléments de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$, l'idée consiste à produire deux familles $\mathscr{F}_E$ et $\mathscr{F}_F$ de fonctions concordantes — au sens où les éléments de $\mathscr{F}_E$ sont des fonctions sur $G(E)$ localement constantes et à support compact, ceux de $\mathscr{F}_F$ sont des fonctions sur $\mathscr{F}_F$ localement constantes et à support compact, et il existe une bijection $\iota : \mathscr{F}_E \rightarrow \mathscr{F}_F$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathscr{F}_E$, ϕ et $\iota(\phi)$ concordent —, qui permettent de séparer les composants locaux des représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ et de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ donnant une contribution non triviale à la trace (pour un énoncé précis, cf. 1.6). Les *fonctions régulières* utilisées dans [**1**] et dans [**19**] appartiennent aux algèbres de Hecke sphériques $\mathscr{H}_E$ et $\mathscr{H}_F$. Les *fonctions élémentaires* utilisées dans [**50**] ne sont pas sphériques, mais ne sont pas très loin de l'être: elles ne "voient"que les traces des représentations irréductibles ayant un vecteur non nul fixé par un sous sous-groupe d'Iwahori. La démonstration de Labesse [**50**] est très voisine de celle d'Arthur-Clozel [**1, 19**], dont elle reprend d'ailleurs la partie finale — le principe de densité de Kazhdan. Elle est cependant beaucoup plus élémentaire, puisque le seul résultat fin d'analyse harmonique qu'elle utilise est l'intégrabilité locale des caractères σ-tordus des représentations admissibles σ-stables de longueur finie de $G(E)$, qui est démontrée dans [**60**] — du moins pour les représentations irréductibles. On vérifie ici qu'elle passe en toute caractéristique. L'analyse harmonique en caractéristique non nulle constituant un terrain miné, on s'est efforcé de rédiger entièrement les démonstrations, même celles qui sont en général "laissées au lecteur". En particulier, on a traité en détail le cas des places de $\mathbf{F}$ qui ne sont pas inertes dans $\mathbf{E}$.

I.1.5. – Ce chapitre a été rédigé il y a plusieurs années (le tapuscrit dont il est issu date d'avril 2004). À l'époque de cette rédaction, Ngô Bao Châu annonçait une preuve du lemme fondamental pour le changement de base en caractéristique > 0, complètement différente de celle présentée ici: grâce à des méthodes géométriques, l'auteur établit directement une égalité globale de changement de base (en remplaçant les identités locales données par le lemme fondamental, par le théorème de densité de Cĕbotarev). La preuve de Ngô Bao Châu est désormais publiée [**64**]. Mentionnons aussi qu'il existe une troisième approche possible, celle qui consiste à tirer le résultat en caractéristique > 0 du résultat en caractéristique nulle par la méthode des corps proches, comme nous l'avons fait pour le lemme fondamental pour l'induction automorphe [**39**]. Mais nous avons préféré la méthode présente, qui met en place les outils d'analyse harmonique, locale et globale, qui permettront de développer (à venir) la théorie complète, locale et globale, du changement de base.

Insistons sur le fait que ce chapitre ne contient pas d'argument vraiment nouveau: nous écrivons les détails de [**50**] et [**1**, ch. 1] dans le cas de caractéristique > 0, parce que nous en avons besoin dans d'autres travaux, et parce que la démonstration de Ngô [**64**] n'est pas accessible pour de nombreux lecteurs.

I.1.6. – Décrivons brièvement le contenu du chapitre. Il est divisé en six sections (la première est cette introduction). Pour utiliser la formule des traces globale, on a besoin de considérer la situation plus générale suivante: Σ est un groupe fini cyclique, et E est une F-algèbre cyclique de groupe Σ. Le choix d'un générateur σ de Σ définit une norme $N : G(E) \rightarrow G(E)$ comme en 1.2.

Dans la section 2, on rappelle le lien, fourni par la norme, entre les classes de σ-conjugaison dans $G(E)$ et les classes de conjugaison dans $G(F)$. On introduit les notions d'intégrales orbitales sur $G(F)$, et — pour les éléments σ-fermés de $G(E)$ — de σ-intégrales orbitales sur $G(E)$. Puis on montre l'existence du transfert pour les fonctions à support régulier, c'est-à-dire entre:

- d'une part les fonctions ϕ sur $G(E)$ qui sont localement constantes et à support compact contenu dans l'ensemble des éléments *σ-réguliers* de $G(E)$, i.e. ceux qui sont associés à des éléments réguliers de $G(F)$,
- d'autre part les fonctions f sur $G(F)$ qui sont localement constantes et à support compact contenu dans l'ensemble des éléments réguliers de $G(F)$, telles que $\Lambda^{G(F)}(f,\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in G(F)$ qui n'est pas une norme de $G(E)$.

Dans la section 3, on suppose que l'algèbre cyclique E/F est non ramifiée. On rappelle le résultat de Kottwitz, à savoir le lemme fondamental pour les unités de $\mathcal{H}_E$ et de $\mathcal{H}_F$ dans le cas où E/F est une extension de corps; puis on l'étend au cas d'une algèbre cyclique (non ramifiée). Notons que les unités de $\mathcal{H}_E$ et de $\mathcal{H}_F$ concordent non seulement en les éléments réguliers, mais plus généralement en les éléments fermés, c'est-à-dire en les paires d'éléments associés (δ, γ) de $G(E) \times G(F)$ telles que γ soit *d'orbite fermée* dans $G(F)$ — pour une telle paire (δ, γ), on peut aussi associer à toute mesure de Haar sur $G_\delta^\sigma(F)$ une mesure de Haar sur $G_\gamma(F)$, cf. 2.5.

Dans la section 4, on suppose que E/F est une extension de corps non ramifiée. On rappelle, pour $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, la définition des fonctions élémentaires ϕ_ν^σ sur $G(E)$ et $f_{l\nu}$ sur $G(F)$ de Labesse. Par construction, ces fonctions concordent en les éléments fermés.

Dans a section5, on continue avec les hypothèses de la section 4. On commence par étendre à toutes les représentations (lisses) admissibles σ-stables de longueur finie de $G(E)$, le résultat d'intégrabilité locale pour les traces σ-tordues prouvé dans [**60**]. Puis, grâce à la version tordue du résultat de Casselman reliant la valeur du caractère en un élément régulier, à la valeur en ce même élément du caractère d'un certain module de Jacquet de la représentation (5.2, lemme), on en déduit une formule pour la trace σ-tordue sur ϕ_ν^σ d'une représentation irréductible σ-stable de $G(E)$. Cette formule implique que ϕ_ν^σ ne voit que les traces σ-tordues des représentations irréductibles σ-stables de $G(E)$ ayant un vecteur non nul fixé par un sous-groupe d'Iwahori de $G(E)$. Puisque toutes les représentations qui interviendront par la suite seront composants locaux de représentations automorphes cuspidales, on peut — comme il est suggéré dans la remarque suivant la proposition 9' de [**50**] — se limiter aux représentations irréductibles *génériques*, c'est-à-dire qui possèdent un modèle de Whittaker. Le résultat principal de cette section est le suivant (5.5, théorème):

Soit $\{\pi_i : i \in I\}$ une famille finie de représentations irréductibles génériques σ-stables de $G(E)$ deux à deux non isomorphes, et soit $\{\rho_j : j \in J\}$ une famille finie de représentations irréductibles génériques de $G(F)$ deux à deux non isomorphes. Soient aussi deux familles de nombres complexes $\{a_i : i \in I\}$ et $\{b_j : j \in J\}$. Si pour tout $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ tel que les ν_i soient deux à deux distincts, on a

$$\sum_{i\in I} a_i \langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_{\pi_i}^\sigma \rangle = \sum_{j\in J} b_j \langle f_{l\nu}, \Theta_{\rho_j} \rangle,$$

alors pour toute fonction $\phi \in \mathcal{H}_E$, on a

$$\sum_{i\in I} a_i \langle \phi, \Theta_{\pi_i}^\sigma \rangle = \sum_{j\in J} b_j \langle b(\phi), \Theta_{\rho_j} \rangle.$$

Dans cet énoncé, Θ_{ρ_j} désigne la distribution $f \mapsto \mathrm{trace}(\rho_j(f)dg)$ sur $G(F)$, et $\Theta_{\pi_i}^\sigma$ désigne la distribution $\phi \mapsto \mathrm{trace}(\pi_i(\phi)dg_E \circ A_\sigma(\pi_i))$ sur $G(E)$, où $A_\sigma(\pi_i)$ est l'isomorphisme entre π_i et π_i^σ normalisé grâce au modèle de Whittaker de π_i. Notons que cette restriction aux représentations génériques ne conduit pas à une vraie simplification de la preuve de Labesse (cf. le paragraphe précédant le théorème de 5.5); il s'agit en fait d'une variante de cette preuve. Mais on aurait pu se contenter ici d'un résultat plus faible, ne faisant intervenir que des représentations génériques *unitaires* (cf. 5.5, remarque 2). On a décidé de démontrer l'énoncé plus général parce qu'il pourra nous servir ailleurs.

Dans la section 6, on rappelle les résultats du ch. 1 de [**1**] utilisés dans la démonstration du lemme fondamental. On fixe une extension finie $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ de corps globaux telle qu'en une place v_0 de $\mathbf{F}$ inerte dans $\mathbf{E}$, l'extension de corps $\mathbf{E}_{v_0}/\mathbf{F}_{v_0}$ est isomorphe à E/F. On rappelle la formule des traces de Deligne-Kazhdan (6.2, lemme) et sa version σ-tordue (6.3, lemme), ainsi que la formule reliant l'une à l'autre (6.4, proposition). Enfin on démontre le lemme fondamental (6.6, théorème): les arguments sont les mêmes que dans [**1**, ch. 1, § 4, pp. 42–47], à ceci près que l'on remplace [**1**, ch.1, lemma 4.10] par le théorème de 5.5.

Remarque. – Tous les arguments utilisés dans ce chapitre sont indépendants de la caractéristique du corps de base, qu'il soit local ou global; d'ailleurs jusqu'au n° 6.5 inclus, il n'y a pas d'hypothèse sur la caractéristique de ce corps.

I.2. Transfert des fonctions à support régulier

I.2.1. – Soit un entier $n \geq 1$. On note $G = \mathrm{GL}_n$ le schéma en groupes qui à tout anneau commutatif A associe le groupe $G(A) = \mathrm{GL}(n, A)$, et Z le centre de G, c'est-à-dire le sous-schéma en groupes fermé $A \mapsto Z(A) = \{\mathrm{diag}(x, \dots, x) : x \in A\}$ de G. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma en groupes, pour tout anneau commutatif A, on note $\mathfrak{X}_A$ le A-schéma en groupes $\mathfrak{X} \times_{\mathbb{Z}} A$.

Soit F un corps commutatif quelconque. On fixe un entier $l \geq 1$, un groupe cyclique Σ de cardinal l, et un générateur σ de Σ. On considère une F-algèbre cyclique E de groupe Σ; cette algèbre est un produit de corps $E = E_1 \times \cdots \times E_r$ où r est un entier divisant l, disons $l = rl_1$, et où E_i est une extension cyclique de F, de groupe de Galois engendré par $\tau = \sigma^r$. On choisit les notations de sorte que $\sigma E_1 = E_r$ et $\sigma E_{i+1} = E_i$ pour $i = 1, \dots, r-1$, et l'on identifie E à $E_1^r = (E_1)^r$ via l'application $(x_1, x_2, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \sigma x_2, \dots, \sigma^{r-1} x_r)$. L'opération de σ sur E_1^r s'écrit alors $\sigma(x_1, \dots, x_r) = (x_2, \dots, x_{r-1}, \tau x_1)$, et le corps F, plongé diagonalement dans E_1^r, coïncide avec le sous-anneau de E formé des éléments fixés par σ. On note $N_{E/F}$ l'application norme de $E^\times$ à $F^\times$, donnée par $N_{E/F}(x) = \prod_{i=0}^{l-1} \sigma^i x$. On définit de la même manière l'application norme de $E_1^\times$ à $F^\times$, que l'on note $N_{E_1/F}$. Alors pour $x = (x_1, \dots, x_r) \in (E_1^\times)^r$, on a $N_{E/F}(x) = N_{E_1/F}(\prod_{i=1}^r x_i)$. En particulier, les groupes des normes $N_{E/F}(E^\times)$ et $N_{E_1/F}(E_1^\times)$ coïncident.

On identifie $G(E) = G(E_1) \times \cdots \times G(E_r)$ à $G(E_1)^r$ comme ci-dessus. L'opération de σ sur $G(E_1)^r$ est alors décrite de la même manière, et le groupe $G(F)$, plongé diagonalement dans $G(E_1)^r$, coïncide avec le sous-groupe de $G(E)$ formé des éléments fixés par σ.

On note N l'application norme de $G(E)$ à $G(E)$ donnée par

$$N(\delta) = \delta \delta^\sigma \cdots \delta^{\sigma^{l-1}},$$

où l'on a posé $\delta^{\sigma^i} = \sigma^i \delta$. Pour éviter toute confusion, on note N' l'application de $G(E_1)^r$ dans $G(E_1)^r$ déduite de N via l'identification $G(E) = G(E_1)^r$. De même, on note N_1 l'application norme de $G(E_1)$ à $G(E_1)$ donnée par $N_1(\delta) = \delta \delta^\tau \cdots \delta^{\tau^{l_1-1}}$. Pour $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in G(E_1) \times \cdots \times G(E_r)$, la composante de $N(\delta)$ sur $G(E_i)$

est $\delta_i\delta_{i+1}^{\sigma}\cdots\delta_{i+l-1}^{\sigma^{l-1}}$, où les indices sont pris modulo r. On en déduit que pour $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_r)\in G(E_1)^r$, on a

$$N'(\delta) = (N_1(\delta_1\cdots\delta_r), N_1(\delta_2\cdots\delta_r\delta_1^{\tau}),\ldots,N_1(\delta_r\delta_1^{\tau}\cdots\delta_{r-1}^{\tau})).$$

Posant $y_i = \delta_1\cdots\delta_i$ pour $i=1,\ldots,r$, $y=y_r$ et $x=(1,y_1,y_2,\ldots,y_{r-1})$, on a donc

$$N'(\delta) = x^{-1}(N_1(y),\ldots,N_1(y))x.$$

Soient p^1 et N^1 les applications de $G(E)$ dans $G(E_1)$ donnés par

$$p^1(\delta)=\delta_1 \quad \text{et} \quad N^1(\delta)=\delta_1\delta_2^{\sigma}\cdots\delta_r^{\sigma^{r-1}}$$

pour $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in G(E_1)\times\cdots\times G(E_r)$. Les applications p'^1 et N'^1 de $G(E_1)^r$ dans $G(E_1)$ déduites de p^1 et de N^1 via l'identification $G(E)=G(E_1)^r$, sont données par

$$p'^1(\delta)=\delta_1 \quad \text{et} \quad N'^1(\delta)=\delta_1\cdots\delta_r$$

pour $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in G(E_1)^r$. D'après ce qui précède, on a $p'^1\circ N' = N_1\circ N'^1$ et

$$N'^1(g^{-1}\delta g^{\sigma}) = p'^1(g)^{-1}N'^1(\delta)p'^1(g)^{\tau}$$

pour δ, $g\in G(E_1)^r$.

I.2.2. – Pour $\delta\in G(E)$, on note $\mathcal{O}_\sigma(\delta)$ la σ-orbite et $G_\delta^\sigma(F)$ le σ-centralisateur, de δ dans $G(E)$, définis par

$$\mathcal{O}_\sigma(\delta)=\{g^{-1}\delta g^{\sigma} : g\in G(E)\},$$
$$G_\delta^\sigma(F)=\{g\in G(E) : g^{-1}\delta g^{\sigma}=\delta\}.$$

La σ-conjugaison $g\mapsto g^{-1}\delta g^{\sigma}$ dans $G(E)$ induit par passage au quotient une application bijective $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)\to\mathcal{O}_\sigma(\delta)$, et $G_\delta^\sigma(F)$ est le groupe des points F-rationnels du sous–F-schéma en groupes fermé G_δ^σ de $\mathrm{Res}_{E/F}(G_E)$ qui à toute F-algèbre commutative A associe le groupe

$$G_\delta^\sigma(A)=\{g\in G(A\otimes_F E) : g^{-1}\delta g^{\sigma}=\delta\}.$$

Ici, $\mathrm{Res}_{E/F}$ désigne le foncteur restriction à la Weil de E à F, et σ opère sur le groupe $G(A\otimes_F E)$ via le A-automorphisme $\mathrm{id}_A\otimes\sigma$ de $A\otimes_F E$.

Pour $\gamma\in G(F)$, on note $\mathcal{O}(\gamma)$ l'orbite et $G_\gamma(F)$ le centralisateur, de γ dans $G(F)$, définis par

$$\mathcal{O}(\gamma)=\{g^{-1}\gamma g : g\in G(F)\},$$
$$G_\gamma(F)=\{g\in G(F) : g^{-1}\gamma g=\gamma\}.$$

De même, la conjugaison $g\mapsto g^{-1}\gamma g$ dans $G(F)$ donne une application bijective $G_\gamma(F)\backslash G(F)\to\mathcal{O}(\gamma)$, et G_γ est le sous–F-schéma en groupes fermé de G_F qui à toute F-algèbre commutative A associe le groupe

$$G_\gamma(A)=\{g\in G(A) : g^{-1}\gamma g=\gamma\}.$$

Le résultat suivant est bien connu, cf. [**1**, ch. 1]:

Lemme. – *Soient δ, $\delta' \in G(E)$.*

(1) *Il existe un $g \in G(E)$ tel que $g^{-1}N(\delta)g \in G(F)$. Si g, $h \in G(E)$ sont tels que $g^{-1}N(\delta)g \in G(F)$ et $h^{-1}N(\delta)h \in G(F)$, alors $\mathcal{O}(g^{-1}N(\delta)g) = \mathcal{O}(h^{-1}N(\delta)h)$.*
(2) *S'il existe un $g \in G(E)$ tel que $g^{-1}N(\delta)g = N(\delta')$, alors $\mathcal{O}_\sigma(\delta) = \mathcal{O}_\sigma(\delta')$.*

Démonstration. – Si E/F est une extension de corps, i.e. si $E = E_1$, la démonstration est déjà écrite: [**1**, ch. 1, lemma 1.1]. Notons que dans loc. cit., le corps F est supposé de caractéristique nulle, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire (cf. la démonstration du lemme 6.1 de [**60**]).

Si maintenant E/F est une extension cyclique quelconque, on se ramène à l'extension de corps E_1/F grâce à 2.1. Écrivons $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r) \in G(E_1)^r$, et posons $y_i = \delta_1 \cdots \delta_i$ pour $i = 1, \ldots, r$, $y = y_r$ et $x = (1, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1})$. Puisque $N'(\delta) = x^{-1}(N_1(y), \ldots, N_1(y))x$ et que $N_1(y)$ est conjugué dans $G(E_1)$ à un élément de $G(F)$, $N'(\delta)$ est conjugué dans $G(E_1)^r$ à un élément de $G(F)$. Soient maintenant g, $h \in G(E)^r$ tels que les éléments $g^{-1}N'(\delta)g$ et $h^{-1}N'(\delta)h$ appartiennent à $G(F)$. Posons $g_1 = p'^1(g)$ et $h_1 = p'^1(h)$. Puisque $p'^1(g^{-1}N'(\delta)g) = g_1^{-1}N_1(y)g_1$ et $p'^1(h^{-1}N'(\delta)h) = h_1^{-1}N_1(y)h_1$, l'orbite de $g^{-1}N'(\delta)g$ dans $G(F)$ coïncide avec celle de $h^{-1}N'(\delta)h$. Cela démontre le point (1).

Quant au point (2), écrivons $\delta' = (\delta'_1, \ldots, \delta'_r) \in G(E_1)^r$. Posons $y' = p'^1(\delta')$. Soit $g \in G(E_1)^r$ tel que $g^{-1}N'(\delta)g = N'(\delta')$. Puisque $p'^1(g)^{-1}N_1(y)p'^1(g) = N_1(y')$, il existe un $x_1 \in G(E_1)$ tel que $x_1^{-1}yx_1^\tau = y'$. Posons $x_{i+1} = \delta_i^{-1}x_i\delta'_i$ pour $i = 1, \ldots, r-1$, et $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Comme $x_r^{-1}\delta_r x_1^\tau = \delta'_r$, on a $x^{-1}\delta x^\sigma = \delta'$. Cela achève la démonstration du lemme. □

La norme N induit donc une application injective, que l'on note $\mathbb{N}$, entre l'ensemble des classes de σ-conjugaison dans $G(E)$ et l'ensemble des classes de conjugaison dans $G(F)$: si $\delta \in G(E)$, on choisit un $g \in G(E)$ tel que $g^{-1}N(\delta)g \in G(F)$, et l'on pose $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathcal{O}(g^{-1}N(\delta)g)$. De même, la norme N_1 induit une application injective, que l'on note $\mathbb{N}_1$, entre l'ensemble des classes de τ-conjugaison dans $G(E_1)$ et l'ensemble des classes de conjugaison dans $G(F)$. D'après la démonstration du lemme, pour $\delta \in G(E)$, on a

$$\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathbb{N}_1(\mathcal{O}_\tau(N^1(\delta))).$$

Définition. – Deux éléments $\delta \in G(E)$ et $\gamma \in G(F)$ sont dits *associés* si $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathcal{O}(\gamma)$.

I.2.3. – Supposons un instant que E/F est une extension de corps, i.e. supposons $E = E_1$. Alors d'après Kottwitz [**48**] (cf. aussi [**60**, lemme 6.3]), pour toute paire d'éléments associés (δ, γ) de $G(E) \times G(F)$, G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ: fixée une clôture séparable $\overline{F}$ de F, il existe un isomorphisme de $\overline{F}$-schémas en groupes ψ : $G_\delta^\sigma \times_F \overline{F} \to G_\gamma \times_F \overline{F}$ tel que pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, $\psi^{-1}\tau(\psi)$ soit un automorphisme intérieur de $G_\gamma \times_F \overline{F}$.

Revenons au cas général, i.e. on ne suppose plus $E = E_1$. D'après 2.2, pour δ, $g \in G(E)$, en écrivant $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r) \in G(E_1)^r$ et $g = (g_1, \ldots, g_r) \in G(E_1)^r$, on a $g^{-1}\delta g^\sigma = \delta$ si et seulement si $g_r^{-1}\delta_r g_1^\tau = \delta_r$ et $g_i^{-1}\delta_i g_{i+1} = \delta_i$ pour $i = 1, \ldots, r-1$; i.e. si et seulement si $g_1^{-1}N'^1(\delta)g_1^\tau = N'^1(\delta)$ et $g_{i+1} = \delta_i^{-1}g_i\delta_i$ pour $i = 1, \ldots, r-1$. Posant $y_i = \delta_1 \cdots \delta_i$ pour $i = 1, \ldots, r$, $y = y_r$ et $x = (1, y_1, y_2, \ldots, y_{r-1})$, l'application $g_1 \mapsto x^{-1}(g_1, \ldots, g_1)x$ de $G(E_1)$ dans $G(E_1)^r$ identifie donc $G_y^\tau(F)$ à $G_\delta^\sigma(F)$. Et d'après le paragraphe précédent, pour tout $\gamma \in G(F)$ associé à δ — i.e. dans l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathbb{N}_1(\mathcal{O}_\tau(y))$ —, G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ.

Un élément γ de $G(F)$ est dit *régulier* si son polynôme caractéristique $P_\gamma \in F[t]$ est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts (on ne demande pas que ces derniers soient séparables sur F). Si de plus P_γ est irréductible sur F, γ est dit (régulier) elliptique. On note $G(F)_{\mathrm{r}}$ l'ensemble des éléments réguliers de $G(F)$, et $G(F)_{\mathrm{e}}$ le sous-ensemble de $G(F)_{\mathrm{r}}$ formé des éléments elliptiques. Si γ est un élément régulier de $G(F)$, on dit que son image dans $\mathrm{PGL}(n, F)$ est *fortement régulière* si pour tout $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}\gamma g = z\gamma$ pour un $z \in Z(F)$, on a $g \in G_\gamma(F)$. On note $G(F)'$ l'ensemble des éléments (absolument) semi-simples réguliers de $G(F)$, c'est-à-dire le sous-ens emble de $G(F)_{\mathrm{r}}$ formé des éléments dont le polynôme caractéristique est séparable sur F, et l'on pose $G(F)'' = G(F)' \cap G(F)_{\mathrm{e}}$. Notons que pour $\gamma \in G(F)$, γ appartient à $G(F)'$ si et seulement si le F-schéma en groupes G_γ est un tore, auquel cas l'image de γ dans $\mathrm{PGL}(n, F)$ est *fortement régulière* si et seulement si son centralisateur dans $\mathrm{PGL}(n, F)$ est un tore.

Remarque 1. – L'ensemble $G(F)'$ est ouvert et dense dans $G(F)$: un élément γ de $G(F)$ est semisimple régulier si et seulement si $D_G(\gamma) \neq 0$, où l'élément $D_G(\gamma)$ de F est défini par

$$\det_F(t - \mathrm{Ad}_{G(F)}(\gamma) + 1; \mathrm{M}(n, F)) = D_G(\gamma)t^n + \cdots (\text{termes de plus haut degré}).$$

D'après [**10**, Appendix, prop. A.3], l'ensemble $G(F)_{\mathrm{r}}$ hérite de ces deux propriétés: il est ouvert et dense dans $G(F)$. Notons que dans loc. cit., les éléments réguliers de $G(F)$ sont appelés “quasi-réguliers”et les éléments semisimples réguliers sont appelés “réguliers”.

Un élément δ de $G(E)$ est dit *σ-régulier* si $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ est une orbite régulière dans $G(F)$. De même, un élément y de $G(E_1)$ est dit *τ-régulier* si $\mathbb{N}_1(\mathcal{O}_\tau(y))$ est une orbite régulière dans $G(F)$. Ainsi, un élément δ de $G(E)$ est σ-régulier si et seulement si l'élément $N^1(\delta)$ de $G(E_1)$ est τ-régulier. On note $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ l'ensemble des éléments σ-réguliers de $G(E)$.

Remarque 2. – Supposons $E = E_1$. D'après la démonstration de [**10**, Appendix, prop. A.3], l'ensemble $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ est ouvert et dense dans $G(E)$. Comme dans le cas non tordu, les éléments δ de $G(E)$ tels que l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ dans $G(F)$ soit semisimple régulière, sont ceux qui n'annulent pas une certaine fonction polynômiale; ils forment donc un ouvert dense de $G(E)$. Mieux (loc. cit.), l'ensemble des élements δ de $G(E)$ tels que $N(\delta)$ soit un élément semisimple régulier de $G(F)$, est dense dans $G(E)$.

Si $E \neq E_1$, via l'identification $G(E) = G(E_1)^r$ et l'application $N'^1 : G(E_1)^r \to G(E_1)$, on obtient que l'ensemble des éléments δ de $G(E)$ tels que l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ dans $G(F)$ soit semisimple régulière, forment encore un ouvert dense de $G(E)$. De même, $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}} = (N^1)^{-1}(G(E_1)_{\tau-\mathrm{r}})$ est ouvert et dense dans $G(E)$.

Soit $(\delta,\gamma) \in G(E)\times G(F)$ une paire d'éléments associés. Si γ est régulier, le groupe $G_\gamma(\overline{F})$ est isomorphe à $\overline{F}[\gamma]^\times$, donc est commutatif, et comme G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ, on a un isomorphisme de F-schémas en groupes $G_\delta^\sigma \xrightarrow{\sim} G_\gamma$. Si de plus $N(\delta) = \gamma$, puisque $G_\delta^\sigma(F)$ est contenu dans $G_\gamma(E)$, on a l'égalité $G_\delta^\sigma(F) = G_\gamma(F)$.

I.2.4. – On suppose désormais que F un corps commutatif localement compact non archimédien. On note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F, et $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$. Choisissons une uniformisante ϖ de F, et notons $|\ |_F$ la valeur absolue sur F normalisée par $|\varpi|_F = q^{-1}$ où q est le cardinal du corps résiduel de F. Pour $i = 1,\ldots,r$, on définit $\mathfrak{o}_{E_i}$, $\mathfrak{p}_{E_i}$ et $|\ |_{E_i}$ de la même manière, et l'on pose $\mathfrak{o}_E = \prod_{i=1}^r \mathfrak{o}_{E_i}$, $\mathfrak{p}_E = \prod_{i=1}^r \mathfrak{p}_{E_i}$ et $|\ |_E = \prod_{i=1}^r |\ |_{E_i}$.

Un élément γ de $G(F)$ est dit *fermé* si l'orbite $\mathcal{O}(\gamma)$ est fermée dans $G(F)$ pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique, c'est-à-dire si la F-algèbre $F[\gamma]$ est un produit de corps. Un élément δ de $G(E)$ est dit *σ-fermé* si l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ est fermée dans $G(F)$ pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique. En d'autres termes, pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$, δ est σ-fermé si et seulement si γ est fermé. De même, un élément y de $G(E_1)$ est dit *τ-fermé* si l'orbite $\mathbb{N}_1(\mathcal{O}_\tau(y))$ est fermée dans $G(F)$ pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique. D'après [**60**, 6], $y \in G(E_1)$ est τ-fermé si et seulement si la τ-orbite $\mathcal{O}_\tau(y)$ est fermée dans $G(E_1)$ pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique.

Si X est un espace topologique totalement discontinu, on note $C_{\mathrm{c}}^\infty(X)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur X qui sont localement constantes et à support compact.

Soit $\gamma \in G(F)$. La bijection $G_\gamma(F)\backslash G(F) \to \mathcal{O}(\gamma), g \mapsto g^{-1}\gamma g$ est un homéomorphisme, si l'on munit $G_\gamma(F)\backslash G(F)$ de la topologie quotient (théorème d'Arens [**63**, 2.13]; on sait en effet [**60**, prop. 5.1] que l'orbite $\mathcal{O}(\gamma)$ est localement fermée dans $G(F)$, donc localement compacte). D'après [**57**, 4.8.6], le centralisateur $G_\gamma(F)$ est unimodulaire. On peut donc choisir une mesure $G(F)$-invariante (à droite) $d\bar{g}_\gamma$ sur l'espace homogène $G_\gamma(F)\backslash G(F)$. Cette mesure définit une distribution $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$ sur $G(F)$:

$$\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)=\int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)d\bar{g}_\gamma$$

pour toute fonction $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$; d'après [**57**, 4.8.10 et 4.8.11], l'intégrale converge absolument.

Soit $\delta\in G(E)$. La bijection $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)\rightarrow\mathcal{O}_\sigma(\delta),\, g\mapsto g^{-1}\delta g^\sigma$ est un homéomorphisme, si l'on munit $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)$ de la topologie quotient (loc. cit.; on sait en effet [**60**, 7] que la σ-orbite $\mathcal{O}_\sigma(\delta)$ est localement fermée dans $G(E)$, donc localement compacte). Puisque pour $\gamma\in G(F)$ associé à δ, G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ, le σ-centralisateur $G_\delta^\sigma(F)$ est unimodulaire. On peut donc choisir une mesure $G(E)$-invariante (à droite) $d\bar{g}_\delta^\sigma$ sur l'espace homogène $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)$. Si δ est σ-fermé, la mesure $d\bar{g}_\delta^\sigma$ définit une distribution $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$ sur $G(E)$:

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta)=\int_{G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)}\phi(g^{-1}\delta g^\sigma)d\bar{g}_\delta^\sigma$$

pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$. En effet, on va voir que l'intégrale ci-dessus se ramène à une τ-intégrale orbitale dans $G(E_1)$. Écrivons $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_r)\in G(E_1)^r$ et posons $y=N'^1(\delta)$. Puisque $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))=\mathbb{N}_1(\mathcal{O}_\tau(y))$, δ est σ-fermé si et seulement si y est τ-fermé. Si y est τ-fermé, le choix d'une mesure $G(E_1)$-invariante (à droite) $d\bar{g}_y^\tau$ sur l'espace homogène $G_y^\tau(F)\backslash G(E_1)$ définit une distribution $\Lambda^{G(E_1)}(\cdot,y)$ sur $G(E_1)$:

$$\Lambda_\tau^{G(E_1)}(\phi_1,y)=\int_{G_y^\tau(F)\backslash G(E_1)}\phi_1(g^{-1}yg^\tau)d\bar{g}_y^\tau$$

pour toute fonction $\phi_1\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1))$; puisque la τ-orbite $\mathcal{O}_\tau(y)$ est fermée dans $G(E)$, l'intégrale converge absolument. Choisissons une mesure de Haar dg_{E_1} sur $G(E_1)$ et notons dg_E la mesure produit $dg_{E_1}^r$ sur $G(E)=G(E_1)^r$. Alors $d\bar{g}_\delta^\sigma$ est une mesure quotient de la forme $\frac{dg_E}{dg_\delta^\sigma}$ pour une (unique) mesure de Haar dg_δ^σ sur $G_\delta^\sigma(F)$. De même, $d\bar{g}_y^\tau$ est une mesure quotient de la forme $\frac{dg_{E_1}}{dg_y^\tau}$ pour une (unique) mesure de Haar dg_y^τ sur $G_y^\tau(F)$. Puisque $G_\delta^\sigma(F)=G_y^\tau(F)$, on peut choisir $d\bar{g}_y^\tau$ de telle manière que $dg^\sigma_\delta = dg^\tau_y$. Pour $g = (g_1, \ldots, g_r) \in G(E_1)^r$, posant

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1, \\ h_2 &= g_2^{-1}\delta_2\delta_3 \cdots \delta_r g_1^\tau, \\ &\vdots \\ h_i &= g_{i-1}^{-1}\delta_i\delta_{i+1} \cdots \delta_r g_1^\tau, \\ &\vdots \\ h_r &= g_r^{-1}\delta_r g_1^\tau, \end{aligned}$$

on obtient

$$g^{-1}\delta g^\sigma = (h_1 y h_1^\tau h_2^{-1}, h_2 h_3^{-1}, \ldots, h_{r-1}h_r, h_r).$$

Via l'identification $G(E) = G(E_1)^r$, $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E))$ s'identifie à $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E_1)) \otimes \cdots \otimes C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E_1))$. Pour toute fonction $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E))$ de la forme $\phi = \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_r$ avec $\phi_i \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E_1))$, on pose $\phi^* = \phi_1 * \cdots * \phi_r \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E_1))$ où le produit de convolution sur $G(E_1)$ est celui défini par dg_{E_1}. L'application $\phi \mapsto \phi^*$ se prolonge par linéarité en une application $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E)) \to C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E_1))$, et pour toute fonction $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E)$, le changement de variables ci-dessus entraîne l'égalité

$$\int_{G^\sigma_\delta(F)\backslash G(E)} \phi(g^{-1}\delta g^\sigma)\frac{dg^r_{E_1}}{dg^\sigma_\delta} = \int_{G^\tau_y(F)\backslash G(E_1)} \phi^*(g^{-1}yg^\tau)\frac{dg_{E_1}}{dg^\sigma_\delta}.$$

Si δ est σ-fermé, alors y est τ-fermé et l'intégrale de droite est absolument convergente; par conséquent celle de gauche l'est aussi. Dans ce cas la distribution $\Lambda^{G(E)}_\sigma(\cdot, \delta)$ sur $G(E)$ est bien définie, et avec les choix de mesures effectués plus haut, on a l'égalité

$$\Lambda^{G(E)}_\sigma(\phi, \delta) = \Lambda^{G(E_1)}_\tau(\phi^*, y)$$

pour toute fonction $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E))$.

Remarque. – Dans ce n° et dans les suivants, nous utilisons beaucoup Laumon [**57**] comme référence, parce qu'il donne des démonstrations valables, et pour cause, en caractéristique non nulle. D'ailleurs en adaptant [**57**, 4.8], on pourrait montrer que même si l'élément y n'est pas τ-fermé, l'intégrale $\int_{G^\tau_y(F)\backslash G(E_1)} \phi_1(g^{-1}yg^\tau)d\bar{g}^\tau_y$ est absolument convergente pour toute fonction $\phi_1 \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E_1))$; ce qui impliquerait, grâce au raisonnement ci-dessus, que même si δ n'est pas σ-fermé, l'intégrale $\int_{G^\sigma_\delta(F)\backslash G(E)} \phi(g^{-1}\delta g^\sigma)d\bar{g}^\sigma_\delta$ est absolument convergente pour toute fonction $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E))$. Mais nous n'en aurons pas besoin ici.

I.2.5. – Soit $(\delta,\gamma)\in G(E)\times G(F)$ une paire d'éléments associés telle que γ soit fermé. La F-algèbre $L=F[\gamma]$ est un produit $F_1\times\cdots\times F_s$ d'extensions finies (non nécessairement séparables) F_i de F, et $G_\gamma(F)$ est le groupe des points L-rationnels d'un L-schéma en groupes réductif connexe H_γ. En effet, il existe des entiers $n_i\geq 1$ pour $i=1,\ldots,s$, tels que $\sum_{i=1}^s n_i[F_i:F]=n$ et $G_\gamma(F)$ est conjugué dans $G(F)$ au groupe diagonal par blocs $\mathrm{GL}(n_1,F_1)\times\cdots\times\mathrm{GL}(n_s,F_s)$. Notons que le F-schéma en groupes G_γ est toujours connexe, mais il n'est réductif que si les extensions F_i/F sont toutes séparables, c'est-à-dire si γ est semisimple. Choisissons un $x\in G(E)$ tel que $x^{-1}N(\delta)x=\gamma$, et posons $\delta'=x^{-1}\delta x^\sigma$. Puisque $N(\delta')=\gamma$ et $\gamma^\sigma=\gamma$, on a l'inclusion $L\subset\{g\in\mathrm{M}(n,E):g\delta'=\delta'g^\sigma\}$. On en déduit que $G^\sigma_{\delta'}(F)$ est le groupe des points L-rationnels d'un L-schéma en groupes $H^\sigma_{\delta'}$. Puisque $G^\sigma_{\delta'}$ est une forme intérieure de G_γ, $H^\sigma_{\delta'}$ est une forme intérieure de H_γ. Le L-schéma en groupes $H^\sigma_{\delta'}$ est donc lui aussi réductif connexe, et d'après [**57**, 3.5], toute mesure de Haar dg_γ sur $H_\gamma(L)=G_\gamma(F)$ détermine une mesure de Haar $dg^\sigma_{\delta'}$ sur $H^\sigma_{\delta'}(L)=G^\sigma_{\delta'}(F)$. Notons dg^σ_δ la mesure de Haar sur $G^\sigma_\delta(F)$ déduite de $dg^\sigma_{\delta'}$ via l'isomorphisme de groupes topologiques $G^\sigma_\delta(F)\rightarrow G^\sigma_{\delta'}(F)$, $g\mapsto x^{-1}gx$. D'après le lemme de 2.1, dg^σ_δ ne dépend pas du choix de x; on l'appelle la *mesure associée à dg_γ*.

Fixons des mesures de Haar dg sur $G(F)$ et dg_{E_1} sur $G(E_1)$, et notons dg_E la mesure produit $dg^r_{E_1}$ sur $G(E)=G(E_1)^r$. Pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit fermé, on suppose que les mesures $d\bar{g}^\sigma_\delta$ et $d\bar{g}_\gamma$ définissant les distributions $\Lambda^{G(E)}_\sigma(\cdot,\delta)$ et $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$ sont de la forme $d\bar{g}^\sigma_\delta=\frac{dg_E}{dg^\sigma_\delta}$ et $d\bar{g}_\gamma=\frac{dg}{dg_\gamma}$ pour des mesures de Haar dg^σ_δ sur $G^\sigma_\delta(F)$ et dg_γ sur $G_\gamma(F)$ qui sont associées. Pour une telle paire (δ,γ), on a en particulier

$$\Lambda^{G(E)}_\sigma(\cdot,x^{-1}\delta x^\sigma)=\Lambda^{G(E)}_\sigma(\cdot,\delta)$$

pour tout $x\in G(E)$, et

$$\Lambda^{G(F)}(\cdot,y^{-1}\gamma y)=\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$$

pour tout $y\in G(F)$.

Définition. – Soit une paire de fonctions $(\phi,f)\in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E))\times C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F))$.

- Soit $(\delta,\gamma)\in G(E)\times G(F)$ une paire d'éléments associés telle que γ soit fermé. On dit que ϕ et f *concordent en* (δ,γ) si $\Lambda^{G(E)}_\sigma(\phi,\delta)=\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)$.
- On dit que ϕ et f *concordent*, ou *sont associées*, ou *se transfèrent*, si $\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)=0$ pour tout élément régulier γ de $G(F)$ qui n'est pas une norme de $G(E)$, et si ϕ et f concordent en toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit régulier.
- On dit que ϕ et f *concordent fortement*, ou *concordent en les éléments fermés*, si elles vérifient les conditions obtenues en remplaçant "régulier"par "fermé"dans la notion de concordance.

Il est en général difficile de produire des fonctions ϕ et f qui concordent, sauf dans le cas où ϕ est à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et f est à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$. En effet on a la proposition suivante:

Proposition. – (1) *Soit une fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. Alors il existe une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$ telle que ϕ et f concordent.*

(2) *Soit une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$ telle que pour tout $\gamma \in G(F)$ qui n'est pas une norme de $G(E)$, on a $\Lambda^{G(F)}(f,\gamma) = 0$. Alors il existe une fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ telle que ϕ et f concordent.*

La démonstration de cette proposition occupe les trois n° suivants.

I.2.6. – Commençons par nous ramener au cas où E/F est une extension de corps. En remplaçant E par E_1 et σ par τ, on définit comme en 2.5 la notion de concordance pour des fonctions $\psi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E_1))$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$.

Avec les notations de 2.4, si $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ est de la forme $\phi = \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_r$ pour des fonctions $\phi_i \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E_1))$, alors pour $x \in G(E_1)$, on a

$$\phi^*(x) = \int_{G(E_1)^{r-1}} \phi_1(xg_r^{-1}g_{r-1}^{-1}\cdots g_2^{-1})\phi_2(g_2)\cdots\phi_{r-1}(g_{r-1})\phi_r(g_r)dg_2\cdots dg_r$$

où dg_i est la mesure de Haar dg_{E_1} sur $G(E_1)$. On en déduit que si $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ est à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, alors ϕ^* est à support dans $G(E_1)_{\tau-\mathrm{r}}$; auquel cas, s'il existe une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$ telle que ϕ^* et f concordent, alors ϕ et f concordent (d'après 2.4). Soit maintenant une fonction f comme dans le point (2) de la proposition de 2.5, et supposons qu'il existe une fonction $\psi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E_1))$ à support dans $G(E_1)_{\tau-\mathrm{r}}$ telle que ψ et f concordent. Puisque ψ est localement constante et à support compact, il existe un sous-groupe ouvert compact J_1 de $G(E_1)$ telle que la fonction ψ soit invariante par J_1 opérant par translation à droite. Notons ψ_1 la fonction caractéristique de J_1 divisée par $\mathrm{vol}(J_1, dg_{E_1})$. Alors la fonction $\phi = \psi \otimes \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_1$ sur $G(E) = G(E_1)^r$ vérifie $\phi^* = \psi$, et elle est à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. À nouveau d'après 2.4, ϕ et f concordent. Pour démontrer la proposition de 2.5, on peut donc supposer $E = E_1$, ce que nous ferons en 2.8.

I.2.7. – Soient P_0, U_0 et A_0 les sous-schémas en groupes fermés de G qui à tout anneau commutatif A associent les sous-groupes de $G(A)$ formés des matrices respectivement triangulaires supérieures, triangulaires supérieures unipotentes, et diagonales; on a la décomposition en produit semi-direct $P_0(A) = A_0(A) \ltimes U_0(A)$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie $\mathrm{M}(n,E) = \mathrm{M}(n,E_1) \times \cdots \times \mathrm{M}(n,E_r)$ de $G(E)$, et $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{u}_0$ celles de $P_0(E)$ et de $U_0(E)$, c'est-à-dire les sous-E-algèbres de $\mathfrak{g}$ formées des matrices respectivement triangulaires supérieures et triangulaires supérieures nilpotentes. Le lemme suivant est une variante tordue du theorem 1 de [**30**].

LEMME 1. – *Soit $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. L'application $\phi_\delta^\sigma : G(E) \times P_0(E) \to G(E)$, $(g,p) \mapsto g^{-1}\delta g^\sigma p$ est partout submersive.*

Démonstration. – Puisque $\phi_\delta^\sigma(g,p) = \phi_{g^{-1}\delta g^\sigma}(1,1)p$, il suffit de montrer que ϕ_δ^σ est submersive en $(1,1)$. La différentielle de ϕ_δ^σ en $(1,1)$ s'écrit

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{p}_0 \to \mathfrak{g},\ (x,y) \mapsto x^\sigma - \delta^{-1}x\delta + y.$$

Si V est un sous-F-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on note $V^\vee$ l'espace dual $\{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{tr}_{E/F} \circ \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/E}(xV) = 0\}$ où $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/E}$ désigne l'application trace usuelle de $\mathfrak{g}$ à E, et $\mathrm{tr}_{E/F}$ l'application trace de E à F. Par dualité, la différentielle en question est surjective si et seulement si

$$\{x^\sigma - \delta^{-1}x\delta : x \in \mathfrak{g}\}^\vee \cap \mathfrak{p}_0^\vee = \{0\}.$$

Or l'espace $\{x^\sigma - \delta^{-1}x\delta : x \in \mathfrak{g}\}^\vee$ coïncide avec le σ-centralisateur $\mathfrak{g}_\delta^\sigma = \{x \in \mathfrak{g} : \delta x^\sigma - x\delta = 0\}$ de δ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{p}_0^\vee = \mathfrak{u}_0$. Soit $\gamma = N(\delta)$. Quitte à remplacer δ par $g^{-1}\delta g^\sigma$ pour un $g \in G(E)$, on peut supposer que γ appartient à $G(F)$. Alors $\mathfrak{g}_\delta^\sigma$ est contenu dans (en fait coïncide avec) le centralisateur $\mathrm{M}(n,F)_\gamma = \{x \in \mathrm{M}(n,F) : \gamma x - x\gamma = 0\}$ de γ dans $\mathrm{M}(n,F)$. Mais puisque δ est σ-régulier, γ est régulier, et $\mathrm{M}(n,F)_\gamma$ est un produit de corps; en particulier, $\mathrm{M}(n,F)_\gamma$ ne contient aucun élément nilpotent non nul. Donc $\mathfrak{g}_\delta^\sigma \cap \mathfrak{u}_0 = \{0\}$ et le lemme est démontré. □

Si Γ est un sous-groupe ouvert compact d'un groupe topologique localement profini $\mathscr{G}$, on note $\mathscr{H}(\mathscr{G},\Gamma)$ l'algèbre de Hecke formée des fonctions à valeurs complexes sur $\mathscr{G}$ qui sont bi-invariantes par Γ et à support compact, munie du produit de convolution défini par la mesure de Haar dg_Γ sur $\mathscr{G}$ qui donne le volume 1 à Γ. On note $\mathscr{H}(\mathscr{G},\Gamma)'$ le dual algébrique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{H}(\mathscr{G},\Gamma),\mathbb{C})$.

Grâce au lemme 1, on montre comme dans [**30**] que pour tout sous-groupe ouvert compact Γ de $G(E)$, l'application

$$G(E)_{\sigma-\mathrm{r}} \to \mathscr{H}(G(E),\Gamma)',\ \delta \mapsto \Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)|_{\mathscr{H}(G(E),\Gamma)}$$

est localement constante (il s'agit d'une variante tordue du theorem 3 de [**30**]). Bien sûr, cela sous-entend que les mesures $d\bar{g}_\delta^\sigma = \frac{dg_E}{dg_\delta^\sigma}$ définissant les distributions $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$ pour $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, ont été choisies de manière compatible: il suffit d'imposer que pour tout $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, la mesure dg_δ^σ donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal de $G_\delta^\sigma(F)$. En particulier, on obtient que pour toute fonction $\phi \in C_\mathrm{c}^\infty(G(E))$, l'application

$$G(E)_{\sigma-\mathrm{r}} \to \mathbb{C},\ \delta \mapsto \Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta)$$

est localement constante. Pour les fonctions à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, on a la réciproque suivante:

LEMME 2. – *Soit une fonction localement constante Φ sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ vérifiant:*

(i) *pour tout $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et tout $g \in G(E)$, on a $\Phi(g^{-1}\delta g^{\sigma}) = \Phi(\delta)$,*

(ii) *il existe une partie compacte X de $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ telle que le support de Φ est contenu dans la réunion des σ-orbites $\mathcal{O}_{\sigma}(x)$ pour $x \in X$.*

Alors il existe une fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ telle que $\Phi = \Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\phi, \cdot)$.

Démonstration. – Puisque $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ est ouvert dans $G(E)$, quitte à remplacer X par $X\Gamma$ pour un sous-groupe ouvert compact Γ de $G(E)$ suffisamment petit, on peut supposer que X est une partie ouverte compacte de $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. Pour $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, notons ω_{δ} l'ensemble des $\delta' \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ tels que $\Phi(\delta') = \Phi(\delta)$; c'est une partie invariante par σ-conjugaison — i.e. pour tout $\delta' \in \omega_{\delta}$ et tout $g \in G(E)$, on a $g^{-1}\delta' g^{\sigma} \in \omega_{\delta}$ —, ouverte et fermée dans $G(E)$. Puisque X est compact, il existe des éléments $\delta_1, \ldots, \delta_s \in X$ tels que $\omega_{\delta_i} \cap \omega_{\delta_j} = \varnothing$ pour $i \neq j$, et X est contenu dans $\coprod_{i=1}^{s} \omega_{\delta_i}$. On peut supposer que pour $i = 1, \ldots, s$, l'ensemble $X_i = X \cap \omega_{\delta_i}$ est non vide.

Soit un indice $i \in \{1, \ldots, s\}$. Notons $\phi_i \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ la fonction caractéristique de X_i, et Φ_i la fonction $\Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\phi_i, \cdot)$ sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. Par construction, le support de Φ_i, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ tels que $\Phi_i(g) \neq 0$, coïncide avec la réunion des σ-orbites $\mathcal{O}_{\sigma}(x)$ pour $x \in X_i$. Comme plus haut, pour $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, on note $\omega_{i,\delta}$ l'ensemble des $\delta' \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ tels que $\Phi_i(\delta') = \Phi_i(\delta)$; c'est une partie invariante par σ-conjugaison, ouverte et fermée dans $G(E)$. Il existe des éléments $\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,s_i}$ de X_i tels que X_i est contenu dans l'union disjointe $\coprod_{j=1}^{s_i} \omega_{i,\delta_{i,j}}$, et pour $j = 1, \ldots, s_i$, l'ensemble $X_{i,j} = X_i \cap \omega_{i,\delta_{i,j}}$ est non vide. Notons $\phi_{i,j} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ la fonction caractéristique de $X_{i,j}$, et $\Phi_{i,j}$ la fonction $\Lambda_{\sigma}^{G(E}(\phi_{i,j}, \cdot)$ sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. Par construction, on a $\Phi_i = \sum_{j=1}^{s_i} \Phi_{i,j}$.

Alors la fonction

$$\phi = \sum_{i=1}^{r} \Phi(\delta_i) \sum_{j=1}^{s_i} \Phi_i(\delta_{i,j})^{-1} \phi_{i,j}$$

convient: on a $\Phi = \Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\phi, \cdot)$. □

REMARQUE. – Pour que deux fonctions $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ concordent, il suffit qu'elles concordent en les éléments semisimples réguliers, c'est-à-dire en les paires d'éléments associés (δ, γ) de $G(E) \times G(F)$ telles que γ soit semisimple régulier. En effet, d'après la remarque 2 de 2.3, l'ensemble des éléments δ de $G(E)$ tels que l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_{\sigma}(\delta))$ dans $G(F)$ soit semisimple régulière, est ouvert et dense dans $G(E)$, donc à fortiori dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. On a vu que l'application

$\delta \mapsto \Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta)$ est localement constante sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, pourvu que les mesures dg_δ^σ pour $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ aient été choisies de manière compatible. De même, l'application $\gamma \mapsto \Lambda^{G(F)}(f,\gamma)$ est localement constante sur $G(F)_\mathrm{r}$, pourvu que les mesures dg_γ pour $\gamma \in G(F)_\mathrm{r}$ aient été choisies de manière compatible. Puisque pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ tel que γ soit régulier, les groupes $G_\delta^\sigma(F)$ et $G_\gamma(F)$ sont conjugués dans $G(E)$ — cf. 2.1 —, les mesures dg_δ^σ et dg_γ donnant le volume 1 au sous-groupe compact maximal de $G_\delta^\sigma(F)$ et à celui de $G_\gamma(F)$, sont associées. D'où le résultat, en utilisant la “continuité de la norme”: soit (δ,γ) une paire d'éléments associés de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit régulier. Choisissons une suite (δ_n) dans $G(E)$ tendant vers δ, telle que pour chaque n, l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta_n))$ dans $G(F)$ soit semisimple régulière. Le polynôme caractéristique de $N(\delta_n)$ tend vers celui de $N(\delta)=\gamma$, par suite nous pouvons choisir une suite (γ_n) dans $G(F)$ tendant vers γ, telle que pour chaque n, les éléments δ_n et γ_n soient associés. Si les fonctions ϕ et f concordent en (δ_n,γ_n) pour tout n, elles concordent aussi en (δ,γ) par continuité des intégrales orbitales sur $G(F)$ et des σ-intégrales orbitales sur $G(E)$.

I.2.8. – Démontrons la proposition de 2.5. D'après 2.6, on peut supposer $E=E_1$. On peut aussi supposer que les mesures dg_δ^σ pour $\delta\in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, ont été choisies de manière compatible comme en 2.7 — en effet, les conclusions de la proposition 2.5 sont indépendantes de ces choix.

Commençons par le point (1). Soit donc une fonction $\phi\in C_\mathrm{c}^\infty(G(E))$ à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, et soit $\Psi=\Psi_\phi$ la fonction sur $G(F)_\mathrm{r}$ définie comme suit: pour $\gamma\in G(F)_\mathrm{r}$ qui n'est pas une norme de $G(E)$, on pose $\Psi(\gamma)=0$; et pour $\gamma\in G(F)_\mathrm{r}\cap N(G(E))$, on choisit un $\delta\in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ tel que δ et γ soient associés, et l'on pose $\Psi(\gamma)=\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta)$. Par construction, pour $\gamma\in G(F)_\mathrm{r}$ et $g\in G(F)$, on a $\Psi(g^{-1}\gamma g)=\Psi(\gamma)$. Pour $\delta\in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, le polynôme minimal $N(\delta)$, disons $P_{N(\delta)}\in E[t]$, est à coefficients dans F; il se décompose en un produit $\prod_{i=1}^s P_i$ pour des polynômes $P_i\in F[t]$ irréductibles sur F et deux à deux distincts, et $\mathbb{N}_v(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ n'est autre que l'orbite dans $G(F)$ formée des éléments ayant $P_{N_v(\delta)}$ comme polynôme caractéristique. On en déduit que la fonction Ψ est localement constante, et qu'il existe une partie compacte X de $G(F)_\mathrm{r}$ telle que le support de Ψ est contenu dans la réunion des orbites $\mathcal{O}(x)$ pour $x\in X$. Pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit régulier, puisque les mesures $dg_{v,\delta}^\sigma$ et $dg_{v,\gamma}$ sont associées, d'après la remarque de 2.7, dg_γ est la mesure de Haar sur $G_\gamma(F)$ qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal de $G_\gamma(F)$. On applique alors la version non tordue (i.e. pour $E=F$) du lemme 2 de 2.7: il existe une fonction $f\in C_\mathrm{c}^\infty(G(F))$ à support dans $G(F)_\mathrm{r}$ telle que $\Psi=\Lambda^{G(F)}(f,\cdot)$, i.e. telle que ϕ et f concordent. Cela démontre le point (1).

Le point (2) s'obtient de la même manière. $\square$

Remarque. – D'après la démonstration ci-dessus (cf. aussi la remarque 2 de 2.4), la proposition de 2.5 reste vraie si l'on remplace, dans tout l'énoncé, $G(F)_{\mathrm{r}}$ par $G(F)'$ et $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ par le sous-ensemble de $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ formé des éléments $\delta \in G(E)$ tels que l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ dans $G(F)$ soit semisimple régulière.

I.2.9. – Revenons au cas général: E est une extension cyclique quelconque de F. Pour utiliser la formule des traces globales, il nous faut considérer la variante de la proposition de 2.5 où les fonctions ϕ et f sont localement constantes et à support compact modulo le centre, et se transforment selon un caractère sous l'action d'un sous-groupe du centre. Soit donc ω un caractère — c'est-à-dire un homorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$; on ne demande pas qu'il soit unitaire — du groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$, et soit χ le caractère $\omega \circ N_{E/F}$ de $E^\times$. Soit aussi χ_1 le caractère $\omega \circ N_{E_1/F}$ de $E_1^\times$. Alors pour $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r) \in E_1^r$, on a $\chi(\delta) = \prod_{i=1}^r \chi_1(\delta_i)$. Identifions $F^\times$ au centre $Z(F)$ de $G(F)$, et $E^\times$ au centre $Z(E)$ de $G(E)$. Notons $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F), \omega)$ l'espace des fonctions f sur $G(F)$ qui sont localement constantes et à support compact modulo $F^\times$ — i.e. modulo $N_{E/F}(E^\times)$, puisque $N_{E/F}(E^\times)$ est d'indice l dans $F^\times$ —, et vérifient $f(z\gamma) = \omega(z)^{-1} f(\gamma)$ pour tout $z \in N_{E/F}(E^\times)$ et tout $\gamma \in G(F)$. On définit l'espace $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi)$ de la même manière.

Pour tout élément γ de $G(F)$, la mesure $d\bar{g}_\gamma$ définissant la distribution $\Lambda^{G(F)}(\cdot, \gamma)$ sur $G(F)$, définit de la même manière une forme linéaire sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F), \omega)$, encore notée $\Lambda^{G(F)}(\cdot, \gamma)$. Et pour tout élément σ-fermé δ de $G(E)$, la mesure $d\bar{g}_\delta^\sigma$ définissant la distribution $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot, \delta)$ sur $G(E)$, définit de la même manière une forme linéaire sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi)$, encore notée $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot, \delta)$. Si $E = E_1$, il n'y a rien à vérifier. Sinon, via l'identification $G(E) = G(E_1)^r$, l'espace $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi)$ s'identifie à $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1), \chi_1) \otimes \cdots \otimes C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1), \chi_1)$. Le choix d'une mesure de Haar $d\bar{g}_{E_1}$ sur le groupe $Z(E_1)\backslash G(E_1)$ définit comme en 2.4 une application linéaire $\phi \mapsto \phi^*$ de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi)$ dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1), \chi_1)$: pour ϕ de la forme $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_r$ avec $\phi_i \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1), \chi_1)$, on a $\phi^* = \phi_1 * \cdots * \phi_r$ où le produit de convolution sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1), \chi_1)$ est celui défini par $d\bar{g}_{E_1}$. Alors posant $y = N^1(\delta)$, il existe une unique mesure $G(E_1)$-invariante (à droite) $d\bar{g}_y^\tau$ sur l'espace homogène $G_y^\tau(F)\backslash G(E_1)$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi)$, on a l'égalité $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = \Lambda_\tau^{G(E_1)}(\phi^*, y)$.

Les notions de concordance de la définition 2.5 restent valables pour une paire de fonctions (ϕ, f) dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi) \times C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F), \omega)$. Dans le n° suivant, on montre que pour produire des fonctions $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi)$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F), \omega)$ qui concordent, il suffit de produire des fonctions $\widetilde{\phi} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ et $\tilde{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ qui concordent.

I.2.10. – Choisissons une mesure de Haar dz sur $N_{E/F}(E^\times)$. Elle définit une application linéaire $f \mapsto f_\omega$ de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F), \omega)$: pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$

et $\gamma \in G(F)$, on pose

$$f_\omega(\gamma) = \int_{N_{E/F}(E^\times)} \omega(z) f(z\gamma) dz.$$

De même, le choix d'une mesure de Haar dz_E sur $E^\times$ définit une application linéaire $\phi \mapsto \phi_\chi$ de $C_c^\infty(G(E))$ dans $C_c^\infty(G(E), \chi)$: pour $\phi \in C_c^\infty(G(E))$ et $\delta \in G(E)$, on pose

$$\phi_\chi(\delta) = \int_{E^\times} \chi(z)\phi(z\delta) dz_E.$$

Ces deux applications linéaires sont surjectives (cf. la démonstration du lemme 2 de [**41**, 3.3]).

Posons $U_E = \mathfrak{o}_E \smallsetminus \mathfrak{p}_E$ et

$$c = \frac{\mathrm{vol}(N_{E/F}(U_E), dz)}{\mathrm{vol}(U_E, dz_E)}.$$

Lemme. – *Soit (ϕ, f) une paire de fonctions dans $C_c^\infty(G(E)) \times C_c^\infty(G(F))$, et soit (δ, γ) une paire d'éléments associés de $G(E) \times G(F)$ telle que γ soit fermé. Si ϕ et f concordent en (δ, γ), alors $c\phi_\chi$ et f_ω concordent en (δ, γ).*

Démonstration. – L'intégrale

$$\iint_{(G_\gamma(F)\backslash G(F))\times N_{E/F}(E^\times)} \omega(z) f(g^{-1}z\gamma g) d\bar{g}_\gamma dz$$

est absolument convergente, d'où l'égalité

$$\Lambda^{G(F))}(f_\omega, \gamma) = \int_{N_{E/F}(E^\times)} \omega(z)\Lambda^{G(F)}(f, z\gamma) dz.$$

De même, on a l'égalité

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi_\chi, \delta) = \int_{E^\times} \chi(z)\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, z\delta) dz_E.$$

Notons $E^{\times,1}$ l'ensemble des $z \in E^\times$ tels que $N_{E/F}(z) = 1$; c'est un sous-groupe compact de $E^\times$. Soit dz_E^1 la mesure de Haar sur $E^{\times,1}$ qui donne le volume 1 à $E^{\times,1}$, et soit $d\bar{z}_E^1$ la mesure de Haar quotient $\frac{dz_E}{dz_E^1}$ sur le groupe $E^{\times,1}\backslash E^\times$. Puisque $E^{\times,1}$ est contenu dans U_E, $d\bar{z}_E^1$ coïncide avec la mesure déduite de $c^{-1}dz$ via l'isomorphisme de groupes topologiques $E^{\times,1}\backslash E^\times \to N_{E/F}(E^\times)$ donné par l'application $N_{E/F}$. Comme $\chi = \omega \circ N_{E/F}$, on a

$$\Lambda^{G(F)}(f_\omega, \gamma) = c\int_{E^\times} \chi(z)\Lambda^{G(F)}(f, N_{E/F}(z)\gamma) dz_E.$$

Pour $\delta' \in G(E)$, $\gamma' \in G(F)$ et $z \in E^\times$, puisque

$$\mathbb{N}(\mathscr{O}_\sigma(z\delta')) = N_{E/F}(z)\mathbb{N}(\mathscr{O}_\sigma(\delta')),$$

δ' et γ' sont associés si et seulement si $z\delta'$ et $N_{E/F}(z)\gamma'$ sont associés. D'où le lemme. $\square$

Si $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ est à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, alors ϕ_χ est encore à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$; de même si $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ est à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$, alors f_ω est encore à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$. Par conséquent d'après le lemme, la variante de la proposition de 2.5 obtenue en remplaçant les espaces $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ et $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ par les espaces $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E),\chi)$ et $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F),\omega)$, reste vraie.

REMARQUE. – Comme en 2.7, on obtient que pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E),\chi)$, l'application $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}} \to \mathbb{C}$, $\delta \mapsto \Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta)$ est localement constante (pourvu que les mesures $d\bar{g}_\delta^\sigma$ définissant les formes linéaires $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$ pour $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, aient été choisies de manière compatible). De même, pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F),\omega)$, l'application $G(F)_{\mathrm{r}} \to \mathbb{C}$, $\gamma \mapsto \Lambda^{G(F)}(f,\gamma)$ est localement constante. On pourrait d'ailleurs utiliser ces propriétés pour montrer la variante de la proposition de 2.5 directement comme en 2.8.

I.3. Le lemme fondamental pour les unités de $\mathcal{H}_E$ et de $\mathcal{H}_F$

I.3.1. – Dans cette section 3, on suppose que l'algèbre cyclique E/F est *non ramifiée*, c'est-à-dire que l'extension de corps E_1/F est non ramifiée.

Rappelons que pour tout anneau commutatif A, $A_0(A)$ est le sous-groupe de $G(A)$ formé des matrices diagonales; pour $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $x \in A^\times$, on note x^ν l'élément $\mathrm{diag}(x^{\nu_1},\ldots,x^{\nu_n})$ de $A_0(A)$.

Notons K, K_{E_1} et K_E les sous-groupes compacts maximaux $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_F)$, $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_{E_1})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_E) = \prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_{E_i}))$ de $G(F)$, $G(E_1)$ et $G(E)$; via l'identification $G(E) = G(E_1)^r$, K_E coïncide avec le groupe $K_{E_1}^r = (K_{E_1})^r$. On suppose que les mesures de Haar dg sur $G(F)$ et dg_{E_1} sur $G(E_1)$ fixées en 2.5, sont celles qui donnent le volume 1 à K et à K_{E_1}; alors la mesure de Haar $dg_E = dg_{E_1}^r$ sur $G(E) = G(E_1)^r$ est celle qui donne le volume 1 à K_E. Notons $\mathcal{H}_F$ l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(F),K)$, et $\mathcal{H}_E$ l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(E),K_E)$.

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$, et

$$S_F : \mathcal{H}_F \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1},\ldots,X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$$

l'isomorphisme de Satake, défini comme suit. Rappelons que ω est une uniformisante de F. Pour $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note $f_{0,\nu} \in \mathcal{H}(A_0(F),A_0(\mathfrak{o}_F))$ la fonction caractéristique de la double classe $A_0(\mathfrak{o}_F)\varpi^\nu A_0(\mathfrak{o}_F) = \varpi^\nu A_0(\mathfrak{o}_F)$, et $S_{0,F}(f_{0,\nu}) \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1},\ldots,X_n^{\pm 1}]$ le polynôme $X_1^{\nu_1}\cdots X_n^{\nu_n}$. Par prolongement linéaire, cela définit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$S_{0,F} : \mathcal{H}(A_0(F),A_0(\mathfrak{o}_F)) \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1},\ldots,X_n^{\pm 1}],$$

qui ne dépend pas du choix de ϖ. Pour ν, $\nu' \in \mathbb{Z}^n$, on a $f_{0,\nu} * f_{0,\nu'} = f_{0,\nu+\nu'}$, par conséquent $S_{0,F}$ est un isomorphisme d'algèbres. Soit du la mesure de Haar sur

$U_0(F)$ qui donne le volume 1 à $U_0(\mathfrak{o}_F) = U_0(F) \cap K$. Pour $f \in \mathcal{H}_F$, on note $f^{P_0(F)} \in \mathcal{H}(A_0(F), A_0(\mathfrak{o}_F))$ la fonction définie par

$$f^{P_0(F)}(a) = \delta_{P_0(F)}(a)^{\frac{1}{2}} \int_{U_0(F)} f(au)du$$

où $\delta_{P_0(F)}$ désigne le caractère module de $P_0(F)$, donné par $d\mu(p'pp'^{-1}) = \delta_{P_0}(p')d\mu(p)$ pour n'importe quelle mesure de Haar (à droite ou à gauche) μ sur $P_0(F)$, et l'on pose

$$S_F(f) = S_{0,F}(f^{P_0(F)}).$$

Pour $f \in \mathcal{H}_F$, $S_F(f)$ appartient à $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$, et l'application

$$\mathcal{H}_F \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n},\ f \mapsto S_F(f)$$

ainsi définie est un isomorphisme d'algèbres, cf. [**57**, 4.1].

Jusqu'à la fin de ce n° 3.1, on suppose que E/F est une extension de corps. Alors on définit de la la même manière un homomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}_E \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n},\ \phi \mapsto S_E(\phi).$$

Soit $b : \mathcal{H}_E \to \mathcal{H}_F$ l'homomorphisme d'algèbres défini par

$$S_F(b(\phi))(X_1, \dots, X_n) = S_E(\phi)(X_1^l, \dots, X_n^l).$$

Soient $\phi_e \in \mathcal{H}_E$ et $f_e \in \mathcal{H}_F$ les fonctions caractéristiques de K_E et de K. Puisque ϕ_e est l'élément unité de $\mathcal{H}_E$ et que f_e est celui de $\mathcal{H}_F$, on a $b(\phi_e) = f_e$.

La proposition suivante est due à Kottwitz [**47**, lemma 8.8]. Elle constitue l'étape-clé dans la démonstration du lemme fondamental pour le changement de base de $G(F)$ à $G(E)$.

Proposition (Kottwitz, $E = E_1$). – *Les fonctions ϕ_e et f_e concordent fortement.*

Démonstration. – On renvoie à [**57**, 4.7.1 et 4.7.2]. □

I.3.2. – Revenons au cas général, i.e. on ne suppose plus $E = E_1$. Notons $\mathcal{H}_{E_1}$ l'agèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(E_1), K_{E_1})$. Via l'identification $G(E) = G(E_1)^r$, $\mathcal{H}_E$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{H}_{E_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{E_1}$. Puisque l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{E_1}$ est commutative, l'application linéaire $\phi \mapsto \phi^*$ de $C_c^\infty(G(E))$ dans $C_c^\infty(G(E_1))$ définie comme en 2.4 par la mesure dg_{E_1}, induit par restriction un homomorphisme d'algèbres

$$b'^1 : \mathcal{H}_E \to \mathcal{H}_{E_1}.$$

Comme en 3.1, on définit un homomorphisme d'algèbres $b_1 : \mathcal{H}_{E_1} \to \mathcal{H}_F$. Soit alors $b : \mathcal{H}_E \to \mathcal{H}_F$ l'homomorphisme d'algèbres donné par

$$b = b_1 \circ b'^1.$$

On vérifie que b ne dépend pas de la décomposition $E = \prod_{i=1}^r E_i$ choisie: cela résulte de la commutativé des $\mathcal{H}_{E_i}$, et du fait que τ $(= \sigma^r)$ opère trivialement sur $\mathcal{H}_{E_i}$.

Comme en 3.1, notons $\phi_e \in \mathscr{H}_E$ la fonction caractéristique de K_E, et $f_e \in \mathscr{H}_F$ celle de K; ce sont les unités de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$, et l'on a $b(\phi_e) = f_e$.

Puisque $K_E = K_{E_1}^r$ et $dg_E = dg_{E_1}^r$, ϕ_e^* est la fonction caractéristique de K_{E_1}. Si $\delta \in G(E)$ est σ-fermé, alors $y = N^1(\delta) \in G(E_1)$ est τ-fermé, et d'après 2.4 on a

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = \Lambda_\tau^{G(E_1)}(\phi^*, y)$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G(E))$. On en déduit que la proposition de 3.1 reste vraie sans l'hypothèse $E = E_1$, i.e. pour une algèbre cyclique non ramifiée E/F quelconque.

I.3.3. – Pour utiliser la formule des traces globales, on a aussi besoin de la variante de la proposition 3.1 où les fonctions ϕ_e et f_e se transforment selon un caractère non ramifié sous l'action d'un sous-groupe du centre. Soit donc ω un caractère de $N_{E/F}(E^\times)$ trivial sur $N_{E/F}(U_E) = U_F$, et soit χ le caractère $\omega \circ N_{E/F}$ de $E^\times$. Soient dz et dz_E les mesures de Haar sur $N_{E/F}(E^\times)$ et sur $E^\times$ qui donnent le volume 1 au sous-groupe compact maximal U_F de $F^\times$ et U_E de $E^\times$. Puisque $N_{E/F}(U_E) = U_F$, la constante c de 2.10 vaut 1.

Soit $\phi_{\chi,e}$ la fonction sur $G(E)$ à support dans $E^\times K_E$, telle que $\phi_{\chi,e}(zk) = \chi(z)^{-1}$ pour tout $k \in K_E$ et tout $z \in E^\times$. De même, soit $f_{\omega,e}$ la fonction sur $G(F)$ à support dans $N_{E/F}(E^\times)K$ telle que $f(zk) = \omega(z)^{-1}$ pour tout $k \in K$ et tout $z \in N_{E/F}(E^\times)$. Alors $\phi_{\chi,e} = (\phi_e)_\chi$ et $f_{\omega,e} = (f_e)_\omega$, par conséquent d'après 3.2 et le lemme de 2.10, $\phi_{\chi,e}$ et $f_{\omega,e}$ concordent fortement.

I.4. Transfert des fonctions élémentaires de Labesse

I.4.1. – Dans cette section 4 et dans le suivant 5, on suppose que E/F est une *extension de corps non ramifiée*. On note $\mathbb{R}_+^n$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé des n-uplets $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ tels que $\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n$, et l'on pose $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}_+^n$. Pour $\nu \in \mathbb{R}_+^n$, on définit comme suit une partition $\alpha_\nu = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ de n: les α_i sont des entiers > 0 tels que $\sum_{j=1}^s \alpha_j = n$ et

$$\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_{\alpha_1} > \nu_{\alpha_1+1} = \cdots = \nu_{\alpha_1+\alpha_2} > \cdots > \nu_{\alpha_{s-1}+1} = \cdots = \nu_{\alpha_{s-1}+\alpha_s}.$$

Notons $M_\nu = M_{\alpha_\nu}$ le sous-schéma en groupes fermé $\mathrm{GL}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\alpha_s}$ de G (vu comme matrices diagonales par blocs de taille $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$). Notons aussi P_ν et U_ν les sous-schémas en groupes fermés de G qui à tout anneau commutatif A associent les sous-groupes de $G(A)$ formés des matrices respectivement triangulaires supérieures par α_ν-blocs et triangulaires supérieures unipotentes par α_ν-blocs. On a donc la décomposition en produit semi-direct $P_\nu(A) = M_\nu(A) \ltimes U_\nu(A)$.

Soit $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$. Par construction, $t = \varpi^\nu$ est dans le centre de $M_\nu(F)$, $t^k U_\nu(\mathfrak{o}_F) t^{-k} \subset U_\nu(\mathfrak{o}_F)$ pour tout entier $k \geq 0$, et $M_\nu(F)$ coïncide avec l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $\{t^k g t^{-k} : k \in \mathbb{Z}\}$ soit une partie bornée de $G(F)$ pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique.

Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on note $k\nu$ l'élément $(k\nu_1, \dots, k\nu_n)$ de $\mathbb{Z}_+^n$; on a clairement $\varpi^{k\nu} = t^k$ et $\alpha_{k\nu} = \alpha_\nu$.

LEMME 1. – *Soit $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$. L'application $G(E) \times M_\nu(\mathfrak{o}_E) \to G(E)$, $(g, m) \mapsto g^{-1}\varpi^\nu m g^\sigma$ est partout submersive.*

Démonstration. – Rappelons que l'on a posé $\mathfrak{g} = \mathrm{M}(n, E)$. Posons $t = \varpi^\nu$, et notons $\mathfrak{m}_\nu$ l'algèbre de Lie $\mathrm{M}(\alpha_1, E) \times \cdots \times \mathrm{M}(\alpha_s, E)$ de $M_\nu(E)$, où les α_i sont donnés par $\alpha_\nu = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Il suffit de montrer que pour $m \in M_\nu(\mathfrak{o}_E)$, la différentielle en $(1, m)$ est surjective; c'est-à-dire que l'application $\mathfrak{g} \times \mathfrak{m}_\nu \to \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto tmX^\sigma - Xtm + tY$ est surjective. Le σ-centralisateur $\mathfrak{g}_{tm}^\sigma = \{X \in \mathfrak{g} : tmX^\sigma - Xtm = 0\}$ est contenu dans $\mathfrak{m}_\nu$: si $X \in \mathfrak{g}_{tm}^\sigma$, alors $t^{-1}Xt = mX^\sigma m^{-1}$, d'où l'on déduit que $t^{-lk}Xt^{lk} = N(m)^k X N(m)^{-k}$ pour tout entier k. Puisque $N(m)$ appartient au sous-groupe compact maximal $M_\nu(\mathfrak{o}_F)$ de $M_\nu(F)$, l'ensemble $\{t^{-lk}Xt^{lk} : k \in \mathbb{Z}\}$ est borné dans $\mathfrak{g}$ pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique; donc $X \in \mathfrak{m}_\nu$. Notons $\mathfrak{u}_\nu$ et $\overline{\mathfrak{u}}_\nu$ les algèbres de Lie de $U_\nu(E)$ et du radical unipotent du sous-groupe parabolique de $G(E)$ opposé à $P_\nu(E)$ par rapport à $M_\nu(E)$. Comme $\mathfrak{g}_{tm}^\sigma \subset \mathfrak{m}_\nu$, la σ-conjugaison $X \mapsto tmX^\sigma - Xtm$ dans $\mathfrak{g}$ induit par restriction des isomorphismes de variétés $\mathfrak{p}_F$-adiques $\mathfrak{u}_\nu \to \mathfrak{u}_\nu$ et $\overline{\mathfrak{u}}_\nu \to \overline{\mathfrak{u}}_\nu$. D'où le lemme, puisque $\mathfrak{g} = \overline{u}_\nu \oplus \mathfrak{m}_\nu \oplus \mathfrak{u}_\nu$. □

D'après le lemme ci-dessus, pour $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, l'ensemble compact

$$X_\nu^\sigma(E) = \{k^{-1}\varpi^\nu m k^\sigma : k \in K_E,\, m \in M_\nu(\mathfrak{o}_E)\}$$

est ouvert dans $G(E)$.

LEMME 2. – *Soient $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, $g \in G(E)$, et $m \in M_\nu(\mathfrak{o}_E)$ tels que $g^{-1}\varpi^\nu m g^\sigma \in \varpi^\nu M_\nu(\mathfrak{o}_E)$. Alors $g \in M_\nu(E)$. En particulier, $G_{\varpi^\nu m}^\sigma(F)$ est contenu dans $M_\nu(E)$.*

Démonstration. – Posons $t = \varpi^\nu$ et écrivons $g^{-1}tmg^\sigma = tm'$ avec $m' \in M_\nu(\mathfrak{o}_E)$. On a $t^{-1}gt = mg^\sigma m'^{-1}$. On en déduit que $t^{-l}gt^l = N(m)gN(m')^{-1}$, puis que $t^{-lk}gt^{lk} = N(m)^k g N(m')^{-k}$ pour tout entier k. Puisque $N(m)$ et $N(m')$ appartiennent à K, l'ensemble $\{t^{-lk}gt^{lk} : k \in \mathbb{Z}\}$ est borné dans $G(E)$. Par suite $g \in M_\nu(E)$. D'où le lemme. □

I.4.2. – Pour $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, on définit en suivant Labesse les *fonctions élémentaires* $\phi_\nu^\sigma \in C_\mathrm{c}^\infty(G(E))$ et $f_\nu \in C_\mathrm{c}^\infty(G(F))$: ϕ_ν^σ est la fonction caractéristique de $X_\nu^\sigma(E)$, et f_ν est la fonction caractéristique de

$$X_\nu(F) = \{k^{-1}\varpi^\nu m k : k \in K,\, m \in M_\nu(\mathfrak{o}_F)\};$$

d'après la version non tordue (i.e. pour $E = F$) du lemme 1 de 4.1, $X_\nu(F)$ est une partie ouverte compacte de $G(F)$. Notons $dm_{\nu,E}$ et dm_ν les mesures de Haar sur $M_\nu(E)$ et sur $M_\nu(F)$ qui donnent le volume 1 à $M_\nu(\mathfrak{o}_E)$ et à $M_\nu(\mathfrak{o}_F)$.

PROPOSITION ([**50**, prop. 3]). – *Pour $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, les fonctions ϕ_ν^σ et $f_{l\nu}$ concordent fortement.*

Démonstration. – Posons $M = M_\nu$, $U = U_\nu$, $dm = dm_\nu$, $dm_E = dm_{\nu,E}$, et $t = \varpi^\nu$. Soit $\delta \in G(E)$ un élément σ-fermé. Si $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi_\nu^\sigma, \delta) \neq 0$, alors δ est σ-conjugué dans $G(E)$ à tx pour un $x \in M(\mathfrak{o}_E)$. Puisque δ est σ-fermé et t est central dans $M(E)$, la σ-orbite $\{m^{-1}xm^\sigma : m \in M(E)\}$ de x dans $M(E)$, est fermée dans $M(E)$. Pour $\phi \in C_c^\infty(G(E))$, on a la formule d'intégration [**15**, 4.1]

$$\int_{G(E)} \phi(g)dg_E = \iiint_{M(E)\times U(E)\times K_E} \phi(muk)\, dm_E du_E dk_E$$

où du_E est la mesure de Haar sur $U(E)$ qui donne le volume 1 au groupe $U(\mathfrak{o}_E)$, et dk_E est la restriction de dg_E à K_E. D'après le lemme 2 de 4.1, pour $(m,u,k) \in M(E) \times U(E) \times K_E$ tel que $k^{-1}u^{-1}m^{-1}txm^\sigma u^\sigma k^\sigma \in X_\nu^\sigma(E)$, on a $mu \in M(E)K_E$ et donc $u \in U(\mathfrak{o}_E) = K_E \cap U(E)$; d'où l'on déduit que

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi_\nu^\sigma, \gamma) = \int_{G_{tx}^\sigma(F)\backslash M(E)} \phi_\nu^\sigma(m^{-1}txm^\sigma)\frac{dm_E}{dg_{tx}^\sigma}.$$

Mais $G_{tx}^\sigma(F) = M_x^\sigma(F)$, et d'après loc. cit., pour $m \in M(E)$ tel que $m^{-1}txm^\sigma \in X_\nu^\sigma(E)$, on a $m^{-1}txm^\sigma \in tM(\mathfrak{o}_E)$, i.e. $m^{-1}xm^\sigma \in M(\mathfrak{o}_E)$. Par conséquent

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi_\nu^\sigma, \gamma) = \int_{M_x^\sigma(F)\backslash M(E)} \phi_{M,e}(m^{-1}xm^\sigma)\frac{dm_E}{dg_{tx}^\sigma}$$

où $\phi_{M,e} \in C_c^\infty(M(E))$ désigne la fonction caractéristique de $M(\mathfrak{o}_E)$.

Soit maintenant $\gamma \in G(F)$ un élément fermé. Si $\Lambda^{G(F)}(f_{l\nu}, \gamma) \neq 0$, alors γ est conjugué dans $G(F)$ à $t^l y$ pour un $y \in M(\mathfrak{o}_F)$. Comme ci-dessus, on a $G_{t^l y}(F) = M_y(F)$ et

$$\Lambda^{G(F)}(f_{l\nu}, \gamma) = \int_{M_y(F)\backslash M(F)} f_{M,e}(m^{-1}ym)\frac{dm}{dg_{t^l y}}$$

où $f_{M,e} \in C_c^\infty(M(F))$ désigne la fonction caractéristique de $M(\mathfrak{o}_F)$. Notons que puisque $t^l = N(t)$, γ est une norme de $G(E)$ si et seulement si $y \in N(M(E))$. On conclut grâce à la proposition de 3.1, en remarquant que si $\gamma \in \mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$, alors y est conjugué dans $M(E)$ à $N(x)$, et les mesures dg_{tx} sur $M_x^\sigma(F)$ et $dg_{t^l y}$ sur $M_y(F)$ sont associées au sens de 2.5. □

I.5. Séparation des représentations sphériques

I.5.1. – Dans cette section 5, toutes les représentations considérées sont supposées complexes, c'est-à-dire à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et lisses. Une représentation π de $G(E)$ est dite *σ-stable* si elle isomorphe à la représentation π^σ de $G(E)$ donnée par $\pi^\sigma(g) = \pi(g^\sigma)$. Si π est une représentation admissible σ-stable de $G(E)$, le choix d'un isomorphisme A entre π

et π^σ, c'est-à-dire d'un $\mathbb{C}$-automorphisme A de l'espace V_π de π tel que $A\circ\pi(g) = \pi^\sigma(g)\circ A$ pour tout $g\in G(E)$, définit une distribution Θ_π^A sur $G(E)$:

$$\langle\phi,\Theta_\pi^A\rangle = \mathrm{trace}(\pi(\phi dg_E)\circ A)$$

pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$, où $\pi(\phi dg_E)$ désigne l'opérateur $\int_{G(E)}\phi(g)\pi(g)dg_E$ sur V_π. D'après [**60**, théo. 7.1], si π est une représentation irréductible σ-stable de $G(E)$ — auquel cas l'isomophisme A entre π et π^σ est unique à multiplication par un scalaire près —, la distribution Θ_π^A est localement constante sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et localement intégrable sur $G(E)$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction localement constante sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, encore notée Θ_π^A, telle que pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$, on ait

$$\langle\phi,\Theta_\pi^A\rangle = \int_{G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}}\Theta_\pi^A(g)\phi(g)dg_E$$

(l'intégrale étant absolument convergente). On montre ci-dessous que ces résultats restent vrais pour toute représentation admissible σ-stable π de $G(E)$ qui est *de longueur finie*, pourvu que l'opérateur A soit raisonnablement normalisé.

On appelle *σ-représentation (de $G(E)$)* la donnée d'un couple (π,A) où π est une représentation σ-stable de $G(E)$ et A est un isomorphisme entre π et π^σ tel que $A^l = \lambda\mathrm{id}_{V_\pi}$ pour un $\lambda\in\mathbb{C}^\times$; ici V_π est l'espace de π, et $A^l = A\circ\cdots\circ A$ (l fois). Un morphisme entre deux σ-représentations (π,A) et (π',A') est par définition un morphisme u entre π et π' commutant aux actions de A et A', c'est-à-dire un opérateur $u\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\pi,V_{\pi'})$ tel que $u\circ\pi(g) = \pi'(g)\circ u$ pour tout $g\in G(E)$, et $u\circ A = A'\circ u$. Munies de ces morphismes, les σ-représentations forment une catégorie (en général non abélienne). On a des notions évidentes de suite exacte courte de σ-représentations, et de σ-représentation irréductible. Précisément, une σ-représentation (π,A) est irréductible si elle est non nulle (i.e. si π est non nulle) et si l'unique sous-espace non nul de V_π qui soit à la fois $G(E)$-stable et A-stable, est V_π lui-même. Une σ-représentation (π,A) est dite *admissible* si π est admissible, et *fortement irréductible* si π est irréductible. D'après [**67**, lemma 2.1], on a le

LEMME. – *Soit (π,A) une σ-représentation irréductible de $G(E)$. Il existe un (unique) entier $s\geq 1$ divisant l et une σ^s-représentation fortement irréductible (π_0,A_0) de $G(E)$, tels que, notant W l'espace de π_0 et B le $\mathbb{C}$-automorphisme de W^s défini par $B(v_1,\ldots,v_s) = (A_0(v_s),v_1,\ldots,v_{s-1})$, on ait $(\pi,A)\simeq(\oplus_{i=1}^s\pi_0^{\sigma^{i-1}},B)$.*

En particulier, toute σ-représentation irréductible de $G(E)$ est admissible, et si (π,A) est une σ-représentation de $G(E)$, alors (π,A) est de longueur finie (dans la catégorie des σ-représentations) si et seulement si π est de longueur finie.

PROPOSITION (variante de [**60**, théo. 7.1]). – *Soit* (π, A) *une* σ*-représentation admissible de* $G(E)$ *de longueur finie. Il existe une fonction localement constante sur* $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ *et localement intégrable sur* $G(E)$*, encore notée* Θ_π^A*, telle que pour toute fonction* $\phi \in C_c^\infty(G(E))$*, on ait*

$$\langle \phi, \Theta_\pi^A \rangle = \int_{G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}} \Theta_\pi^A(g)\phi(g)dg_E.$$

Démonstration. – La distribution $\phi \mapsto \Theta_\pi^A(\phi)$ sur $G(E)$ est additive sur les suites exactes de σ-représentations. On peut donc supposer que la σ-représentation (π, A) est irréductible. Si l'entier s associé à (π, A) comme dans le lemme est différent de 1, la distribution Θ_π^A est nulle. On est donc ramené au cas où la représentation π est irréductible. D'où la proposition [**60**, théo. 7.1]. □

REMARQUE 1. – Plus généralement, la proposition est vraie pour toute distribution σ-invariante sur $G(E)$ vérifiant [**60**, prop. 3.3]. En effet, à l'exception de loc. cit., utilisé dans la démonstration de [**60**, prop. 4.2], tous les arguments invoqués dans la démonstration de [**60**, théo. 7.1] sont valables pour n'importe quelle distribution σ-invariante sur $G(E)$ — et pas seulement pour le caractère σ-tordu d'une représentation σ-stable irréductible de $G(E)$.

REMARQUE 2. – La fonction Θ_π^A sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de (π, A) (et pas du choix de dg_E), et pour $x \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et $g \in G(E)$, on a $\Theta_\pi^A(g^{-1}xg^\sigma) = \Theta_\pi^A(x)$.

I.5.2. – Soient $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ et $\alpha_\nu = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. On pose

$$M_\nu(E)_{\sigma-\mathrm{r}} = \mathrm{GL}(\alpha_1, E)_{\sigma-\mathrm{r}} \times \cdots \times \mathrm{GL}(\alpha_s, E)_{\sigma-\mathrm{r}},$$

et si (τ, B) est une σ-représentation admissible de $M_\nu(E)$ de longueur finie, on définit comme en 5.1 la fonction Θ_τ^B sur $M_\nu(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. Notons que $M_\nu(E) \cap G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ est contenu dans $M_\nu(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. Si π est une représentation de $G(E)$ d'espace V, on note π_ν la représentation (non normalisée) de $M_\nu(E)$ dans le module de Jacquet $V_\nu = V/\langle \pi(u)(v) - v : v \in V, u \in U_\nu(E)\rangle$. On a une identification canonique $\pi_\nu^\sigma = (\pi^\sigma)_\nu$. Si de plus π est σ-stable, alors π_ν l'est aussi, et tout isomorphisme A entre π et π^σ induit par passage au quotient un isomorphisme A_ν entre π_ν et π_ν^σ.

Le lemme suivant est la version σ-tordue d'un résultat bien connu de Casselman.

LEMME ([**1**, ch. 1, prop. 2.3]). – *Soit* (π, A) *une* σ*-représentation fortement irréductible de* $G(E)$*. Pour* $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ *et* $m \in M_\nu(\mathfrak{o}_E) \cap G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$*, on a*

$$\Theta_\pi^A(\varpi^\nu m) = \Theta_{\pi_\nu}^{A_\nu}(\varpi^\nu m).$$

Démonstration. – Il s'agit d'une simple adaptation de [**16**]; cf. [**67**, 7.4]. □

I.5.3. – Pour $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, on pose $\rho(\nu) = \sum_{1\leq i<j\leq n}(\nu_i - \nu_j)$.

PROPOSITION. – *Soit* (π, A) *une* σ*-représentation fortement irréductible de* $G(E)$*. Pour* $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$*, on a*

$$\langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_\pi^A \rangle = q^{\rho(l\nu)} \int_{M_\nu(\mathfrak{o}_E)\cap M_\nu(E)_{\sigma-\mathrm{r}}} \Theta_{\pi_\nu}^{A_\nu}(\varpi^\nu m) dm_{\nu,E}.$$

Démonstration. – Soit $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$. Notons $\mathfrak{X}$ l'ouvert de $M_\nu(E)$ formé des $m^{-1}xm^\sigma$ pour $x \in M_\nu(\mathfrak{o}_E)$ et $m \in M_\nu(E)$. D'après le lemme 2 de 4.1, si deux éléments de $\varpi^\nu\mathfrak{X}$ sont σ-conjugués dans $G(E)$, alors ils le sont dans $M_\nu(E)$. L'application $G(E) \times \varpi^\nu\mathfrak{X} \to G(E)$, $(g, m) \mapsto g^{-1}mg^\sigma$ induit donc par passage au quotient une application injective $\iota_\nu : M_\nu(E)\backslash(G(E)\times M_\nu(E)) \to G(E)$, pour l'opération de $M_\nu(E)$ sur $G(E)\times M_\nu(E)$ donnée par $m'(g, m) = (m'g, m'm(m'^\sigma)^{-1})$. Notons p_ν la projection canonique de $G(E) \times \varpi^\nu\mathfrak{X}$ sur $M_\nu(E)\backslash(G(E) \times \varpi^\nu\mathfrak{X})$. Pour $(g, m) \in G(E) \times \varpi^\nu\mathfrak{X}$, notons $J(g, m)$ le Jacobien de ι_ν en $p_\nu(g, m)$; puisque $\iota_\nu\circ p_\nu(g, m) = g^{-1}\iota_\nu\circ p_\nu(1, m)g^\sigma$, on a $J(g, m) = J(1, m)$, et l'on pose $J(m) = J(1, m)$.

Notons $\mathfrak{Y}$ l'ouvert $M_\nu(\mathfrak{o}_E) \cap M(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ de $M_\nu(E)$; alors $\varpi^\nu\mathfrak{Y}$ est contenu dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. Soit dk_E la restriction de dg_E à K_E. compte-tenu du lemme 1 de 4.1, on a

$$\begin{aligned}\langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_\pi^A \rangle &= \iint_{K_E\times\mathfrak{Y}} J(k, \varpi^\nu m)\Theta_\pi^A(k^{-1}\varpi^\nu mk^\sigma)dk_E dm_{\nu,E}\\ &= \int_{\mathfrak{Y}} J(\varpi^\nu m)\Theta_\pi^A(\varpi^\nu m)dm_{\nu,E}.\end{aligned}$$

Soit $m \in M_\nu(\mathfrak{o}_E)$, et posons $t = \varpi^\nu m$. Avec les notations de la démonstration du lemme 1 de 4.1, on a

$$J(t) = |\mathrm{det}_F(X \mapsto X^\sigma - t^{-1}Xt; \bar{\mathfrak{u}}_\nu \oplus \mathfrak{u}_\nu)|_F.$$

Puisque $X \mapsto t^{-1}Xt$ contracte strictement $\bar{\mathfrak{u}}_\nu$ et dilate strictement $\mathfrak{u}_\nu$, on a

$$|\mathrm{det}_F(X \mapsto X^\sigma - t^{-1}Xt; \bar{\mathfrak{u}}_\nu)|_F = 1$$

et

$$J(t) = |\mathrm{det}_F(X \mapsto X^\sigma - t^{-1}Xt; \mathfrak{u}_\nu)|_F = \prod_{1\leq i<j\leq n} q^{-l(\nu_j-\nu_i)}.$$

On conclut grâce au lemme de 5.2. □

Notons $\Psi_0(E)$ le groupe $\mathrm{Hom}(A_0(E)/A_0(\mathfrak{o}_E), \mathbb{C}^\times)$ des caractères non ramifiés de $A_0(E)$. De même, posons $\Psi_0(F) = \mathrm{Hom}(A_0(F)/A_0(\mathfrak{o}_F), \mathbb{C}^\times)$. Puisque l'extension E/F est non ramifiée, la restriction à $A_0(F)$ des caractères de $A_0(E)$ identifie $\Psi_0(E)$ à $\Psi_0(F)$. En particulier, tout caractère non ramifié de $A_0(E)$ est σ-stable.

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ (cf. 1.4) s'identifie naturellement au sous-groupe W de $G(\mathbb{Z})$ formé des matrices de permutation. Si χ est un caractère de $A_0(E)$, on note I_χ la série principale $\iota_{P_0(E)}^{G(E)}(\chi)$, c'est-à-dire l'induite parabolique normalisée de χ à $G(E)$. Rappelons [**7**, 2.9] que si π est une représentation irréductible de $G(E)$ telle que pour $i = 1, 2$, π soit isomorphe à un sous-quotient d'une série principale I_{χ_i} pour un caractère χ_i de $A_0(E)$, alors il existe un élément $w \in W$ tel que $\chi_2 = \chi_1^w$.

COROLLAIRE. – *Soit* $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$. *Si* $\langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_\pi^A \rangle \neq 0$, *il existe un caractère non ramifié* ψ *de* $A_0(E)$ *tel que* π *soit isomorphe à un sous-quotient de* I_ψ.

Démonstration. – Notons $\phi_{M,e} \in C_c^\infty(M_\nu(E))$ la fonction caractéristique de $M_\nu(\mathfrak{o}_E)$. D'après la proposition, on a $\langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_\pi^A \rangle = q^{\rho(l\nu)} \omega_{\pi_\nu}(\varpi^\nu) \langle \phi_{M,e}, \Theta_{\pi_\nu}^{A_\nu} \rangle$ où ω_{π_ν} est le caractère central de π_ν. Supposons $\langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_\pi^A \rangle \neq 0$. Puisque le groupe $M_\nu(\mathfrak{o}_E)$ est σ-stable, l'opérateur A_ν stabilise le sous-espace W_0 de l'espace de π_ν formé des vecteurs fixés par $M_\nu(\mathfrak{o}_E)$. On en déduit que $W_0 \neq \{0\}$, puis par transitivité des foncteurs restriction de Jacquet, que π a des vecteurs non nuls fixés par un sous-groupe d'Iwahori de $G(E)$ [**17**, prop. 2.4]. On conclut grâce à [**17**, prop. 2.6]. □

I.5.4. – Une représentation irréductible de $G(E)$ est dite *non ramifiée*(1) si elle a des vecteurs non nuls fixés par un sous-groupe d'Iwahori de $G(E)$; elle est dite *sphérique* si elle a des vecteurs non nuls fixés par K_E. D'après le théorème de Borel [**17**, § 2], si ψ est un caractère non ramifié de $A_0(E)$, alors tout sous-quotient irréductible de la série principale I_ψ est non ramifié; et réciproquement, toute représentation irréductible non ramifiée de $G(E)$ est isomorphe à un sous-quotient de I_ψ pour un $\psi \in \Psi_0(E)$. D'après le corollaire de 5.3, les fonctions élémentaires ϕ_ν^σ pour $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$, annulent les traces σ-tordues de toutes les représentations irréductibles σ-stables de $G(E)$ qui *ne sont pas* non ramifiées. Dans ce n°, on donne une formule pour la trace σ-tordue d'une représentation irréductible *générique* non ramifiée σ-stable de $G(E)$ sur les fonctions élémentaires ϕ_ν^σ pour $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ *régulier* (i.e. tel que $M_\nu = A_0$).

Si π est une représentation irréductible générique σ-stable de $G(E)$, on définit comme suit un opérateur d'entrelacement non nul *normalisé* $A_\sigma(\pi)$ entre π et π^σ. Fixons un caractère non trivial θ de $(F,+)$, et notons $\tilde{\theta}_E$ le caractère de $U_0(E)$ défini par

$$\tilde{\theta}_E(u) = \theta \circ T_{E/F}(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1})$$

pour $u = (u_{i,j})$; ici $T_{E/F}$ est l'application trace de E à F, donnée par $T_{E/F}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i x$. Puisque π est générique, il existe une forme linéaire non nulle λ sur l'espace V de π — appelée *fonctionnelle de Whittaker* pour π —, unique à multiplication par un scalaire près, telle que $\lambda(\pi(u)(v)) = \tilde{\theta}_E(u)\lambda(v)$ pour tout $u \in U_0(E)$ et tout $v \in V$. Comme le caractère $\tilde{\theta}_E$ est σ-stable, si A est un isomorphisme entre π et π^σ, alors $\lambda \circ A$ est encore une fonctionnelle de Whittaker pour π. L'espace des opérateurs d'entrelacement entre π et π^σ est de dimension 1; par suite il existe un unique isomorphisme B entre π et π^σ vérifiant l'égalité $\lambda \circ B = \lambda$. Clairement, B

(1) La terminologie n'est pas vraiment standard.

ne dépend pas du choix de λ. Et B ne dépend pas non plus du choix de θ: si θ' est un autre caractère non trivial de $(F,+)$, alors il existe un $x \in A_0(F)$ tel que $\tilde{\theta}'_E(u) = \tilde{\theta}_E(xux^{-1})$ pour tout $u \in U_0(E)$. La forme linéaire λ' sur V définie par $\lambda'(v) = \lambda(\pi(x)(v))$ vérifie l'égalité $\lambda'(\pi(u)(v)) = \tilde{\theta}'_E(u)\lambda(v)$ pour tout $u \in U_0(E)$ et tout $v \in V$. Puisque $\lambda \circ A = \lambda$ et $\pi(x) \circ A = A \circ \pi(x)$, on a $\lambda' \circ A = \lambda'$. On pose donc $A_\sigma(\pi) = B$, et l'on note Θ_π^σ la distribution $\Theta_\pi^{A_\sigma(\pi)}$.

D'après [**7**, 4.4 et 4.6], pour tout caractère χ de $A_0(E)$, la série principale I_χ a un unique sous-quotient irréductible générique, que l'on note I_χ^*. Si de plus χ est σ-stable, alors I_χ l'est aussi, et l'on définit comme suit un $\mathbb{C}$-automorphisme $A_{\sigma,\chi}$ de l'espace V de I_χ: pour $f \in V$, on pose $A_{\sigma,\chi}(f) = f^\sigma$ avec $f^\sigma(g) = f(g^\sigma)$ pour $g \in G(E)$. Par construction, $A_{\sigma,\chi}$ entrelace I_χ et I_χ^σ, et si λ est une forme linéaire (quelconque) sur V, on a $\lambda \circ A_{\sigma,\chi} = \lambda^\sigma$ avec $\lambda^\sigma(f) = \lambda(f^\sigma)$ pour $f \in V$.

LEMME 1. – *Soit χ un caractère σ-stable de $A_0(E)$. La représentation I_χ^* est σ-stable, et par restriction et passage au quotient, $A_{\sigma,\chi}$ induit un isomorphisme entre I_χ^* et $(I_\chi^*)^\sigma$, qui coïncide avec l'opérateur normalisé $A_\sigma(I_\chi^*)$.*

Démonstration. – Puisque I_χ est σ-stable et $(I_\chi^*)^\sigma$ est générique, les représentations I_χ^* et $(I_\chi^*)^\sigma$ sont isomorphes. Notons V l'espace de I_χ, et $V_{\theta,E}$ l'espace des fonctions ϕ sur $G(E)$ qui se factorisent à travers $G(E)/K_\phi$ pour un sous-groupe ouvert compact K_ϕ de $G(E)$, et vérifient l'égalité $\phi(ug) = \tilde{\theta}_E(u)\phi(g)$ pour tout $u \in U_0(E)$ et tout $g \in G(E)$. Soit $r_{\theta,E}$ la représentation de $G(E)$ par translations à droite sur $V_{\theta,E}$. L'espace des opérateurs d'entrelacement entre I_χ et $r_{\theta,E}$ est de dimension 1 [**7**, 4.4 et 4.6], et si Φ est un tel opérateur, d'après la propriété de transitivité des modèles de Whittaker [**65**, theo. 2], pour $f \in V$ et $g \in G(E)$, on a $\Phi(f^\sigma)(g) = \Phi(f)(g^\sigma)$.

Choisissons un opérateur d'entrelacement non nul Φ entre I_χ et $r_{\theta,E}$, et notons λ_Φ la forme linéaire sur V définie par $\lambda_\Phi(f) = \Phi(f)(1)$. On a donc $\lambda_\Phi \neq 0$, $\lambda_\Phi(I_\chi(u)(f)) = \tilde{\theta}_E(u)\lambda_\Phi(f)$ pour tout $u \in U_0(E)$ et tout $f \in V$, et $\lambda_\Phi^\sigma = \lambda_\Phi$. Notons $\overline{I}_\chi$ la représentation quotient de I_χ d'espace $(\ker \Phi)\backslash V$. Puisque I_χ^* est l'unique sous-quotient irréductible générique de I_χ, I_χ^* est l'unique sous-représentation irréductible de $\overline{I}_\chi$. Notons $V^* \subset (\ker \Phi)\backslash V$ l'espace de I_χ^*. Par construction, λ_Φ induit, par restriction et passage au quotient, une forme linéaire non nulle λ sur V^*, qui vérifie $\lambda(I_\chi^*(u)(f^*)) = \tilde{\theta}_E(u)\lambda(f^*)$ pour tout $u \in U_0(E)$ et tout $f^* \in V^*$.

Puisque $\Phi^\sigma = \Phi$ et que I_χ^* est l'unique sous-représentation irréductible de $\overline{I}_\chi$, l'opérateur $A_{\sigma,\chi}$ induit, par restriction et passage au quotient, un isomorphisme A entre I_χ^* et $(I_\chi^*)^\sigma$. Comme $\lambda_\Phi \circ A_{\sigma,\chi} = \lambda_\Phi^\sigma$ et $\lambda_\Phi^\sigma = \lambda_\Phi$, on a $\lambda \circ A = \lambda$. □

Si χ un caractère de $A_0(E)$, on note χ_{u} le caractère *unitaire* de $A_0(E)$ défini par $\chi_{\mathrm{u}} = \chi|\chi|^{-1}$, et $a(\chi) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ la suite définie par $|\chi|(x_1, \ldots, x_n) =$

$|x_1|_E^{a_1}\cdots|x_n|_E^{a_n}$. On dit que χ est *positif* si $a(\chi)\in\mathbb{R}_+^n$. On note $\Psi_0^+(E)$ le sous-ensemble de $\Psi_0(E)$ formé des caractères positifs.

Un élément $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{R}_+^n$ est dit *régulier* si les ν_i sont deux à deux distincts, c'est-à-dire si $M_\nu=A_0$. Si χ est un caractère de $A_0(E)$, on note W_χ le stabilisateur de χ dans W, i.e. le sous-groupe de W formé des w tels que $\chi^w=\chi$; et l'on dit que χ est *régulier* si $W_\chi=\{1\}$. On a l'inclusion $W_\chi\subset W_{|\chi|}$, et si χ est positif, alors $a(\chi)$ est régulier si et seulement si $|\chi|$ l'est.

Soit χ un caractère de $A_0(E)$. On note $\mathfrak{X}(\chi)$ le *multiensemble* de caractères de $A_0(E)$ formé des χ^w pour $w\in W$, pris avec leur multiplicité; on a donc

$$\mathfrak{X}(\chi)=\{\chi_1,\ldots,\chi_1;\chi_2,\ldots\chi_2;\ldots;\chi_s,\ldots,\chi_s\}$$

où les χ_i parcourent les éléments de l'ensemble $\underline{\mathfrak{X}}(\chi)=\{\chi^w:w\in W\}$, chaque χ_i apparaissant un nombre de fois égal au cardinal de W_χ. D'après le lemme géométrique [**7**, 2.12], pour $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ régulier, la semisimplifiée de la représentation $(I_\chi)_\nu$ de $A_0(E)$ est $\oplus_{w\in W}\,\delta_0^{1/2}\chi^w=\oplus_{\chi'\in\mathfrak{X}(\chi)}\,\delta_0^{1/2}\chi'$; où l'on a posé $\delta_0=\delta_{P_0(E)}$.

Un *sous-multiensemble* $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}(\chi)$ est la donnée d'un sous-ensemble $\underline{\mathfrak{Y}}$ de $\underline{\mathfrak{X}}(\chi)$ et pour chaque $\chi'\in\underline{\mathfrak{Y}}$, d'un entier $m_{\chi'}>0$ inférieur ou égal au cardinal de W_χ; on a donc

$$\mathfrak{Y}=\{\chi'_1,\ldots,\chi'_1;\chi'_2,\ldots,\chi'_2;\ldots;\chi'_r,\ldots,\chi'_r\}$$

où les χ'_j parcourent les éléments de $\underline{\mathfrak{Y}}$, chaque χ'_j apparaissant un nombre de fois égal à $m_{\chi'_j}$. Tout sous-ensemble $\mathfrak{Y}$ de $\underline{\mathfrak{X}}(\chi)$ — et en particulier $\mathfrak{Y}=\varnothing$ — est un sous-multiensemble de $\mathfrak{X}(\chi)$: pour chaque $\chi'\in\mathfrak{Y}$, on a $m_{\chi'}=1$. On a des notions évidentes d'intersection et de somme de deux multiensembles. Notons que la somme de deux sous-multiensemble de $\mathfrak{X}(\chi)$ n'est en général pas un sous-multiensemble de $\mathfrak{X}(\chi)$ — elle l'est par exemple si leur intersection est vide —, et que la somme de deux sous-ensembles de $\underline{\mathfrak{X}}(\chi)$ est encore un sous-ensemble si et seulement si leur intersection est vide. Notons aussi que si χ est régulier, on a $\mathfrak{X}(\chi)=\underline{\mathfrak{X}}(\chi)$, et les caractères $\delta_0^{\frac{1}{2}}\chi^w$ pour $w\in W$, sont linéairement indépendants.

Soit $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ régulier. Si π est une représentation irréductible de $G(E)$ isomorphe à un sous-quotient de I_χ, par exactitude du foncteur de Jacquet, π_ν est isomorphe à un sous-quotient de $(I_\chi)_\nu$; on en déduit qu'il existe un sous-multiensemble $\mathfrak{X}(\chi,\pi)$ de $\mathfrak{X}(\chi)$, déterminé de manière unique par la classe d'isomorphisme de π, tel que la semisimplifiée de π_ν soit égale à $\oplus_{\chi'\in\mathfrak{X}(\chi,\pi)}\delta_0^{\frac{1}{2}}\chi'$. Et toujours par exactitude du foncteur de Jacquet, on a

$$\mathfrak{X}(\chi)=\sum_\pi\mathfrak{X}(\chi,\pi)$$

où π parcourt les éléments du multiensemble formé des classes d'isomorphisme de sous-quotients irréductibles de I_χ, pris avec leur multiplicité. En particulier, si π est une représentation irréductible de $G(E)$ isomorphe à un sous-quotient de I_χ, on a $\mathfrak{X}(\chi,\pi)=\mathfrak{X}(\chi)$ si et seulement si $\pi\simeq I_\chi$, i.e. si et seulement si I_χ est irréductible.

On note $\mathfrak{X}_\chi$, $\mathfrak{Y}_\chi$ et $\mathfrak{X}_\chi^*$ les sous-multiensembles de $\mathfrak{X}(\chi)$ définis comme suit: $\mathfrak{X}_\chi=\{\chi,\dots,\chi\}$ où χ apparaît un nombre de fois égal au cardinal de W_χ; $\mathfrak{Y}_\chi$ est formé des χ^w pour $w\in W_{|\chi|}$, chaque χ^w apparaissant un nombre de fois égal au cardinal de W_χ; et $\mathfrak{X}_\chi^*=\mathfrak{X}(\chi,I_\chi^*)$.

Lemme 2. – *Soit ψ un caractère non ramifié de $A_0(E)$. Pour $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ régulier, on a*

$$\langle\phi_\nu^\sigma,\Theta_{I_\psi^*}^\sigma\rangle=q^{\frac{1}{2}\rho(l\nu)}\sum_{\psi'\in\mathfrak{X}_\psi^*}\psi'(\varpi^\nu).$$

Démonstration. – Posons $\Pi=I_\psi$, $\pi=I_\psi^*$, et soit $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ régulier. L'isomorphisme $A_{\sigma,\psi}$ entre Π et Π^σ induit par passage aux quotients un isomorphisme entre Π_ν et Π_ν^σ, que l'on note $A_{\sigma,\psi,\nu}$. De même, l'opérateur d'entrelacement normalisé $A=A_\sigma(\pi)$ entre π et π^σ induit par passage aux quotients un isomorphisme entre π_ν et $\pi_\nu^\sigma=\pi_\nu$, que l'on note A_ν. D'après la définition de $A_{\sigma,\psi}$, l'opérateur $A_{\sigma,\psi,\nu}$ est l'identité de l'espace de Π_ν. On en déduit (lemme 1) que A_ν est l'identité de l'espace de π_ν. Par suite, pour $x\in A_0(E)_{\sigma-\mathrm{r}}=A_0(E)$, on a

$$\Theta_{\pi_\nu}^{A_\nu}(x)=\delta_0^{\frac{1}{2}}(x)\sum_{\psi'\in\mathfrak{X}_\psi^*}\psi'(x).$$

On conclut grâce à la proposition de 5.3, en remarquant que $\delta_0(\varpi^\nu)=q^{-l\rho(\nu)}=q^{-\rho(l\nu)}$. □

I.5.5. – D'après [**17**, cor. 2.2], pour tout caractère non ramifié ψ de $A_0(E)$, la série principale I_ψ a un unique sous-quotient irréductible sphérique, que l'on note I_ψ^{**}.

Soit $t\in W$ l'élément de $G(\mathbb{Z})$ ayant des 1 sur la seconde diagonale et des 0 partout ailleurs. Si χ est un caractère de $A_0(E)$, on note $\mathfrak{X}_\chi^t$ le sous-multiensemble de $\mathfrak{X}(\chi)$ formé des χ'^t pour $\chi'\in\mathfrak{X}_\chi$; de même, on note $\mathfrak{Y}_\chi^t$ le sous-multiensemble de $\mathfrak{X}(\chi)$ formé des χ'^t pour $\chi'\in\mathfrak{Y}_\chi$.

Remarque 1. – Le point (2) du lemme suivant est bien connu. Nous n'en donnons une preuve que par acquit de conscience.

Lemme 1. – *Soit χ un caractère positif de $A_0(E)$.*

(1) *Le sous-quotient irréductible générique I_χ^* est l'unique sous-représentation irréductible de I_χ, et l'on a les inclusions $\mathfrak{X}_\chi\subset\mathfrak{Y}_\chi\subset\mathfrak{X}_\chi^*$.*
(2) *La série principale I_χ a un unique quotient irréductible, disons $\overline{I}_\chi$, et l'on a les inclusions $\mathfrak{X}_\chi^t\subset\mathfrak{Y}_\chi^t\subset\mathfrak{X}(\chi,\overline{I}_\chi)$. En particulier, I_χ est irréductible si et seulement si $\overline{I}_\chi\simeq I_\chi^*$, i.e. si et seulement si $\mathfrak{Y}_\chi^t\cap\mathfrak{X}_\chi^*\neq\varnothing$. Si de plus χ est non ramifié, on a $I_\chi^{**}=\overline{I}_\chi$.*

(3) *Pour $\psi \in \Psi_0(E)$, I_ψ est irréductible si et seulement si $I_\psi^{**} \simeq I_\psi^*$.*

Démonstration. – Posons $\nu = a(\chi)$, et notons M, P, U les sous-schémas en groupes fermés M_ν, P_ν, U_ν de G (cf. 4.1). Puisque χ_{u} est un caractère unitaire de $A_0(E)$, l'induite parabolique normalisée $\sigma = \iota_{P_0(E)\cap M(E)}^{M(E)}(\chi_{\mathrm{u}})$ est irréductible et tempérée. Par construction, $W_{|\chi|}$ coïncide avec le groupe de Weyl $W_M = W \cap M(\mathbb{Z})$ de $M(E)$. Par suite, le caractère $|\chi|$ se prolonge de manière unique en un caractère de $M(E)$, que l'on note encore $|\chi|$. Par transitivité du foncteur induction parabolique, la série principale I_χ est isomorphe à $\iota_{P(E)}^{G(E)}(\sigma \otimes |\chi|)$. Le triplet $(P(E), \sigma, |\chi|)$ vérifiant les "conditions de Langlands", on peut lui appliquer la proposition 3.2 de [**46**]: la représentation I_χ a un modèle de Whittaker. Par suite, toute sous-représentation irréductible de I_χ est générique, ce qui implique que I_χ^* est l'unique sous-représentation irréductible de I_χ.

Posons $\pi = I_\chi^*$, et soit $\tau = \pi_{U(E)}$ la restriction de Jacquet (non normalisée) de π à $M(E)$. Par réciprocité de Frobenius, on obtient que l'espace $\mathrm{Hom}_{M(E)}(\tau, \sigma \otimes \delta_{P(E)}^{\frac{1}{2}}|\chi|)$ est de dimension 1, où $\delta_{P(E)}$ désigne le caractère module de $P(E)$. Par transitivité et exactitude du foncteur de Jacquet, on en déduit que la représentation $(\sigma \otimes \delta_{P(E)}^{\frac{1}{2}}|\chi|)_{U_0(E)\cap M(E)}$ de $A_0(E)$ est isomorphe à un quotient de $\pi_{U_0(E)}$. D'après le lemme géométrique [**7**, 2.12], la semisimplifiée de la représentation $(\sigma \otimes \delta_{P(E)}^{\frac{1}{2}}|\chi|)_{U_0(E)\cap M(E)}$ de $A_0(E)$ est $\oplus_{w\in W_M} \delta_{P_0(E)\cap M(E)}^{\frac{1}{2}}(\delta_{P(E)}^{\frac{1}{2}}\chi)^w$. Mais pour $w \in W_M$, on a $(\delta_{P(E)}^{\frac{1}{2}}\chi)^w = \delta_{P(E)}^{\frac{1}{2}}\chi^w$, et pour $x \in A_0(E)$, on a $\delta_{P_0(E)\cap M(E)}(x)\delta_{P(E)}(x) = \delta_{P_0}(x)$. D'où l'inclusion $\mathfrak{Y}_\chi \subset \mathfrak{X}_\chi^*$, puisque $W_{|\chi|} = W_M$. D'autre part on a l'inclusion $\mathfrak{X}_\chi \subset \mathfrak{Y}_\chi$, puisque $W_\chi \subset W_{|\chi|}$.

Puisque le triplet $(P(E), \sigma, |\chi|)$ vérifie les conditions de Langlands, I_χ a un unique quotient irréductible (isomorphe au quotient de Langlands de $\iota_{P(E)}^{G(E)}(\sigma \otimes |\chi|)$, disons $\overline{I}_\chi$. Par suite, I_χ est irréductible si et seulement si $\overline{I}_\chi = I_\chi^*$. Comme I_χ a un unique sous-quotient irréductible générique, $\overline{I}_\chi = I_\chi^*$ si et seulement si $\overline{I}_\chi \simeq I_\chi^*$. D'après la classification de Bernstein-Zelevinski, la série principale I_{χ^t} a une unique sous-représentation irréductible, et cette sous-représentation est isomorphe à $\overline{I}_\chi$. Comme ci-dessus, on obtient les inclusions $\mathfrak{X}_{\chi^t} \subset \mathfrak{Y}_{\chi^t} \subset \mathfrak{X}(\chi^t, \overline{I}_\chi) = \mathfrak{X}(\chi, \overline{I}_\chi)$. Puisque $W_{|\chi^t|} = W_{|\chi|^t} = t^{-1}W_{|\chi|}t$, on a $\mathfrak{Y}_{\chi^t} = \mathfrak{Y}_\chi^t$; de même on a $\mathfrak{X}_{\chi^t} = \mathfrak{X}_\chi^t$. Comme pour chaque $w \in W_{|\chi|}$, le caractère χ^{wt} apparaît dans $\mathfrak{Y}_\chi^t$ avec une multiplicité égale au cardinal de W_χ, si π est un sous-quotient irréductible de I_χ distinct de $\overline{I}_\chi$, l'intersection $\mathfrak{Y}_\chi^t \cap \mathfrak{X}(\chi, \pi)$ est vide. Par conséquent, I_χ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{Y}_\chi^t \cap \mathfrak{X}_\chi^* \neq \varnothing$. Si de plus χ est non ramifié, d'après [**50**, prop. 6], on a $I_\chi^{**} = \overline{I}_\chi$. Enfin si ψ est un caractère non ramifié quelconque de $A_0(E)$, il existe un $w \in W$ tel que $\psi^w \in \Psi_0^+(E)$, et puisque $I_{\psi^w} \simeq I_\psi$, on a $I_{\psi^w}^* \simeq I_\psi^*$ et $I_{\psi^w}^{**} \simeq I_\psi^{**}$. □

Le lemme ci-dessus fait pendant à la proposition 8 de [**50**]. Dans loc. cit., Labesse travaille avec un groupe réductif connexe défini sur F, de type adjoint et non ramifié sur F. La théorie des modèles de Whittaker n'étant pas utilisable, il considère directement, au lieu du sous-quotient irréductible générique d'une série principale non ramifiée, son sous-quotient irréductible sphérique: pour $\psi \in \Psi_0^+(E)$, l'inclusion $\mathfrak{Y}_\psi^t \subset \mathfrak{X}(\psi, I_\psi^{**})$ lui permet de séparer — à l'aide de ses fonctions élémentaires — la représentation I_ψ^{**} des autres sous-quotients irréductibles de I_ψ. Puisque toutes les représentations qui interviendront dans la section 6 seront composants locaux de représentations automorphes cuspidales, on peut ne considérer ici que des représentations génériques. Mais ce point de vue générique n'est en fait pas plus simple que le point de vue sphérique: fixé un caractère non ramifié ψ de $A_0(E)$, on a besoin du lemme précédent pour séparer les induites irréductibles $\iota_{P_0(F)}^{G(F)}(\eta)$ pour $\eta \in \Psi_0(F)$ tel que $\eta \circ N = \psi$, de celles qui sont réductibles.

Le théorème suivant est le “résultat technique essentiel”de [**50**].

THÉORÈME ([**50**, prop. 9]). – *Soit $\{\pi_i : i \in I\}$ une famille finie de représentations irréductibles génériques σ-stables de $G(E)$ deux à deux non isomorphes, et soit $\{\rho_j : j \in J\}$ une famille finie de représentations irréductibles génériques de $G(F)$ deux à deux non isomorphes. Soient aussi $\{a_i : i \in I\}$ et $\{b_j : j \in J\}$ deux familles de nombres complexes telles que pour tout $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ régulier, on ait*

$$\sum_{i\in I} a_i \langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_{\pi_i}^\sigma \rangle = \sum_{j\in J} b_j \langle f_{l\nu}, \Theta_{\rho_j} \rangle.$$

Alors pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, on a

$$\sum_{i\in I} a_i \langle \phi, \Theta_{\pi_i}^\sigma \rangle = \sum_{j\in J} b_j \langle b(\phi), \Theta_{\rho_j} \rangle.$$

Démonstration. – On peut supposer que pour $(i,j) \in I \times J$, on a $a_i \neq 0$ et $b_j \neq 0$. Si λ est un caractère de $A_0(F)$, on note $I_{F,\lambda}$ l'induite parabolique normalisée $\iota_{P_0(F)}^{G_0(F)}(\lambda)$ de λ à $G(F)$, $I_{F,\lambda}^*$ l'unique sous-quotient irréductible générique de $I_{F,\lambda}$, et $\tilde{\lambda}$ le caractère $\lambda \circ N$ de $A_0(E)$. Comme en 5.4, on définit les multiensembles $\mathfrak{X}_{F,\lambda}$, $\mathfrak{Y}_{F,\lambda}$ et $\mathfrak{X}_{F,\lambda}^*$ de caractères de $A_0(F)$. D'après le corollaire de 5.3 et sa version non tordue, on peut supposer que pour $(i,j) \in I \times J$, $\pi_i = I_{\psi_i}^*$ pour un caractère $\psi_i \in \Psi_0^+(E)$, et $\rho_j = I_{F,\eta_j}^*$ pour un caractère $\eta_j \in \Psi_0^+(F)$.

D'après le lemme 2 de 5.4, pour $i \in I$ et $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ régulier, on a

$$\langle \phi_\nu^\sigma, \Theta_{\pi_i}^\sigma \rangle = q^{\frac{1}{2}\rho(l\nu)} \sum_{\chi \in \mathfrak{X}_{\psi_i}^*} \chi(\varpi^\nu).$$

Et d'après la version non tordue de ce même lemme, pour $j \in J$ et $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ régulier, on a

$$\langle f_{l\nu}, \Theta_{\rho_j} \rangle = q^{\frac{1}{2}\rho(l\nu)} \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}^*_{F,\eta_j}} \lambda(\varpi^{l\nu}).$$

Pour $j \in J$, notons $I(j)$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $\tilde{\eta}_j = \psi_i^w$ pour un $w \in W$. Si χ est un caractère de $A_0(E)$, alors pour tout $w \in W$, on a $I^*_{\chi^w} \simeq I^*_\chi$. Puisque les représentations π_i (pour $i \in I$) sont supposées deux à deux non isomorphes, pour $j \in J$, l'ensemble $I(j)$ est ou bien vide ou bien réduit à un élément, disons i_j. compte-tenu de l'indépendance linéaire des caractères de $A_0(E)$, on peut supposer que $I(j) \neq \varnothing$ pour tout $j \in J$, et que $\{i_j : j \in J\} = I$. Pour $i \in I$, notons $J(i)$ l'ensemble des $j \in J$ tels que $i_j = i$.

Soit $i \in I$. L'indépendance linéaire des caractères de $A_0(E)$ implique l'égalité

$$(*) \qquad a_i \sum_{\chi \in \mathfrak{X}^*_{\psi_i}} \chi = \sum_{j \in J(i)} b_j \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}^*_{F,\eta_j}} \tilde{\lambda}.$$

Pour $j \in J$, on a l'égalité $W_{|\eta_j|} = W_{|\tilde{\eta}_j|}$. Pour $j \in J(i)$, puisque les caractères ψ_i et $\tilde{\eta}_j$ sont positifs et conjugués dans W, ils sont conjugués dans $W_{|\psi_i|}$, par conséquent $|\psi_i| = |\tilde{\eta}_j|$. Soit $j \in J(i)$. Alors $W_{\psi_i} \cup W_{\tilde{\eta}_j} \subset W_{|\psi_i|}$, et d'après le lemme précédent, on a $\mathfrak{Y}_{\psi_i} = \mathfrak{Y}_{\tilde{\eta}_j} \subset \mathfrak{X}^*_{\psi_i} \cap \mathfrak{X}^*_{\tilde{\eta}_j}$. Puisque ψ_i et $\tilde{\eta}_j$ sont conjugués dans $W_{|\psi_i|}$, ψ_i apparaît dans la somme $\sum_{\lambda \in \mathfrak{X}^*_{\eta_j}} \tilde{\lambda}$ avec multiplicité W_{ψ_i}. D'où l'égalité $a_i = \sum_{j \in J(i)} b_j$ (d'après $(*)$, grâce à l'indépendance des caractères de $A_0(E)$).

Soit $\eta \in \Psi_0^+(F)$. Écrivons $\eta = \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^n$ pour des caractères non ramifiés η^k de $F^\times$. D'après [**7**, 4.2], la série principale $I_{F,\eta}$ est réductible si et seulement s'il existe deux indices k et m tels que $\eta^k = \eta^m| \,|_F$. Comme $| \,|_F \circ N = | \,|_E$, si $I_{F,\eta}$ est réductible, alors $I_{\tilde{\eta}}$ l'est aussi. Réciproquement, si $I_{\tilde{\eta}}$ est réductible, alors $\mathfrak{Y}^t_{\tilde{\eta}} \cap \mathfrak{X}^*_{\tilde{\eta}} = \varnothing$, et $I_{F,\eta}$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{Y}^t_{F,\eta} \subset \mathfrak{X}^*_{F,\eta}$; où, pour tout caractère χ de $A_0(F)$, $\mathfrak{Y}^t_{F,\chi}$ est le multiensemble de caractères de $A_0(F)$ défini comme plus haut. Pour $i \in I$, notons $J(i)_{\mathrm{irr}}$ le sous-ensemble de $J(i)$ formé des indices j tels que la série principale I_{F,η_j} soit irréductible. Pour $i \in I$ tel que la série principale I_{ψ_i} est réductible, on a l'égalité $\sum_{j \in J(i)_{\mathrm{irr}}} b_j = 0$ (d'après $(*)$, grâce à l'indépendance linéaire des caractères de $A_0(E)$).

Soit $i \in I$. Pour $j, j' \in J(i)$, il existe un caractère $\xi \in \Psi_0(F)$ d'ordre divisant l tels que $\eta_{j'} = \xi \eta_j^w$ pour un $w \in W$. D'après la définition de l'homomorphisme $b : \mathscr{H}_E \to \mathscr{H}_F$ (cf. 3.1), on en déduit que pour $j, j' \in J(i)_{\mathrm{irr}}$, on a $\langle b(\phi), \Theta_{\rho_{j'}} \rangle = \langle b(\phi), \Theta_{\rho_j} \rangle$ pour tout $\phi \in \mathscr{H}_E$. Par suite si la représentation π_{ψ_i} est réductible, on a $\sum_{j \in J(i)_{\mathrm{irr}}} b_j \langle b(\phi), \Theta_{\rho_j} \rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathscr{H}_E$.

En définitive, on est ramené à montrer que pour $\eta \in \Psi_0(F)$ tel que $I_{\tilde{\eta}}$ est irréductible — ce qui implique que $I_{F,\eta}$ l'est aussi —, on a

$$\mathrm{trace}(\pi_{\tilde{\eta}}(\phi dg_E) \circ A_{\sigma,\tilde{\eta}})) = \mathrm{trace}(\rho_\eta(b(\phi)dg))$$

pour tout $\phi \in \mathscr{H}_E$. □

LEMME 2. – *Soit $\psi = \psi^1 \otimes \cdots \otimes \psi^n \in \Psi_0(E)$. Pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, on a*

$$\langle \phi, \Theta_{I_\psi}^{A_{\sigma,\psi}} \rangle = S_E(\phi)(\psi^1(\varpi), \ldots, \psi^n(\varpi)).$$

Démonstration. – L'opérateur $A_{\sigma,\psi}$ agit trivialement le sous-espace de l'espace de I_ψ formé des vecteurs K_E-invariants. Pour $\phi \in \mathscr{H}_E$, puisque ϕ est σ-stable, il s'agit de montrer que

$$\langle \phi, \Theta_{I_\psi} \rangle = S_E(\phi)(\psi^1(\varpi), \ldots, \psi^n(\varpi))$$

où l'on a posé $\Theta_{I_\psi} = \mathrm{trace}(I_\psi dg_E)$; ce qui est bien connu (cf. par exemple [**57**, 7.5.6]). □

D'après la définition de l'homomorphisme $b : \mathscr{H}_E \to \mathscr{H}_F$, le lemme ci-dessus et sa version non tordue (i.e. correspondant à l'extension triviale $E = F$), impliquent le théorème.

REMARQUE 2. – On aurait pu se contenter d'une version affaiblie du théorème, ne faisant intervenir que des représentations génériques *unitaires* (en effet, comme on l'a dit plus haut, nous n'aurons à considérer que des composants locaux de représentations automorphes cuspidales). En ce cas la démonstration se simplifie puisqu'on sait que les représentations lisses irréductibles génériques unitaires non ramifiées de $G(E)$ sont toutes des séries principales irréductibles de la forme I_ψ pour un caractère non ramifié ψ de $A_0(E)$.

I.6. Le lemme fondamental pour toutes les fonctions de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$

I.6.1. – Soit $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ une extension finie cyclique de corps globaux, de degré l. On note $\mathbf{\Sigma}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$, $\mathbb{A}_\mathbf{E}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{E}$, et $\mathbb{A}_\mathbf{F}$ celui de $\mathbf{F}$. Si v est une place de $\mathbf{F}$, on note $\mathbf{F}_v$ le complété de $\mathbf{F}$ en v, et l'on pose $\mathbf{E}_v = \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}_v$; chaque élément de $\mathbf{\Sigma}$ se prolonge de manière unique en un $\mathbf{F}_v$-automorphisme de $\mathbf{E}_v$, ce qui fait de $\mathbf{E}_v$ une $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique de groupe $\mathbf{\Sigma}$. La place v est dite *inerte* (dans $\mathbf{E}$) si $\mathbf{E}_v$ est un corps, auquel cas $\mathbf{\Sigma}$ s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v)$; et elle est dite *scindée* (dans $\mathbf{E}$) si $\mathbf{E}_v$ est isomorphe au produit $\mathbf{F}_v \times \cdots \times \mathbf{F}_v$, le groupe $\mathbf{\Sigma}$ opérant par permutation cyclique des coordonnées. En général, on a la décomposition en produit de corps $\mathbf{E}_v = \prod_{w|v} \mathbf{E}_w$ où w parcourt l'ensemble, disons $\mathscr{E}_v$, des places de $\mathbf{E}$ au-dessus de v. Les corps $\mathbf{E}_w$ pour $w \in \mathscr{E}_v$, sont des extensions finies cycliques de $\mathbf{F}_v$; ces extensions sont toutes isomorphes, de degré $l_v = \frac{l}{r_v}$ où r_v est le cardinal de $\mathscr{E}_v$.

Choisissons un générateur σ du groupe $\mathbf{\Sigma}$. Si v est une place de $\mathbf{F}$, il existe une permutation cyclique $w \mapsto \sigma(w)$ de $\mathscr{E}_v$ telle que pour $w \in \mathscr{E}_v$, σ induit par restriction un $\mathbf{F}_v$-isomorphisme de $\mathbf{E}_w$ sur $\mathbf{E}_{\sigma(w)}$; et $\tau_v = \sigma^{r_v}$ est un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}_w/\mathbf{F}_v)$. Si v est une place de $\mathbf{F}$, fixée une place $w \in \mathscr{E}_v$, on a la décomposition $\mathbf{E}_v = \prod_{i=0}^{r_v-1} \mathbf{E}_{\sigma^{-i}(w)}$; l'application $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1, \sigma(x_2), \ldots, \sigma^{r_v-1}(x_r))$ identifie $\mathbf{E}_v$ à $\mathbf{E}_w^{r_v}$, et l'action de σ sur $\mathbf{E}_w^{r_v}$ est donnée $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_r) = (x_2, \ldots, x_r, \tau_v x_1)$.

On note N l'application norme de $G(\mathbf{E})$ à $G(\mathbf{E})$, donnée par $N(\delta) = \delta\delta^\sigma \cdots \delta^{\sigma^{l-1}}$. Le groupe $\mathbf{\Sigma}$ opère naturellement sur $G(\mathbf{E}_v) = \prod_{w|v} G(\mathbf{E}_w)$, et pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on note N_v l'application norme de $G(\mathbf{E}_v)$ à $G(\mathbf{E}_v)$, donnée par $N_v(\delta) = \delta\delta^\sigma \cdots \delta^{\sigma^{l-1}}$; pour $\delta \in G(\mathbf{E})$, on a $N_v(\delta) = N(\delta)$. D'après 2.1, pour $\delta \in G(\mathbf{E}_v)$ décomposé an $\delta = \prod_{w|v} \delta_w$ avec $\delta_w \in G(\mathbf{E}_w)$, la composante de $N_v(\delta)$ sur $G(\mathbf{E}_w)$, est donnée par $\delta_w(\delta_{\sigma^{-1}(w)})^\sigma \cdots \delta_{\sigma^{1-l}(w)})^{\sigma^{l-1}}$. Enfin on note $\mathfrak{N}$ l'application norme de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ à $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ donnée par $\mathfrak{N} = \prod_v N_v$.

Si w est une place finie de $\mathbf{E}$, on note $\mathfrak{o}_w$ l'anneau des entiers de $\mathbf{E}_w$. De même, si v est une place finie de $\mathbf{F}$, on note $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de $\mathbf{F}_v$ et $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v} = \prod_{w|v} \mathfrak{o}_w$ celui de $\mathbf{E}_v$, et l'on pose $K_v = G(\mathfrak{o}_v)$ et $K_{\mathbf{E}_v} = G(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on choisit des mesures de Haar dg_v sur $G(\mathbf{F}_v)$ et $dg_{\mathbf{E}_v}$ sur $G(\mathbf{E}_v)$. On suppose que pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, ces mesures sont celles qui donnent le volume 1 aux groupes K_v et $K_{\mathbf{E}_v}$. Cela détermine des mesures de Haar dg sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ et $dg_\mathbf{E}$ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$.

Notons $\mathfrak{Z}^1$ le sous-groupe $\mathfrak{N}(Z(\mathbb{A}_\mathbf{E}))$ de $Z(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, et fixons un caractère unitaire $\Omega = \prod_v \Omega_v$ de $\mathfrak{Z}^1$ trivial sur $\mathfrak{Z}^1 \cap Z(\mathbf{F})$. Soit Ξ le caractère $\Omega \circ \mathfrak{N}$ de $Z(\mathbb{A}_\mathbf{E})$, et si v est une place de $\mathbf{F}$, soit Ξ_v le caractère $\Omega_v \circ N_v$ de $Z(\mathbf{E}_v)$. On a donc la décomposition $\Xi = \prod_v \Xi_v$ où v parcourt les places de $\mathbf{F}$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on choisit des mesures de Haar dz_v sur $\mathfrak{Z}_v^1 = N_v(Z(\mathbf{E}_v))$ et $dz_{\mathbf{E}_v}$ sur $Z(\mathbf{E}_v)$. On suppose que pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$ *non ramifiée* (dans $\mathbf{E}$), c'est-à-dire telle que les extensions $\mathbf{E}_w/\mathbf{F}_v$ pour $w \in \mathscr{E}_v$, sont non ramifiées — ou, ce qui revient au même, telle que le groupe $Z(\mathfrak{o}_v)$ est contenu dans $\mathfrak{Z}_v^1$ —, ces mesures sont celles qui donnent le volume 1 aux groupes $Z(\mathfrak{o}_v)$ et $Z(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$. Cela détermine des mesures de Haar dz sur $\mathfrak{Z}^1$ et $dz_\mathbf{E}$ sur $Z(\mathbb{A}_\mathbf{E})$.

On note $d\bar{g}$ la mesure quotient $\frac{dg}{dz}$ sur le groupe $\mathfrak{Z}^1\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, et $d\bar{g}_\mathbf{E}$ la mesure quotient $\frac{dg_\mathbf{E}}{dz_\mathbf{E}}$ sur le groupe $Z(\mathbb{A}_\mathbf{E})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$.

Remarque. – Le corps $\mathbf{F}$ étant dans un premier temps supposé de caractéristique quelconque, on peut avoir affaire à des places v archimédiennes. Pour les résultats locaux relatifs à de telles places v, on renvoie à [**1**, ch. 1].

I.6.2. – Dans ce n°, on rappelle la version ordinaire (i.e. non tordue) de la formule des traces de Deligne-Kazhdan. Soient v_1 et v_2 des places finies de $\mathbf{F}$, non nécessairement distinctes.

On considère des fonctions f sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ décomposées en produit de fonctions $\prod_v f_v$ suivant les places v de $\mathbf{F}$, et vérifiant les conditions suivantes:

(i) pour toute place v de $\mathbf{F}$, f_v est une fonction C^∞ (i.e. localement constante si v est finie) sur $G(\mathbf{F}_v)$, à support compact modulo $\mathfrak{Z}_v^1$, et telle que $f_v(zg) = \Omega_v(z)^{-1} f_v(g)$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}_v^1$ et tout $g \in G(\mathbf{F}_v)$,

(ii) pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, f_v est la fonction $f_{v,e}$ à support dans $\mathfrak{Z}_v^1 K_v$ telle que $f_{v,e}(zk) = \Omega_v(z)^{-1}$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}_v^1$ et tout $k \in K_v$,

(iii) f_{v_1} est une combinaison linéaire de coefficients de représentations irréductibles cuspidales de $G(\mathbf{F}_{v_1})$,

(iv) le support de f_{v_2} est contenu dans l'ensemble des éléments semimisimple réguliers elliptiques de $G(\mathbf{F}_{v_2})$ dont l'image dans $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{F}_{v_2})$ est fortement régulière.

Pour une telle fonction f, on a $f(zg) = \Omega(z)^{-1} f(g)$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}^1$ et tout $g \in G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$

Si v est une place de $\mathbf{F}$, pour $\gamma \in G(\mathbf{F}_v)$, on choisit une mesure de Haar $dg_{v,\gamma}$ sur le centralisateur $G_\gamma(\mathbf{F}_v)$ de γ dans $G(\mathbf{F}_v)$, et l'on note $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(\cdot, \gamma)$ la forme linéaire sur $C_\mathrm{c}^\infty(G(\mathbf{F}_v), \Omega_v)$ définie comme en 2.4 et 2.9 par la mesure $\frac{dg_v}{dg_{v,\gamma}}$ sur l'espace homogène $G_\gamma(\mathbf{F}_v)\backslash G(\mathbf{F}_v)$. Rappelons que $G(\mathbf{F})''$ est l'ensemble des éléments semisimples réguliers elliptiques de $G(\mathbf{F})$. Pour $\gamma \in G(\mathbf{F})''$, on suppose que les mesures $dg_{v,\gamma}$ sont choisies de telle manière que leur produit définisse une mesure de Haar dg_γ sur $G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, et l'on note $d\bar{g}_\gamma$ la mesure quotient $\frac{dg_\gamma}{dz}$ sur le groupe $\mathfrak{Z}^1\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{F})$. Pour $\gamma \in G(\mathbf{F})''$ et $f = \prod_v f_v$ comme ci-dessus, on pose

$$\Lambda^{G(\mathbf{F})}(f, \gamma) = \prod_v \Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v, \gamma).$$

Notons $L^2(G(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \Omega)$ l'espace des fonctions ξ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ vérifiant $\xi(zg) = \Omega(z)\xi(g)$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}^1$ et tout $g \in G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, et qui sont de carré intégrable sur $G(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$. Soit r la représentation de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ par translations à droite sur cet espace, et soit r_cusp la sous-représentation de r sur l'espace des formes cuspidales.

Lemme (Deligne-Kazhdan, [**32**, 4.9]). – *Soit une fonction $f = \prod_v f_v$ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii), (iv) ci-dessus. Alors l'opérateur $r(f d\bar{g})$ envoie $L^2(G(\mathbf{F})\mathfrak{Z}_1\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}), \Omega)$ sur l'espace des formes cuspidales, et l'on a*

$$\mathrm{trace}(r_\mathrm{cusp}(f d\bar{g})) = \sum_{\{\gamma\}} \mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{F}), d\bar{g}_\gamma)\Lambda^{G(\mathbf{F})}(f, \gamma).$$

où γ parcourt un système de représentants des orbites (sous $G(\mathbf{F})$) contenues dans $G(\mathbf{F})''$.

Remarque. – Il s'agit d'une variante classique du résultat de Deligne-Kazhdan. Dans le résultat original, $\Omega' = \prod_v \Omega'_v$ est un caractère unitaire de $Z(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ trivial sur $Z(\mathbf{F})$, et r' opère par translation à droite sur l'espace $L^2(G(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}),\Omega')$. Pour obtenir la variante qui nous intéresse, on décompose $L^2(G(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}),\Omega)$ en $\bigoplus_{\Omega'} L^2(G(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_\mathbf{F})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbf{F}),\Omega')$ où Ω' parcourt l'ensemble des caractères de $Z(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ qui sont triviaux sur $Z(\mathbf{F})$ et prolongent Ω.

I.6.3. – On rappelle maintenant la version σ-tordue de la formule des traces de Deligne-Kazhdan.

D'après 2.2, la norme N induit une application injective, notée $\mathbb{N}$, entre l'ensemble des classes de σ-conjugaison dans $G(\mathbf{E})$ et l'ensemble des classes de conjugaison dans $G(\mathbf{F})$. Comme en 2.2, pour $\delta \in G(\mathbf{E})$, on note $\mathcal{O}_\sigma(\delta)$ la σ-orbite et $G^\sigma_\delta(\mathbf{F})$ le σ-centralisateur, de δ dans $G(\mathbf{E})$, et l'on dit que δ est *σ-fermé* si pour tout (i.e. pour un) $\gamma \in \mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$, la $\mathbf{F}$-algèbre $\mathbf{F}[\gamma]$ est un produit de corps — c'est-à-dire si γ est "semisimple"au sens de Bourbaki. Notons que si $\delta \in G(\mathbf{E})$ est σ-fermé, alors pour toute place v de $\mathbf{F}$, δ est σ-fermé dans $G(\mathbf{E}_v)$ au sens de 2.4.

Soient v_1 et v_2 des places finies scindées de $\mathbf{F}$, non nécessairement distinctes. Pour $i = 1,\, 2$, via le choix d'une place w_i de $\mathbf{E}$ au-dessus de v_i, comme en 2.3, on identifie $G(\mathbf{E}_{v_i})$ au groupe $G(\mathbf{F}_{v_i})^l$ muni de l'opération de σ donnée par $\sigma(g_1,\dots,g_l) = (g_2,\dots,g_s,g_1)$, et l'on note $N'_{v_i} = N'^1_{v_i}$ l'application norme de $G(\mathbf{E}_{v_i})^l$ à $G(\mathbf{E}_{v_i})^l$ donnée par $N_{v_i}(g_1,\dots,g_l) = g_1\cdots g_l$.

On considère des fonctions ϕ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ décomposées en produit de fonctions $\prod_v \phi_v$ suivant les places v de $\mathbf{F}$, et vérifiant les conditions suivantes:

(i) pour toute place v de $\mathbf{F}$, ϕ_v est une fonction C^∞ (i.e. localement constante si v est finie) sur $G(\mathbf{E}_v)$, à support compact modulo $Z(\mathbf{E}_v)$, et telle que $\phi_v(zg) = \Xi_v(z)^{-1}\phi_v(g)$ pour tout $z \in Z(\mathbf{E}_v)$ et tout $g \in G(\mathbf{E}_v)$,

(ii) pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, ϕ_v est la fonction $\phi_{v,e}$ à support dans $Z(\mathbf{E}_v)K_{\mathbf{E}_v}$ telle que $\phi_{v,e}(zk) = \Xi_v(z)^{-1}$ pour tout $z \in Z(\mathbf{E}_v)$ et tout $k \in K_{\mathbf{E}_v}$,

(iii) $\phi_{v_1} = f_{v_1}\otimes\cdots\otimes f_{v_1}$ où $f_{v_1} \in C^\infty_\mathrm{c}(G(\mathbf{F}_{v_1}),\Omega_{v_1})$ est une combinaison linéaire de coefficients de représentations irréductibles cuspidales de $G(\mathbf{F}_{v_1})$ de caractère central Ω_{v_1},

(iv) $\phi_{v_2} = f^1_{v_1}\otimes\cdots\otimes f^l_{v_2}$ pour des fonctions $f^i_{v_2} \in C^\infty_\mathrm{c}(G(\mathbf{F}_{v_2}),\Omega_{v_2})$ telles que $N_{v_2}(\mathrm{Supp}(\phi_{v_2}))$ est contenu dans l'ensemble des éléments semisimples réguliers elliptiques de $G(\mathbf{F}_{v_2})$ dont l'image dans $\mathrm{PGL}(n,\mathbf{F}_{v_2})$ est fortement régulière.

Pour une telle fonction ϕ, on a $\phi(zg) = \Xi(z)^{-1}f(g)$ pour tout $z \in Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et tout $g \in G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$

Si v est une place de $\mathbf{F}$, pour $\delta \in G(\mathbf{E}_v)$ σ-fermé, on choisit une mesure de Haar $dg^\sigma_{v,\delta}$ sur le σ-centralisateur $G^\sigma_\delta(\mathbf{F}_v)$ de δ dans $G(\mathbf{E}_v)$, et l'on note $\Lambda^{G(\mathbf{E}_v)}_\sigma(\cdot,\delta)$ la forme linéaire sur $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbf{E}_v),\Xi_v)$ définie comme en 2.4 et 2.9 par la mesure $\frac{dg_{\mathbf{E}_v}}{dg^\sigma_{v,\delta}}$ sur l'espace homogène $G^\sigma_\delta(\mathbf{F}_v)\backslash G(\mathbf{E}_v)$. Pour $\delta \in G(\mathbf{E})$ tel que l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ est contenue dans $G(\mathbf{F})''$, on suppose que les mesures $dg^\sigma_{v,\delta}$ sont choisies de telle manière que leur produit définisse une mesure de Haar dg^σ_δ sur $G^\sigma_\delta(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, et l'on note $d\bar{g}^\sigma_\delta$ la mesure quotient $\frac{dg^\sigma_\delta}{dz_{\mathbf{E}}}$ sur le groupe $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})\backslash G^\sigma_\delta(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Pour $\delta \in G(\mathbf{E})$ tel que $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) \subset G(\mathbf{F})''$ et $\phi = \prod_v \phi_v$ comme ci-dessus, on pose

$$\Lambda^{G(\mathbf{E})}_\sigma(\phi,\delta) = \prod_v \Lambda^{G(\mathbf{E}_v)}_\sigma(\phi_v,\delta).$$

Notons $L^2(G(\mathbf{E})Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}),\Xi)$ l'espace des fonctions ξ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ vérifiant $\xi(zg) = \Xi(z)\xi(g)$ pour tout $z \in Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et tout $g \in G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, et qui sont de carré intégrable sur $G(\mathbf{E})Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. Soit $r_{\mathbf{E}}$ la représentation de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ par translations à droite sur cet espace, et soit $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$ la sous-représentation de $r_{\mathbf{E}}$ sur l'espace des formes cuspidales. Enfin, soit $\mathbf{A}_\sigma$ l'opérateur sur $L^2(G(\mathbf{E})Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}),\Xi)$ donné par $\mathbf{A}_\sigma(\xi)(g) = \xi(g^\sigma)$ pour $g \in G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

LEMME ([**1**, ch. 1, lemma 2.5]). – *Soit une fonction* $\phi = \prod_v \phi_v$ *sur* $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ *vérifiant les conditions (i), (ii), (iii), (iv) ci-dessus. Alors l'opérateur* $r_{\mathbf{E}}(\phi d\bar{g}_{\mathbf{E}}) \circ \mathbf{A}_\sigma$ *envoie* $L^2(G(\mathbf{E})Z(\mathbb{A}_E)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}),\Xi)$ *sur l'espace des formes cuspidales, et l'on a*

$$\mathrm{trace}(r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}(\phi d\bar{g}_{\mathbf{E}}) \circ \mathbf{A}_\sigma) = \sum_{\{\delta\}} \mathrm{vol}(G^\sigma_\delta(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_F)\backslash G^\sigma_\delta(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), d\bar{g}^\sigma_{\mathbf{E},\delta})\Lambda^{G(\mathbf{E})}_\sigma(\phi,\delta).$$

où δ *parcourt un système de représentants des* σ*-orbites* $\mathcal{O}$ *(sous* $G(\mathbf{E})$*) telles que l'orbite* $\mathbb{N}(\mathcal{O})$ *est contenue dans* $G(\mathbf{F})''$.

REMARQUE 1. – Le lemma 2.5 de [**1**, ch. 1] est énoncé pour un corps de nombres $\mathbf{F}$, mais sa démonstration fonctionne tout aussi bien pour un corps de fonctions. En effet, l'argument-clé (utilisé dans la démonstration du lemma 2.6 de loc. cit.) est emprunté à l'appendice 2 de [**32**], lequel est rédigé pour un corps global $\mathbf{F}$ de caractéristique quelconque.

L'opérateur A_σ envoie une sous-représentation irréductible π de $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$ sur une sous-représentation de $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$ isomorphe à π^σ, et si π est σ-stable, d'après le théorème de multiplicité 1 pour $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$, on a $\pi^\sigma = \pi$ et $\mathbf{A}_\sigma$ induit un opérateur d'entrelacement non nul $\mathbf{A}_\sigma(\pi)$ sur l'espace de π. Choisissons un isomorphisme u entre π et le produit tensoriel complété $\widehat{\otimes}_v\pi_v$ où π_v $(= \otimes_{w|v}\pi_w)$ est une représentation unitaire irréductible de $G(\mathbf{E}_v)$, le produit tensoriel étant pris suivant le choix, pour presque toute place finie v de $\mathbf{F}$, d'un vecteur $K_{\mathbf{E}_v}$-invariant de l'espace de π_v; si π est σ-stable, l'opérateur $\mathbf{A}_\sigma(\pi)$ se décompose via u en produit d'opérateurs locaux $\otimes_v \mathbf{A}_{\sigma,v}(\pi)$ où $\mathbf{A}_{\sigma,v}(\pi)$ est un isomorphisme entre π_v et π_v^σ.

REMARQUE 2. – On peut montrer (cf. [**1**, § 6.3, p. 56]) que si $\pi \simeq \otimes_v \pi_v$ est une sous-représentation irréductible σ-stable de $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$, alors pour toute place finie inerte v de $\mathbf{F}$, l'opérateur local $\mathbf{A}_{\sigma,v}(\pi)$ coïncide avec l'opérateur normalisé $A_\sigma(\pi_v)$. D'ailleurs, ce résultat reste vrai pour les places finies non inertes (mutatis mutandis), ainsi que pour les places archimédiennes si $\mathbf{F}$ est un corps de nombres.

I.6.4. – On veut maintenant comparer les formules des traces des lemmes de 6.2 et 6.3. On suppose que pour toute place v de $\mathbf{F}$ et toute paire d'éléments associés (δ, γ) de $G(\mathbf{E}_v) \times G(\mathbf{F}_v)$ telle que γ est régulier, les mesures $dg^\sigma_{v,\delta}$ sur $G^\sigma_\delta(\mathbf{F}_v)$ et $dg_{v,\gamma}$ sur $G_\gamma(\mathbf{F}_v)$, sont celles donnant le volume 1 au sous-groupe compact maximal respectivement de $G^\sigma_\delta(\mathbf{F}_v)$ et de $G_\gamma(\mathbf{F}_v)$; elles sont donc associées au sens de 2.5. Notons que ces normalisations sont compatibles avec celles imposées en 6.2 et 6.3: pour $\delta \in G(\mathbf{E})_{\sigma-\mathrm{r}}$, les mesures $dg^\sigma_{v,\delta}$ définissent une mesure de Haar sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$; et pour $\gamma \in G(\mathbf{F})_\mathrm{r} \cap N(G(\mathbf{E}))$, les mesures $dg_{v,\gamma}$ définissent une mesure de Haar sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$.

Deux fonctions ϕ sur $G(\mathbb{A}_\mathbb{E})$ et f sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, décomposées en produit de fonctions $\phi = \prod_f \phi_v$ et $f = \prod_v f_v$ suivant les places v de $\mathbf{F}$, et telles que les fonctions locales ϕ_v et f_v vérifient la condition (i) de 6.2 et de 6.3, sont dites *concordantes*, ou plus simplement *concordent*, si pour chaque place v de $\mathbf{F}$, les fonctions locales ϕ_v et f_v concordent au sens de 2.5 et 2.9.

Soient v_1 et v_2 des places finies scindées de $\mathbf{F}$, non nécessairement distinctes.

PROPOSITION. – *Soient des fonctions $\phi = \prod_v \phi_v$ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ et $f = \prod_v f_v$ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, vérifiant les conditions (i), (ii), (iii), (iv) de 6.3 et de 6.2. Si ϕ et f concordent, on a*

$$l \sum_\pi \mathrm{trace}(\pi(\phi d\bar{g}_\mathbf{E}) \circ \mathbf{A}_\sigma(\pi)) = \sum_\tau \mathrm{trace}(\tau(f d\bar{g}))$$

où π parcourt l'ensemble des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales σ-stables de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ de caractère central Ξ, et τ parcourt l'ensemble des classes d'équivalence des représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ de caractère central prolongeant Ω.

Démonstration. – D'après le lemme 6.2, on a

$$\mathrm{trace}(r_{\mathrm{cusp}}(f d\bar{g})) = \sum_{\{\gamma\}} \mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1 \backslash G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{F}), d\bar{g}_\gamma) \Lambda^{G(\mathbf{F})}(f, \gamma).$$

où γ parcourt un système de représentants des orbites contenues dans $G(\mathbf{F})''$. D'après le lemme de 6.3, on a

$$\mathrm{trace}(r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}(\phi d\bar{g}_{\mathbf{E}}) \circ \mathbf{A}_\sigma) = \sum_{\{\delta\}} \mathrm{vol}(G_\delta^\sigma(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_F)\backslash G_\delta^\sigma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), d\bar{g}_{\mathbf{E},\delta}^\sigma)\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E})}(\phi,\delta).$$

où δ parcourt un système de représentants des σ-orbites dont l'image par $\mathbb{N}$ est contenue dans $G(\mathbf{F})''$. Si $\gamma \in G(\mathbf{F})''$ est tel que $\Lambda^{G(\mathbf{F})}(f,v) \neq 0$, puisque ϕ et f sont associées, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, il existe un $\delta_v \in G(\mathbf{E}_v)$ tel que $N_v(\delta_v) = \gamma$. □

Lemme. – *Soit $\gamma \in G(\mathbf{F})''$ tel que pour chaque place v de $\mathbf{F}$, il existe un $\delta_v \in G(\mathbf{E}_v)$ tel que $N_v(\delta_v) = \gamma$. Alors il existe un $\delta \in G(\mathbf{E})$ tel que $N(\delta) = \gamma$.*

Démonstration. – Posons $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}[\gamma]$; c'est une extension séparable de degré n de $\mathbf{F}$, contenue dans $\mathrm{M}(n,\mathbf{F})$. Soit $\mathbf{L} = \mathbf{F}_1 \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}$, et pour chaque place v de $\mathbf{F}$, soient $\mathbf{F}_{1,v} = \mathbf{F}_1 \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{F}_v$ et $\mathbf{L}_v = \mathbf{L} \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{F}_v$; on a les identifications canoniques $\mathbf{L}_v = \mathbf{F}_1 \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}_v = \mathbf{F}_{1,v} \otimes_{\mathbf{F}} \mathbf{E}$ et $\mathbf{L}_v^\times = G_\gamma(\mathbf{E}_v) \subset G(\mathbf{E}_v)$. Le groupe $\boldsymbol{\Sigma}$ opère sur $\mathbf{L}$ via son action sur $\mathbf{E}$, ce qui fait de $\mathbf{L}$ une $\mathbf{F}_1$-algèbre cyclique de groupe $\boldsymbol{\Sigma}$, et l'on note $N_{\mathbf{L}/\mathbf{F}_1} : \mathbf{L}^\times \to \mathbf{F}_1^\times$ l'application norme définie par $N_{\mathbf{L}/\mathbf{F}_1}(x) = \prod_{i=0}^{l-1} \sigma^i x$. On a $\mathbf{L}^\times \subset G(\mathbf{E})$ et $N|_{\mathbf{L}^\times} = N_{\mathbf{L}/\mathbf{F}_1}$. De la même manière, on définit l'application norme $N_{\mathbf{L}_v/\mathbf{F}_{1,v}} : \mathbf{L}_v^\times \to \mathbf{F}_{v,1}^\times$, qui coïncide avec la restriction de N_v à $\mathbf{L}_v^\times \subset G(\mathbf{E}_v)$.

Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on a

$$\gamma\delta_v = \delta_v\delta_v^\sigma \cdots \delta_v^{\sigma^{l-1}}\delta_v^{\sigma^l} = \delta_v N_v(\delta_v)^\sigma = \delta_v\gamma,$$

i.e. $\delta_v \in G_\gamma(\mathbf{E}_v) = \mathbf{L}_v^\times$. Cela implique (théorème de la norme de Hasse) qu'il existe un $\delta \in \mathbf{L}^\times$ tel que $N_{\mathbf{L}/\mathbf{F}_1}(\delta) = \gamma$. D'où le résultat. □

D'après ce lemme, l'application $\mathbb{N}$ met en bijection l'ensemble des classes de σ-conjugaison dans $G(\mathbf{E})$ contribuant non trivialement à la somme indexée par $\{\delta\}$, avec l'ensemble des classes de conjugaison dans $G(\mathbf{F})$ contribuant non trivialement à la somme indexée par $\{\gamma\}$. Si (δ,γ) est une paire d'éléments associés de $G(\mathbf{E}) \times G(\mathbf{F})$ telle que $\gamma \in G(\mathbf{F})''$, puisque $G_\delta^\sigma \simeq G_\gamma$ et $Z(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1$ est un sous-groupe de $Z(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ d'indice l, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), d\bar{g}_\gamma) &= l\,\mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), d\bar{g}_\gamma) \\ &= l\,\mathrm{vol}(G_\delta^\sigma(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})\backslash G_\delta^\sigma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}), d\bar{g}_{\mathbf{E},\delta}^\sigma).\end{aligned}$$

En définitive, on a montré que

$$l\,\mathrm{trace}(r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}(\phi d\bar{g}_{\mathbf{E}}) \circ \mathbf{A}_\sigma) = \mathrm{trace}(r_{\mathrm{cusp}}(f d\bar{g})).$$

On conclut grâce au théorème de multiplicité 1 pour r_{cusp} et pour $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$. □

I.6.5. — Si $\rho \simeq \widehat{\otimes}_v \rho_v$ est sous-représentation irréductible de r_{cusp}, pour toute fonction $\phi = \prod_v \phi_v$ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de 6.2, la trace de l'opérateur $\rho(fd\bar{g})$ sur l'espace de ρ, se décompose en produit de traces locales suivant les places v de $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{trace}(\rho(fd\bar{g})) = \prod_v \operatorname{trace}(\rho_v(f_v d\bar{g}_v)).$$

Et pour chaque place finie v de $\mathbf{F}$, on a $\operatorname{trace}(\rho_v(f_v d\bar{g}_v)) = \operatorname{trace}(\rho_v^\infty(f_v d\bar{g}_v))$ où ρ_v^∞ désigne la partie lisse de ρ_v. De même, si $\pi \simeq \widehat{\otimes}_v \pi_v$ est une sous-représentation irréductible σ-stable de $r_{\mathbf{E},\text{cusp}}$, pour toute fonction $\phi = \prod_v \phi_v$ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de 6.3, la trace de l'opérateur $\pi(\phi d\bar{g}_{\mathbf{E}}) \circ \mathbf{A}_\sigma(\pi)$ sur l'espace de π, se décompose en produit de traces locales σ-tordues suivant les places v de $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{trace}(\pi(\phi d\bar{g}_{\mathbf{E}}) \circ \mathbf{A}_\sigma(\pi)) = \prod_v \operatorname{trace}(\pi_v(\phi_v d\bar{g}_{\mathbf{E}_v}) \circ \mathbf{A}_{\sigma,v}(\pi_v)).$$

Et pour chaque place finie v de $\mathbf{F}$, on a $\operatorname{trace}(\pi_v(\phi_v d\bar{g}_{\mathbf{E}_v}) \circ A_{\sigma,v}(\pi)) = \operatorname{trace}(\pi_v^\infty(\phi_v d\bar{g}_{\mathbf{E}_v}) \circ A_{\sigma,v}(\pi))$ où π_v^∞ désigne la partie lisse de π_v.

Soit v une place finie de $\mathbf{F}$. Le caractère Ω_v de $\mathfrak{Z}_v^1$ et la mesure dz_v sur $\mathfrak{Z}_v^1$, définissent comme en 2.10 une application linéaire $f \mapsto f_{\Omega_v}$ de $C_c^\infty(G(\mathbf{F}_v))$ dans $C_c^\infty(G(\mathbf{F}_v), \Omega_v)$. De même, le caractère Ξ_v de $Z(\mathbf{E}_v)$ et la mesure $dz_{\mathbf{E}_v}$ sur $Z(\mathbf{E}_v)$, définissent une application linéaire $\phi \mapsto \phi_v$ de $C^\infty(G(\mathbf{E}_v))$ dans $C_c^\infty(G(\mathbf{E}_v), \Xi_v)$. Pour toute représentation lisse admissible ρ de $G(\mathbf{F}_v)$ se transformant selon Ω_v sur $\mathfrak{Z}_v^1$ — i.e. telle que $\rho(zg) = \Omega_v(z)(z)\rho(g)$ pour tout $z \in \mathfrak{Z}_v^1$ et tout $g \in G(\mathbf{F}_v)$ — et toute fonction $f \in C_c^\infty(G(\mathbf{F}_v))$, on a $\rho(fdg_v) = \rho(f_{\Omega_v} d\bar{g}_v)$, d'où

$$\operatorname{trace}(\rho(fdg_v)) = \operatorname{trace}(\rho(f_{\Omega_v} d\bar{g}_v)).$$

De même, pour toute représentation lisse admissible π de $G(\mathbf{E}_v)$ se transformant selon Ξ_v sur $Z(\mathbf{E}_v)$, et pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G(\mathbf{E}_v))$, on a $\pi(\phi dg_v) = \pi(\phi_{\Xi_v} d\bar{g}_{\mathbf{E}_v})$. Si de plus π est σ-stable, pour tout isomorphisme A entre π et π^σ, on a

$$\operatorname{trace}(\pi(\phi dg_v) \circ A) = \operatorname{trace}(\pi(\phi_{\Xi_v} d\bar{g}_{\mathbf{E}_v}) \circ A).$$

Supposons de plus que v est inerte et non ramifiée. On peut donc appliquer à l'extension de corps $\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v$ les résultats des sections 4 et 5. Pour $\nu \in \mathbb{Z}_+$, on définit comme en 4.2 les sous-ensembles $X_\nu^\sigma(\mathbf{E}_v)$ de $G(\mathbf{E}_v)$ et $X_\nu(\mathbf{F}_v)$ de $G(\mathbf{F}_v)$; on note $\tilde{\phi}_{v,\nu}^\sigma \in C_c^\infty(G(\mathbf{E}_v))$ la fonction caractéristique de $X_\nu^\sigma(\mathbf{E}_v)$, et $\tilde{f}_{v,\nu} \in C_c^\infty(G(\mathbf{F}_v))$ celle de $X_\nu(\mathbf{F}_v)$; et l'on pose $\phi_{v,\nu}^\sigma = (\tilde{\phi}_{v,\nu}^\sigma)_{\Xi_v}$ et $f_{v,\nu} = (\tilde{f}_{v,\nu})_{\Omega_v}$. Supposons aussi que les mesures $dg_{\mathbf{E}_v}$, dg_v, $dz_{\mathbf{E}_v}$ et dz_v sont celles qui donnent le volume 1 à $K_{\mathbf{E}_v}$, K_v, $Z(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$ et $Z(\mathfrak{o}_v)$. Alors d'après la proposition de 4.2 et le lemme de 2.10, les fonctions $\phi_{v,\nu}^\sigma$ et $f_{v,l\nu}$ concordent fortement.

I.6.6. – On a réuni tous les ingrédients nécessaires à la démonstration du lemme fondamental pour le changement de base. On reprend donc les hypothèses des sections 4 et 5: F est un corps commutatif localement compact non archimédien, E est une extension non ramifiée de degré l de F, et σ est un générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$. Les autres notations et normalisations sont celles de la section 4.

THÉORÈME ("lemme fondamental"). – *Pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, ϕ et $b(\phi)$ concordent.*

Démonstration. – Les arguments sont ceux de [**1**, ch. 1, § 4] et [**50**, § 6]. Le lemme fondamental étant déjà connu pour F de caractéristique nulle, on suppose F de caractéristique > 0. Par descente parabolique et récurrence sur la dimension de G, grâce à [**57**, 4.3.11, 4.4.9, 4.2.4] — descente des intégrales orbitales fermées sur $G(F)$, descente des σ-intégrales orbitales σ-fermées sur $G(E)$, compatibilité avec l'homomorphisme de changement de base — on peut supposer que pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, les fonctions ϕ et $b(\phi)$ concordent en les éléments réguliers non elliptiques; c'est-à-dire que ϕ et $b(\phi)$ concordent en les paires d'éléments associés (δ, γ) de $G(E) \times G(F)$ telles que $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}} \smallsetminus G(F)_{\mathrm{e}}$, et $\Lambda^{G(F)}(b(\phi), \gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}} \smallsetminus G(F)_{\mathrm{e}}$ qui n'est pas une norme de $G(E)$.

Quant aux éléments $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$, on plonge notre situation locale dans une situation globale: on choisit une extension finie cyclique de corps globaux $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ de degré l, redonnant l'extension locale E/F en une place finie v_0 de $\mathbf{F}$; précisément, v_0 est inerte dans $\mathbf{E}$, donc n'a qu'une extension w_0 à $\mathbf{E}$, et il existe un isomorphisme ι de corps topologiques de $\mathbf{E}_{v_0} = \mathbf{E}_{w_0}$ sur E, qui induit un isomorphisme de $\mathbf{F}_{v_0}$ sur F. Via ι, on identifie le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F}) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}_{v_0}/\mathbf{F}_{v_0})$ avec le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$. Le générateur choisi σ de $\mathrm{Gal}(E/F)$ s'identifie donc à un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$. On fixe un caractère unitaire $\Omega = \prod_v \Omega_v$ de $\mathfrak{Z}^1$ trivial sur $\mathfrak{Z}^1 \cap Z(\mathbf{F})$ et non ramifié en la place v_0, et l'on note Ξ le caractère $\Omega \circ (\prod_v N_v)$ de $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$; où pour chaque place v de $\mathbf{F}$, N_v désigne l'application norme de $G(\mathbf{E}_v)$ à $G(\mathbf{E}_v)$ définie par σ comme en 6.1. Toutes les mesures sont normalisées comme dans les n°s 6.1 à 6.3. On suppose de plus qu'en la place v_0, les mesures dg_{v_0} sur $G(\mathbf{F}_{v_0})$ et $dg_{\mathbf{E}_{v_0}}$ sur $G(\mathbf{E}_{v_0})$ sont celles qui donnent le volume 1 à K_{v_0} et à $K_{\mathbf{E}_{v_0}}$, et que les mesures dz_{v_0} sur $\mathfrak{Z}^1_{v_0}$ et $dz_{\mathbf{E}_{v_0}}$ sur $Z(\mathbf{E}_{v_0})$ sont celles qui donnent le volume 1 à $Z(\mathfrak{o}_{v_0})$ et à $Z(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_{v_0}})$. On choisit des places v_1 et v_2 de $\mathbf{F}$ scindées dans $\mathbf{E}$; on suppose ici $v_1 \neq v_2$. Pour $i = 1, 2$, on identifie $G(\mathbf{E}_{v_i})$ à $G(\mathbf{F}_{v_i})^l$ via le choix d'une place w_i de $\mathbf{E}$ au-dessus de v_i, et l'on suppose que les mesures $dg_{\mathbf{E}_{v_i}}$ sur $G(\mathbf{E}_{v_i})$ et $dz_{\mathbf{E}_{v_i}}$ sur $Z(\mathbf{E}_{v_i})$ sont les mesures produits $dg^l_{v_i}$ et $dz^l_{v_i}$.

Fixons un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$ contenant v_0, v_1, v_2, les places de $\mathbf{F}$ qui sont ramifiées dans $\mathbf{E}$, celles telles que le caractère Ω_v est ramifié, et tel que pour

$v \notin S$, les mesures dg_v, $dg_{\mathbf{E}_v}$, dz_v, $dz_{\mathbf{E}_v}$ sont celles qui donnent le volume 1 à K_v, $K_{\mathbf{E}_v}$, $Z(\mathfrak{o}_v)$, $Z(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$. □

Le cadre étant fixé, la démonstration proprement dite occupe les quatre n° suivants.

I.6.7. – Dans ce n°, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on choisit des fonctions concordantes $\phi_v \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbf{E}_v), \Xi_v)$ et $f_v \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbf{F}_v), \Omega_v)$, pour ensuite leur appliquer la proposition de 6.4.

En la place v_0, on prend pour ϕ_{v_0} et f_{v_0} les fonction $\phi^\sigma_{v_0,\nu} = (\tilde{\phi}^\sigma_{v_0,\nu})_{\Xi_{v_0}}$ et $f_{v_0,l\nu} = (\tilde{f}_{v_0,l\nu})_{\Omega_{v_0}}$ de 6.5, pour un $\nu \in \mathbb{Z}^n_+$ *régulier.*

En la place v_1, on a $\mathfrak{Z}^1_{v_1} = Z(\mathbf{F}_{v_1})$. Soit ρ est une représentation irréductible cuspidale de $G(\mathbf{F}_{v_1})$. Quitte à remplacer Ω (et donc aussi l'ensemble S), on peut supposer que le caractère central de ρ coïncide avec Ω_{v_1}. Prenons pour f_{v_1} un coefficient de ρ tel que $f_{v_1}(1) \neq 0$. Choisissons un sous-groupe ouvert compact J_{v_1} de $G(\mathbf{F}_{v_1})$ tel que $f_{v_1}(gk) = f_{v_1}(g)$ pour tout $g \in G(\mathbf{F}_{v_1})$ et tout $k \in J_{v_1}$; alors le caractère Ω_{v_1} est trivial sur $Z(\mathbf{F}_{v_1}) \cap J_{v_1}$. Soit $\psi_{v_1} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbf{F}_{v_1}, \Omega_{v_1})$ la fonction à support dans $Z(\mathbf{F}_{v_1})J_{v_1}$ telle que $\psi_{v_1}(zk) = \Omega_{v_1}(z)$ pour tout $g \in G(\mathbf{F}_{v_1})$ et tout $k \in J_{v_1}$. On a $\psi_{v_1} * \psi_{v_1} = \psi_{v_1}$ et $f_{v_1} * \psi_{v_1}$, où le produit de convolution est celui défini par la mesure $\frac{dg_{v_1}}{dz_{v_1}}$ sur $Z(\mathbf{F}_{v_1})\backslash G(\mathbf{F}_{v_1})$. On prend pour ϕ_{v_1} la fonction $f_{v_1} \otimes \psi_{v_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{v_1}$ sur $G(\mathbf{E}_{v_1}) = G(\mathbf{F}_{v_1})^l$. Alors la fonction $\phi^*_{v_1} = f_{v_1} * \psi_{v_1} * \cdots * \psi_{v_1}$ coïncide avec f_{v_1}, et d'après 2.4 et 2.9, les fonctions ϕ_{v_1} et f_{v_1} concordent.

En la place v_2, on fixe un élément $\gamma_{v_2} \in G(\mathbf{F}_{v_2})''$ dont l'image dans $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{F}_{v_2})$ est fortement régulière, et l'on note δ_{v_2} l'élément $(\gamma_{v_2}, 1, \ldots, 1)$ de $G(\mathbf{E}_{v_2}) = G(\mathbf{F}_{v_2})^l$. On a donc $N_{v_2}(\delta_{v_2}) = \gamma_{v_2}$. On choisit une fonction $\tilde{f}_{v_2} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbf{F}_{v_2}))$ telle que $\tilde{f}_{v_2}(\gamma_{v_2}) \neq 0$, et l'on prend pour f_{v_2} la fonction $(\tilde{f}_{v_2})_{\Omega_{v_2}}$. On choisit ensuite un sous-groupe ouvert compact J_{v_2} de $G(\mathbf{F}_{v_2})$ tel que $f_{v_2}(gk) = f_{v_2}(g)$ pour tout $g \in G(\mathbf{F}_{v_2})$ et tout $k \in J_{v_2}$, et l'on définit les fonctions $\psi_{v_2} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbf{F}_{v_2}), \Omega_{v_2})$ et $\phi_{v_2} = f_{v_2} \otimes \psi_{v_2} \otimes \cdots \otimes \psi_{v_2}$ comme à la place v_1; à nouveau d'après 2.4 et 2.9, les fonctions ϕ_{v_2} et f_{v_2} concordent. Par construction, l'image du support de ϕ_{v_2} par la norme N_{v_2}, est contenu dans le support de f_{v_2}, et si le support de $\tilde{f}_{v_2}$ est suffisamment concentré sur γ_{v_2} — ce que l'on suppose —, alors le support de f_{v_2} est contenu le sous-ensemble de $G(\mathbf{F}_{v_2})''$ formé des éléments dont l'image dans $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{F}_{v_2})$ est fortement régulière.

Pour $v \in S \smallsetminus \{v_0, v_1, v_2\}$, grâce à la proposition de 2.5 et au lemme de 2.10, on peut choisir des fonctions concordantes ϕ_v et f_v à support dans $G(\mathbf{E}_v)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et dans $G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}}$.

Pour $v \notin S$, on prend pour ϕ_v et f_v les fonctions $\phi_{v,e}$ et $f_{v,e}$ de la condition (ii) de 6.2 et de 6.3; d'après 3.3, elles sont concordantes (et même fortement concordantes).

Par construction, les fonctions $\phi = \prod_v \phi_v$ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et $f = \prod_v f_v$ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ sont concordantes et vérifient les conditions (i), (ii), (iii), (iv) de 6.3 et de 6.2.

I.6.8. – Posons $\mathscr{H}_{\mathbf{E}_{v_0}} = \mathscr{H}(G(\mathbf{F}_{v_0}), K_{\mathbf{E}_{v_0}})$ et $\mathscr{H}_{\mathbf{F}_{v_0}} = \mathscr{H}(G(\mathbf{F}_{v_0}), K_{v_0})$, et notons $b_{v_0} : \mathscr{H}_{\mathbf{E}_{v_0}} \to \mathscr{H}_{\mathbf{F}_{v_0}}$ l'homomorphisme de changement de base défini comme en 3.1. Soit une paire d'éléments associés $(\delta_{v_0}, \gamma_{v_0})$ de $G(\mathbf{E}_{v_0}) \times G(\mathbf{F}_{v_0})$ telle que $\gamma_{v_0} \in G(\mathbf{F}_{v_0})_{\mathrm{e}}$, et soit une fonction $\tilde{\phi}_0 \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_{v_0}}$. Posons $\phi_0 = (\tilde{\phi}_0)_{\Xi_{v_0}}$ et $f_0 = [b_{v_0}(\tilde{\phi}_0)]_{\Omega_{v_0}}$. On veut montrer que ϕ_0 et f_0 concordent en $(\delta_{v_0}, \gamma_{v_0})$. Pour ce faire, on commence par montrer, dans ce n°, que pour chaque place v de $\mathbf{F}$ distincte de v_0, on peut modifier les fonctions ϕ_v et f_v choisies en 6.7, et choisir un élément $\delta \in G(\mathbf{E})''$ aussi proche que l'on veut de δ_{v_0} à la place v_0, de telle manière que *seules* la σ-orbite $\mathscr{O}_\sigma(\delta)$ dans $G(\mathbf{E})$ et l'orbite $\mathbb{N}(\mathscr{O}_\sigma(\delta))$ dans $G(\mathbf{F})$ contribuent non trivialement aux côtés géométriques des formules pour trace$(r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}(\phi d\bar{g}_{\mathbf{E}}) \circ \mathbf{A}_\sigma)$ et pour trace$(r_{\mathrm{cusp}}(f d\bar{g}))$.

En la place v_1, puisque f_{v_1} est un coefficient d'une représentation irréductible cuspidale ρ de $G(\mathbf{F}_{v_1})$ tel que $f_{v_1}(1) \neq 0$, d'après les relations d'orthogonalité de Schur, on a trace$(\rho(f_{v_1} d\bar{g}_{v_1})) \neq 0$; où l'on a posé $d\bar{g}_{v_1} = \frac{dg_{v_1}}{dz_{v_1}}$. Or on sait que le caractère trace$(\rho d\bar{g}_{v_1})$ est localement intégrable sur $G(\mathbf{F}_{v_1})$ et localement constant sur $G(\mathbf{F}_{v_1})_{\mathrm{r}}$, et que sa restriction à $G(\mathbf{F}_{v_1})_{\mathrm{r}}$ est à support dans $G(\mathbf{F}_{v_1})_{\mathrm{e}}$. D'après la formule d'intégration de Weyl, on en déduit qu'il existe un élément $\gamma_{v_1} \in G(\mathbf{F}_{v_1})''$ tel que $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_1})}(f_1, \gamma_{v_1}) \neq 0$. Comme la norme N_{v_1} envoie $G(\mathbf{E}_{v_1})$ surjectivement sur $G(\mathbf{F}_{v_1})$, on peut choisir un élément $\delta_{v_1} \in G(\mathbf{E}_{v_1})$ tel que $N_{v_1}(\delta_{v_1}) = \gamma_{v_1}$.

En la place v_2, on a déjà choisi une paire d'éléments associés $(\delta_{v_2}, \gamma_{v_2})$ de $G(\mathbf{E}_{v_2}) \times G(\mathbf{F}_{v_2})$ telle que $\gamma_{v_2} \in G(\mathbf{F}_{v_2})''$. Montrons que l'on peut choisir $\tilde{f}_{v_2}$ de telle manière que $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_2})}(f_{v_2}, \gamma_{v_2}) \neq 0$. Puisque l'image de γ_{v_2} dans $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{F}_{v_2})$ est fortement régulière, il existe un voisinage ouvert compact U_{v_2} de γ_{v_2} dans $G_{\gamma_{v_2}}(\mathbf{F}_{v_2}) \cap G(\mathbf{F}_{v_2})''$ tel que $Z(\mathbf{F}_{v_2}) U_{v_2} \cap \mathscr{O}_{v_2}(\gamma_{v_2}) = \{\gamma_{v_2}\}$ et vérifiant la condition: $\Omega_{v_2}(u' u^{-1}) = 1$ pour tous u, $u' \in U_{v_2}$ tels que $u' u^{-1} \in Z(\mathbf{F}_{v_2})$. Soit Γ_{v_2} un (petit) sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbf{F}_{v_2})$, et soit $\tilde{f}_{v_2} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbf{F}_{v_2}))$ la fonction caractéristique de l'ouvert compact X_{v_2} de $G(\mathbf{F}_{v_2})$ formé des $k^{-1} u k$ pour $k \in \Gamma_{v_2}$ et $u \in U_{v_2}$. La fonction $f_{v_2} = (\tilde{f}_{v_2})_{\Omega_{v_2}}$ est à support dans $Z(\mathbf{F}_{v_2}) X_{v_2}$, et si Γ_2 est suffisamment petit — ce que l'on suppose —, elle donnée par $f_{v_2}(zx) = \Omega_{v_2}(z)^{-1}$ pour tout $z \in Z(\mathbf{F}_{v_2})$ et tout $x \in X_{v_2}$. On a donc $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_2})}(f_{v_2}, \gamma_{v_2}) > 0$. Si de plus U_{v_2} est suffisamment concentré sur γ_{v_2} — ce que l'on suppose aussi —, alors le support de f_{v_2} est contenu dans le sous-ensemble de $G(\mathbf{F}_{v_2})''$ formé des éléments dont l'image dans $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{F}_{v_2})$ est fortement régulière.

Pour $i = 1, 2$, puisque les fonctions ϕ_{v_i} et f_{v_i} concordent, on a on a aussi $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_i})}(\phi_{v_i}, \delta_{v_i}) \neq 0$. D'après la remarque de 2.10, si δ est un élément de $G(\mathbf{E})$ suffisamment proche de δ_{v_0}, δ_{v_1}, δ_{v_2} en les places v_0, v_1, v_2, alors les cinq propriétés suivantes sont vérifiees:

— l'orbite $\mathbb{N}(\mathscr{O}_\sigma(\delta))$ est contenue dans le sous-ensemble de $G(\mathbf{F})''$ formée des éléments dont l'image dans $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{F})$ est fortement régulière;

— $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_1})}(\phi_{v_1},\delta)\neq 0$;
— $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_2})}(\phi_{v_2},\delta)\neq 0$;
— $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_0})}(\phi_0,\delta)=\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_0})}(\phi_0,\delta_{v_0})$;
— $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_0})}(f_0,\gamma)=\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_0})}(f_0,\gamma_{v_0})$ pour tout $\gamma\in\mathbb{N}(\mathscr{O}_\sigma(\delta))$.

Fixons un tel élément $\delta\in G(\mathbf{E})$, et choisissons un élément $\gamma\in G(\mathbf{F})$ qui lui est associé. Reste à modifier les fonctions ϕ_v et f_v en les places v de $\mathbf{F}$ distinctes de v_0, v_1, v_2.

Quitte à remplacer S par un ensemble plus gros, on peut supposer que pour $v\notin S$, γ appartient à K_v; alors puisque le caractère Ω_v est non ramifié, on a $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v,\gamma)>0$.

Pour $v\in S\smallsetminus\{v_0,v_1,v_2\}$, puisque l'image de γ dans $\mathrm{PGL}(n,\mathbf{F})$ est fortement régulière, il en est de même de l'image de γ dans $\mathrm{PGL}(n,\mathbf{F}_v)$. On peut donc, comme en la place v_2, construire une fonction $f_v\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbf{F}_v),\Omega_v)$ à support dans $G(\mathbf{F}_v)'$ telle que $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v,\gamma)\neq 0$. D'ailleurs, d'après 2.9 et la remarque de 2.8, on peut choisir ϕ_v à support dans le sous-ensemble de $G(\mathbf{E}_v)_{\sigma-\mathrm{r}}$ formé des éléments δ'_v tels que l'orbite $\mathbb{N}(\mathscr{O}_\sigma(\delta'_v))$ dans $G(\mathbf{F}_v)$ soit semisimple régulière.

Notons ϕ' la fonction $\phi_0\prod_{v\neq v_0}\phi_v$ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ et f' la fonction $f_0\prod_{v\neq v_0}f_v$ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, où les fonction $\phi_0\in\mathscr{H}_{\mathbf{E}_{v_0}}$ et $f_0\in\mathscr{H}_{\mathbf{F}_{v_0}}$ sont celles fixées au début de ce n°. Par construction, les fonctions ϕ' et f' vérifient les conditions (i), (ii), (iii), (iv) de 6.3 et 6.2, et elles concordent en toutes les places v de $\mathbf{F}$, sauf peut-être en la place v_0. En la place v_2, on suppose que U_{v_2} est suffisamment concentré sur δ_{v_2} et que le groupe J_{v_2} définissant ψ_{v_2} est assez petit, de sorte que

$$\mathrm{trace}(r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}(\phi'd\bar{g}_\mathbf{E})\circ\mathbf{A}_\sigma)=v_\delta\Lambda_\sigma^{\mathbf{G}(\mathbf{E})}(\phi',\delta)$$

et

$$\mathrm{trace}(r_{\mathrm{cusp}}(f'd\bar{g}))=v_\gamma\Lambda^{G(\mathbf{F})}(f',\gamma);$$

où l'on a posé

$$v_\delta=\mathrm{vol}(G_\delta^\sigma(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_F)\backslash G_\delta^\sigma(\mathbb{A}_\mathbf{F}),d\bar{g}_{\mathbf{E},\delta}^\sigma)$$

et

$$v_\gamma=\mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbf{F})\mathfrak{Z}^1\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{F}),d\bar{g}_\gamma).$$

I.6.9. – Reprenons les fonctions $\phi=\prod_v\phi_v$ et $f=\prod_v f_v$ de 6.7, modifiées comme en 6.8 en les places $v\neq v_0$; notons qu'en la place v_0, les fonctions ϕ_{v_0} et f_{v_0} dépendent du choix d'un $\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ régulier. Appliquons la proposition de 6.4 à la paire de fonctions concordantes (ϕ,f) : on a l'égalité

$$l\sum_\pi\mathrm{trace}(\pi(\phi d\bar{g}_\mathbf{E})\circ\mathbf{A}_\sigma(\pi))=\sum_\tau\mathrm{trace}(\tau(\phi d\bar{g})).\tag{1}$$

On en déduit une égalité du type

$$\sum_{\pi_{v_0}}a_{\pi_{v_0}}\langle\phi_{v_0},\Theta_{\pi_{v_0}}^\sigma\rangle=\sum_{\tau_{v_0}}c_{\tau_{v_0}}\langle f_{v_0},\Theta_{\tau_{v_0}}\rangle\tag{2}$$

où π_{v_0} parcourt l'ensemble des composants locaux en v_0 des sous-représentations irréductibles σ-stables de $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$, et τ_{v_0} parcourt l'ensemble des composants locaux en v_0 des sous-représentations irréductibles de r_{cusp}. Ici, $a_{\pi_{v_0}}$ et $c_{\tau_{v_0}}$ sont des constantes complexes qui ne dépendent pas du n-uplet ν définissant les fonctions ϕ_{v_0} et f_{v_0}; précisément l'égalité (2) est vraie pour toute paire de fonctions concordantes (ϕ'_{v_0}, f'_{v_0}) dans $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbf{E}_{v_0}), \Xi_{v_0}) \times C^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbf{F}_{v_0}), \Omega_{v_0})$.

Si π est une sous-représentation irréductible de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ de caractère central $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$ donnant une contribution non triviale à la somme de gauche dans (2), alors π a des vecteurs non nuls fixés par un sous-groupe ouvert compact (dépendant de ϕ) de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, qui, d'après le corollaire de 5.3, contient un sous-groupe d'Iwahori à la place v_0. On en déduit que les sous-représentations irréductibles de $r_{\mathbf{E},\mathrm{cusp}}$ donnant une contribution non triviale à la somme de gauche dans (2), appartiennent à un ensemble fini *indépendant de* ν. La même observation valant pour la somme de droite, on peut faire varier ν et appliquer le théorème de 5.5: pour toute fonction $\tilde{\phi}'_0 \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_{v_0}}$, on a

$$\sum_{\pi_{v_0}} a_{\pi_{v_0}} \langle \tilde{\phi}'_0, \Theta^\sigma_{\pi_{v_0}} \rangle = \sum_{\tau_{v_0}} c_{\tau_{v_0}} \langle b_{v_0}(\tilde{\phi}'_0), \Theta_{\tau_{v_0}} \rangle.$$

On en déduit que l'égalité (1) reste vraie si l'on remplace (ϕ, f) par la paire de fonctions (ϕ', f') définie à la fin de 6.8. On obtient l'égalité

$$l v_\delta \Lambda^{G(\mathbf{E})}_\sigma(\phi', \delta) = v_\gamma \Lambda^{G(\mathbf{F})}(f', \gamma).$$

Or d'après la démonstration du lemme de 6.4, on a $l v_\delta = v_\gamma$. Puisque les fonctions ϕ' et f' concordent en toutes les places v distinctes de v_0, on obtient

$$\Lambda^{G(\mathbf{E}_{v_0})}_\sigma(\phi_0, \delta) = \Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_0})}(f_0, \gamma),$$

d'où

$$\Lambda^{G(\mathbf{E}_{v_0})}_\sigma(\phi_0, \delta_{v_0}) = \Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_0})}(f_0, \gamma_{v_0}).$$

I.6.10. – On a montré que pour toute fonction $\tilde{\phi}_0 \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_{v_0}}$, $(\tilde{\phi}_0)_{\Xi_{v_0}}$ et $[b_{v_0}(\tilde{\phi}_0)]_{\Omega_{v_0}}$ concordent en toutes les paires d'éléments associés $(\delta_{v_0}, \gamma_{v_0})$ de $G(\mathbf{E}_{v_0}) \times G(\mathbf{F}_{v_0})$ telles que γ_{v_0} soit régulier elliptique. Commençons par ôter les caractères Ξ_{v_0} et Ω_{v_0} dans cette assertion. Puisque les fonctions caractéristiques des doubles classes $K_{\mathbf{E}_{v_0}} \varpi^\nu K_{\mathbf{E}_{v_0}}$ pour $\nu \in \mathbb{Z}^n_+$, engendrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{H}_{\mathbf{E}_{v_0}}$, on peut supposer que $\tilde{\phi}_0$ est à support dans $K_{\mathbf{E}_{v_0}} \varpi^\nu K_{\mathbf{E}_{v_0}}$ pour un $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n_+$. Soient r et m les entiers définis par $|\det(\delta_{v_0})|_E = q^{-lr}$ (rappelons que q est le cardinal du corps résiduel de $\mathbf{F}_{v_0}$) et $m = \sum_{i=1}^n \nu_i$. Puisque Ω_{v_0} est non ramifié, on a

$$\Lambda^{G(\mathbf{E}_v)}_\sigma(\tilde{\phi}_0, \delta_{v_0}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq m \\ \Lambda^{G(\mathbf{E}_v)}_\sigma((\tilde{\phi}_0)_{\Xi_{v_0}}, \delta_{v_0}) & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même, puisque $|\det(\gamma_{v_0})|_F = q^{-lr}$, on a

$$\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(b_{v_0}(\tilde{\phi}_0), \gamma_{v_0}) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq m \\ \Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}([b_{v_0}(\tilde{\phi}_0)]_{\Omega_{v_0}}, \gamma_{v_0}) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Par suite les fonctions $\tilde{\phi}_0$ et $b_{v_0}(\tilde{\phi}_0)$ concordent en $(\delta_{v_0}, \gamma_{v_0})$.

I.6.11. – Via l'isomorphisme ι de $\mathbf{E}_{v_0}$ sur E, et compte-tenu de l'hypothèse de récurrence faite au début de la démonstration du théorème de 6.6, on a montré que pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, ϕ et $b(\phi)$ concordent en les paires d'éléments associés (δ, γ) de $G(E) \times G(F)$ telles que γ soit régulier. Il nous reste à montrer que $\Lambda^{G(F)}(b(\phi), \gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in G(E)_r$ qui n'est pas une norme de $G(E)$. À nouveau d'après l'hypothèse de récurrence, cela résulte du lemme suivant (il s'agit du lemme 4.11 de [**1**, ch. 1], mais la preuve qu'on en donne ici est différente et valable en toute caractéristique):

LEMME. – *Soit $\phi \in \mathscr{H}_E$. Pour tout $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$ qui n'est pas une norme de $G(E)$, on a*

$$\Lambda^{G(F)}(b(\phi), \gamma) = 0.$$

Démonstration. – Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer, puisque $\mathscr{H}_E = \mathbb{C}[E^\times/\mathfrak{o}_E^\times]$ et $b(\mathscr{H}_E) = \mathbb{C}[N_{E/F}(E^\times)/\mathfrak{o}_F^\times]$. On suppose donc $n \geq 2$.

Soit κ un caractère de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times)$; on note encore κ le caractère $\kappa \circ \det$ de $G(F)$. On verra dans le n° suivant qu'un élément γ de $G(F)_{\mathrm{e}}$ est une norme de $G(E)$ si et seulement si $\kappa(\gamma) = 1$ (lemme de 6.12). Plus généralement, on a $\kappa(\gamma) = 1$ pour tout élément γ de $G(F)_{\mathrm{r}}$ qui est une norme de $G(E)$. Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ et $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}}$, on a l'égalité

$$\Lambda^{G(F)}(\kappa f, \gamma) = \kappa(\gamma)\Lambda^{G(F)}(f, \gamma);$$

par conséquent $\Lambda^{G(F)}(f - \kappa f, \gamma) = 0$ si γ est une norme de $G(E)$. Rappelons aussi qu'une fonction $f \in \mathscr{H}_F$ annule les traces de toutes les séries discrètes de $G(F)$, cf. 5.5.

Fixons une mesure de Haar dz sur $Z(F)$ et soit ω un caractère unitaire non ramifié de $Z(F)$. Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$, notons f_ω la fonction sur $G(F)$ donnée par $f_\omega(g) = \int_{Z(F)} \omega(z) f(zg) dz$.

Soit une fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}} \smallsetminus G(F)_{\mathrm{e}}$ qui n'est pas une norme de $G(E)$, on a $\Lambda^{G(F)}(b(\phi), \gamma) = 0$. Posant $\xi = b(\phi) - \kappa b(\phi)$, on en déduit que pour tout $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}} \smallsetminus G(F)_{\mathrm{e}}$, on a $\Lambda^{G(F)}(\xi, \gamma) = 0$, et donc aussi $\Lambda^{G(F)}(\xi_\omega, \gamma) = 0$. On peut alors appliquer à la fonction $\zeta = \xi_\omega \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F), \omega)$ la version simple de la formule des traces locale [**39**, théo. 4.2]: pour $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$, on a

$$\Lambda^{G(F)}(\zeta, \gamma) = \sum_\rho \langle \zeta, \Theta_\rho \rangle \overline{\Theta_\rho(\gamma)}$$

où ρ parcourt l'ensemble des classes d'isomorphisme de séries discrètes de $G(F)$ de caractère central ω, et $\langle\zeta,\Theta_\rho\rangle = \mathrm{trace}(\rho(\zeta\frac{dg}{dz}))$. Or ζ annule les traces de toutes les séries discrètes de $G(F)$ de caractère central ω. Par suite $\Lambda^{G(F)}(\xi_\omega,\gamma)=0$ pour tout $\gamma\in G(F)_{\mathrm{e}}$. Comme cela est vrai pour tout caractère unitaire non ramifié ω de $F^\times$, par dualité de Pontryagin on obtient que $\Lambda^{G(F)}(\xi,\gamma)=0$ pour tout $\gamma\in G(F)_{\mathrm{e}}$, i.e. que $\Lambda^{G(F)}(b(\phi),\gamma)=0$ pour tout $\gamma\in G(F)_{\mathrm{e}}$ qui n'est pas une norme de $G(E)$. $\square$

Le théorème de 6.6 est maintenant complètement démontré. $\square$

Remarque. – Comme dans la démonstration du lemme IV.5.1 de [**51**], on peut montrer que pour toute fonction $\phi\in\mathscr{H}_E$ et tout caractère χ de $G(F)$ trivial sur les normes de $G(E)$, $b(\phi)$ est à support dans le noyau de χ; ce qui implique directement que la fonction $b(\phi)-\kappa b(\phi)$ est nulle, et que $\Lambda^{G(F)}(b(\phi),\gamma)=0$ pour tout $\gamma\in G(F)$ tel que $\det(\gamma)$ n'appartient pas à $N_{E/F}(E^\times)$. $\star$

I.6.12. – Pour tout élément γ de $G(F)$ qui est une norme de $G(E)$, en prenant les déterminants dans $G(E)$, on voit que $\det(\gamma)$ appartient à $N_{E/F}(E^\times)$. D'après la démonstration du lemma 1.4 de [**1**, ch. 1], pour les éléments semisimples réguliers elliptiques de $G(F)$, la réciproque est vraie: un élément γ de $G(F)''$ est une norme de $G(E)$ si et seulement si son déterminant appartient au groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$. Plus généralement on a:

Lemme. – *Soit $\gamma\in G(F)_{\mathrm{e}}$. Alors γ est une norme de $G(E)$ si et seulement si* $\det\gamma\in N_{E/F}(E^\times)$.

Démonstration. – Posons $K=F[\gamma]$ et $L=K\otimes_F E$. Notons $N_{L/K}:L^\times\to K^\times$ la norme définie par $N_{L/K}(y)=\det_K(x\mapsto yx;L)$. Alors γ est une norme de $G(E)$ si et seulement si $\gamma\in N_{L/K}(L^\times)$ [**1**, ch. 1, lemma 1.3]. D'autre part on a $\det(\gamma)=N_{K/F}(\gamma)$ $(=\det_F(x\mapsto\gamma x;K))$. Il s'agit de montrer que $\gamma\in N_{L/K}(L^\times)$ si et seulement si $\det(\gamma)\in N_{E/F}(E^\times)$. Notons que si γ est une norme de $G(E)$, écrivant $\gamma=N_{L/K}(x)$ pour un $x\in L^\times$, on a

$$\det(\gamma)=N_{K/F}\circ N_{L/K}(x)=N_{E/F}\circ N_{L/E}(x).$$

Réciproquement, supposons que $\det(\gamma)$ appartient à $N_{E/F}(E^\times)$. Comme dans la démonstration du lemma 1.4 de [**1**, ch. 1], on ramène la démonstration au cas où L est un corps, c'est-à-dire le cas où les extensions E/F et K/F sont disjointes. On suppose donc que L est un corps. Soit F_1/F la sous-extension séparable maximale de K/F, et soit $E_1=F_1\otimes_F E$. Si $K=F_1$ alors $\gamma\in G(F)''$. On peut donc supposer que K/F_1 est une extension radicielle de degré p^m pour un entier $m\geq 1$, où $p>1$ est la caractéristique de F. Posons $\gamma_1=N_{K/K_1}(\gamma)\in G(F)$. Alors $\gamma_1=\gamma^{p^m}$, $F_1=F[\gamma_1]$ et $N_{F_1/F}(\gamma_1)=\det(\gamma)$ appartient à $N_{E/F}(E^\times)$. D'après la démonstration de loc. cit., cela implique que γ_1 appartient à $N_{E_1/F_1}(E_1^\times)$. Or L/E_1 est une extension radicielle de degré p^m, par conséquent $E_1^\times = N_{L/E_1}(L^\times)$ et $\gamma_1 = N_{L/F_1}(y)$ pour un élément y de $L^\times$. On a donc

$$N_{K/F_1}(\gamma) = N_{L/F_1}(y) = N_{K/F_1} \circ N_{L/K}(y),$$

ce qui implique que $\gamma = N_{L/K}(y)$. □

I.6.13. – Nous concluons ce chapitre par deux remarques.

D'après le théorème de 6.6, pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, ϕ et $b(\phi)$ concordent; d'ailleurs il est sûrement possible de montrer que ϕ et $b(\phi)$ concordent *fortement* — c'est déjà fait pour les unités de $\mathscr{H}_E$ et de $\mathscr{H}_F$, cf. la proposition de 3.1 —, comme le fait Clozel en caractéristique nulle [**19**, § 7]. Mais cela nécessite l'utilisation de plusieurs résultats d'analyse harmonique pour GL_n, dont on ne dispose pas pour le moment en caractéristique > 0: germes de σ-intégrales orbitales au voisinage d'un élément σ-fermé et leur indépendance linéaire; transfert des germes entre formes intérieures de GL_n; etc.

L'introduction des opérateurs normalisés $A_\sigma(\pi)$ pour les représentations irréductibles génériques σ-stables de $G(E)$ — cf. 5.4 —, n'est bien évidemment pas nécessaire à la démonstration du lemme fondamental. On a choisi de le faire pour plusieurs raisons: par commodité d'écriture (!); parce qu'il faut bien introduire une normalisation pour avoir la formule du lemme 2 de 5.4 (ou son équivalent sphérique [**50**, prop. 7']); enfin parce que c'est la bonne normalisation pour une théorie du changement de base, local et global, en caractéristique > 0 (à suivre...).

CHAPITRE II

SUR LE CHANGEMENT DE BASE LOCAL POUR GL_n

Soit E/F une extension finie cyclique de corps commutatifs localement compacts non archimédiens, et soit $n \geq 1$ un entier. Si F est de caractéristique nulle, Arthur et Clozel ont associé à toute représentation (complexe) lisse irréductible de $\mathrm{GL}(n, F)$ une représentation lisse de $\mathrm{GL}(n, E)$. Dans ce chapitre on étend cette application de relèvement au cas où F est de caractéristique non nulle.

II.1. Introduction

II.1.1. – Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique $p \geq 0$. Fixons une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F, et notons W_F' le groupe de Weyl-Deligne de $\overline{F}$ sur F. Soit E une extension finie cyclique de F dans $\overline{F}$. On définit de même le sous-groupe W_E' de W_F'. Toute représentation (complexe) τ de W_F' donne par restriction une représentation τ_E de W_E' de dimension celle de τ. Cette application $\tau \mapsto \tau_E$ correspond, via les correspondances de Langlands locales pour F et E (**[58]** si $p > 0$; **[31, 36]** si $p = 0$), à une application $\pi \mapsto \pi_E$ entre représentations (complexes) lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n, F)$ et représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n, E)$, où n est la dimension de τ. Précisément, si π est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}(n, F)$ qui correspond à τ — une telle représentation est unique à isomorphisme près —, alors π_E est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}(n, E)$ qui correspond à τ_E.

Si $p = 0$, l'application de changement de base $\pi \mapsto \pi_E$ a été établie par Arthur et Clozel [**1**], cf. le théorème de 1.4. On se propose ici de l'établir pour $p > 0$.

II.1.2. – Fixons un entier $n \geq 1$. Pour tout anneau commutatif A, on note $G(A)$ le groupe $\mathrm{GL}(n, A)$. Fixons aussi un générateur σ du groupe de Galois de E sur F, et notons d le degré de l'extension E sur F. Le F-automorphisme σ de E induit un automorphisme de $G(E)$ que l'on note encore σ. Pour tout élément δ de $G(E)$, on note $\mathcal{O}_\sigma(\delta)$ la σ-orbite de δ dans $G(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des $g^{-1}\delta g^\sigma$ pour

$g \in G(E)$. De même, pour tout élément γ de $G(F)$, on note $\mathcal{O}(\gamma)$ l'orbite de γ dans $G(F)$ (obtenue en prenant $E = F$ et $\sigma = \mathrm{Id}$ dans la définition précédente). On dispose d'une application norme

$$N : G(E) \to G(E),\ g \mapsto gg^{\sigma} \cdots g^{\sigma^{d-1}}$$

reliant les σ-orbites de $G(E)$ aux orbites de $G(F)$. Précisément, pour tout $\delta \in G(E)$, il existe un $g \in G(E)$ tel que l'élément

$$N(g^{-1}\delta g^{\sigma}) = g^{-1}N(\delta)g$$

appartient à $G(F)$; l'orbite $\mathcal{O}(g^{-1}N(\delta)g)$ ne dépend pas du choix de g, et elle détermine la σ-orbite $\mathcal{O}_{\sigma}(\delta)$. En d'autres termes, la norme N induit une application *injective*, que nous notons $\mathbb{N}$, entre l'ensemble des σ-orbites dans $G(E)$ et l'ensemble des orbites dans $G(F)$. Deux éléments $\delta \in G(E)$ et $\gamma \in G$ sont dit *associés* si

$$\mathbb{N}(\mathcal{O}_{\sigma}(\delta)) = \mathcal{O}(\gamma).$$

Un élément de $G(F)$ est dit *régulier* si son polynôme caractéristique est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts (on ne demande pas que ces derniers soient séparables sur F), et un élément de $G(E)$ est dit *σ-régulier* si tout élément de $G(F)$ qui lui est associé est régulier. On note $G(F)_{\mathrm{r}}$ le sous-ensemble de $G(F)$ formé des éléments réguliers, et $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ le sous-ensemble de $G(E)$ formé des élements σ-réguliers. Un élément régulier γ de $G(F)$ est dit *elliptique* si la F-algèbre $F[\gamma]$ est un corps, et un élément de $G(E)$ est dit *σ-elliptique* si tout élément de $G(F)$ qui lui est associé est elliptique. On note $G(F)_{\mathrm{e}}$ le sous-ensemble de $G(F)_{\mathrm{r}}$ formé des éléments elliptiques, et $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$ le sous-ensemble de $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ formé des éléments σ-elliptiques.

II.1.3. – Pour les représentations génériques unitaires, et plus généralement *à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers* — cf. la définition de 3.4 — où $\mathfrak{K}(E/F)$ désigne le groupe des caractères de $F^{\times}$ qui sont triviaux sur $N_{E/F}(E^{\times})$, l'application de changement de base $\pi \mapsto \pi_E$ est caractérisée par une identité de caractères “à la Shintani“. Si Π est une représentation lisse de $G(E)$, on note Π^{σ} la représentation $g \mapsto \Pi(g^{\sigma})$ de $G(E)$, et l'on dit que Π est *σ-stable* si Π^{σ} est isomorphe à Π. Fixons une mesure de Haar dg_E sur $G(E)$. Pour toute représentation lisse admissible σ-stable Π de $G(E)$, le choix d'un isomorphisme A de Π sur Π^{σ}, c'est-à-dire d'un automorphisme A de l'espace V de Π vérifiant $A \circ \Pi(g) = \pi(g^{\sigma}) \circ A$ pour tout $g \in G(E)$, définit une distribution Θ_{Π}^{A} sur $G(E)$: pour toute fonction ϕ sur $G(E)$ localement constante et à support compact, on pose

$$\Theta_{\Pi}^{A}(\phi) = \mathrm{trace}(\Pi(\phi) \circ A),$$

où $\Pi(\phi)$ désigne l'opérateur $\int_{G(E)}\phi(g)\Pi(g)dg_E$ sur V. Si de plus Π est de longueur finie, on sait (chap. I, **[60]**) que cette distribution Θ_Π^A est donnée par une fonction localement constante sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ qui est localement intégrable sur $G(E)$: pour toute fonction ϕ sur $G(E)$ localement constante et à support compact, on a

$$\Theta_\Pi^A(\phi)=\int_{G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}}\phi(g)\Theta_\Pi^A(g)dg_E,$$

l'intégrale étant absolument convergente. Notons que la distribution Θ_Π^A sur $G(E)$ dépend du choix de la mesure de Haar dg_E, mais la fonction Θ_Π^A sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ n'en dépend pas.

De même, fixée une mesure de Haar dg sur $G(F)$, toute représentation lisse admissible π de $G(F)$ définit une distribution Θ_π sur $G(F)$: pour toute fonction f sur $G(F)$ localement constante et à support compact, on pose

$$\Theta_\pi(f)=\mathrm{trace}(\pi(f)).$$

Si de plus π est de longueur finie, cette distribution est donnée par une fonction localement constante sur $G(F)_\mathrm{r}$ qui est localement intégrable sur $G(F)$, et indépendante du choix de la mesure de Haar dg.

Soient π une représentation lisse irréductible de $G(F)$, Π une représentation lisse irréductible σ-stable de $G(E)$, et A un isomorphisme de Π sur Π^σ. On dit que Π est un *σ-relèvement*, ou simplement un *relèvement*, de π s'il existe une constante $c\neq 0$ telle que

$$\Theta_\Pi^A(\delta)=c\Theta_\pi(\gamma)$$

pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit régulier. Un σ-relèvement de π, s'il existe, est unique à isomorphisme près, et sa classe d'isomorphisme est déterminée par celle de π. Quant à la constante c, elle dépend bien sûr du choix de A, mais peut a priori dépendre aussi de la classe d'isomorphisme de π; on la note donc $c(\pi,A)$.

Notons que pour $n=1$, tout caractère[(1)] ω de $F^\times$ se relève en le caractère $\omega_E=\omega\circ N$ de $E^\times$.

II.1.4. – Fixons un caractère additif non trivial ψ de F. Notons ψ_E le caractère additif $\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}$ de E, et θ_{ψ_E} le caractère du sous-groupe unipotent $U_0(E)$ de $G(E)$ formé des matrices triangulaires supérieures strictes, défini par

$$\theta_{\psi_E}((u_{i,j})_{1\leq i<j\leq n})=\psi_E(u_{1,2}+u_{2,3}+\cdots+u_{n-1,n}).$$

Soit Π une représentation lisse irréductible générique de $G(E)$. Une *fonctionnelle de Whittaker pour* Π est par définition une forme linéaire λ sur l'espace V de Π

(1) Dans ce papier, on appelle *caractère* d'un groupe topologique un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$; on ne demande pas qu'il soit unitaire.

vérifiant $\lambda(\pi(u)(v)) = \theta_{\psi_E}(u)\lambda(v)$ pour tout $u \in U_0(E)$ et tout $v \in V$. On sait que les fonctionnelles de Whittaker pour Π forment un espace vectoriel de dimension 1. Si de plus Π est σ-stable et si A est un isomorphisme de Π sur Π^σ, alors pour toute fonctionnelle de Whittaker λ pour Π, la forme linéaire $\lambda \circ A$ sur V est encore une fonctionnelle de Whittaker pour Π. On peut donc normaliser l'opérateur A en demandant que $\lambda \circ A = \lambda$ pour une (i.e. pour toute) fonctionnelle de Whittaker non nulle λ pour Π; on le note alors $I_\sigma(\Pi)$. Cette normalisation $I_\sigma(\Pi)$ ne dépend pas du choix du caractère additif ψ de F.

Le théorème suivant est le résultat principal du chapitre. Comme on l'a dit plus haut, il n'est nouveau que pour $p > 0$.

Théorème. – (1) *Toute représentation lisse irréductible générique à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers π de $G(F)$ se relève en une représentation lisse irréductible générique σ-stable Π de $G(E)$, et la constante $c(\pi, I_\sigma(\Pi))$ vaut 1.*

(2) *Toute représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$ relève une représentation lisse irréductible générique à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G(F)$.*

(3) *Pour les représentations génériques, la notion de relèvement est indépendante du choix de σ.*

On donne aussi, pour des représentations π de $G(F)$ et π' de $G'(F) = \mathrm{GL}(n', F)$ se relevant en des représentations Π de $G(E)$ et Π' de $G'(E)$ comme dans le point (1), des formules reliant les facteurs L et ϵ de la paire (Π, Π') à ceux des paires $(\pi, \kappa\pi')$ pour $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$ — cf. le théorème de 4.2.

II.1.5. – Il n'est pas immédiat de vérifier que pour les représentations génériques à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers, l'application de relèvement introduite en 1.3 est compatible aux correspondances de Langlands pour F et E, c'est-à-dire coïncide avec l'application de changement de base introduite en 1.1. C'est bien sûr le cas pour les représentations (génériques) non ramifiées si l'extension E/F est non ramifiée. Pour $p > 0$, nous vérifierons cette compatibilité en général dans **IV**, grâce à la correspondance de Langlands globale prouvée par Lafforgue [**55**] et à la compatibilité des correspondances de Langlands locale et globale (elle aussi prouvée dans loc. cit.).

Remarque. – Une fois vérifiée cette compatibilité pour les représentations génériques à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers, ou même seulement pour les représentations tempérées, on peut ensuite étendre l'application de changement de base à toutes les représentations grâce à la classification de Langlands; en général, elle n'est pas caractérisée par une identité de caractères comme en 1.3.

II.1.6. – Notre propos est ici de donner des démonstrations complètes et détaillées, basées sur des références qui traitent explicitement du cas de caractéristique non nulle. Cela donne un texte un peu long, mais que nous espérons accessible et utile. Notre méthode est une adaptation de celle d'Arthur et Clozel [**1**, ch. 1], qui traitent le cas des corps p-adiques; elle utilise un procédé local-global basé sur une formule des traces simple. Signalons l'article de Flicker [**25**], qui donne les points (1) et (2) du théorème de 1.4 pour les représentations tempérées, grâce à une autre variante de la formule des traces simples. Malheureusement sa preuve repose sur des énoncés dont la démonstration est laissée au lecteur. Nous donnons ici tous les détails et aussi un grand nombre de propriétés supplémentaires (cf. 1.8 ci-dessous). Nous n'utilisons pas ici les travaux de L. Lafforgue [**54, 55**]: dans la mesure où il s'agit d'établir des identités de caractères locales, le gain aurait été faible par rapport à la masse de résultats nécessaires à Lafforgue. Le lien avec les travaux de Lafforgue est effectué dans **IV**.

II.1.7. – Décrivons brièvement les principaux arguments de la démonstration du théorème de 1.4. On appelle *série σ-discrète* de $G(E)$ une représentation lisse irréductible tempérée σ-stable de $G(E)$ qui n'est pas isomorphe à l'induite parabolique d'une représentation lisse σ-stable d'un sous-groupe de Levi propre σ-stable de $G(E)$. Notons que si $E = F$ et $\sigma = \mathrm{Id}$, on retrouve la notion habituelle de série discrète de $G(F)$. Par descente parabolique, on ramène la preuve du théorème de 1.4 à celle de sa "version discrète", c'est-à-dire au cas où π est une série discrète et Π est une série σ-discrète. Dans ce cas, on procède par voie globale, par comparaison d'une formule des traces pour $G(F)$ et d'une formule des traces σ-tordue pour $G(E)$ — il s'agit dans les deux cas de formules des traces "simples", dites de Deligne-Kazhdan.

Supposons $p > 0$ et choisissons une extension finie cyclique (de corps de fonctions) $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ telle qu'en une place v_0 de $\mathbf{F}$ inerte dans $\mathbf{E}$, l'extension de corps locaux $\mathbf{E}_{v_0}/\mathbf{F}_{v_0}$ soit isomorphe à E/F, ce qui permet d'identifier σ à un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$. Les ingrédients permettant le fonctionnement de cette méthode globale sont principalement:

- le *lemme fondamental (pour le changement de base)* aux places de $\mathbf{F}$ non ramifiées dans $\mathbf{E}$;
- le *transfert* des fonctions à support dans les éléments réguliers;
- l'existence de *pseudo-coefficients* pour les séries σ-discrète de $G(E)$ — c'est-à-dire pour les caractères tordus Θ_Π^A des séries σ-discrètes Π de $G(E)$.

Le lemme fondamental a été démontré dans **I**. Le transfert des fonctions à support dans les éléments réguliers est établi ici. Quant aux pseudo-coefficients pour les séries σ-discrètes de $G(E)$, leur existence est aussi établie ici, à partir du théorème de Paley-Wiener σ-tordu pour $G(E)$. Ce dernier a été démontré par Rogawski [**67**] pour n'importe quel groupe réductif connexe sur un corps local de caractéristique nulle, mais pour le groupe linéaire sa preuve fonctionne en toute caractéristique. On montre aussi qu'une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$ est *σ-elliptique*, c'est-à-dire que son caractère tordu n'est pas identiquement nul sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$, si et seulement si elle est essentiellement σ-discrète — propriété cruciale pour la méthode globale.

Le principe de la démonstration de la version discrète du théorème de 1.4 est, à quelques variantes près, celui de [**1**, 6.3]: grâce aux pseudo-coefficients, on voit que toute série σ-discrète de $G(E)$ est composant local d'une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ — de même, toute série discrète de $G(F)$ est composant local d'une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. On fixe une place v_1 de $\mathbf{F}$ scindée dans $\mathbf{E}$, et l'on ne considère que des représentations automorphes cuspidales π de $G(\mathbb{A}_F)$ dont le composant en la place v_1 est une représentation cuspidale de niveau 0 de $G(\mathbf{F}_{v_1})$, et des représentations automorphes cuspidales σ-stables Π de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dont le composant local en la place v_1 est de la forme $(\Pi_1)^{\otimes d}$ où Π_1 est une représentation cuspidale de niveau 0 de $G(\mathbf{F}_{v_1})$. Pour de telles représentations π et Π, on obtient en fait une application de relèvement *global*, disons $\pi \mapsto \Pi$, caractérisée par le fait qu'en *presque toute* place v de $\mathbf{F}$ non ramifiée dans $\mathbf{E}$, le composant local Π_v est un relèvement de π_v (pour la notion de relèvement dans le cas où $\mathbf{E}_v$ n'est pas un corps, cf. la section 2). De plus, ce relèvement global est fort au sens où pour *toute* place v de $\mathbf{F}$ — y compris v_0 et v_1 —, Π_v est un relèvement de π_v.

II.1.8. – Le chapitre s'organise comme suit (jusqu'à la section 5 incluse, le corps F est supposé de caractéristique quelconque).

Dans la section 2, on introduit les principales notions utilisées dans ce chapitre, en particulier celle de σ-relèvement à $G(E)$ pour une représentation lisse irréductible de $G(F)$, et celle de concordance (ou transfert) pour deux fonctions localement constantes à support compact f sur $G(F)$ et ϕ sur $G(E)$. Pour les applications globales, on se place dans le cadre plus général où E est une F-algèbre cyclique de groupe $\Sigma = \langle\sigma\rangle$. On établit le transfert des fonctions à support dans les éléments réguliers, et, dans le cas où la F-algèbre E est scindée, celui de certaines fonctions bien particulières, qui sont combinaisons linéaires de représentations cuspidales de niveau 0.

La section 3 est consacré à des rappels sur la classification de Zelevinski.

Dans la section 4, on ramène la preuve du théorème de 1.4 à celle de sa version discrète. De cette version discrète, on tire un certain nombre de conséquences :

— la formule d'orthogonalité des caractères pour les séries σ-discrètes de $G(E)$;
— sous l'hypothèse où le transfert a été démontré en général (ce qui est le cas en caractéristique nulle [**1**] mais ne l'est pas encore en caractéristique > 0),

une formule des traces locale simple σ-tordue, c'est-à-dire pour les fonctions σ-elliptiques, cf. 4.10;

— la description du support cuspidal de Π dans le cas où π est cuspidale, ce qui permet ensuite d'étendre cette description au cas où π est essentiellement discrète.

On décrit aussi les fibres de l'application de relèvement, d'abord dans le cas essentiellement discret (lemme de 4.8), puis dans le cas générique (lemme de 4.13). Enfin si E est une extension non ramifiée de F, on vérifie que l'application de relèvement correspond bien, via les correspondances de Langlands locales pour F et E, à la restriction des représentations de W_F à W_E.

Dans la section 5, on introduit la notion de σ-représentation de $G(E)$, c'est-à-dire une paire (Π, A) formée d'une représentation lisse σ-stable Π de $G(E)$ et d'un isomorphisme A de Π sur Π^σ tel que A^d opère par multiplication par un scalaire sur l'espace de Π. Les σ-représentations de $G(E)$ s'organisent naturellement en une catégorie (en général non abélienne), et grâce à la classification de Langlands, on peut décomposer le $\mathbb{Z}$-module libre, disons $\mathscr{G}_0$, engendré par les classes d'isomorphisme de σ-représentations (Π, A) de $G(E)$ telles que Π est irréductible. Le théorème de Paley-Wiener σ-tordu **[67]** caractérise les formes $\mathbb{Z}$-linéaires sur $\mathscr{G}_0$ de la forme $(\Pi, A) \mapsto \Theta_\Pi^A(\phi)$ pour une fonction ϕ sur $G(E)$ localement constante et à support compact. On en déduit l'existence de pseudo-coefficients pour les séries σ-discrètes de $G(E)$, et leurs propriétés.

Dans la section 6, on suppose F de caractéristique > 0, et l'on montre par voie globale la version discrète du théorème de 1.4.

II.2. Fonctions concordantes et identités de caractères

II.2.1. – Soit $n \geq 1$ un entier. On note G le schéma en groupes qui à tout anneau commutatif A associe le groupe $G(A) = \mathrm{GL}(n, A)$, et Z le centre de G, c'est-à-dire le sous-schéma en groupes fermé qui à A associe le sous-groupe $Z(A)$ de $G(A)$ formé des matrices diagonales $\mathrm{diag}(x, \dots, x)$, $x \in A$. On identifie $A^\times$ à $Z(A)$ via l'application $x \mapsto \mathrm{diag}(x, \dots, x)$.

Fixons un entier $d \geq 1$, un groupe cyclique Σ de cardinal d, et un générateur σ de Σ. On considère un corps commutatif quelconque F, et une F-algèbre cyclique E de groupe Σ, c'est-à-dire un produit de corps $E = E_1 \times \cdots \times E_r$ où r est un entier divisant d, $d = rd_1$, et E_i est une extension cyclique de F de groupe de Galois engendré par $\sigma_1 = \sigma^r$. On choisit les notations de sorte que $\sigma E_1 = E_r$ et $\sigma E_{i+1} = E_i$ pour $i = 1, \dots, r-1$. L'opération de σ sur E est donnée par

$$\sigma(x_1, \dots, x_r) = (\sigma x_2, \sigma x_3, \dots, \sigma x_r, \sigma x_1),$$

et le corps F, plongé diagonalement dans E, coïncide avec le sous-anneau de E formé des éléments fixés par σ. On note $N_{E/F}$ l'application norme de $E^\times$ à $F^\times$ donnée par $N_{E/F}(x) = \prod_{i=0}^{d_1-1}\sigma^i(x)$. Pour $(x_1,\ldots,x_r) \in E^\times$, on a $N_{E/F}(x) = N_{E_1/F}(\prod_{i=1}^r \sigma^{i-1}x_i)$. En particulier, le groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$ coïncide avec le groupe des normes $N_{E_1/F}(E_1^\times)$.

L'opération de σ sur E induit une opération sur $G(E) = G(E_1)\times\cdots\times G(E_r)$ qui est décrite de la même manière, et le groupe $G(F)$, plongé diagonalement dans $G(E)$, coïncide avec le sous-groupe de $G(E)$ formé des éléments fixés par σ. On note N l'application norme de $G(E)$ à $G(F)$ donnée par

$$N(\delta) = \delta\delta^\sigma\cdots\delta^{\sigma^{d-1}},$$

où l'on a posé $\delta^{\sigma^i} = \sigma^i\delta$.

Pour $\delta \in G(E)$, on note $\mathcal{O}_\sigma(\delta)$ la *σ-orbite* de δ dans $G(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des $g^{-1}\delta g^\sigma$ pour $g \in G(E)$. De même pour $\gamma \in G(F)$, on note $\mathcal{O}(\gamma)$ l'*orbite* de γ dans $G(F)$, c'est-à-dire l'ensemble des $g^{-1}\gamma g$ pour $g \in G(F)$. D'après le lemme de **I**.2.2, l'application

$$\delta \mapsto N(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) \cap G(F)$$

induit une application injective, que nous notons $\mathbb{N}$, entre l'ensemble des σ-orbites dans $G(E)$ et l'ensemble des orbites dans $G(F)$. Deux éléments $\delta \in G(E)$ et $\gamma \in G(F)$ tels que $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathcal{O}(\gamma)$, sont dits *associés*.

II.2.2. – Pour $\delta \in G(E)$, on note $G_\delta^\sigma(F)$ le σ-centralisateur de δ dans $G(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G(E)$ tels que $g^{-1}\delta g^\sigma = \delta$. C'est le groupe des points F-rationnels d'un sous–F-schéma en groupes fermé G_δ^σ de $\mathrm{Res}_{E/F}(G\times_{\mathbb{Z}}E)$, où $\mathrm{Res}_{E/F}$ désigne le foncteur restriction à la Weil de E à F. De même, pour $\gamma \in G(F)$, on note $G_\gamma(F)$ le centralisateur de γ dans $G(F)$, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g^{-1}\gamma g = \gamma$. C'est le groupe des points F-rationnels d'un sous–F-schéma en groupes fermé de $G \times_{\mathbb{Z}} F$.

Pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$, les F-schémas en groupes G_δ^σ et G_γ sont formes intérieures l'un de l'autre: fixée une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F, il existe un isomorphisme de $\overline{F}$-schémas en groupes $\psi : G_\delta^\sigma \times_F \overline{F} \to G_\gamma \times_F \overline{F}$ tel que pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, l'automorphisme $\psi^{-1}\tau(\psi)$ de $G_\gamma \times_F \overline{F}$ est intérieur (cf. **I**.2.3).

Un élément γ de $G(F)$ est dit *régulier* si son polynôme caractéristique $P_\gamma \in F[t]$ est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts (on ne demande pas que ces derniers soient séparables sur F). Si de plus P_γ est irréductible sur $F[t]$, on dit que γ est (régulier) elliptique. On note $G(F)_{\mathrm{r}}$ l'ensemble des éléments réguliers de $G(F)$, et $G(F)_{\mathrm{e}}$ le sous-ensemble de $G(F)_{\mathrm{r}}$ formé des éléments elliptiques. Si γ est un élément régulier de $G(F)$, on dit que son image dans $\mathrm{PGL}(n,F)$ est *fortement régulière* si pour tout $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}\gamma g = z\gamma$ pour un $z \in Z(F)$, on a $g \in G_\gamma(F)$. On note $G(F)'$ l'ensemble des éléments (absolument) semi-simples réguliers de $G(F)$, c'est-à-dire le sous-ensemble de $G(F)_{\mathrm{r}}$ formé des éléments dont le polynôme caractéristique a n racines distinctes dans $\overline{F}$, et l'on pose $G(F)'' = G(F)' \cap G(F)_{\mathrm{e}}$. Notons qu'un élément γ de $G(F)$ est semisimple régulier si et seulement si le F-schéma en groupes G_γ est un tore, auquel cas l'image de γ dans $\mathrm{PGL}(n,F)$ est fortement régulière si et seulement si son centralisateur dans $\mathrm{PGL}(n,F)$ est un tore.

Un élément δ de $G(E)$ est dit *σ-régulier* (resp. *σ-elliptique*) si l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ dans $G(F)$ est régulière (resp. elliptique). On note $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ l'ensemble des éléments σ-réguliers de $G(E)$, et $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$ le sous-ensemble de $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ formé des éléments σ-elliptiques.

Soit (δ,γ) une paire d'éléments associés de $G(E)\times G(F)$. Si γ est régulier, le groupe $G_\gamma(\overline{F})$ est isomorphe à $\overline{F}[\gamma]^\times$, donc est commutatif, et puisque G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ, on a un isomorphisme de F-schémas en groupes $G_\delta^\sigma \to G_\gamma$. Si de plus $N(\delta)=\gamma$, comme $G_\delta^\sigma(F)$ est contenu dans $G_\gamma(E)$, on a l'égalité $G_\delta^\sigma(F) = G_\gamma(F)$ et δ appartient à $G_\gamma(E)$.

II.2.3. – On suppose désormais que F est un corps commutatif localement compact non archimédien. On note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$, et $|\ |_F$ la valeur absolue sur F normalisée par $|\varpi_F|_F = q^{-1}$ pour une uniformisante ϖ_F de F, où q est le cardinal du corps résiduel de F. Pour $i=1,\ldots,r$, on définit $\mathfrak{o}_{E_i}$ et $\mathfrak{p}_{E_i}$ de la même manière, et l'on pose $\mathfrak{o}_E = \prod_{i=1}^r \mathfrak{o}_{E_i}$ et $\mathfrak{p}_E = \prod_{i=1}^r \mathfrak{p}_{E_i}$.

Les groupes $G(F)$ et $G(E)$ sont désormais munis de la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique. Pour $\delta \in G(E)$, le σ-centralisateur $G_\delta^\sigma(F)$ est un sous-groupe fermé de $G(E)$, et la σ-conjugaison $g \mapsto g^{-1}\delta g^\sigma$ dans $G(E)$ induit par passage au quotient une application bijective $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E) \to \mathcal{O}_\sigma(\delta)$, qui est un homéomorphisme si l'on munit l'espace homogène $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)$ de la topologie quotient (théorème d'Arens [**63**, 2.13], puisqu'on sait que la σ-orbite $\mathcal{O}_\sigma(\delta)$ est localement fermée dans $G(E)$, donc localement compacte). De même, pour $\gamma \in G(F)$, le centralisateur $G_\gamma(F)$ est un sous-groupe fermé de $G(F)$, et la conjugaison $g \mapsto g^{-1}\gamma g$ dans $G(F)$ induit par passage au quotient une application bijective $G_\gamma(F)\backslash G(F) \to \mathcal{O}(\gamma)$, qui est un homéomorphisme si l'on munit l'espace homogène $G_\gamma(F)\backslash G(F)$ de la topologie quotient.

Un élément γ de $G(F)$ est dit *fermé* si l'orbite $\mathcal{O}(\gamma)$ est fermée dans $G(F)$, c'est-à-dire si la F-algèbre $F[\gamma]$ est un produit de corps. Un élément δ de $G(E)$ est dit *σ-fermé* si l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ est fermée dans $G(F)$ pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique, i.e. si tout élément γ de $G(F)$ associé à δ est fermé. Si E est un corps, on sait [**60**, 7] que δ est σ-fermé si et seulement si la σ-orbite $\mathcal{O}_\sigma(\delta)$ est fermée dans $G(E)$.

Si X est un espace topologique totalement discontinu, on note $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(X)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur X qui sont localement constantes et à support compact.

Pour $\gamma \in G(F)$, le centralisateur $G_\gamma(F)$ est unimodulaire [**57**, 4.8.6]. On peut donc, via le choix une mesure $G(F)$-invariante $d\bar{g}_\gamma$ sur l'espace homogène $G_\gamma(F)\backslash G(F)$, définir une distribution $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$ sur $G(F)$: pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$, on pose

$$\Lambda^{G(F)}(f,\gamma) = \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)d\bar{g}_\gamma;$$

d'après [**57**, 4.8.10 et 4.8.11], l'intégrale converge absolument.

Pour $\delta \in G(E)$, le σ-centralisateur $G_\delta^\sigma(F)$ est lui aussi unimodulaire: pour tout $\gamma \in G(F)$ associé à δ, le centralisateur $G_\gamma(F)$ est unimodulaire, et G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ. On peut donc choisir une mesure $G(E)$-invariante $d\bar{g}_\delta^\sigma$ sur l'espace homogène $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)$. Si de plus δ est σ-fermé, cette mesure définit une distribution $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$ sur $G(E)$: pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$, on pose

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta) = \int_{G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)} \phi(g^{-1}\delta g^\sigma)d\bar{g}_\delta^\sigma;$$

d'après **I**.2.4, l'intégrale converge absolument.

II.2.4. – Fixons des mesures de Haar dg sur $G(F)$ et dg_{E_1} sur $G(E_1)$, et notons dg_E la mesure de Haar sur $G(E)$ image inverse de $(dg_{E_1})^r$ par l'isomorphisme de groupes topologiques

$$G(E) \to G(E_1)^r,\ (g_1,\ldots,g_r) \mapsto (g_1,\sigma g_2,\ldots,\sigma^{r-1}g_r).$$

Pour chaque élément σ-fermé δ de $G(E)$, on choisit une mesure de Haar dg_δ^σ sur $G_\delta^\sigma(F)$, et pour chaque élément fermé γ de $G(F)$, on choisit une mesure de Haar dg_γ sur $G_\gamma(F)$. On suppose que pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit fermé, les mesures dg_δ^σ et dg_γ sont associées au sens de **I**.2.5 — cela est possible même si γ n'est pas semisimple, c'est-à-dire même si le F-schéma en groupes (connexe) G_γ n'est pas réductif. Pour une telle paire (δ,γ), on note $d\bar{g}_\delta^\sigma$ et $d\bar{g}_\gamma$ les mesures quotient $\frac{dg_E}{dg_\delta^\sigma}$ sur $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)$ et $\frac{dg}{dg_\gamma}$ sur $G_\gamma(F)\backslash G(F)$, et l'on suppose que les distributions $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$ sur $G(E)$ et $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$ sur $G(F)$ sont définies à l'aide de ces mesures. On a donc en particulier

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,g^{-1}\delta g^\sigma) = \Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$$

pour tout $g \in G(E)$, et

$$\Lambda^{G(F)}(\cdot,g^{-1}\gamma g) = \Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$$

pour tout $g \in G(F)$.

Définition. – Deux fonctions $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ sont dites *concordantes en* (δ,γ) pour une paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit fermé, si elles vérifient

$$\Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\phi,\delta)=\Lambda^{G(F)}(f,\gamma).$$

Elles sont dites *concordantes* (resp. *fortement concordantes*) si elles concordent en toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit régulier (resp. fermé), et si $\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)=0$ pour tout élément régulier (resp. fermé) γ de $G(F)$ qui n'est pas une norme.

Remarque. – Supposons de plus que pour tout élément régulier γ de $G(F)$, la mesure de Haar dg_{γ} sur $G_{\gamma}(F)$ soit celle qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal de $G_{\gamma}(F)$. Alors (cf. **I**.2.7) pour toute fonction $f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$, l'application $\gamma\mapsto\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)$ est localement constante sur $G(F)_{\mathrm{r}}$, et pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$, l'application $\delta\mapsto\Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\phi,\delta)$ est localement constante sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$. En particulier, ϕ et f concordent si et seulement si elles concordent en toute paire d'éléments asscociés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ tel que γ est semisimple régulier.

II.2.5. – Il est en général difficile de produire des fonctions ϕ et f qui concordent. On sait le faire dans plusieurs cas particuliers, que nous utiliserons par la suite dans la méthode globale: les fonctions à support dans les éléments réguliers; les fonctions sphériques (lemme fondamental); les fonctions cuspidales de niveau 0.

Commençons par le cas le plus simple, le transfert des fonctions à support dans les éléments réguliers. Il a été établi dans **I**.2.5, prop.: pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E)$ à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, il existe une fonction $f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$ telle que ϕ et f concordent. Réciproquement, pour toute fonction $f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$ telle que $\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)=0$ pour tout $\gamma\in G(F)_{\mathrm{r}}$ qui n'est pas une norme de $G(E)$ (c'est-à-dire qui n'est associé à aucun élément de $G(E)$), il existe une fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E))$ à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ telle que ϕ et f concordent.

Remarque. – La *conjecture de transfert* prédit que l'on peut supprimer les hypothèses sur le support des fonctions dans les énoncés du paragraphe précédent. En caractéristique nulle, elle a été démontrée par Arthur et Clozel [**1**, ch. 1, prop. 3.1]. La démonstration en caractéristique non nulle apparaîtra — on l'espère! — dans un prochain article. Notons que si la caractéristique résiduelle est assez grande, le travail de Waldspurger [**74**] donne aussi cette conjecture en caractéristique non nulle.

II.2.6. – Pour les applications globales, on a besoin de considérer des fonctions localement constantes à support compact modulo le centre, et qui se transforment selon un caractère sous l'action (par translations) d'un sous-groupe fermé du centre. Soit donc ω un caractère du groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$, et soit χ le caractère $\omega \circ N_{E/F}$ de $E^\times$. On note $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$ l'espace des fonctions f sur $G(F)$ qui sont localement constantes, à support compact modulo $Z(F)$ identifié à $F^\times$, et vérifient $f(zg) = \omega^{-1}(z)f(g)$ pour tout $z \in N_{E/F}(E^\times)$ et tout $g \in G(F)$. On définit l'espace $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$ de la même manière.

Pour tout élément γ de $G(F)$, la mesure $d\bar{g}_\gamma$ sur $G_\gamma(F)\backslash G(F)$ définissant la distribution $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$ sur $G(F)$, définit de la même manière une forme linéaire sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$, que l'on note encore $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$. De même **I**.2.9, pour tout élément σ-fermé δ de $G(E)$, la mesure $d\bar{g}_\delta^\sigma$ sur $G_\delta^\sigma(F)\backslash G(E)$ définissant la distribution $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$ sur $G(E)$, définit de la même manière une forme linéaire sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$, que l'on note encore $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$. Les notions de concordance introduites en 1.4 restent valables pour des fonctions $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$.

Pour produire des fonctions $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$ qui concordent, il suffit de produire des fonctions $\tilde{\phi} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ et $\tilde{f} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ qui concordent. En effet, choisissons une mesure de Haar dz sur $N_{E/F}(E^\times)$, et notons dz_E la mesure de Haar sur $E^\times$ telle que

$$\frac{\mathrm{vol}(U_E, dz_E)}{\mathrm{vol}(N_{E/F}(U_E), dz)}) = 1,$$

où U_E désigne le groupe des unités de $E^\times$. Notons $f \mapsto f_\omega$ l'application linéaire de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$ définie par

$$f_\omega(g) = \int_{N_{E/F}(E^\times)} \omega(z)f(zg)dz, \quad g \in G(F);$$

elle est surjective. De la même manière, la mesure dz_E définit une application linéaire surjective $\phi \mapsto \phi_\chi$ de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$. D'après le lemme de **I**.2.10, si $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ concordent en une paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E) \times G(F)$ telle que γ soit fermé, alors ϕ_χ et f_ω concordent en (δ,γ).

Si $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ est à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, alors ϕ_χ est encore à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, et si $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ est à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$, alors f_ω est encore à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$. Par conséquent les résultats rappelés en 2.5 restent vrais pour des fonctions $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$ à support dans $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$ à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$.

II.2.7. – Avant de traiter le cas des fonctions sphériques et des fonctions cuspidales de niveau 0, traduisons la notion de concordance en termes de représentations.

Si Π est une représentation lisse de $G(E)$, on note Π^σ la représentation $g \mapsto \Pi(g^\sigma)$ de $G(E)$, et l'on dit que Π est *σ-stable* si Π et Π^σ sont isomorphes. Si Π est une représentation lisse admissible σ-stable de $G(E)$, le choix d'un isomorphisme A de Π sur Π^σ, c'est-à-dire d'un automorphisme A de l'espace V de Π tel que $A\circ\Pi = \Pi(g^\sigma)\circ A$ pour tout $g \in G(E)$, définit une distribution Θ_Π^A sur $G(E)$: pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$, on pose

$$\Theta_\Pi^A(\phi) = \mathrm{trace}(\Pi(\phi)\circ A)$$

où $\Pi(\phi)$ désigne l'opérateur $\int_{G(E)} \phi(g)\Pi(g)dg_E$ sur l'espace de Π (puisque Π est admissible, il est de rang fini), noté aussi $\Pi(\phi dg_E)$. Supposons de plus qu'il existe un caractère χ de $E^\times$ tel que $\Pi(zg) = \chi(z)\Pi(g)$ pour tout $z \in E^\times$ et tout $g \in G(E)$. Alors χ est σ-stable, donc de la forme $\omega\circ N_{E/F}$ pour un (unique) caractère ω de $N_{E/F}(E^\times)$, et le choix d'une mesure de Haar $d\bar{g}_E$ sur le groupe quotient $E^\times\backslash G(E)$ définit comme ci-dessus une forme linéaire Θ_Π^A sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$: pour $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$, on pose $\Theta_\Pi^A(\phi) = \mathrm{trace}(\Pi(\phi)\circ A)$, $\Pi(\phi) = \Pi(\phi d\bar{g}_E)$. Si $d\bar{g}_E = \frac{dg_E}{dz_E}$ où dz_E est la mesure de Haar sur $Z(E)$ définissant l'application linéaire $\phi \mapsto \phi_\chi$, on a

$$\Theta_\Pi^A(\phi) = \Theta_\Pi^A(\phi_\chi), \quad \phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E)).$$

De même, à toute représentation lisse admissible π de $G(F)$ est associée une distribution Θ_π sur $G(F)$: pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$, on pose

$$\Theta_\pi(f) = \mathrm{trace}(\pi(f))$$

où $\pi(f) = \pi(fdg)$. Supposons de plus qu'il existe un caractère ω de $N_{E/F}(E^\times)$ tel que $\pi(zg) = \omega(z)\pi(g)$ pour tout $z \in N_{E/F}(E^\times)$ et tout $g \in G(F)$. Alors le choix d'une mesure de Haar $d\bar{g}$ sur le groupe quotient $N_{E/F}(E^\times)\backslash G(F)$ définit une forme linéaire Θ_π sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$: pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$, on pose $\Theta_\pi(f) = \mathrm{trace}(\pi(f))$, $\pi(f) = \pi(fd\bar{g})$. Si $d\bar{g} = \frac{dg}{dz}$ où dz est la mesure de Haar sur $N_{E/F}(E^\times)$ définissant l'application linéaire $f \mapsto f_\omega$, on a

$$\Theta_\pi(f) = \Theta_\pi(f_\omega), \quad f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F)).$$

DÉFINITION. – Soient π une représentation lisse irréductible de $G(F)$, Π une représentation lisse irréductible σ-stable de $G(E)$, et A un isomorphisme de Π sur Π^σ. On dit que Π est un *σ-relèvement*, ou simplement un *relèvement*, de π s'il existe une constante $c \neq 0$ tel que pour toute paire de fonctions concordantes (ϕ, f) de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E)) \times C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$, on ait

$$\Theta_\Pi^A(\phi) = c\Theta_\pi(f).$$

II.2.8. – Identifions $G(E)$ au groupe $G(E_1)^r$ via l'application

$$(\delta_1,\dots,\delta_r) \mapsto (\delta_1, \sigma\delta_2, \dots, \sigma^{r-1}\delta_r).$$

L'opération de σ sur $G(E_1)^r$ est donnée par $\delta^\sigma = (\delta_2,\dots,\delta_r,\delta_1^{\sigma_1})$ pour $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_r) \in G(E_1)^r$. Si Π est une représentation lisse irréductible de $G(E_1)^r$, alors Π s'écrit $\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_r$ pour des représentations lisses irréductibles Π_i de $G(E_1)$, et Π est σ-stable si et seulement si Π_1 est σ_1-stable et Π_i est isomorphe à Π_1 pour $i = 2, \ldots, r$.

Soit maintenant Π_1 une représentation lisse σ_1-stable de $G(E_1)$, et soit A_1 un isomorphisme de Π_1 sur $\Pi_1^{\sigma_1}$. Soit Π la représentation $\Pi_1^{\otimes r}$ de $G(E_1)^r$. Notons V_1 l'espace de Π_1, et $V = V_1^{\otimes r}$ celui de Π. L'automorphisme A de V donné par $A(v) = (A_1(v_r), v_1, \ldots, v_{r-1})$ pour tout vecteur v de la forme $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$, $v_i \in V$, est un isomorphisme de Π sur Π^σ. Notons $\phi \mapsto \phi^*$ l'application linéaire de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1)^r) = C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1))^{\otimes r}$ dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1))$ définie par $\phi = \phi_1 * \cdots * \phi_r$ pour toute fonction ϕ de la forme $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_r$, $\phi_i \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1))$, où le produit de convolution est celui défini par la mesure de Haar dg_{E_1} sur $G(E_1)$. Pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1)^r)$, on a

$$\Theta_\pi^A(\phi) = \Theta_{\Pi_1}^{A_1}(\phi^*).$$

Si de plus Π_1 est de longueur finie, on sait d'après [**60**] et **I**.5.1, prop. que la distribution $\Theta_{\pi_1}^{A_1}$ est localement constante sur $G(E_1)_{\sigma_1-\mathrm{r}}$ et localement intégrable sur $G(E_1)$: il existe une fonction localement constante sur $G(E_1)_{\sigma_1-\mathrm{r}}$, que l'on note encore $\Theta_{\pi_1}^{A_1}$, telle que pour toute fonction $\phi_1 \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E_1))$, on ait

$$\Theta_{\Pi_1}^{A_1}(\phi_1) = \int_{G(E_1)} \phi_1(g)\Theta_{\Pi_1}^{A_1}(g)dg_{E_1},$$

l'intégrale étant absolument convergence. Pour $\delta_1 \in G(E_1)$, posons $N_1(\delta_1) = \delta_1\delta_1^{\sigma_1}\cdots\delta_1^{\sigma_1^{d_1-1}}$ où (rappel) $d_1 = \frac{d}{r}$ est le degré de E_1 sur F. L'application $\delta_1 \mapsto N_1(\delta_1) \cap G(F)$ induit une application injective, disons $\mathbb{N}_1$, entre l'ensemble des σ_1-orbites dans $G(E_1)$ et l'ensemble des orbites dans $G(F)$, et d'après **I**.2.2, pour $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r) \in G(E_1)^r$, posant $N'^1(\delta) = \delta_1 \cdots \delta_r$, on a

$$\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathbb{N}_1(\mathcal{O}_{\sigma_1}(N'^1(\delta))).$$

En particulier, δ est σ-régulier si et seulement si $N'^1(\delta)$ est σ_1-régulier. Par conséquent (toujours en supposant Π_1 de longueur finie), la distribution Θ_Π^A est localement constante sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et localement intégrable sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$: la fonction Θ_Π^A sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ définie par

$$\Theta_\Pi^A(\delta) = \Theta_{\Pi_1}^{A_1}(N'^1(\delta))$$

est localement constante, et pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$, on a

$$\Theta_\Pi^A(\phi) = \int_{G(E)} \phi(g)\Theta_\Pi^A(g)dg_E,$$

l'intégrale étant absolument convergente. Notons que la distribution Θ_Π^A sur $G(E)$ dépend du choix de la mesure de Haar dg_E, mais la fonction Θ_Π^A sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ n'en dépend pas. Pour $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, on a

$$\Theta_\Pi^A(g^{-1}\delta g^\sigma) = \Theta_\Pi^A(\delta), \quad g \in G(E).$$

LEMME. – *Pour $i = 1, \dots, m$, soit une paire (Π_i, A_i) formée d'une représentation lisse irréductible σ-stable Π_i de $G(E)$ et d'un isomorphisme A_i de Π_i sur Π_i^σ. Si les représentations $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ sont deux à deux non isomorphes, alors les fonctions $\Theta_{\Pi_i}^{A_i}$ sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. – D'après ce qui précède, on peut supposer que $E = E_1$. On applique alors la démonstration du lemma 6.3 de [**1**, ch. 1]. □

REMARQUE. – Soit une paire d'éléments associés (δ, γ) de $G(E) \times G(F)$ telle que γ soit fermé. Posons $y = N'^1(\delta) \in G(E_1)$. Comme $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathbb{N}_1(\mathcal{O}_{\sigma_1}(y))$, y est σ_1-fermé. La mesure de Haar dg_δ^σ sur $G_\delta^\sigma(F) = G_y^{\sigma_1}(F)$ définit comme en 2.4 une distribution $\Lambda_{\sigma_1}^{G(E_1)}(\cdot, y)$ sur $G(E_1)$, et d'après **I**.2.4, pour toute fonction $\phi \in C_\mathrm{c}^\infty(G(E_1))^{\otimes r}$, on a

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = \Lambda_{\sigma_1}^{G(E_1)}(\phi^*, y).$$

En particulier, pour toute fonction $f \in C_\mathrm{c}^\infty(G(F))$, ϕ et f concordent en (δ, γ) si et seulement si ϕ^* et f concordent en (y, γ). On en déduit que si Π est une représentation lisse irréductible σ-stable de $G(E) = G(E_1)^r$ de la forme $\Pi_1^{\otimes r}$, et si π est une représentation lisse irréductible de $G(F)$, alors Π est un σ-relèvement de π si et seulement si Π_1 est un σ_1-relèvement de π.

Si π est une représentation lisse admissible de type fini de $G(F)$, on sait d'après [**59**] que la distribution Θ_π est donnée par une une fonction localement constante sur $G(F)_\mathrm{r}$ et localement intégrale sur $G(F)$, que l'on note encore Θ_π. Pour $\gamma \in G(F)_\mathrm{r}$, on a

$$\Theta_\pi(g^{-1}\gamma g) = \Theta_\pi(\gamma), \quad g \in G(F).$$

II.2.9. – On peut aussi caractériser les σ-relèvements par une identité"à la Shintani"entre fonctions caractères:

PROPOSITION. – *Soient π une représentation lisse irréductible de $G(F)$, Π une représentation lisse irréductible σ-stable de $G(E)$, et A un isomorphisme de Π sur Π^σ. Alors Π est un σ-relèvement de π si et seulement s'il existe une constante $c \neq 0$ — la même que celle de la définition de 2.7 — telle que pour toute paire d'élements associés (γ, δ) de $G(E) \times G(F)$ telle que γ soit régulier, on ait*

$$\Theta_\Pi^A(\delta) = c\Theta_\pi(\gamma).$$

Compte-tenu de 2.5, la démonstration de la proposition est une simple conséquence de la formule d'intégration de H. Weyl (voir 2.10 et 2.11). On en déduit la variante suivante de la définition de 2.7:

COROLLAIRE. – *Soient π, Π et A comme dans la proposition. Alors Π est un σ-relèvement de π si et seulement s'il existe une constante $c \neq 0$ telle que pour toute paire de fonctions concordantes (ϕ, f) de $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}) \times C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)_{\mathrm{r}})$, on ait*

$$\Theta_{\Pi}^{A}(\phi) = c\Theta_{\pi}(f).$$

REMARQUES. – (1) D'après la remarque de 2.8, si la proposition est vraie dans le cas où E est un corps (i.e. le cas $E = E_1$), elle est vraie en général.

(2) D'après le lemme de 2.8, si Π est un σ-relèvement de π, alors à isomorphisme près, ce relèvement est unique, et sa classe d'isomorphisme ne dépend que de celle de π. D'autre part, toujours si Π est un relèvement de π, la constante c dépend bien sûr du choix de A, et peut a priori dépendre aussi de la classe d'isomorphisme de π; on la note donc $c(\pi, A)$.

(3) Si (δ, γ) est une paire d'éléments associés de $G(E) \times G(F)$, pour tout $z \in Z(E)$, les éléments $z\delta$ et $N(z)\delta$ sont associés, et γ est régulier si et seulement si $N(z)\gamma$ l'est. On en déduit que si Π est un σ-relèvement de π, notant ω_{Π} le caractère central de Π et ω_{π} celui de π, on a $\omega_{\Pi} = \omega_{\pi} \circ N_{E/F}$.

(4) Si Π est un σ-relèvement de π, pour tout caractère ω de $F^{\times}$, notant ω_E le caractère $\omega \circ N_{E/F}$ de $E^{\times}$, $\Pi \otimes (\omega_E \circ \det)$ est un σ-relèvement de $\pi \otimes \omega$.

(5) Si (Π, V) est une représentation lisse irréductible σ-stable de $G(E)$, sa contragrédiente $(\check{\Pi}, \check{V})$ est elle aussi σ-stable, et si A est un isomorphisme de de Π sur Π^{σ}, l'automorphisme $\check{A}$ de $\check{V}$ donné par $\langle v, \check{A}\check{v}\rangle = \langle A^{-1}v, \check{v}\rangle$ pour tout $v \in V$ et tout $\check{v} \in \check{V}$, est un isomorphisme de $\check{\Pi}$ sur $\check{\Pi}^{\sigma}$. Comme $\check{\Pi}$ est isomorphe à la représentation $g \mapsto \Pi({}^{\mathrm{t}}g^{-1})$ de $G(E)$, si Π est un σ-relèvement de π, alors $\check{\Pi}$ est un σ-relèvement de $\check{\pi}$, et $c(\check{\pi}, \check{A}) = c(\pi, A)$.

II.2.10. – Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G: pour tout anneau commutatif A, on a $\mathfrak{g}(A) = \mathrm{M}(n, A)$. Pour $\gamma \in G(F)$, soit $D_G(\gamma)$ l'élément de F défini par

$$\det{}_F(t - \mathrm{Ad}_{G(F)}(\gamma) + 1; \mathfrak{g}(F)) = D_G(\gamma)t^n + \cdots (\text{termes de plus haut degré}),$$

où t est une indéterminée et $\mathrm{Ad}_{G(F)}(\gamma)$ désigne l'automorphisme $X \mapsto \gamma X\gamma^{-1}$ de $\mathfrak{g}(F)$. On sait que $D_G(\gamma)$ est non nul si et seulement si γ est semisimple régulier, c'est-à-dire si le centralisateur G_{γ} est un tore. Soit T un tore maximal de G défini sur F. Notons $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T. Pour tout élément γ de $T(F)$, on a

$$D_G(\gamma) = \det{}_F(1 - \mathrm{Ad}_{G(F)}(\gamma)^{-1}; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}(F)).$$

D'autre part, d'après la démonstration du lemme 5 de **[18]**, pour tout élément δ de $T(E)$, posant $\gamma = N(\delta) \in T(F)$, on a

$$\det{}_F(\sigma - \mathrm{Ad}_{G(E)}(\delta)^{-1}; \mathfrak{g}(E)/\mathfrak{t}(E)) = \det{}_F(1 - \mathrm{Ad}_{G(F)}(\gamma)^{-1}; \mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}(F)).$$

REMARQUE. – Pour $\delta \in G(E)$, soit $D_{G,\sigma}(\delta)$ l'élément de F défini de manière analogue par

$$\det_F(t - \mathrm{Ad}_{G(E)}(\delta) \circ \sigma + 1; \mathfrak{g}(E)) = D_{G,\sigma}(\delta) t^{n'} + \cdots \text{(termes de plus haut degré)},$$

où n' est le plus grand entier ≥ 1 tel que pour tout $\delta' \in G(E)$, le sous-espace caractéristique du F-automorphisme $X \mapsto \delta' X^\sigma \delta'^{-1} - X$ de $\mathfrak{g}(E)$ associé à la valeur propre 1, disons $\mathfrak{g}_{\delta'}^{\sigma,1}(F)$, soit de dimension $\geq n'$. Ainsi $D_{G,\sigma}(\delta)$ est non nul si et seulement si $\mathfrak{g}_\delta^{\sigma,1}(F)$ est de dimension n'. D'après **[62]**, $D_{G,\sigma}(\delta)$ est non nul si et seulement si l'automorphisme algébrique $\mathrm{Int}(\delta) \circ \sigma$ de G est *quasi-semisimple* — c'est-à-dire s'il fixe une paire de Borel de G — et le sous-groupe fermé G_δ^σ de $\mathrm{Res}_{E/F}(G \times_{\mathbb{Z}} E)$ est un tore. On en déduit que $D_{G,\sigma}(\delta)$ est non nul si et seulement si δ est σ-semisimple σ-régulier, c'est-à-dire si l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$ est semisimple régulière. Notons que $n' \geq n$ avec égalité si F est de caractéristique nulle. Si F est de caractéristique $p > 0$, l'inégalité $n' \geq n$ peut être stricte: par exemple si l'ordre d de σ est une puissance de p, l'automorphisme σ de $\mathrm{Res}_{E/F}(G \times_{\mathbb{Z}} E)$ est unipotent et $n' = dn$ (cf. loc. cit).

Soit T un tore maximal de G défini sur F. Notant $T(E)^{\sigma-1}$ le sous-groupe de $T(E)$ formé des $\delta^\sigma \delta^{-1}$ pour $\delta \in T(E)$, on a la suite exacte longue de groupes topologiques

$$1 \to T(E)^{\sigma-1} \to T(E) \xrightarrow{N} T(F).$$

En effet, le groupe $T(E)^{\sigma-1}$ est contenu dans le noyau de la norme de $T(E)$ à $T(F)$, et comme $\mathrm{H}^1(\Sigma, T(E)) = 1$ (d'après le théorème de Hilbert 90), il coïncide avec ce noyau. Puisque le F-tore T est quasi-trivial (i.e. est F-isomorphe à un produit de tores de la forme $\mathrm{Res}_{L_j/F}(\mathbb{G}_{m/L_j})$ pour des extensions séparables L_j de F), l'application trace de $\mathfrak{t}(E)$ dans $\mathfrak{t}(F)$ est surjective, et l'application norme de $T(E)$ dans $T(F)$ est submersive au point 1, donc sur $T(E)$ tout entier puisque c'est un morphisme de groupes. En particulier, la norme de $T(E)$ à $T(F)$ est un morphisme ouvert. Par suite, toute mesure de Haar $d\gamma_T$ sur $T(F)$ détermine via N une mesure de Haar sur le groupe quotient $T(E)^{\sigma-1}\backslash T(E)$. On note $N_G(T)$ le normalisateur de T dans G (c'est un sous-groupe algébrique fermé de G), et W_T le groupe algébrique quotient $N_G(T)/T$. Puisque T est défini sur F, $N_G(T)$ et T le sont aussi, et comme $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), T(\overline{F})) = 1$, on a la suite exacte courte de groupes:

$$1 \to T(F) \to N_G(T)(F) \to W_T(F) \to 1.$$

Fixons un ensemble $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{G,F}$ de tores maximaux de G définis sur F deux à deux non conjugués dans $G(F)$, tel que tout tore maximal de G défini sur F soit conjugué dans $G(F)$ à un (unique) élément de $\mathscr{T}$. Pour chaque $T \in \mathscr{T}$, choisissons une mesure de Haar $d\gamma_T$ sur $T(F)$, et notons $d\delta_{T,\sigma}$ la mesure de Haar sur $T(E)^{\sigma-1}\backslash T(E)$ déterminée par $d\gamma_T$. Pour $\gamma \in G(F)'$, il existe un élément $g \in G(F)$ tel que le tore

$T = G_{g^{-1}\gamma g}$ appartienne à $\mathcal{T}$, et l'on suppose que la mesure de Haar dg_γ sur $G_\gamma(F)$ choisie en 2.4 est celle déduite de $d\gamma_T$ via l'isomorphisme de groupes topologiques $G_\gamma(F) \to T(F)$, $\gamma' \mapsto g^{-1}\gamma' g$ (cette mesure dg_γ est bien définie, i.e. elle ne dépend pas du choix de g).

Si Θ est une fonction localement intégrable sur $G(E)$ telle que $\Theta(g^{-1}\delta g^\sigma) = \Theta(\delta)$ pour presque tout $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et tout $g \in G(E)$, on a la formule d'intégration de Weyl, pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$:

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\int_{G(E)} \phi(g)\Theta(g)dg_E = \\ &\sum_{T\in\mathcal{T}} |W_T(F)|^{-1} \int_{T(E)^{\sigma-1}\backslash T(E)} |D_G(N(\delta))|_F \Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta)\Theta(\delta)d\delta_{T,\sigma}.\end{aligned}$$

De même, si θ une fonction localement intégrable sur $G(F)$ telle que $\theta(g^{-1}\gamma g) = \theta(\gamma)$ pour presque tout $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}}$ et tout $g \in G(F)$, on a la formule d'intégration de Weyl, pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$:

$$(2)\qquad \int_{G(F)} f(g)\theta(g)dg = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W_T(F)|^{-1} \int_{T(F)} |D_G(\gamma)|_F \Lambda^{G(F)}(f,\gamma)\theta(\gamma)d\gamma_T.$$

Notons que (2) découle du lemma 42 de [**28**, ch. VII], dont la preuve est la même que dans le cas réel [**27**, lemma 91], et que la version tordue (1) s'obtient de la même manière.

II.2.11. – Démontrons la proposition de 2.9. Supposons tout d'abord qu'il existe une constante $c \neq 0$ telle que pour toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit régulier, on ait $\Theta_\pi^A(\delta) = c\Theta_\pi(\gamma)$. Soit $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ deux fonctions concordantes. En appliquant les formules (1) et (2) de 2.10 aux fonctions caractères $\Theta = \Theta_\Pi^A$ et $\theta = \Theta_\pi$, on obtient l'égalité

$$\int_{G(E)} \phi(g)\Theta_\Pi^A(g)dg_E = c\int_{G(F)} f(g)\Theta_\pi(g)dg.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une constante c telle que pour toute paire de fonctions concordantes (ϕ,f) de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))\times C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$, on ait $\Theta_\Pi^A(\phi) = c\Theta_\pi(f)$. Soit (δ,γ) une paire d'éléments associés de $G(E)\times G(F)$ telle que γ soit régulier. Comme les fonctions caractères Θ_Π^A et Θ_π sont localement constantes sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et $G(F)_{\mathrm{r}}$, on peut supposer que γ est semisimple régulier. On peut aussi supposer que γ appartient à $T(F)$ pour un tore $T\in\mathcal{T}$, et que $N(\delta) = \gamma$. On a donc $G_\delta^\sigma(F) = G_\gamma(F) = T(F)$. Soit ω un voisinage ouvert compact de δ dans $T(E)\cap G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ tel que pour tout $\delta'\in\omega$, on ait $\Theta_\Pi^A(\delta') = \Theta_\Pi^A(\delta)$, $|D_{G(F)}(N(\delta'))|_F = |D_{G(F)}(\gamma)|_F$ et $\Theta_\pi(N(\delta')) = \Theta_\pi(\gamma)$. Notons Ω l'ensemble des $g^{-1}\delta' g^\sigma$ pour $\delta'\in\omega$ et $g\in G(E)$; c'est une partie de $G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ ouverte et fermée dans $G(E)$. Quitte à remplacer ω par $\Omega\cap T(E)$, on peut supposer que $\Omega\cap T(E) = \omega$. D'après le lemme 2 de **I**.2.7, il existe une fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$, à support contenu dans Ω, telle que $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta') = 1$ pour tout $\delta' \in \Omega$. D'après la formule (1) de 2.10, posant $v_\omega = \mathrm{vol}(N(\omega), d\gamma_T)$ où $N(\omega)$ désigne l'image de ω par l'application norme de $T(E)$ à $T(F)$, on a

$$\Theta_\Pi^A(\phi) = v_\omega |W_T(F)|^{-1} |D_{G(F)}(\gamma)|_F \Theta_\Pi^A(\delta).$$

D'après 2.5, il existe une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F))$ à support dans $G(F)_{\mathrm{r}}$ telle que ϕ et f concordent, et d'après la formule (2) de 2.10, on a

$$\Theta_\pi(f) = v_\omega |W_T(F)|^{-1} |D_{G(F)}(\gamma)|_F \Theta_\pi(\gamma)$$

D'où l'égalité cherchée: $\Theta_\Pi^A(\delta) = c\Theta_\pi(\gamma)$.

II.2.12. – Revenons à la construction de fonctions concordantes. Le deuxième cas particulier est celui des fonctions sphériques, autrement dit le lemme fondamental. On suppose que l'algèbre cyclique E/F est *non ramifiée*, c'est-à-dire que l'extension de corps E_1/F est non ramifiée. On note K_E le sous-groupe compact maximal $G(\mathfrak{o}_E)$ de $G(E)$, et K_F le sous-groupe compact maximal $G(\mathfrak{o}_F)$ de $G(F)$. On suppose que les mesures de Haar dg_E sur $G(E)$ et dg sur $G(F)$ sont celles qui donnent le volume 1 à K_E et K_F (pour dg_E, cela revient à supposer que dg_{E_1} est la mesure de Haar sur $G(E_1)$ qui donne le volume 1 à $G(\mathfrak{o}_{E_1})$). On note $\mathscr{H}_E = \mathscr{H}(G(E), K_E)$ l'algèbre de Hecke formée des fonctions sur $G(E)$ qui sont bi-invariantes par K_E et à support compact, et l'on définit l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_F = \mathscr{H}(G(F), K_F)$ de la même manière. Via les isomorphismes de Satake pour F et E_1 est défini un homomorphisme d'algèbres (cf. **I**.3.1 et 3.2)

$$b : \mathscr{H}_E \to \mathscr{H}_F.$$

Notons $\phi_e \in \mathscr{H}_e$ et $f_e \in \mathscr{H}_F$ les fonctions caractéristiques de K_E et K_F. Puisque ϕ_e est l'élément unité de $\mathscr{H}_E$ et que f_e est celui de $\mathscr{H}_F$, on a

$$b(\phi_e) = f_e.$$

Le lemme fondamental s'énonce comme suit: pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$, ϕ et $b(\phi)$ concordent. Pour $\phi = \phi_e$, il est dû à Kottwitz [**47**, lemma 8.8], [**57**, 4.7.1 et 4.7.2]. Pour ϕ quelconque et F de caractéristique nulle, il a été démontré par Clozel [**19**] et Labesse [**50**], et nous avons vérifié dans **I** que la méthode de Labesse fonctionne en toute caractéristique. Notons que Ngô Bao Châu [**64**] a aussi donné une preuve géométrique de ce lemme fondamental en caractéristique > 0.

Pour utiliser la formule des traces, on aura besoin de la variante du lemme fondamental où les fonctions se transforment selon un caractère non ramifié sous l'action d'un sous-groupe du centre. Soit donc ω un caractère de $N_{E/F}(E^\times)$ trivial sur $N_{E/F}(U_E) = U_F$, et soit χ le caractère $\omega \circ N_{E/F}$ de $E^\times$. On suppose que les mesures de Haar dz_E sur $E^\times$ et dz sur $N_{E/F}(E^\times)$ choisies en 2.6, sont celles qui donnent le volume 1 aux groupes U_E et U_F. On note $\mathscr{H}_{E,\chi} = \mathscr{H}(G(E), K_E, \chi)$

l'agèbre de Hecke formée des fonctions sur $G(E)$ qui sont bi-invariantes par K_E, à support compact modulo $E^\times = Z(E)$, et se transforment suivant χ^{-1} sous l'action de $E^\times$ par translations. De même, on note $\mathscr{H}_{E,\omega} = \mathscr{H}(G(F), K_F, \omega)$ l'agèbre de Hecke formée des fonctions sur $G(E)$ qui sont bi-invariantes par K_F, à support compact modulo $F^\times = Z(F)$, et se transforment suivant ω^{-1} sous l'action de $N_{E/F}(E^\times)$ par translations. L'application $\phi \mapsto \phi_\chi$ de $\mathscr{H}_E$ dans $\mathscr{H}_{E,\chi}$ est surjective, et pour $\phi \in \mathscr{H}_E$, l'élément $b(\phi)_\omega$ ne dépend pas vraiment de ϕ, mais seulement de ϕ_χ; on obtient ainsi une application $\mathscr{H}_{E,\chi} \to \mathscr{H}_{F,\omega}$, encore notée b. D'après 2.6, pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_{E,\chi}$, les fonctions ϕ et $b(\phi)$ concordent. Soit $\phi_{\chi,e}$ la fonction sur $G(E)$ à support dans $E^\times K_E$, telle que $\phi_{\chi,e}(zk) = \chi(z)^{-1}$ pour tout $z \in E^\times$ et tout $k \in K_E$, et soit $f_{\omega,e}$ la fonction sur $G(F)$ à support dans $N_{E/F}(E^\times)K_F$ telle que $f_{\omega,e}(zk) = \omega(z)^{-1}$ pour tout $z \in N_{E/F}(E^\times)$ et tout $k \in K_F$. Comme $\phi_{\chi,e} = (\phi_e)_\chi$ et $f_{\omega,e} = (f_e)_\omega$, les fonctions ϕ_{χ_e} et $f_{\omega,e}$ concordent.

Remarque. – Si E est un corps, d'après la démonstration du lemma IV.5.1 de [**51**], pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_E$ et tout caractère ψ de $G(E)$ trivial sur $N(G(E))$, le support de $b(\phi)$ est contenu dans le noyau de ψ. D'après **I**.3.2, cela reste vrai en général, c'est-à-dire pour une F-algèbre (non ramifiée) E quelconque; cela est aussi vrai en général pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_{E,\chi}$.

II.2.13. – Traitons pour finir le cas des fonctions cuspidales de niveau 0. On fixe une extension non ramifiée F' de F de degré n, et l'on note Γ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F'/F)$. On note κ_F le corps résiduel de F et $\kappa_{F'}$ celui de F'. On fixe une $\mathfrak{o}_F$-base de $\mathfrak{o}_{F'}$, d'où des plongements $F'^\times \subset G(F)$ et $\kappa_{F'}^\times \subset G(\kappa_F)$. Un élément de $\kappa_{F'}^\times$ est dit Γ-régulier si son stabilisateur dans Γ est trivial, et la même définition s'applique aux caractères de $\kappa_{F'}^\times$. À chaque Γ-orbite ϑ de caractères Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$ est attachée une représentation irréductible cuspidale (au sens de la théorie des groupes finis) ρ_ϑ de $G(\kappa_F)$: elle est déterminée, à isomorphisme près par l'égalité (cf. [**34**, 3.4])

$$\mathrm{tr}(\rho_\vartheta(x)) = (-1)^{n-1} \sum_{\theta \in \vartheta} \theta(x)$$

pour tout élément Γ-régulier x de $\kappa_{F'}^\times$.

Soit ϑ une Γ-orbite de caractères Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$. La représentation irréductible cuspidale ρ_ϑ de $G(\kappa_F)$ donne par inflation une représentation de K_F, que l'on peut ensuite étendre à $F^\times K_F$ en imposant qu'elle prenne une valeur $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ en une uniformisante fixée ϖ_F de F. On obtient ainsi une représentation lisse irréductible $\rho_{\vartheta,\alpha}$ de $F^\times K_F$, dont on peut prendre l'induite compacte (lisse) à $G(F)$. Cette dernière, notée $\pi_{\vartheta,\alpha}$, est une représentation lisse irréductible cuspidale de niveau 0 de $G(F)$. Son caractère central est donné par $\varpi_F^k u \mapsto \alpha^k \vartheta(u)$, $k \in \mathbb{Z}$, $u \in U_F$, où l'on a posé $\vartheta(u) = \theta(u + \mathfrak{p}_F)$ pour un (i.e. pour tout) $\theta \in \vartheta$. Toute représentation lisse irréductible cuspidale de niveau 0 de $G(F)$ est isomorphe à une représentation de la forme $\pi_{\vartheta,\alpha}$, et deux représentations de la forme $\pi_{\vartheta_1,\alpha_1}$ et $\pi_{\vartheta_2,\alpha_2}$ sont isomorphes si et seulement si $\vartheta_2 = \vartheta_1$ et $\alpha_2 = \alpha_1$.

II.2.14. – Soit ϑ une Γ-orbite de caractères Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$. La fonction $g \mapsto \mathrm{tr}(\rho_{\vartheta,\alpha}(g))$, étendue par 0 hors de $F^\times K_F$, est dans l'espace des coefficients de la représentation lisse irréductible cuspidale $\pi_{\vartheta,\alpha}$ de $G(F)$; on la note $\xi_{\vartheta,\alpha}$. Soit $d(\pi)$ le degré formel de π défini par la mesure de Haar $d\bar{g}$ sur $F^\times\backslash G(F)$ donnant le volume 1 au groupe $F^\times\backslash F^\times K_F$. Pour $x \in F^\times K_F$, la définition du degré formel donne

$$d(\pi)\int_{F^\times\backslash G(F)} \xi_{\vartheta,\alpha}(gx^{-1})\xi_{\vartheta,\alpha}(g^{-1})d\bar{g} = \mathrm{tr}(\rho_{\vartheta,\alpha}(x^{-1})).$$

D'autre part, comme la représentation $\rho_{\vartheta,\alpha}$ est irréductible, on a

$$\int_{F^\times\backslash G(F)} \xi_{\vartheta,\alpha}(g)\xi_{\vartheta,\alpha}(g^{-1})d\bar{g} = \int_{F^\times\backslash F^\times K_F} \mathrm{tr}(\rho_{\vartheta,\alpha}(g))\mathrm{tr}(\rho_{\vartheta,\alpha}(g^{-1}))d\bar{g} = 1.$$

On en déduit que

$$d(\pi) = \mathrm{tr}(\rho_{\vartheta,\alpha}(1)) = \dim \rho_{\vartheta,\alpha}.$$

Choisissons un caractère η de $F^\times$, et notons $\Omega(\eta)$ l'ensemble des Γ-orbites de caractères Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$ prolongeant η. Fixons aussi une famille $\underline{\lambda} = (\lambda_\vartheta)_{\vartheta\in\Omega(\eta)}$ de scalaires non tous nuls telle que l'application

$$x \mapsto \sum_{\vartheta\in\Omega(\eta)} \lambda_\vartheta \sum_{\theta\in\vartheta} \theta(x)$$

s'annule en dehors des éléments Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$ et sur les éléments Γ-réguliers $x \in \kappa_{F'}^\times$ tels que x soit conjugué sous Γ à ζx pour un $\zeta \in \kappa_F^\times \smallsetminus \{1\}$. D'après [**40**, 3.11], pour q assez grand, une telle famille existe, et si η est un caractère fidèle de $\kappa_F^\times$, la condition d'annulation sur les éléments Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$ est automatiquement vérifiée. Plus précisément, si $n > 2$ ou $q > 2$, on peut choisir un caractère fidèle η de $\kappa_F^\times$ et deux caractères Γ-réguliers θ_1 et θ_2 de $\kappa_{F'}^\times$ prolongeant η, compatibles sur les éléments non Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$, et engendrant deux Γ-orbites distinctes ϑ_1 et ϑ_2 [**40**, lemme 3.12]; posant $\lambda_{\vartheta_1} = 1$, $\lambda_{\vartheta_2} = -1$, et $\lambda_\vartheta = 0$ pour tout $\vartheta \in \Omega(\eta) \smallsetminus \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$, la famille $(\lambda_\vartheta)_{\vartheta\in\Omega(\eta)}$ convient. Fixons aussi un nombre complexe non nul α. On note $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$ la fonction sur $G(F)$ à support dans $F^\times K_F$, dont la valeur en $g \in F^\times K_F$ est

$$(-1)^{n-1} \sum_{\vartheta\in\Omega(\eta)} \lambda_\vartheta \mathrm{tr}(\rho_{\vartheta,\alpha}(g^{-1})).$$

Par construction, cette fonction est invariante par conjugaison dans $F^\times K_F$, et s'annule en dehors des éléments $\varpi_F^k\gamma_0$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma_0 \in K_H$, tels que γ_0 soit K_F-conjugué à un élément de $U_{F'}$ dont l'image dans $\kappa_{F'}^\times$ est Γ-régulière. Pour toute représentation lisse irréductible générique π' de $G(F)$ de caractère central $\omega_{\pi'}$ donné par $\omega_{\pi'}(\varpi_F^k u) =$

$\alpha^k\eta(u)$, $k \in \mathbb{Z}$, $u \in U_F$, on note $\pi'(\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha})$ l'opérateur $\int_{F^\times\backslash G(F)} \mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}(g)\pi'(g)d\bar{g}$ sur l'espace de π'. Si cet opérateur est non nul, alors π' est isomorphe à $\pi_{\vartheta,\alpha}$ pour une certaine orbite $\vartheta \in \Omega(\eta)$, et d'après ce qui précède, on a

$$\mathrm{tr}(\pi'(\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha})) = (-1)^{n-1}\lambda_\vartheta.$$

II.2.15. — On suppose dans ce numéro que l'extension cyclique E/F est *scindée*, c'est-à-dire que $E_1 = F$. Alors σ opère sur $G(E) = G(F)^d$ par permutation cyclique: pour $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in G(E)$, on a $\delta^\sigma = (\delta_2, \dots, \delta_d, \delta_1)$. On pose $E' = F'^d$ et $\kappa_{E'} = (\kappa_{F'})^d$. La norme $N : G(E) \to G(E)$ est donnée par

$$N(\delta) = (\delta_1 \cdots \delta_d, \delta_2 \cdots \delta_d\delta_1, \dots, \delta_d\delta_1 \cdots \delta_{d-1}), \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in G(E).$$

Par suite, pour $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in G(E)$, posant $y_i = \delta_1 \cdots \delta_i$ pour $i = 1, \dots, d$, $N^1(\delta) = y_d$ et $x = (1, y_1, \dots, y_{d-1})$, on a

$$N(\delta) = x^{-1}(N^1(\delta), \dots, N^1(\delta))x,$$

d'où

$$\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) = \mathcal{O}(N^1(\delta)).$$

L'application $N^1 : G(E) \to G(F)$ est surjective, elle envoie $E'^\times$ sur $F'^\times$, et l'application surjective $\overline{N}^1 : G(\kappa_E) \to G(\kappa_F)$ déduite de N^1 envoie $\kappa_{E'}^\times$ sur $\kappa_{F'}^\times$. Pour tout caractère θ de $\kappa_{F'}^\times$, on note θ_E le caractère σ-stable de $\kappa_{E'}^\times$ donné par $\theta_E = \theta \circ \overline{N}_1$, i.e. par $\theta_E = \theta^{\otimes d}$. Si de plus θ est Γ-régulier, alors θ_E l'est aussi pour l'action de Γ sur $\kappa_{E'}^\times$ donnée par

$$x^\tau = (x_1^\tau, \dots, x_d^\tau), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \kappa_{E'}^\times, \tau \in \Gamma.$$

Notons que l'application $\theta \mapsto \theta_E$ induit une application bijective, disons $\vartheta \mapsto \vartheta_E$, entre l'ensemble des Γ-orbites de caractères Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$ et l'ensemble des Γ-orbites de caractères σ-stables Γ-réguliers de $\kappa_{E'}^\times$.

Soit ϑ une Γ-orbite de caractères Γ-réguliers de $\kappa_{F'}^\times$, et soit $\alpha \in \mathbb{C}^\times$. On note $\Pi_{\vartheta,\alpha}$ la représentation lisse irréductible cuspidale de niveau 0 de $G(E)$ définie, à isomorphisme près (puisque $\pi_{\vartheta,\alpha}$ n'est définie qu'à isomorphisme près), par

$$\Pi_{\vartheta,\alpha} = (\pi_{\vartheta,\alpha})^{\otimes d}.$$

Elle a pour espace $V^{\otimes d}$ où V est l'espace de $\pi_{\vartheta,\alpha}$, et est σ-stable: notant A le $\mathbb{C}$-automorphisme de $V^{\otimes d}$ donné par $A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_d \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{d-1}$, on a

$$\Pi_{\vartheta,\alpha}(\delta^\sigma) = A^{-1} \circ \Pi_{\vartheta,\alpha}(\delta) \circ A, \quad \delta \in G(E).$$

D'après 2.8, si $dg_E = (dg)^d$, on a

$$\Theta^A_{\Pi_{\vartheta,\alpha}}(\phi) = \Theta_\pi(\phi^*), \quad \phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(E)) = C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F))^{\otimes d}$$

et

$$\Theta^A_{\Pi_{\vartheta,\alpha}}(\delta) = \Theta_{\pi_{\vartheta,\alpha}}(N^1(\delta)), \quad \delta \in G(E) = G(F)^d,\ N^1(\delta) \in G(F)_{\mathrm{r}}.$$

Ainsi, $\Pi_{\vartheta,\alpha}$ est un σ-relèvement de $\pi_{\vartheta,\alpha}$, et si $dg_E = (dg)^d$, on a $c(\pi_{\vartheta,\alpha}, A) = 1$. Toute représentation lisse irréductible cuspidale σ-stable de niveau 0 de $G(E)$ est isomorphe à une représentation de la forme $\Pi_{\vartheta,\alpha}$, et deux représentations de la forme $\Pi_{\vartheta_1,\alpha_1}$ et $\Pi_{\vartheta_2,\alpha_2}$ sont isomorphes si et seulement si $\vartheta_2 = \vartheta_1$ et $\alpha_2 = \alpha_1$.

II.2.16. – Continuons avec les hypothèses et les notations de 2.14 et 2.15. Notons $d\bar{g}_E$ la mesure de Haar sur le groupe $E^\times\backslash G(E) = (F^\times\backslash G(F))^d$ donnant le volume 1 à $E^\times\backslash E^\times K_E$; on a $d\bar{g}_E = (d\bar{g})^d$.

Fixons une famille $\underline{\Lambda} = (\Lambda_\vartheta)_{\vartheta\in\Omega(\eta)}$ de d-uplets $\Lambda_\vartheta = (\Lambda_{\vartheta,1}, \dots, \Lambda_{\vartheta,d}) \in \mathbb{C}^d$ vérifiant

$$\prod_{i=1}^d \Lambda_{\vartheta,i} = (\dim \rho_{\vartheta,\alpha})^{d-1}\lambda_\vartheta, \quad \vartheta \in \Omega(\eta),$$

où $\underline{\lambda} = (\lambda_\vartheta)_{\vartheta\in\Omega(\eta)}$ est la famille de scalaires non tous nuls fixée en 2.14. Pour $i = 1, \dots, d$, on pose $\underline{\Lambda}_i = (\Lambda_{\vartheta,i})_{\vartheta\in\Omega(\eta)}$, et l'on note $\mathrm{F}'_{\underline{\Lambda}_i,\alpha}$ sur $G(F)$ la fonction sur $G(F)$ à support dans $F^\times K_F$, dont la valeur en $g \in F^\times K_F$ est

$$\sum_{\vartheta\in\Omega(\eta)} \Lambda_{\vartheta,i}\mathrm{tr}(\rho_{\vartheta,\alpha}(g^{-1})).$$

On note $\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}$ la fonction sur $G(E) = G(F)^d$ à support dans $E^\times K_E = (F^\times K_F)^d$ définie par

$$\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha} = (-1)^{n-1}\mathrm{F}'_{\underline{\Lambda}_1,\alpha} \otimes \cdots \otimes \mathrm{F}'_{\underline{\Lambda}_d,\alpha}.$$

LEMME. – *Les fonctions $\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}$ et $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$ concordent fortement.*

Démonstration. – Si ϑ est une Γ-orbite de caractères Γ-réguliers de $\kappa^\times_{F'}$, notant $\tilde{\xi}_{\vartheta,\alpha}$ la fonction $g \mapsto \xi_{\vartheta,\alpha}(g^{-1})$ sur $G(F)$ et $(\tilde{\xi}_{\vartheta,\alpha})^*$ le produit de convolution $\tilde{\xi}_{\vartheta,\alpha} * \cdots * \tilde{\xi}_{\vartheta,\alpha}$ (d fois) défini par $d\bar{g}$, on a (cf. 2.14)

$$(\tilde{\xi}_{\vartheta,\alpha})^* = \frac{1}{(\dim \rho_{\vartheta,\alpha})^{d-1}}\tilde{\xi}_{\vartheta,\alpha}.$$

La fonction $(\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha})^* = (-1)^{n-1}\mathrm{F}'_{\underline{\Lambda}_1,\alpha} * \cdots * \mathrm{F}'_{\underline{\Lambda}_d,\alpha}$ est donc égale à $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$, d'où le lemme d'après la remarque de 2.8. □

Pour toute représentation lisse irréductible $\Pi' = \Pi'_1 \otimes \cdots \otimes \Pi'_d$ de $G(E)$ de caractère central $\omega_{\Pi'} = \omega_{\Pi'_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{\Pi'_d}$ donné par $\omega_{\Pi'_i}(\varpi_F^k u) = \alpha^k\eta(u)$, $k \in \mathbb{Z}$, $u \in U_F$, $i = 1, \dots, d$, on note $\Pi'(\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha})$ l'opérateur $\int_{E^\times\backslash G(E)} \Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}(g)\Pi'(g)d\bar{g}_E$ sur l'espace de Π'. Soient Π' une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$, A' un isomorphisme de Π' sur Π'^σ, et π' une représentation lisse irréductible (générique) de $G(F)$ telle que Π' soit isomorphe à $\pi'^{\otimes d}$. Si l'opérateur $\Pi'(\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}) \circ A'$ est non nul, puisque Π' est un σ-relèvement de π' et que les fonctions $\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}$ et $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$ concordent,

π' est isomorphe à $\pi_{\vartheta,\alpha}$ pour une certaine orbite $\vartheta \in \Omega(\eta)$; de plus, notant V' l'espace de π' et A l'isomorphisme de $\pi'^{\otimes d}$ sur $(\pi'^{\otimes d})^\sigma$ donné par $A(v_1, \ldots, v_d) = (v_d, v_2, \ldots, v_{d-1})$, $v_i \in V'$, on a

$$\mathrm{tr}(\pi'^{\otimes d}(\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}) \circ A) = \mathrm{tr}(\pi'(\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha})) = (-1)^{n-1}\lambda_\vartheta.$$

II.3. Classification de Bernstein-Zelevinski (rappels)

II.3.1. – Pour tout entier $k \geq 1$, on note G_k le schéma en groupes qui à tout anneau commutatif A associe le groupe $\mathrm{GL}(k, A)$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ une suite d'entiers ≥ 1. On pose $l(\alpha) = m$ et $n(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i$. On note G_α le schéma en groupes $G_{\alpha_1} \times_{\mathbb{Z}} \cdots \times_{\mathbb{Z}} G_{\alpha_m}$, et l'on identifie $G_\alpha(A)$ au sous-groupe de $G_{n(\alpha)}(A)$ formé des matrices diagonales par blocs de taille $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. On note P_α (resp. U_α) le sous-schéma en groupes fermé de $G_{n(\alpha)}$ qui à A associe le sous-groupe de $G_{n(\alpha)}(A)$ formé des matrices triangulaires supérieures (resp. strictement triangulaires supérieures) par blocs de taille $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. On a donc la décomposition en produit semidirect $P_\alpha(A) = G_\alpha(A) \rtimes U_\alpha(A)$. Pour toute représentation lisse π de $G_\alpha(F)$, on note $\iota_\alpha(\pi)$ l'induite parabolique normalisée de π à $G_{n(\alpha)}$ suivant $P_\alpha(F)$. Si $\pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_m$ pour des représentations lisses π_i de $G_{\alpha_i}(F)$, on pose $\pi_1 \times \cdots \times \tau_m = \iota_\alpha(\pi)$.

Si τ est une représentation lisse de $G_k(F)$, $k \geq 1$, pour tout caractère ω de $F^\times$, on note $\omega\tau$ la représentation $\tau \otimes (\omega \circ \det)$ de $G(F)$, et l'on dit que τ est *ω-stable* si $\omega\tau$ est isomorphe à τ.

II.3.2. – On rappelle dans ce numéro la classification de Zelevinski [**66, 75**] des représentations lisses irréductibles de $G(F)$. Notons ν le caractère $|\ |_F$ de $F^\times$.

Si ρ est une représentation lisse irréductible cuspidale de $G_k(F)$, $k \geq 1$, pour tout entier $a \geq 1$, on note $\Delta(\rho, a)$ le *segment* de base ρ et de longueur a, c'est-à-dire l'ensemble $\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{a-1}\rho\}$. À un tel segment $\Delta = \Delta(\rho, a)$ est attachée une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable (modulo le centre) — appelée ici *représentation essentiellement discrète* — de $G_{ak}(F)$, que l'on note $L(\Delta)$: c'est l'unique quotient irréductible de la représentation $\rho \times \nu\rho \times \cdots \times \nu^{a-1}\rho$ de $G_{ak}(F)$. De plus, $L(\Delta)$ est de carré intégrable (modulo le centre), i.e. est une *série discrète*, si et seulement si la représentation $\nu^{\frac{a-1}{2}}\rho$ est *unitarisable* — on dira simplement *unitaire*. Toute représentation essentiellement discrète de $G_b(F)$, $b \geq 1$, est obtenue de cette manière. Précisément, si π est une représentation essentiellement discrète de $G_b(F)$, il existe un entier $a \geq 1$ divisant b et une représentation lisse irréductible cuspidale ρ de $G_{b/a}(F)$ telle que π soit isomorphe à $L(\Delta(\rho, a))$, l'entier b et la classe d'isomorphisme de ρ étant déterminés de manière unique par la classe d'isomorphisme de π.

Soient $\Delta = \Delta(\rho, a)$ et $\Delta' = \Delta(\rho', a')$ deux segments. On dit que Δ et Δ' sont *liés* si aucun des deux segments ne contient l'autre et que l'union $\Delta \cup \Delta'$ est encore un segment. On dit que Δ *précède* Δ' si Δ et Δ' sont liés et ρ' est isomorphe à $\nu^k\rho$ pour un entier $k > 0$.

Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ des segments tels que pour $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j. La représentation $L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_m)$ a un unique quotient irréductible, que l'on note $L(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$. Toute représentation lisse irréductible de $G_b(F)$, $b \geq 1$, est obtenue de cette manière. Précisément, si π est une représentation lisse irréductible de $G_b(F)$, il existe des segments $\Delta_i = \Delta(\rho_i, a_i)$, $i = 1, \ldots m$, Δ_i ne précédant pas Δ_j pour $i < j$, tels que π soit isomorphe à $L(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$. De plus, à isomorphisme des ρ_i près, le multiensemble formé des segments $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ est déterminé de manière unique par la classe d'isomorphisme de π.

La représentation $L(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ est *générique* (i.e. a un modèle de Whittaker, cf. 4.1) si et seulement si les segments $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ sont deux à deux non liés, auquel cas l'induite parabolique $L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_m)$ est irréductible, i.e. on a $L(\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_1) = L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_m)$. La représentation $L(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ est *tempérée* si et seulement si les représentations $L(\Delta_1), \ldots, L(\Delta_m)$ sont de carré intégrable.

II.3.3. – Pour un corps global $\mathbf{F}$, les composants locaux des représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ sont génériques et unitaires; où $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbf{F}$. On s'attend d'ailleurs à ce qu'ils soient tempérées (conjecture de Ramanujan-Petersson), ce qui est maintenant connu si $\mathbf{F}$ est un corps de fonctions [**54**] mais reste conjectural pour les corps de nombres.

Les représentations lisses irréductibles génériques *unitaires* de $G(F)$ ont été classifiées par J. Bernstein [**6**]. Rappelons le résultat [**38**, lemma 2.3]. Pour $i = 1, \ldots, s$ et $j = 1, \ldots, r$, soient $n_i \geq 1$ et $m_j \geq 1$ des entiers tels que $\sum_{i=1}^s n_i + 2\sum_{j=1}^r m_j = n$, soient π_i une série discrète de $G_{n_i}(F)$ et π'_j une série discrète de $G_{n'_j}(F)$, et soit k_j un nombre réel tel que $0 < k_j \leq \frac{1}{2}$. La représentation

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_s \times \nu^{k_1}\pi'_1 \times \nu^{-k_1}\pi'_1 \times \cdots \times \nu^{k_r}\pi'_r \times \nu^{-k_r}\pi'_r$$

de $G(F)$ est irréductible, générique et unitaire. De plus, toute représentation lisse irréductible générique unitaire π de G est isomorphe à une telle représentation, et la classe d'isomorphisme de π détermine les multiensembles $\{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ et $\{(\pi'_1, k_1), \ldots, (\pi'_r, k_r)\}$ à isomorphisme des π_i et des π'_j près.

II.3.4. – Pour ω un caractère de $F^\times$ et $\Delta = \Delta(\rho, a)$ un segment, on note $\omega\Delta$ le segment $\Delta(\omega\rho, a)$; on a donc $\omega L(\Delta) = L(\omega\Delta)$, et si $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ sont des segments tels que pour $i < j$, Δ_i ne précède pas Δ_j, on a $\omega L(\Delta_1, \ldots, \Delta_m) = L(\omega\Delta_1, \ldots, \omega\Delta_m)$.

Soit $\mathfrak{K}(E/F)$ le groupe des caractères de $F^\times$ qui sont triviaux sur $N_{E/F}(E^\times)$, c'est-à-dire le groupe des homomorphismes de $F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ dans $\mathbb{C}^\times$.

DÉFINITION. – Soit π une représentation lisse irréductible de $G(F)$, isomorphe à $L(\Delta_1,\ldots,\Delta_m)$ pour des segments $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ tels que pour $i<j$, Δ_i ne précède pas Δ_j. On dit que π est *à segments* $\mathfrak{K}(E/F)$*-réguliers* si pour tout caractère $\kappa\in\mathfrak{K}(E/F)$ et tous $i<j$, les segments Δ_i et $\kappa\Delta_j$ ne sont pas liés.

D'après 3.3, toute représentation lisse irréductible générique unitaire de $G(F)$ est à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers.

II.3.5. – Dans ce numéro, on rappelle certaines propriétés des facteurs L et ϵ de paires dont nous aurons besoin par la suite. Ces propriétés sont établies dans [**44**] (cf. [**38**, 2.5] pour des références précises). Dans les points (i) – (iv) ci-dessous, s désigne un nombre complexe, et ψ un caractère additif non trivial de F. Pour éviter les confusions possibles, on a remplacé les notations habituelles $L(s,\pi\times\pi')$ et $\epsilon(s,\pi\times\pi',\psi)$ par $L(\pi,\pi')(s)$ et $\epsilon(\pi,\pi',\psi)(s)$.

(i) Soient ρ et ρ' des représentations lisses irréductibles cuspidales de $G_k(F)$ et $G_{k'}(F)$ pour des entiers k, $k'\geq 1$. On a
$$L(\rho,\rho')(s)=\begin{cases}1 & \text{si } k\neq k'\\ \prod_z(1-zq^{-s})^{-1} & \text{si } k=k'\end{cases},$$
où z parcourt les nombres complexes de la forme q^{-t} tels que $\nu^{-t}\check{\rho}\simeq\rho'$. Si $k=k'$, on a donc
$$L(\rho,\rho')=\prod_\omega L(\eta)$$
où η parcourt les caractères de $F^\times$ tels que $\check{\rho}\simeq\eta\rho'$.

(ii) Soient $\Delta=\Delta(\rho,a)$ et $\Delta'=\Delta(\rho',a')$ deux segments, où ρ et ρ' sont les représentations du point (i). Posons $\pi=L(\Delta)$ et $\pi'=L(\Delta')$. Si $a'\leq a$, on a
$$L(\pi,\pi')(s)=\prod_{i=0}^{a'-1}L(\rho,\rho')(s+a+i-1)$$

(iii) Pour $i=1,\ldots,r$ et $j=1,\ldots,t$, soient π_i et π'_j des représentations essentiellement discrètes de $G_{k_i}(F)$ et $G_{k'_j}(F)$ pour des entiers k_i, $k'_j\geq 1$. Supposons que les représentations $\pi=\pi_1\times\cdots\times\pi_r$ et $\pi'=\pi'_1\times\cdots\times\pi'_t$ soient irréductibles.
$$L(\pi,\pi')=\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^t L(\pi_i,\pi'_j)$$
et
$$\epsilon(\pi,\pi',\psi)=\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^t\epsilon(\pi_i,\pi'_j,\psi).$$

(iv) Continuons avec les notations et les hypothèses du point (iii). Supposons de plus que pour $i = 1, \ldots, r$ et $j = 1, \ldots, t$, on ait $k_i = 1 = k'_j$ et que les caractères $\eta_i = \pi_i$ et $\eta'_j = \pi'_j$ de $F^\times$ soient non ramifiés. On a

$$L(\pi, \pi') = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} L(\eta_i \eta'_j).$$

II.3.6. – Les résultats rappelés dans cette section 3 sont bien sûr valables si l'on remplace le corps de base F par n'importe quelle extension finie de F, par exemple E_1. Pour les induites paraboliques, on utilisera les mêmes notations que celles introduites en 3.1: pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ une suite d'entiers ≥ 1, et $\Pi = \Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_m$ une représentation lisse de $G_\alpha(E_1)$, on note $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_m = \iota_\alpha(\Pi)$ l'induite parabolique normalisée de Π à $G_{n(\alpha)}(E_1)$.

Pour une F-algèbre cyclique quelconque E, les facteurs L et ϵ de paires sont définis comme suit. Pour tout entier $k \geq 1$, on identifie $G_k(E)$ à $G_k(E_1)^r$ comme en 2.8. Soient Π et Π' des représentations lisses irréductibles génériques de $G_k(E)$ et $G_{k'}(E)$ pour des entiers k, $k' \geq 1$. Écrivons $\Pi = \Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_r$ pour des représentations lisses irréductibles génériques Π_i de $G_k(E_1)$, et $\Pi' = \Pi'_1 \otimes \cdots \otimes \Pi'_r$ pour des représentations lisses irréductibles génériques Π'_i de $G_{k'}(E_1)$. On pose alors

$$L(\Pi, \Pi') = \prod_{i=1}^{r} L(\Pi_i, \Pi'_i)$$

et

$$\epsilon(\Pi, \Pi', \Psi_{E_1}^{\otimes r}) = \prod_{i=1}^{r} \epsilon(\Pi_i, \Pi'_i, \Psi_{E_1}),$$

où Ψ_{E_1} désigne un caractère addtitif non trivial de E_1.

Remarque. – Soit ψ un caractère additif non trivial de F. Notons ψ_E le caractère additif $\psi_E = \psi_F \circ \mathrm{tr}_{E/F}$ de E, où $\mathrm{tr}_{E/F}$ désigne l'application trace de E à F; lui aussi est non trivial. De même, notons ψ_{E_1} le caractère additif $\psi_F \circ \mathrm{tr}_{E_1/F}$ de E_1. Alors en identifiant E à $(E_1)^r$ via l'application $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1, \sigma x_2, \ldots, \sigma^{r-1} x_r)$, on a $\psi_E = \psi_{E_1}^{\otimes r}$.

II.4. Des séries discrètes aux représentations génériques

II.4.1. – Fixons un caractère additif non trivial ψ de F. Posons $\alpha_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$, et notons P_0, A_0, U_0 les sous-schémas en groupes fermés P_{α_0}, G_{α_0}, U_{α_0} de G (cf. 3.1). Soit θ_ψ le caractère de $U_0(F)$ donné par $\theta_\psi(u) = \theta(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1})$, $u = (u_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 1}$. Rappelons qu'une représentation lisse irréductible π de $G(F)$ est dite *générique* s'il existe une forme linéaire non nulle λ sur l'espace V de π telle que $\lambda(\pi(u)(v)) = \theta_\psi(u)\lambda(v)$ pour tout $u \in U_0(F)$ et tout $v \in V$. Une telle forme λ

est appelée *fonctionnelle de Whittaker pour π (relativement à θ_ψ)*. On sait que si π est générique, les fonctionnelles de Whittaker pour π forment un espace vectoriel de dimension 1.

Supposons un instant que E soit un corps. Notons ψ_E le caractère additif $\psi \circ \mathrm{tr}_{E/F}$ de E, et θ_{ψ_E} le caractère de $U_0(E)$ obtenu en remplaçant F par E et ψ par ψ_E dans la définition de θ_ψ. Soit Π une représentation lisse irréductible générique de $G(E)$. Si Π est σ-stable et si A est un isomorphisme de Π sur Π^σ, alors pour toute fonctionnelle de Whittaker λ pour Π (relativement à θ_{ψ_E}), la forme linéaire $\lambda \circ A$ sur l'espace de Π est encore une fonctionnelle de Whittaker pour Π. On peut donc normaliser l'opérateur A en demandant que $\lambda \circ A = \lambda$ pour une (i.e. pour toute) fonctionnelle de Whittaker non nulle λ pour Π; on le note alors $I_\sigma(\Pi)$. Cette normalisation $I_\sigma(\Pi)$ ne dépend pas du choix du caractère additif ψ de F. En effet si ψ' est un autre caractère additif non trivial de F, alors ψ' est de la forme $x \mapsto \psi(yx)$ pour un élément y de $F^\times$. Notant γ l'élément $\mathrm{diag}(1, y, \ldots, y^{n-1})$ de $A_0(F)$, pour $u \in U_0(F)$, on a $\theta_{\psi'}(u) = \theta_\psi(\gamma^{-1} u \gamma)$. Par suite pour $u \in U_0(E)$, on a $\theta_{\psi'_E}(u) = \theta_{\psi_E}(\gamma^{-1} u \gamma)$, et l'application $\lambda \mapsto \lambda \circ \Pi(\gamma^{-1})$ est un isomorphisme entre l'espace des fonctionnelles de Whittaker pour θ_{ψ_E} et l'espace des fonctionnelles de Whittaker pour $\theta_{\psi'_E}$. D'où le résultat puisque $\Pi(\gamma^{-1}) \circ I_\sigma(\Pi) = I_\sigma(\Pi) \circ \Pi(\gamma^{-1})$.

Revenons au cas général où E est une F-algèbre cyclique quelconque. Identifions $G(E)$ à $G(E_1)^r$ comme en 2.8. Si Π est une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$, alors Π s'écrit $\Pi = \Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_r$ pour des représentations lisses irréductibles génériques σ_1-stables Π_i de $G(E_1)$ telles que Π_i soit isomorphe à Π_1 pour $i = 2, \ldots, r$. Soit $I_\sigma(\Pi)$ l'isomorphisme de Π sur Π^σ défini comme suit: on note A l'isomorphisme de $\Pi' = \Pi_1^{\otimes r}$ sur Π'^σ définit par $A_1 = I_\sigma(\Pi_1)$ comme en 2.8, et l'on pose $I_\sigma(\Pi) = \iota^{-1} \circ A \circ \iota$ pour un (i.e. pour tout) isomorphisme ι de Π sur Π'.

Notation. – Si Π est une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$, on note Θ_Π^σ la distribution (resp. la fonction caractère) $\Theta_\Pi^{I_\sigma(\Pi)}$.

Remarque. – Soit Π une représentation lisse irréductible *unitaire* de $G(E)$. Fixons un produit scalaire hermitien $G(E)$-invariant $(\cdot, \cdot)$ sur l'espace V de Π, i.e. une forme hermitienne définie positive qui vérifie $(\Pi(g)v, \Pi(g)v') = (v, v')$ pour tous v, $v' \in V$ et tout $g \in G(E)$. Soit $(\overline{\Pi}, \overline{V})$ la conjuguée complexe de (Π, V). L'opérateur $v \mapsto \Psi_v = (v, \cdot)$ de $\overline{V}$ dans $\check{V}$ est un isomorphisme de $\overline{\Pi}$ sur $\check{\Pi}$.

Supposons de plus que Π soit σ-stable, et choisissons un isomorphisme A de Π sur Π^σ. Pour $v \in V$, posons $B\Psi_v = \Psi_{Av}$. On a

$$\begin{aligned} B \circ \check{\Pi}(g)\Psi_v &= B \circ \Psi_{\overline{\Pi}(g)v} \\ &= \Psi_{A \circ \overline{\Pi}(g)v} \\ &= \Psi_{\overline{\Pi}(g^\sigma) \circ Av} = \check{\Pi}(g^\sigma) \circ B\Psi_v, \end{aligned}$$

i.e. B est un isomorphisme de $\check{\Pi}$ sur $\check{\Pi}^\sigma$. Pour $v,\, v' \in V$, posons $(v,v')_A = (Av, Av')$. Alors $(\cdot,\cdot)_A$ est un autre produit produit scalaire hermitien $G(E)$-invariant sur V, par conséquent $(\cdot,\cdot)_A = \xi(\cdot,\cdot)$ pour un nombre réel $\xi > 0$. Si de plus A est *unitaire*, c'est-à-dire si $A^d = \mu \mathrm{Id}_V$ pour un nombre complexe μ de module 1, alors $(\cdot,\cdot)$ est A-invariant: on a $\xi^d = \mu$, d'où $\xi = 1$. Pour $v,\, v' \in V$, on a

$$\langle v', B\Psi_v\rangle = (Av, v') = \xi(v, A^{-1}v') = \xi\langle A^{-1}v', \Psi_v\rangle,$$

par conséquent si A est unitaire, alors $B = \check{A}$.

Supposons de plus que Π soit générique. Alors sa contragrédiente $\check{\Pi}$ est elle aussi générique (et unitaire). Prenons pour A l'opérateur normalisé $I_\sigma(\Pi)$; puisque $A^d = \mathrm{Id}_V$, il est unitaire. Choisissons une fonctionnelle de Whittaker non nulle α pour Π. La forme linéaire β sur $\check{V}$ définie par $\beta\Psi_v = \alpha v$ pour $v \in V$, est une fonctionnelle de Whittaker non nulle pour $\check{\Pi}$, et comme

$$\beta \circ B\Psi_v = \beta\Psi_{Av} = \alpha \circ Av = \alpha v = \beta\Psi_v,$$

on a $\check{A} = I_\sigma(\check{\Pi})$.

II.4.2. – Le théorème suivant est le résultat principal du chapitre. Pour F de caractéristique nulle, il a été démontré par Arthur et Clozel [**1**, ch. 1] — en fait dans [**1**, ch. 1, theo. 6.2], Arthur et Clozel ne traitent que les représentations tempérées, mais le passage aux représentations génériques est immédiat, comme nous le verrons plus loin. On a choisi d'énoncer le théorème pour une F-algèbre cyclique E quelconque, de manière à pouvoir s'y référer plus tard dans les applications globales, mais sa réduction au cas où E est un corps — le cas qui nous intéresse — ne présente aucune difficulté (cf. le numéro suivant).

On note $1_{F^\times}$ le caractère trivial de $F^\times$, et $1_{E^\times}$ celui de $E^\times$.

Théorème. – (1) *Toute représentation lisse irréductible générique à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers π de $G(F)$, se relève en une représentation lisse irréductible générique σ-stable Π de $G(E)$, et la constante $c(\pi, I_\sigma(\Pi))$ vaut 1.*

(2) *Toute représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$ est le relèvement d'une représentation lisse irréductible générique à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G(F)$.*

(3) *Pour les représentations génériques, la notion de relèvement est indépendante du choix de σ.*

(4) *Soient π et π' des représentations lisses irréductibles à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G_k(F)$ et $G_{k'}(F)$ pour des entiers $k,\, k' \geq 1$, et soient Π et Π' des*

représentations lisses irréductibles génériques σ-stables de $G_k(E)$ et $G_{k'}(E)$, telles que Π soit un relèvement de π et Π' soit un relèvement de π'. On a

$$L(\Pi, \Pi') = \prod_{\kappa} L(\pi, \kappa\pi')^r$$

et

$$\frac{\epsilon(\Pi, \Pi', \psi_E)}{\epsilon(1_{E^\times}, \psi_E)^{kk'}} = \prod_{\kappa} \frac{\epsilon(\pi, \kappa\pi', \psi)^r}{\epsilon(\kappa, \psi)^{rkk'}},$$

où κ parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(E/F)$.

Remarques. – (1) Soit Π une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$. Posons $A = I_\sigma(\Pi)$. Si Π est unitaire, on a $\check{A} = I_\sigma(\check{\Pi})$, par la remarque de 4.1. Les points (1) et (2) du théorème entraînent que cela reste vrai sans supposer que Π est unitaire. En effet, si Π est un relèvement de π, alors d'après la remarque (5) de 2.9, $\check{\Pi}$ est un relèvement de $\check{\pi}$, et $c(\check{\Pi}, \check{A}) = c(\Pi, A)$. Or $\check{\Pi}$ est générique σ-stable, donc $c(\check{\Pi}, I_\sigma(\check{\Pi})) = 1$. On a donc

$$c(\check{\Pi}, \check{A}) = 1 = c(\check{\Pi}, I_\sigma(\check{\Pi})),$$

d'où $\check{A} = I_\sigma(\check{\Pi})$.

(2) Dans le point (4), les facteurs ϵ dans les dénominateurs sont les facteurs locaux de Tate, où l'on a posé $\epsilon(1_{E^\times}, \psi_E) = \epsilon(1_{E_1^\times}, \psi_{E_1})^r$, $\psi_{E_1} = \psi_F \circ \mathrm{tr}_{E_1/F}$. Le quotient

$$\frac{\prod_{\kappa \in \mathfrak{K}(E_1/F)} \epsilon(\kappa, \psi)}{\epsilon(1_{E_1^\times}, \psi_{E_1})}$$

est le facteur $\lambda(E_1/F, \psi)$ de Langlands, et l'on pose $\lambda(E/F, \psi) = \lambda(E_1/F, \psi)^r$. Pour toute représentation lisse irréductible générique π de $G(F)$, les facteurs $L(\pi) = L(\pi, 1_{F^\times})$ et $\epsilon(\pi, \psi) = \epsilon(\pi, 1_{F^\times}, \psi)$ coïncident avec les facteurs L et ϵ habituellement notés $L(s, \pi)$ et $\epsilon(s, \pi, \psi)$ — définis par Godement et Jacquet dans [**26**]. On pose aussi $L(\Pi) = L(\Pi, 1_{E^\times})$ et $\epsilon(\Pi, \psi_E) = \epsilon(\Pi, 1_{E^\times}, \psi_E)$ pour toute représentation lisse irréductible générique Π de $G(E)$. D'après le point (4), si π est une représentation lisse irréductible générique à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G(F)$, et si Π est une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$ relevant π, on a

$$L(\Pi) = \prod_{\kappa} L(\kappa\pi)^r$$

et

$$\epsilon(\Pi, \psi_E) = \lambda(E/F, \psi)^{-n} \prod_{\kappa} \epsilon(\kappa\pi, \psi)^r,$$

où κ parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(E/F) = \mathfrak{K}(E_1/F)$.

II.4.3. – Commençons par ramener la démonstration du théorème de 4.2 au cas où E est un corps.

Soit π une représentation lisse irréductible de $G(F)$, et supposons qu'il existe un σ_1-relèvement Π_1 de π à $G(E_1)$. Notons Π la représentation lisse irréductible σ-stable $\Pi_1^{\otimes r}$ de $G(E) = G(E_1)^r$, choisissons un isomorphisme A_1 de Π_1 sur $\Pi_1^{\sigma_1}$, et notons A l'isomorphime de Π sur Π^σ défini par A_1 comme en 2.8. Pour toute paire d'éléments associés (δ, γ) de $G(E) \times G(F)$ telle que γ soit régulier, on a (cf. 2.8)

$$\Theta_\Pi^A(\delta) = \Theta_{\Pi^1}^{A_1}(N'^1(\delta)) = c(\pi, A_1)\Theta_\pi^A(\gamma).$$

Par conséquent Π est un σ-relèvement de π, et $c(\pi, A) = c(\pi, A_1)$. De plus, Π est générique si et seulement si Π_1 l'est, auquel cas on a $c(\pi, I_\sigma(\Pi)) = c(\pi, I_{\sigma_1}(\Pi_1)$.

Réciproquement, soit $\Pi = \Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_r$ une représentation lisse irréductible σ-stable de $G(E) = G(E_1)^r$. Comme Π_1 est σ_1-stable et que Π_i est isomorphe à Π_1 pour $i = 2, \ldots, r$, le raisonnement ci-dessus montre que si Π_1 est un σ_1-relèvement d'une représentation lisse irréductible π de $G(F)$, alors Π est un σ-relèvement de π.

Quitte à remplacer E par E_1, *on peut donc supposer que E est un corps, ce que nous faisons jusqu'à la fin de cette section 4.*

II.4.4. – Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ une partition de n, c'est-à-dire une suite d'entiers ≥ 1 telle que $n(\alpha) = n$. Notons P, M, U les sous-schémas en groupes fermés P_α, G_α, U_α de G (cf. 3.1). Pour $i = 1, \ldots, m$, soit (Π_i, A_i) une paire formée d'une représentation lisse σ-stable de $G_{\alpha_i}(E)$ et d'un isomorphisme A_i de Π_i sur Π_i^σ. Notons Ξ la représentation $\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_m$ de $M(F) = G_{\alpha_1}(F) \times \cdots \times G_{\alpha_m}(F)$ et B l'isomorphisme $A_1 \otimes \cdots \otimes A_m$ de Ξ sur Ξ^σ. L'induite parabolique $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_m = \iota_\alpha(\Xi)$ de Ξ à $G(E)$ est σ-stable, et notant V l'espace de Ξ, l'automorphisme $\iota_\alpha(B)$ de l'espace $\iota_\alpha(V)$ de $\iota_\alpha(\Xi)$ donné par $\iota_\alpha(B)(\xi)(g) = B(\xi(g^{\sigma^{-1}}))$ pour toute fonction $\xi \in \iota_\alpha(V)$ et tout $g \in V$, est un isomorphisme de $\iota_\alpha(\Xi)$ sur $\iota_\alpha(\Xi)^\sigma$. Si de plus pour $i = 1, \ldots, m$, la représentation Π_i est irréductible et générique, et si la représentation $\iota_\alpha(\Xi)$ est irréductible, alors elle est générique, et d'après la propriété de transitivité des modèles de Whittaker [**65**, theo. 2], on a

$$I_\sigma(\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_m) = I_\sigma(\Pi_1) \times \cdots \times I_\sigma(\Pi_m).$$

Le lemme suivant est une conséquence des formules de descente pour les fonctions caractères rappelées dans le numéro suivant.

LEMME. – *Pour $i = 1, \ldots, m$, soit (Π_i, A_i) une paire formée d'une représentation lisse irréductible σ-stable de $G_{\alpha_i}(E)$ et d'un isomorphisme A_i de Π_i sur Π_i^σ. Supposons que pour $i = 1, \ldots, m$, Π_i soit un σ-relèvement d'une représentation lisse irréductible π_i de $G_{\alpha_i}(F)$. Notons Π la représentation $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_m$ de $G(E)$, A l'isomorphisme $\iota_\alpha(A_1 \otimes \cdots \otimes A_m)$ de Π sur Π^σ, et π la représentation $\pi_1 \times \cdots \times \pi_m$ de $G(F)$. Si Π et π sont irréductibles, alors Π est un σ-relèvement de π, et l'on a $c(\pi, A) = \prod_{i=1}^m c(\pi_i, A_i)$.*

II.4.5. – Continuons avec les notations de 4.4. On suppose que les mesures de Haar dg_E et dg fixées sur $G(E)$ et $G(F)$ sont celles qui donnent le volume 1 aux groupes $K_E = G(\mathfrak{o}_E)$ et $K_F = G(\mathfrak{o}_F)$, et l'on note dk_E et dk leurs restrictions à K_E et K_F.

Notons dm_E et du_E les mesures de Haar sur $M(E)$ et $U(E)$ donnant le volume 1 aux groupes $M(\mathfrak{o}_E) = M(E) \cap K_E$ et $U(\mathfrak{o}_E) = U(E) \cap K_E$. Pour toute fonction localement intégrable ϕ sur $G(E)$, on a la formule d'intégration

$$\int_{G(E)} \phi(g)dg_E = \iiint_{M(E)\times U(E)\times K_E} \phi(muk)dm_E du_E dk_E.$$

Soit $\phi \mapsto \phi_{P,\sigma}$ l'application linéaire de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(M(E))$ définie par

$$\phi_{P,\sigma}(m) = \delta_{P(E)}(m)^{\frac{1}{2}} \int_{U(E)\times K_E} \phi(k^{-1}muk^\sigma)du_E dk_E,$$

où $\delta_{P(E)}$ est le caractère module de $P(E)$, donné par $d\mu(p\delta p^{-1}) = \delta_{P(E)}(p)d\mu(\delta)$ pour n'importe quelle mesure de Haar (à droite ou à gauche) μ sur $P(E)$.

Un élément $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ de $M(E) = \prod_{i=1}^m G_{\alpha_i}(E)$ est σ-fermé (dans $G(E)$) si et seulement s'il est σ-fermé dans $M(E)$ (au sens où pour $i = 1, \ldots, m$, l'élément δ_i est σ-fermé dans $G_{\alpha_i}(E)$, ce qui équivaut à dire que la σ-orbite de δ dans $M(E)$ est fermée). Pour $\delta \in M(E)$, on pose

$$D_{G/M,\sigma}(\delta) = \det_F(\sigma - \mathrm{Ad}_{G(E)}(\delta)^{-1}, \mathfrak{g}(E)/\mathfrak{m}(E)),$$

où $\mathfrak{m}$ désigne l'algèbre de Lie de M. Si $\delta \in M(E)$ est σ-fermé et si le σ-centralisateur G_δ^σ est contenu dans $\mathrm{Res}_{E/F}(M \times_{\mathbb{Z}} E)$, alors la mesure quotient $\frac{dm_E}{dg_\delta^\sigma}$ sur l'espace homogène $G_\delta^\sigma(F)\backslash M(E)$ définit comme en 2.3 une distribution $\Lambda_\sigma^{M(E)}(\cdot, \delta)$ sur $M(E)$; de plus $D_{G/M,\sigma}(\delta)$ est non nul, et pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$, on a la formule de descente [**57**, prop. 4.4.9]

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = |D_{G/M,\sigma}(\delta)|_F^{-1/2} \Lambda_\sigma^{M(E)}(\phi_{P,\sigma}, \delta). \tag{1}$$

Pour $i = 1, \ldots, m$, soit (Π_i, A_i) une paire formée d'une représentation lisse admissible σ-stable de $G_{\alpha_i}(E)$ et d'un isomorphisme A_i de Π_i sur Π_i^σ. Notons Ξ la représentation $\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_m$ de $M(E)$ et B l'isomorphisme $A_1 \otimes \cdots \otimes A_m$ de Ξ sur Ξ^σ. Pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$, on a la formule de descente (simple généralisation au cas tordu de la formule bien connue de Van Dijk [**18, 22**]; voir aussi [**62**])

$$\Theta_{\iota_\alpha(\Xi)}^{\iota_\alpha(B)}(\phi) = \Theta_\Xi^B(\phi_{P,\sigma}), \tag{2}$$

où la distribution Θ_Ξ^B sur $M(E)$ est définie comme en 2.7 grâce à la mesure de Haar dm_E sur $M(E)$. Supposons de plus que pour $i = 1, \ldots, m$, la représentation Π_i soit de type fini. Les représentations Ξ et $\iota_\alpha(\Xi)$ sont alors elles aussi de type fini, et via la formule (1) de 2.10 pour M et G, on peut traduire l'égalité (2) en termes de fonctions caractères — c'est ce que nous faisons ci-après. Précisément, l'ensemble $M(E)_{\sigma-\mathrm{r}} =$

$\prod_{i=1}^m G_{\alpha_i}(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ contient $M(E)\cap G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, et la distribution Θ_Ξ^B est donnée par une fonction localement constante sur $M(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ qui est localement intégrable sur $M(E)$; on note encore Θ_Ξ^B cette fonction.

Remarque. – Soit χ un caractère σ-stable du centre $E^\times$ de $G(E)$. Notons $C_{\mathrm{c}}^\infty(M(E),\chi)$ l'espace des fonctions φ sur $M(E)$ qui sont localement constantes, à support compact modulo $E^\times$, et vérifient $\varphi(zm)=\chi(z)^{-1}\varphi(m)$ pour tout $z\in E^\times$ et tout $m\in M(E)$. On note encore $\phi\mapsto\Phi_{P,\sigma}$ l'application linéaire de $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$ dans $C_{\mathrm{c}}^\infty(M(E),\chi)$ définie comme plus haut. Alors la formule de descente (1) est valable pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$. De plus, si la représentation Ξ de $M(E)$ vérifie $\Xi(zm)=\chi(z)\Xi(m)$ pour tout $z\in E^\times$ et tout $m\in M(E)$, alors la formule de descente (2) est elle aussi valable pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$.

Soit T un tore maximal de M défini sur F. Posons $W_{M,T}=N_M(T)/T$. Notons Z_M le centre de M (c'est un tore F-déployé) et A_T le sous-tore F-déployé maximal de T; on a donc l'inclusion $Z_M\subset A_T$. Soit $\mathscr{W}=\mathscr{W}_{G,F}(Z_M,A_T)$ l'ensemble des applications η de $Z_M(F)$ dans $A_T(F)$ de la forme $\eta(a)=gag^{-1}$ pour un $g\in G(F)$; la classe de g dans $G(F)/M(F)$ est bien définie, et $g^{-1}Tg$ est un tore maximal de M (défini sur F) dont la classe de conjugaison dans $M(F)$ est bien définie. Notons $\mathscr{C}_\eta$ cette classe de conjugaison. Fixons un système de représentants $T_1,\dots,T_s$ des classes de conjugaison dans $M(F)$ de tores maximaux de M qui sont conjugués à T dans $G(F)$:

— chaque T_i est un tore maximal de M qui est conjugué à T dans $G(F)$;
— les T_i sont deux à deux non conjugués dans $M(F)$;
— pour tout $g\in G(F)$ tel que $g^{-1}Tg\subset M$, il existe un $m\in M(F)$ tel que $m^{-1}g^{-1}Tgm$ est l'un des T_i.

Pour $i=1,\dots,s$, choisissons un élément g_i de $G(F)$ tel que $T_i=g_i^{-1}Tg_i$. Pour $\eta\in\mathscr{W}$, notons $i(\eta)$ l'indice i tel que T_i appartient à la classe $\mathscr{C}_\eta$. Posons $\mathscr{W}_i=\{\eta\in\mathscr{W}: i(\eta)=i\}$. L'application qui à un élément n de $N_G(T_i)$ associe la restriction à $Z_M(F)$ de l'automorphisme intérieur $x\mapsto g_inxn^{-1}g_i^{-1}$ de $G(F)$, induit une bijection de $N_G(T_i)(F)/N_M(T_i)(F)=W_{T_i}(F)/W_{M,T_i}(F)$ sur $\mathscr{W}_i$. On obtient ainsi une bijection de $\coprod_{i=1}^s W_{T_i}(F)/W_{M,T_i}(F)$ sur $\mathscr{W}$.

Pour chaque $\eta\in\mathscr{W}$, on choisit un élément g_η de $G(F)$ tel que $\eta(a)=g_\eta ag_\eta^{-1}$ ($a\in Z_M(F)$). Puisque la fonction caractère Θ_Ξ^B sur $M(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ est invariante par σ-conjugaison dans $M(E)$, pour $\delta\in T(E)\cap G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et $\eta\in\mathscr{W}$, la valeur $\Theta_\Xi^B(g_\eta^{-1}\delta g_\eta^\sigma)=\Theta_\Xi^B(g_\eta^{-1}\delta g_\eta)$ ne dépend que de η et pas du choix de g_η; on peut donc la noter $\Theta_\Xi^B(\delta^\eta)$. Pour $\gamma\in M(F)$, on définit $D_M(\gamma)$ comme en 2.10 en remplaçant G par M, et l'on pose

$$D_{G/M}(\gamma)=\det{}_F(1-\mathrm{Ad}_{G(F)}(\gamma)^{-1};\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{m}(F)).$$

Pour $\gamma \in T(F)$ et $\eta \in \mathscr{W}$, on note $D_M(\gamma^\eta)$ et $D_{G/M}(\gamma^\eta)$ les valeurs de D_M et $D_{G/M}$ en $g_\eta^{-1}\gamma g_\eta$; là encore ces valeurs ne dépendent pas du choix de g_η. Notons que pour $\delta \in T(E) \cap G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$ et $\eta \in \mathscr{W}$, d'après la démonstration du lemme 5 de [**18**], on a

$$D_{G/M,\sigma}(\delta^\eta) = D_{G/M}(N(\delta)^\eta) \;\left(= \frac{D_G(N(\delta))}{D_M(N(\delta)^\eta)}\right).$$

Les égalités (1) et (2), jointes à la formule (1) de 2.10 pour M et G, entraînent que la fonction caractère $\Theta^{\iota_\alpha(B)}_{\iota_\alpha(\Xi)}$ est nulle en dehors des éléments σ-réguliers δ de $G(E)$ tels que l'orbite $\mathbb{N}(\mathscr{O}_\sigma(\delta))$ rencontre $M(F)$, et que pour tout $\delta \in T(E) \cap G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, on a l'égalité

$$\Theta^{\iota_\alpha(B)}_{\iota_\alpha(\Xi)}(\delta) = \sum_{\eta \in \mathscr{W}} |D_{G/M}(N(\delta)^\eta)|_F^{-1/2} \Theta^B_\Xi(\delta^\eta). \tag{3}$$

On peut bien sûr écrire aussi les formules (1), (2), (3) dans le cas non tordu: il suffit pour cela de remplacer E par F et σ par Id.

II.4.6. – Une représentation lisse irréductible tempérée de $G(E)$ est appelée *série σ-discrète* si elle est σ-stable et n'est isomorphe à aucune représentation de la forme $\iota_\alpha(\Pi)$ pour une partition α de n telle que $l(\alpha) > 1$, et une représentation lisse irréductible σ-stable Π de $G_\alpha(E)$. Notons que pour $E = F$ et $\sigma = \mathrm{Id}$, on retrouve la définition habituelle de *série discrète* de $G(F)$. Rappelons la classification des séries σ-discrètes de $G(E)$ [**19**, ch. 1, lemma 2.8].

Soit n_1 un entier divisant n, $n = n_1 s$, et soit Π_1 une série discrète de $G_{n_1}(E)$ telle que σ^s engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Π_1 dans Σ, c'est-à-dire telle que Π_1 soit σ^s-stable et que les représentations $\Pi_1, \Pi_1^\sigma, \ldots, \Pi^{\sigma^{s-1}}$ de $G_{n_1}(E)$ soient deux à deux non isomorphes. Notons Ξ la série discrète $\Pi_1 \otimes \Pi_1^\sigma \otimes \cdots \otimes \Pi_1^{\sigma^{s-1}}$ de $G_\alpha(E)$, $\alpha = (n_1, \ldots, n_1)$. Alors l'induite parabolique $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_1^\sigma \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{s-1}}$ de Ξ à $G(E)$ suivant $P_\alpha(E)$, est une série σ-discrète de $G(E)$, et à isomorphisme près, on les obtient toutes de cette manière. De plus, la classe d'isomorphisme de Π détermine la paire (s, Π_1) à Σ-conjugaison et isomorphisme de Π_1 près, et est déterminée par elle.

Le théorème suivant sera démontré dans la section 6.

THÉORÈME. – (1) *Toute série discrète π de $G(F)$ se relève en une série σ-discrète Π de $G(E)$, et la constante $c(\pi, I_\sigma(\Pi))$ vaut* 1.

(2) *Toute série σ-discrète Π de $G(E)$ relève une série discrète π de $G(F)$, et toute autre représentation lisse irréductible générique de $G(F)$ se relevant en Π est isomorphe à $\kappa\pi$ pour un caractère $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$.*

(3) *Pour les séries discrètes, la notion de relèvement est indépendante du choix de σ.*

(4) *Soient π et π' des séries discrètes de $G_k(F)$ et $G_{k'}(F)$ pour des entiers k, $k' \geq 1$, et soient Π et Π' des séries σ-discrètes de $G_k(E)$ et $G_{k'}(E)$, telles que Π soit un relèvement de π et Π' soit un relèvement de π'. On a*

$$L(\Pi, \Pi') = \prod_{\kappa} L(\pi, \kappa\pi')$$

et

$$\frac{\epsilon(\Pi, \Pi', \psi_E)}{\epsilon(1_{E^\times}, \psi_E)^{kk'}} = \prod_{\kappa} \frac{\epsilon(\pi, \kappa\pi', \psi)}{\epsilon(\kappa, \psi)^{kk'}},$$

où κ parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(E/F)$.

II.4.7. – Appelons *représentation essentiellement σ-discrète* de $G(E)$ une représentation lisse irréductible σ-stable Π de $G(E)$ de la forme $\xi\Pi' = \Pi' \otimes \xi$ pour une série σ-discrète Π' de $G(E)$ et un caractère ξ de $E^\times$. Puisque Π et Π' sont σ-stables, ξ l'est aussi, donc est de la forme ω_E pour un caractère ω de $F^\times$. Notons que pour $E = F$ et $\sigma = \mathrm{Id}$, on retrouve la notion de *représentation essentiellement discrète* de $G(F)$ — cf. 3.2.

La classification des représentations essentiellement σ-discrètes de $G(E)$ se déduit de celle des séries σ-discrètes par torsion par les caractères σ-stables de $E^\times$: toute représentation Π de $G(E)$ isomorphe à une induite parabolique de la forme $\Pi_1 \times \Pi_1^\sigma \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{s-1}}$ pour une représentation essentiellement discrète Π_1 de $G_{n_1}(E)$, $n = n_1 s$, telle σ^s engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Π_1 dans Σ, est une représentation essentiellement σ-discrète, et à isomorphisme près, on les obtient toutes de cette manière. De plus, Π est une série σ-discrète si et seulement si Π_1 est une série discrète. Enfin la classe d'isomorphisme de Π détermine la paire (s, Π_1) à Σ-conjugaison et isomorphisme de Π_1 près, et est déterminée par elle.

Soit π une représentation essentiellement discrète de $G(F)$. Écrivons $\pi = \omega\pi'$ pour un caractère ω de $F^\times$ et une série discrète π' de $G(F)$. Si Π' est une série σ-discrète de $G(E)$ relevant π', alors $\Pi = \omega_E \Pi'$ est une série essentiellement σ-discrète de $G(E)$ relevant π, et l'on a $I_\sigma(\Pi) = I_\sigma(\Pi')$ et $c(\pi', I_\sigma(\Pi')) = c(\pi, I_\sigma(\Pi))$. De plus, Π est une série σ-discrète si et seulement si ω est unitaire, c'est-à-dire si et seulement si π est une série discrète. Réciproquement, soit Π une représentation essentiellement σ-discrète de $G(E)$. Écrivons $\Pi = \omega_E \Pi'$ pour une série σ-discrète Π' de $G(E)$ et un caractère ω de $F^\times$. Si π' est une série discrète de $G(F)$ se relevant en Π', alors $\pi = \omega\pi'$ est une représentation essentiellement discrète de $G(F)$ se relevant en Π.

On en déduit que si le théorème de 4.6 est vrai, alors sa variante pour les représentations essentiellement discrètes l'est aussi.

II.4.8. – Le lemme ci-dessous est une conséquence de la formule d'orthogonalité des caractères pour les séries discrètes de $G(F)$ — prouvée dans **[20]** si F est de caractéristique nulle et dans **[2]** si F est de caractéristique > 0. Il est vrai indépendamment du théorème de 4.6 (d'ailleurs il en donne même une petite partie), et sera prouvé à la fin de ce n°.

LEMME. – *Soit π une représentation essentiellement discrète de $G(F)$.*

(1) *Il existe un élément $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}} \cap N(G(E))$ tel que $\Theta_\pi(\gamma) \neq 0$.*
(2) *S'il existe un σ-relèvement Π de π, alors toute autre représentation lisse irréductible générique de $G(F)$ se relevant en Π est isomorphe à $\kappa\pi$ pour un caractère $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$.*

Commençons par rappeler la formule d'orthogonalité des caractères pour les séries discrètes de $G(F)$, ou plutôt la variante obtenue en remplaçant le centre $F^\times$ de $G(F)$ par le groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$. Soit $\mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ le sous-ensemble de $\mathscr{T}$ (cf. 2.10) formé des tores F-elliptiques, c'est-à-dire les $T \in \mathscr{T}$ tels que le groupe quotient $F^\times\backslash T(F)$ est compact. Pour $T \in \mathscr{T}_{\mathrm{e}}$, le groupe quotient $N_{E/F}(E^\times)\backslash T(F)$ est compact, et l'on note $d\bar{\gamma}_T$ la mesure de Haar normalisée sur ce groupe, c'est-à-dire celle pour laquelle son volume est 1. Soient π et π' des séries discrètes de $G(F)$ dont les caractères centraux ont même restriction, disons ω, à $N_{E/F}(E^\times)$. Posant

$$(1) \qquad \langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}} = \sum_{T \in \mathscr{T}_{\mathrm{e}}} |W_T(F)|^{-1} \int_{N_{E/F}(E^\times)\backslash T(F)} |D_G(\gamma)|_F \Theta_\pi(\gamma) \overline{\Theta_{\pi'}(\gamma)} d\bar{\gamma}_T,$$

on a

$$(2) \qquad \langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi' \simeq \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De plus, les fonctions caractères Θ_ρ, pour ρ parcourant les classes d'isomorphisme de séries discrètes de $G(F)$ de caractère central prolongeant ω, forment une base orthonormale de l'espace préhilbertien — pour le produit scalaire défini par la formule (1) — formé des fonctions localement constantes f sur $F^\times\backslash G(F)_{\mathrm{e}}$ qui sont invariantes par conjugaison dans $G(F)$, se transforment suivant ω sous l'action de $N_{E/F}(E^\times)$, et vérifient $\langle f, f \rangle_{\mathrm{e}} < +\infty$.

D'après le lemme de **I**.6.12, un élément $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$ est une norme si et seulement si $\det(\gamma) \in N_{E/F}(E^\times)$. Pour $T \in \mathscr{T}_{\mathrm{e}}$ et $x \in N_{E/F}(E^\times)\backslash F^\times$, notons $T(F)^x$ le sous-ensemble de $T(F)$ formé des éléments γ tels que $\det(\gamma)$ appartienne au sous-ensemble $xN_{E/F}(E^\times)$ de $F^\times$. Posant

$$\langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}}^x = \sum_{T \in \mathscr{T}_{\mathrm{e}}} |W_T(F)|^{-1} \int_{N_{E/F}(E^\times)\backslash T(F)^x} |D_G(\gamma)|_F \Theta_\pi(\gamma) \overline{\Theta_{\pi'}(\gamma)} d\bar{\gamma}_T,$$

on a

$$\langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}} = \sum_x \langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}}^x,$$

où x parcourt les éléments de $N_{E/F}(E^\times)\backslash F^\times$. Par suite on a

$$\sum_\kappa \langle \Theta_{\kappa\pi}, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}} = \sum_\kappa \sum_x \langle \Theta_{\kappa\pi}, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}}^x = \sum_x \langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}}^x \sum_\kappa \kappa(\det(x)),$$

où κ parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(E/F)$ et x ceux de $N_{E/F}(E^\times)\backslash F^\times$. On en déduit que

$$\frac{1}{d} \sum_\kappa \langle \Theta_{\kappa\pi}, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}} = \langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}}^1, \tag{3}$$

puis que

$$\langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'} \rangle_{\mathrm{e}}^1 = \begin{cases} m_\pi^{-1} & \text{si } \pi' \simeq \kappa\pi \text{ pour un caractère } \kappa \in \mathfrak{K}(E/F) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{4}$$

où m_π désigne le cardinal du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de π dans $\mathfrak{K}(E/F)$.

Démonstration du lemme: Pour tout caractère χ de $F^\times$, on a $\Theta_{\chi\pi}(\gamma) = \chi(\det(\gamma))\Theta_\pi(\gamma)$, et π se relève en Π si et seulement si $\chi\pi$ se relève en $\chi_E\Pi$. On peut donc supposer que π est une série discrète.

En prenant $\pi' = \pi$ dans la formule (4) ci-dessus, on obtient que la fonction caractère Θ_π n'est pas identiquement nulle sur $G(F)_{\mathrm{e}} \cap N(G(E))$.

Supposons que π se relève en Π, et soit π' une autre représentation irréductible générique de $G(F)$ se relevant en Π. Comme $\omega_\Pi = \omega_{\pi'} \circ N_{E/F}$, les caractères centraux ω_π et $\omega_{\pi'}$ ont même restriction à $N_{E/F}(E^\times)$, en particulier $\omega_{\pi'}$ est unitaire, et π' est essentiellement discrète si seulement si c'est une série discrète. Choisissons un isomorphisme A de Π sur Π^σ. Puisque Π relève π, la fonction caractère Θ_Π^A n'est pas identiquement nulle sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$. Si π' n'est pas une série discrète, alors c'est une induite parabolique stricte (cf. 3.2), et d'après 4.5, la fonction caractère $\Theta_{\pi'}$ est nulle sur $G(F)_{\mathrm{e}}$, ce qui implique que la fonction caractère Θ_Π^A est nulle sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$; contradiction. Donc π' est une série discrète, et la formule (3) ci-dessus implique qu'elle est isomorphe à $\kappa\pi$ pour un caractère $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$. □

Définition. – Une représentation lisse irréductible σ-stable Π de $G(E)$ est dite *σ-elliptique* si pour un (i.e. pour tout) isomorphisme A de Π sur Π^σ, la fonction caractère Θ_Π^A n'est pas identiquement nulle sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$.

Remarque. – D'après la démonstration du lemme, si Π relève une représentation lisse irréductible générique π de $G(F)$, alors Π est σ-elliptique si et seulement si π est essentiellement discrète.

II.4.9. – *On suppose maintenant, et jusqu'à la fin de cette section 4, que le théorème de 4.6 est démontré*, et l'on en tire les conséquences souhaitées.

Si T est un tore maximal de G défini sur F, on a la suite exacte longue de groupes topologiques

$$1 \to E^\times \backslash E^\times T(E)^{\sigma-1} \to E^\times \backslash T(E) \xrightarrow{N} N_{E/F}(E^\times)\backslash T(F),$$

et comme en 2.10, toute mesure de Haar sur $N_{E/F}(E^\times)\backslash T(F)$ détermine via N une mesure de Haar sur le groupe quotient $E^\times T(E)^{\sigma-1}\backslash T(E)$. Pour $T \in \mathscr{T}_{\mathrm{e}}$, on note $d\bar{\delta}_{T,\sigma}$ la mesure de Haar sur $E^\times T(E)^{\sigma-1}\backslash T(E)$ déterminée par $d\bar{\gamma}_T$.

Soient Π et Π' des séries σ-discrètes de $G(E)$ ayant même caractère central, disons χ, et soient π et π' des séries discrètes de $G(F)$ se relevant en Π et Π'. D'après le théorème de 4.6, l'entier m_π est déterminé par la classe d'isomorphisme de Π; on peut donc le noter m_Π. Posant

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\langle \Theta_\Pi^\sigma, \Theta_{\Pi'}^\sigma\rangle_{\sigma-\mathrm{e}} = \\ &\sum_{T\in\mathscr{T}_{\mathrm{e}}} |W_T(F)|^{-1}\int_{E^\times T(E)^{\sigma-1}\backslash T(E)} |D_G(N(\delta))|_F \Theta_\Pi^\sigma(\delta)\overline{\Theta_{\Pi'}^\sigma(\delta)}d\bar{\delta}_{T,\sigma},\end{aligned}$$

on a

$$(2)\qquad \langle \Theta_\Pi^\sigma, \Theta_{\Pi'}^\sigma\rangle_{\sigma-\mathrm{e}} = \langle \Theta_\pi, \Theta_{\pi'}\rangle_{\mathrm{e}}^1 = \begin{cases} m_\Pi^{-1} & \text{si } \Pi' \simeq \Pi \\ 0 & \text{sinon}\end{cases},$$

Toute fonction ϕ sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$, invariante par σ-conjugaison dans $G(E)$ et se transformant suivant χ sous l'action de $E^\times$ par translations, est de la forme $f\circ N$ pour une fonction f sur $N(G(F)_{\mathrm{e}})$, invariante par conjugaison dans $G(F)$ et se transformant suivant ω sous l'action de $N_{E/F}(E^\times)$ par translations, où ω désigne la restriction à $N_{E/F}(E^\times)$ du caractère central de π — on a donc $\Omega = \omega\circ N_{E/F}$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition (orthogonalité des caractères pour les séries σ-discrètes). – *Les fonctions caractères Θ_Π^σ, pour Π parcourant les classes d'isomorphisme de séries σ-discrètes de $G(E)$ de caractère central χ, forment une base orthogonale de l'espace préhilbertien — pour le produit scalaire défini par la formule (1) — formé des fonctions localement constantes ϕ sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$, qui sont invariantes par σ-conjugaison dans $G(E)$, se transforment suivant χ sous l'action de $E^\times$ par translations, et vérifient $\langle\phi,\phi\rangle_{\sigma-\mathrm{e}} < +\infty$.*

II.4.10. – Une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$, ou $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F),\omega)$ pour un caractère ω de $N_{E/F}(E^{\times})$, est dite *elliptique* si $\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)=0$ pour tout élément régulier non elliptique γ de $G(F)$. De même, une fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E)$, ou $\phi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(E),\chi)$ pour un caractère σ-stable χ de $E^{\times}$, est dite *σ-elliptique* si $\Lambda_{\sigma}^{G(E)}(\phi,\delta)=0$ pour tout élément σ-régulier non σ-elliptique δ de $G(E)$.

Pour $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$, le groupe $N_{E/F}(E^{\times})\backslash G_{\gamma}(F)$ est compact, et l'on suppose que la mesure $d\bar{g}_{\gamma}$ définissant l'intégrale orbitale $\Lambda^{G(F)}(\cdot,\gamma)$ est choisie de telle manière que

$$\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)=\int_{N_{E/F}(E^{\times})\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)d\bar{g}$$

pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$ (ou $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F),\omega)$).

D'après [**39**, 4.7], on a la formule des traces locales *simple* — c'est-à-dire pour les fonctions elliptiques — suivante.

LEMME 1. – *Soit ω un caractère unitaire du groupe $N_{E/F}(F^{\times})$, et soit $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F),\omega)$ une fonction elliptique. Alors pour tout élément $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$, on a*

$$\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)=\sum_{\pi}\Theta_{\pi}(f)\overline{\Theta_{\pi}(\gamma)}$$

où π parcourt les classes d'équivalence de séries discrètes de $G(F)$ de caractère central prolongeant ω.

REMARQUES. – (1) Dans [**39**, 4.7], on a montré la variante de la formule ci-dessus pour les intégrales orbitales κ-tordues, où κ est un caractère d'ordre fini du centre $F^{\times}$ de $G(F)$. En prenant $\kappa=1$, on obtient la formule des traces simples ci-dessus dans le cas où $E=F$. Il suffit ensuite de remarquer que pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F),\omega)$ et tout caractère η de $F^{\times}$ prolongeant ω, notant f_{η} la fonction $g \mapsto \frac{1}{d}\sum_{z\in F^{\times}/N_{E/F}(E^{\times})}\eta(z)f(zg)$ sur $G(F)$, on a $f=\sum_{\eta}f_{\eta}$; où η parcourt les caractères de $F^{\times}$ prolongeant ω.

(2) Si π est une représentation lisse irréductible *unitaire* de $G(F)$, pour tout élément $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}}$, on a

$$\overline{\Theta_{\pi}(\gamma)}=\Theta_{\check{\pi}}(\gamma).$$

On peut injecter cette égalité dans la formule des traces locale du lemme 1. Cela présente le double avantage de la rendre généralisable à une classe plus large de représentations (cf. le lemme 2 ci-dessous), et aussi, mais cela n'est pas notre objet ici, à des représentations à valeurs dans un espace vectoriel sur un corps qui n'est pas celui des nombres complexes.

(3) Soit Π une représentation lisse irréductible *unitaire* σ-stable de $G(E)$, et soit A un isomorphisme *unitaire* de Π sur Π^{σ} (cf. la remarque de 4.1). Puisque tout

produit scalaire hermitien $G(E)$-invariant $(\cdot,\cdot)$ sur l'espace de Π est A-invariant (ibidem), pour tout élément $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{r}}$, on a

$$\overline{\Theta_\Pi^A(\delta)} = \Theta_\Pi^{\check{A}}(\delta).$$

Si de plus Π est générique, toujours d'après la remarque de 4.1, on a

$$\overline{\Theta_\Pi^\sigma(\delta)} = \Theta_\Pi^\sigma(\delta).$$

LEMME 2 (variante du lemme 1). – *Soit ω un caractère (pas nécessairement unitaire) de $N_{E/F}(F^\times)$, et soit $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$ une fonction elliptique. Alors pour tout élément $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$, on a*

$$\Lambda^{G(F)}(f,\gamma) = \sum_\pi \Theta_\pi(f)\Theta_{\check{\pi}}(\gamma)$$

où π parcourt les classes d'équivalence de représentations essentiellement discrètes de $G(F)$ de caractère central prolongeant ω.

Démonstration. – Soit η un caractère de $F^\times$ tel que le caractère $\eta^n|_{N_{E/F}(F^\times)} \cdot \omega$ de $N_{E/F}(E^\times)$, que l'on note ω', soit unitaire. Alors l'application $\pi \mapsto \eta\pi$ induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations essentiellement discrètes de $G(F)$ de caractère central prolongeant ω, et l'ensemble des classes d'isomorphisme de séries discrètes de $G(F)$ de caractère central prolongeant ω'. Pour un tel π, posons $\pi' = \eta\pi$ et notons $f' \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega')$ la fonction $g \mapsto \eta(g)^{-1}f(g)$, où l'on a posé $\eta(g) = \eta\circ\det(g)$. Alors on a $\Theta_{\pi'}(f') = \Theta_\pi(f)$, et pour tout $\gamma \in G(F)_{\mathrm{r}}$, on a $\Lambda^{G(F)}(f',\gamma) = \eta(\gamma)^{-1}\Lambda^{G(F)}(f,\gamma)$ et $\Theta_{\check{\pi}'}(\gamma) = \eta(\gamma)^{-1}\Theta_{\check{\pi}}(\gamma)$. D'où le résultat, d'après le lemme 1 et la remarque (2). □

Pour $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$, le groupe $Z(E)\backslash G_\delta^\sigma(F)$ est compact, et l'on suppose que la mesure $d\bar{g}_\delta^\sigma$ définissant $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\cdot,\delta)$ est choisie de telle manière que

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta) = \int_{Z(E)\backslash G(E)} \phi(g^{-1}\delta g^\sigma)d\bar{g}_E$$

pour toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ (ou $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$). Si Π est une représentation essentiellement σ-discrète de $G(E)$, on choisit un caractère non ramifié (donc σ-stable) η de $G(E)$ tel que $\Pi\otimes\eta$ soit une série σ-discrète, et l'on pose $m_\Pi = m_{\Pi\otimes\eta}$. L'invariant m_Π est bien défini, i.e. il ne dépend pas du choix de η. La proposition suivante est impliquée par la conjecture de transfert (cf. la remarque de 2.5), que nous espérons démontrer dans un prochain article.

PROPOSITION (Formule des traces locale simple σ-tordue). – *Soit χ un caractère σ-stable de $E^\times$, et soit $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E),\chi)$ une fonction σ-elliptique. Si la conjecture de transfert est vérifiée (précisément, s'il existe une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F),\omega)$ telle* *que ϕ et f concordent, où ω est le caractère de $N_{E/F}(E^\times)$ tel que $\chi = \omega \circ N_{E/F}$), pour tout élément $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$, on a*

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = \sum_\Pi m_\Pi \Theta_\Pi^\sigma(\phi)\Theta_{\check{\Pi}}^\sigma(\delta)$$

g où Π parcourt les classes d'isomorphisme de représentations essentiellement σ-discrètes de $G(E)$ de caractère central χ.

Démonstration. – Soit une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F), \omega)$ telle que ϕ et f concordent. Puisque ϕ est σ-elliptique, f est elliptique. Soit $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$, et soit $\gamma \in G(F)_{\mathrm{e}}$ un élément associé à δ. D'après le lemme 2, on a

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = \sum_\pi \Theta_\pi(f)\Theta_{\check{\pi}}(\gamma)$$

où π parcourt les classes d'isomorphisme de représentations essentiellement discrètes de $G(E)$ de caractère central prolongeant ω. Pour chaque classe d'isomorphisme Π de représentations essentiellement σ-discrètes de $G(E)$ de caractère central χ, il existe m_Π classes d'isomorphisme de représentations essentiellement discrètes de $G(F)$ de caractère central prolongeant ω se relevant en Π, et si π est l'une d'elle, puisque $\check{\Pi}$ est σ-stable, essentiellement σ-discrète, et que c'est un relèvement de $\check{\pi}$ (remarque (5) de 2.9), on a

$$\Theta_\pi(f)\Theta_{\check{\pi}}(\gamma)) = \Theta_\Pi^\sigma(\phi)\Theta_{\check{\Pi}}^\sigma(\delta).$$

D'où la proposition. □

II.4.11. – Pour toute suite $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ d'entiers ≥ 1, on appelle série σ-discrète de $G_\alpha(E)$ une représentation de la forme $\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_m$ pour des séries σ-discrètes Π_i de $G_{\alpha_i}(E)$. Par transitivité des foncteurs induction parabolique, on obtient [**1**, ch. 1, lemma 6.4] que toute représentation lisse irréductible tempérée σ-stable Π de $G(E)$ est isomorphe à une induite parabolique $\iota_\alpha(\Pi)$ pour une partition α de n et une série σ-discrète Π de $G_\alpha(E)$.

D'après 3.5.(iii) et le lemme de 4.4, le théorème de 4.6 implique le théorème de 4.2 pour les représentations tempérées, c'est-à-dire la variante obtenue en remplaçant les représentations (lisses irréductibles) génériques à segment $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G(F)$ par les représentations tempérées de $G(F)$, et les représentations génériques de $G(E)$ par les représentations tempérées de $G(E)$.

II.4.12. – La proposition suivante et son corollaire sont des conséquences du point (4) du théorème de 4.6.

PROPOSITION. – *Soit* π *une représentation lisse irréductible cuspidale de* $G(F)$*, et soit* s *le cardinal du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de* ρ *dans* $\mathfrak{K}(E/F)$*. Soit* Π *un* σ*-relèvement de* π*. Alors* s *divise* n*,* $n = n_1 s$*, et* Π *est isomorphe à* $\Pi_1 \times \Pi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{s-1}}$ *pour une représentation lisse irréductible cuspidale* Π_1 *de* $G_{n_1}(E)$ *telle que* σ^s *engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de* Π_1 *dans* Σ.

Démonstration. – Puisque π est essentiellement discrète, Π est essentiellement σ-discrète, donc est isomorphe à une induite parabolique de la forme $\Pi_1 \times \Pi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{t-1}}$ pour une représentation essentiellement discrète Π_1 de $G_{m_1}(E)$, $n = m_1 t$, telle que σ^t engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Π_1 dans Σ. D'après le point (4) du théorème de 4.6, on a

$$L(\Pi, \check{\Pi}) = \prod_{\kappa} L(\pi, \kappa\check{\pi}),$$

où κ parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(E/F)$. D'après 3.5.(i), cela entraîne que Π a un pôle d'ordre s en 0, et aucun pôle sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. D'autre part, d'après 3.5.(iii), on a

$$L(\Pi, \check{\Pi}) = \prod_{i=0}^{t-1} \prod_{j=0}^{t-1} L(\Pi_1^{\sigma^{i+j}}, \check{\Pi}_1).$$

En particulier, $L(\Pi_1, \check{\Pi}_1)$ n'a pas de pôle sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, ce qui implique que Π_1 est cuspidale, et que $t = s$. □

Soit π une représentation essentiellement discrète de $G(F)$, et soit $\Delta = \Delta(\rho, a)$ un segment tel que π soit isomorphe à $L(\Delta)$. Soit s le cardinal du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de ρ dans $\mathfrak{K}(E/F)$. D'après la proposition, s divise $\frac{n}{a}$, $n = an_1 s$, et il existe une représentation lisse irréductible cuspidale Ξ_1 de $G_{n_1}(E)$ telle que σ^s engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Ξ_1 dans Σ, et $\Xi = \Xi_1 \times \Xi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Xi_1^{\sigma^{s-1}}$ soit un relèvement de ρ. Posons $\Delta_1 = \Delta(\Xi_1, a)$, et notons Π_1 la représentation essentiellement discrète $L(\Delta_1)$ de $G_{an_1}(E)$.

COROLLAIRE. – *La représentation* $\Pi_1 \times \Pi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{s-1}}$ *est un* σ*-relèvement de* π.

Démonstration. – Soit Π un σ-relèvement de π. C'est une représentation essentiellement σ-discrète de $G(E)$, par suite il existe une représentation essentiellement discrète Π_1' de $G_{m_1}(E)$, $n = m_1 t$, telle que σ^t engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Π_1' dans Σ, et Π soit isomorphe à $\Pi_1' \times \Pi_1'^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_1'^{\sigma^{t-1}}$. Soit $\Delta' = \Delta(\Xi_1', b)$ un segment tel que Π_1' soit isomorphe à $L(\Delta')$, où Ξ_1' est une représentation lisse irréductible cuspidale de $G_{k_1}(E)$, $m_1 = k_1 b$. D'après le point (4) du théorème de 4.6, on a

$$L(\Pi, \check{\Xi}) = \prod_{\kappa} L(\pi, \kappa\check{\rho}),$$

où κ parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(E/F)$. D'après 3.5.(ii), pour $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$ et $\mu \in \mathbb{C}$, on a

$$L(\pi, \kappa\check{\rho})(\mu) = L(\rho, \kappa\check{\rho})(\mu + a - 1),$$

d'où l'on déduit que $L(\Pi, \check{\Xi})$ a un pôle d'ordre s en $1-a$, et aucun pôle sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{1-a\}$. D'autre part, d'après 3.5.(iii), on a aussi

$$L(\Pi, \check{\Xi}) = \prod_{i=0}^{s-1} \prod_{j=0}^{t-1} L(\Pi_1'^{\sigma^{i+j}}, \check{\Xi}_1),$$

et à nouveau d'après 3.5.(ii), pour $\mu \in \mathbb{C}$, on a

$$L(\Pi_1'^{\sigma^{i+j}}, \check{\Xi}_1)(\mu) = L(\Xi_1'^{\sigma^{i+j}}, \check{\Xi}_1)(\mu + b - 1).$$

On en déduit que $k_1 = n_1$, que la classe d'isomorphisme de Ξ_1' appartient à l'orbite sous Σ de celle de Ξ_1, et que $b = a$. Comme $m_1 = k_1 b = n_1 a = \frac{n}{s}$, on a $t = s$, et la classe d'isomorphisme de Π_1' appartient à l'orbite sous Σ de celle de Π_1. Donc Π est isomorphe à $\Pi_1 \times \Pi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^s}$. □

Remarque. – Soit Π une représentation essentiellement σ-discrète de $G(E)$. Choisissons une paire (s, Π_1) formée d'un entier $s \geq 1$ divisant n et d'une représentation essentiellement discrète Π_1 de $G_{n/s}(E)$, telle que σ^s engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Π_1 dans Σ, et $\Pi \simeq \Pi_1 \times \Pi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{s-1}}$. Soit $\Delta_1 = \Delta(\Xi_1, a)$ un segment tel que $\Pi_1 \simeq L(\Delta_1)$, où Ξ_1 est une représentation lisse irréductible cuspidale de $G_{n_1}(E)$, $\frac{n}{s} = n_1 a$. Puisque pour $i \in \mathbb{Z}$, on a $\Pi_1^{\sigma^i} \simeq L(\Delta(\Xi_1^{\sigma^i}, a))$, le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Ξ_1 dans Σ est le sous-groupe engendré par σ^s. La classe d'isomorphisme de Π détermine le triplet $(s, \Xi_1; a)$ à Σ-conjugaison et isomorphisme de Ξ_1 près. La représentation $\Xi_1 \times \Xi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Xi_1^{\sigma^{s-1}}$ de $G_{n_1 s}(E)$ est essentiellement σ-discrète, donc relève une représentation essentiellement discrète ρ de $G_{n_1 s}(F)$. D'après le corollaire, ρ est cuspidale, s est le cardinal du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de ρ dans $\mathfrak{K}(E/F)$, et la représentation essentiellement discrète $\pi = L(\rho, a)$ de $G(F)$ se relève en Π.

Notons que si π est cuspidale (i.e. si $\pi = \rho$), alors Π est cuspidale si et seulement si c'est une série discrète. D'autre part, π est cuspidale si et seulement si Π est isomorphe à l'induite parabolique d'une représentation lisse irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi de $G(E)$.

II.4.13. – On peut désormais démontrer complètement le théorème de 4.2.

Soit π une représentation lisse irréductible générique à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G(F)$. Écrivons $\pi \simeq L(\Delta_1) \times \cdots \times L(\Delta_m)$ pour des segments $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ deux à deux non liés. Pour $i = 1, \ldots, m$, soit Π_i une représentation essentiellement σ-discrète de $G_{n_i}(E)$ relevant la représentation essentiellement discrète $\pi_i = L(\Delta_i)$ de $G_{n_i}(F)$.

Posons $\Pi = \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_m$; c'est une représentation lisse de $G(E)$, et d'après le lemme de 4.4, pour montrer qu'elle relève π, il suffit de montrer qu'elle est irréductible. Pour $i = 1, \ldots, m$, écrivons $\Pi_i \simeq \Pi_{i,1} \times \Pi_{i,1}^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_{i,1}^{\sigma^{s_i-1}}$ pour une représentation essentiellement discrète $\Pi_{i,1}$ de $G_{m_i}(E)$, $n_i = m_i s_i$, telle que σ^{s_i} engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de $\Pi_{i,1}$ dans Σ. Supposons qu'il existe deux indices $i \neq j$ et deux entiers k_i et k_j, avec $0 \leq k_i \leq s_i - 1$ et $0 \leq k_j \leq s_j - 1$, tels que les segments attachés à $\Pi_{i,1}^{\sigma^{k_i}}$ et $\Pi_{j,1}^{\sigma^{k_j}}$ soient liés. D'après le corollaire de 4.12, cela entraîne qu'il existe un caractère $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$ tel que les segments Δ_i et $\kappa\Delta_j$ soient liés, ce qui est impossible puisqu'on a supposé π à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers. Donc Π est irréductible (et générique), et $c(\pi, I_\sigma(\Pi)) = \prod_{i=1}^{m} c(\pi_i, I_\sigma(\Pi_i)) = 1$. Le point (1) du théorème de 4.2 est démontré.

De la même manière, on obtient le point (2), i.e. la surjectivité de l'application de relèvement pour les représentations génériques. Le point (3) résulte du fait que pour les représentations essentiellement discrètes, la notion de relèvement ne dépend pas du choix de σ. Quant au point (4), c'est une simple conséquence de 3.5.(iii) et du théorème de 4.6.

D'après le raisonnement plus haut, on a aussi:

LEMME. – *Soit* Π *une représentation lisse irréductible générique* σ*-stable de* $G(E)$*, et soit* π *représentation lisse irréductible générique à segments* $\mathfrak{K}(E/F)$*-réguliers de* $G(F)$ *se relevant en* Π*. Écrivons* $\pi \simeq \pi_1 \times \cdots \times \pi_m$ *pour des représentations essentiellement discrètes* π_i *de* $G_{n_i}(F)$*. Alors toute autre représentation lisse irréductible générique à segments* $\mathfrak{K}(E/F)$*-réguliers de* $G(F)$ *se relevant en* Π*, est isomorphe à* $\kappa_1\pi_1 \times \cdots \times \kappa_m\pi_m$ *pour des caractères* $\kappa_i \in \mathfrak{K}(E/F)$*.*

REMARQUES. – (1) Soit π une représentation lisse générique à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G(F)$, et soit Π un σ-relèvement de π. Alors Π est tempérée si et seulement si π est tempérée.

(2) D'après la remarque de 4.8 et les théorèmes de 4.2 et 4.6, une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$ est σ-elliptique si et seulement si elle est essentiellement σ-discrète. On donnera dans la section suivante une preuve directe de ce résultat (proposition 1 de 5.15), indépendante des théorèmes de 4.2 et 4.6.

(3) Grâce à la classification de Zelevinski-Tadić des représentations lisses irréductibles unitaires de $G(F)$ (cf. [**4**]), il est possible de montrer — ce que l'on compte faire plus tard —, que toute représentation lisse irréductible *unitaire* σ-stable de $G(E)$ est un σ-relèvement.

(4) Si E est une extension finie de F formée d'extensions cycliques successives, disons E_i/E_{i+1}, $i = 0, \ldots, m-1$, avec $E_0 = E$ et $E_m = F$, alors par relèvements successifs de $G(E_{i+1})$ à $G(E_i)$, on obtient une application de relèvement entre

les séries discrètes de $G(F)$ et les séries σ-discrètes de $G(E)$. On peut montrer — mais nous ne le ferons pas ici — que cette application ne dépend pas de la décomposition $E = E_0/E_1/\cdots/E_m = F$ choisie, et ensuite l'étendre à toutes les représentations lisses irréductibles génériques unitaires (ou plus généralement vérifiant une certaine condition de régularité).

II.4.14. – Dans ce n°, on vérifie que pour les représentations génériques non ramifiées, la notion de σ-relèvement correspond bien, via les correspondances de Langlands locales pour F et E, à la restriction des représentations de W_F à W_E, où W_F désigne le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur F.

Rappelons qu'une représentation lisse irréductible non ramifiée de $G(F)$ est générique si elle est isomorphe à $\eta_1 \times \cdots \times \eta_n$ pour des caractères non ramifiés $\eta_1, \ldots, \eta_n$ de $F^\times$ tels que $\eta_i \neq \nu\eta_j$ pour tous $i \neq j$; si de plus $\kappa\eta_i \neq \nu\eta_j$ pour tous $i \neq j$ et tout caractère $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$, elle est à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers.

Si π est une représentation lisse irréductible générique non ramifiée de $G(F)$, on note $\tau(\pi)$ la représentation de W'_F qui lui correspond par la correspondance de Langlands locale non ramifiée. Si Π est une représentation lisse irréductible générique non ramifiée de $G(E)$, on définit $\tau(\Pi)$ de la même manière.

Lemme. – *Supposons que E soit une extension non ramifiée de F. Soit π une représentation lisse irréductible générique non ramifiée à segments $\mathfrak{K}(E/F)$-réguliers de $G(F)$, et soit Π un σ-relèvement de $G(E)$. Alors Π est non ramifiée, et $\tau(\Pi)$ est la restriction de $\tau(\pi)$ à W'_E.*

Démonstration. – Supposons que le caractère additif ψ de F soit de conducteur $\mathfrak{o}_F$, c'est-à-dire trivial sur $\mathfrak{o}_F$, mais pas sur $\mathfrak{p}_F^{-1}$. Alors $\Psi_E = \psi \circ N_{E/F}$ est de conducteur $\mathfrak{o}_E$. Puisque pour chaque $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$, la représentation $\kappa\pi$ est non ramifiée, l'exposant $f(\kappa\pi, \psi)$ de son conducteur vaut 0; rappelons que cet exposant est défini par $\epsilon(\pi', \psi)(s) = \epsilon(\pi', \psi)(\frac{1}{2})q^{f(\pi',\psi)(\frac{1}{2}-s)}$ pour toute représentation lisse irréductible générique π' de $G(F)$. Comme $\epsilon(\Pi, \psi) = \lambda(E/F, \psi)^{-n}\prod_\kappa \epsilon(\kappa\pi, \psi)$, l'exposant $f(\Pi, \psi_E)$ du conducteur de Π vaut lui aussi 0, et Π est non ramifiée.

Si $n = 1$, alors π est un caractère non ramifié de $F^\times$, disons χ, et $\Pi = \chi \circ N_{E/F}$ est l'unique caractère non ramifié de $E^\times$ prolongeant χ^d. Dans ce cas le lemme est vrai. En général, on écrit $\pi \simeq \eta_1 \times \cdots \times \eta_n$ pour des caractères non ramifiés η_i de $F^\times$ tels que pour tous $i \neq j$ et tout $\kappa \in \mathfrak{K}(E/F)$, on ait $\kappa\eta_i \neq \nu\eta_j$. D'après 4.13, posant $\eta_{i,E} = \eta_i \circ N_{E/F}$, on a $\Pi \simeq \eta_{1,E} \times \cdots \times \eta_{n,E}$, d'où le lemme. □

II.5. Pseudo-coefficients des séries σ-discrètes

II.5.1. – Dans tout cette section 5, on suppose que la F-algèbre cyclique E est un corps. L'objectif est de démontrer qu'il existe des pseudo-coefficients pour les séries σ-discrètes de $G(E)$ — c'est la proposition de 5.13. L'ingrédient principal est le théorème de Paley-Wiener σ-tordu, dû à Rogawski [**67**]. Ce théorème est énoncé en 5.7, après qu'on a organisé en une catégorie adéquate les représentations lisses σ-stables Π de $G(E)$ et les opérateurs d'entrelacement entre Π et Π^σ.

On note:

— $\mathfrak{R}(G(F))$ la catégorie des représentations lisses de $G(F)$;
— $\epsilon(G(F))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $G(F)$;
— $\mathscr{G}(G(F))$ le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de $G(F)$;
— $\Psi(G(F))$ le groupe des caractères non ramifiés de $G(F)$.

En d'autres termes, $\mathscr{G}(F)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\epsilon(G(F))$, et $\Psi(G(F))$ est le groupe des caractère de $G(F)$ de la forme η^s, $s \in \mathbb{C}^\times$, où l'on a posé $\eta = \nu \circ \det$.

On peut évidemment, dans les définitions ci-dessus, remplacer le corps de base F par n'importe quelle extension finie de F, par exemple E. Pour tout Σ-ensemble $\mathfrak{X}$, on notera $\mathfrak{X}^\sigma$ le sous-ensemble de $\mathfrak{X}$ formé des éléments fixés par σ — éventuellement muni de structures supplémentaires héritées de $\mathfrak{X}$ —, et $\mathfrak{X}/\sigma$ l'ensemble des Σ-orbites dans $\mathfrak{X}$. Par exemple, l'application qui à une représentation lisse Π de $G(E)$ associe la représentation Π^σ, est fonctorielle en Π. Elle induit donc un automorphisme du groupe $\mathscr{G}(G(E))$, encore noté $\Pi \mapsto \Pi^\sigma$, qui stabilise $\epsilon(G(E))$. On obtient une action de Σ sur $\mathscr{G}(G(E))$ qui stabilise $\epsilon(G(E))$, et $\mathscr{G}(G(E))^\sigma$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\epsilon(G(E))/\sigma$; où l'on identifie une Σ-orbite $\{\Pi_1, \Pi_1^\sigma, \ldots, \Pi_1^{\sigma^{s-1}}\}$ dans $\epsilon(G(E))$ à l'élément $\Pi_1 + \Pi_1^\sigma + \cdots + \Pi_1^{\sigma^{s-1}}$ de $\mathscr{G}(G(E))^\sigma$.

On pose $\nu_E = |\ |_E$ et $\eta_E = \nu_E \circ \det : G(E) \to \mathbb{Q}^\times$. Ainsi $\Psi(G(E))$ est formé des caractères η_E^s, $s \in \mathbb{C}^\times$, et comme $\eta_E \circ \sigma = \eta_E$, tout caractère non ramifié de $G(E)$ est σ-stable, i.e. on a

$$\Psi(G(E))^\sigma = \Psi(G(E)).$$

II.5.2. – Il y a différentes manières — à peu près équivalentes — d'organiser les représentations lisses σ-stables Π de $G(E)$ et les opérateurs d'entrelacement A entre Π et Π^σ: on peut par exemple comme dans [**1**] et [**67**] considérer les représentations lisses du groupe non connexe $G(E) \rtimes \Sigma$, ou bien celles de l'espace tordu $G(E)\sigma$ de Labesse [**52**, I.3]. On a choisi une notion intermédiaire, en imposant que l'opérateur A^d soit un multiple de l'identité de l'espace de Π.

On appelle *σ-représentation* de $G(E)$ la donnée d'un couple (Π, A) où Π est une représentation lisse σ-stable de $G(E)$ et A est un isomorphisme de Π sur Π^σ tel que $A^d = \lambda \mathrm{Id}_{V_\Pi}$ pour un nombre complexe (non nul) λ, où V_Π désigne l'espace de Π et $A^d = A \circ \cdots \circ A$ (d fois). Un morphisme entre deux σ-représentations (Π, A) et (Π', A') de $G(E)$ est par définition un morphisme u entre Π et Π' tel que $u \circ A = A' \circ u$; si de plus u est un $\mathbb{C}$-isomorphisme (alors c'est un isomorphisme entre Π et Π'), on dit que c'est un *isomorphisme* entre (Π, A) et (Π', A'). Les σ-représentations de $G(E)$ munies de leurs morphismes, forment une catégorie $\mathfrak{R}(G(E), \sigma)$, qui en général n'est pas abélienne: pour un morphisme u entre deux σ-représentations (Π, A) et (Π', A') de $G(E)$, les sous—représentations $\ker u$ de Π et $\mathrm{Im} u$ de Π' sont bien définies, mais peuvent ne pas être σ-stables. On a cependant des notions évidentes de *sous–σ-représentation* et de *σ-représentation quotient* d'une σ-représentation de $G(E)$, et de suite exacte courte dans $\mathfrak{R}(G(E), \sigma)$.

Une σ-représentation (Π, A) de $G(E)$ est dite *irréductible* si le seul sous-espace $G(E)$-stable non nul W de V_Π tel que $A(W) = W$, est V_Π lui-même; si de plus Π est irréductible, elle est dite *fortement irréductible*. Si (Π, A) est une σ-représentation irréductible de $G(E)$, alors les endomorphismes de (Π, A) forment un espace de dimension 1 (lemme de Schur); on en déduit que tout autre isomorphisme de Π sur Π^σ est de la forme $A' = \lambda A$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}^\times$.

On note:

— $\epsilon(G(E), \sigma)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de σ-représentations irréductibles de $G(E)$;
— $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ le groupe de Grothendieck des σ-représentations de longueur finie de $G(E)$, c'est-à-dire le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\epsilon(G(E), \sigma)$.

On note aussi:

— $\epsilon_0(G(E), \sigma)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de σ-représentations fortement irréductibles de $G(E)$ — c'est un sous-ensemble de $\epsilon(G(E), \sigma)$;
— $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\epsilon_0(G(E), \sigma)$ — c'est un sous-groupe de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$.

NOTATIONS. – Si (Π, A) est une σ-représentation de longueur finie de $G(E)$, on note $[\Pi, A]$ son image dans $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$. Par abus d'écriture, on note encore (Π, A) les éléments de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$; un tel élément est de la forme $(\Pi, A) = \sum_{i=1}^m a_i [\Pi_i, A_i]$ pour des σ-représentations irréductibles (Π_i, A_i) de $G(E)$ deux à deux non isomorphes et des entiers non nuls a_i.

II.5.3. – Si (Π, A) est une σ-représentation de $G(E)$, pour tout caractère $\psi \in \Psi(G(E))$, on note (Π_ψ, A_ψ) la σ-représentation de $G(E)$ définie par $\Pi_\psi = \Pi \otimes \psi$ et $A_\psi = A$. On obtient ainsi une action de $\Psi(G(E))$ sur $\epsilon(G(E), \sigma)$ qui stabilise $\epsilon_0(G(E), \sigma)$; d'où par linéarité une action de $\Psi(G(E))$ sur $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$, encore notée

$$\psi \times (\Pi, A) \mapsto (\Pi_\psi, A_\psi),$$

qui stabilise $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$.

Si (Π, A) est une σ-représentation de $G(E)$, pour tout nombre complexe λ non nul, $(\Pi, \lambda A)$ en est une autre. On obtient ainsi une action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\epsilon(G(E), \sigma)$ qui stabilise $\epsilon_0(G(E), \sigma)$; d'où par linéarité une action de $\mathbb{C}^\times$ sur $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$, encore notée

$$\lambda \times (\Pi, A) \mapsto (\Pi, \lambda A),$$

qui stabilise $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$.

On peut bien sûr, dans les définitions et notations précédentes, remplacer σ par n'importe quel autre élément de Σ. Soit σ' un tel élément. Si (Π, A) est un objet de $\mathfrak{R}(G(E), \sigma')$, alors (Π^σ, A) en est un autre, et si u est un morphisme entre deux σ'-représentations (Π, A) et (Π', A') de $G(E)$, alors c'est aussi un morphisme entre les σ'-représentations (Π^σ, A) et (Π'^σ, A'). On obtient ainsi un automorphisme de la catégorie $\mathfrak{R}(G(E), \sigma')$, et une action de Σ sur $\epsilon(G(E), \sigma')$ qui stabilise $\epsilon_0(G(E), \sigma')$; d'où par linéarité une action de Σ sur $\mathscr{G}(G(E), \sigma')$, encore notée

$$\sigma^i \times (\Pi, A) \mapsto (\Pi^{\sigma^i}, A), \quad i \in \mathbb{Z},$$

qui stabilise $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma')$.

II.5.4. – Soit $s \geq 1$ un entier divisant d. On définit comme suit un foncteur

$$\iota^s : \mathfrak{R}(G(E), \sigma^s) \to \mathfrak{R}(G(E), \sigma).$$

Pour toute σ^s-représentation (Π_0, A_0) de $G(E)$, on note $\iota^s(\Pi_0, A_0)$ la σ-représentation (Π, A) de $G(E)$ donnée par $\Pi = \oplus_{i=0}^{s-1} \Pi_0^{\sigma^i}$ et $A(v_0, v_1, \ldots, v_{s-1}) = (v_1, \ldots, v_{s-1}, A_0(v_0))$, $v_i \in V_{\Pi_0}$. Pour tout morphisme u entre deux σ^s-représentations (Π_0, A_0) et (Π'_0, A'_0) de $G(E)$, on note $\iota^s(u)$ le morphisme entre $(\Pi, A) = \iota^s(\Pi_0, A_0)$ et $(\Pi', A') = \iota^s(\Pi'_0, A'_0)$ donné par $\iota^s(u) = u^{\times s}$. Par construction, le foncteur ι^s envoie représentation de longueur finie sur représentation de longueur finie, donc induit un morphisme de groupes

$$\mathscr{G}(G(E), \sigma^s) \to \mathscr{G}(G(E), \sigma),$$

encore noté ι^s.

Lemme (Rogawski [**67**, lemma 2.1]). – *Soit* (Π, A) *une* σ*-représentation irréductible de* $G(E)$. *Il existe un entier* $s \geq 1$ *divisant* d *et une* σ^s*-représentation fortement irréductible* (Π_0, A_0) *de* $G(E)$ *telle que* σ^s *engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de* Π_0 *dans* Σ *et* (Π, A) *soit isomorphe à* $\iota^s(\Pi_0, A_0)$. *La classe* *d'isomorphisme de* Π *détermine l'entier* s*, que l'on note* $s(\Pi)$*, et la classe d'isomorphisme de* (Π, A) *détermine celle de* (Π_0, A_0) *à* Σ*-conjugaison près.*

D'après le lemme, si (Π, A) est une σ-représentation irréductible de $G(E)$, alors la représentation Π est admissible et de longueur finie. On en déduit que (Π, A) est de longueur finie (comme σ-représentation de $G(E)$) si et seulement si Π est de longueur finie. Le foncteur d'oubli de $\mathfrak{R}(G(E), \sigma)$ dans $\mathfrak{R}(G(E))$ induit donc un morphisme de groupes

$$\mathscr{G}(G(E), \sigma) \to \mathscr{G}(G(E))^\sigma.$$

Ce morphisme est surjectif, et donne par restriction une application surjective

$$\epsilon_0(G(E), \sigma) \to \epsilon(G(E))^\sigma,$$

dont les fibres sont les $\mathbb{C}^\times$-orbites de $\epsilon_0(G(E), \sigma)$.

On peut voir $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$ comme le quotient de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ par le sous-groupe $\mathscr{G}_{>0}(G(E), \sigma)$ de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ engendré par l'ensemble $\epsilon_{>0}(G(E), \sigma)$ des classes d'isomorphisme de σ-représentations irréductibles (Π, A) de $G(E)$ telles que $s(\Pi) - 1 > 0$. D'après le lemme, on obtient plus généralement une application surjective

$$\epsilon(G(E), \sigma) \to \epsilon(G(E))/\sigma,$$

dont les fibres sont les $\mathbb{C}^\times$-orbites de $\epsilon(G(E), \sigma)$.

Soit $\mathscr{G}_{0+}(G(E), \sigma)$ le sous-groupe de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ engendré par $\mathscr{G}_{>0}(G(E), \sigma)$ et par les éléments de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ de la forme $\sum_{i=0}^{t-1} (\Pi, \mu^i A)$ pour un élément (Π, A) de $\epsilon_0(G(E), \sigma)$, un entier $t > 1$ et une racine primitive t-ième de l'unité μ. On pose

$$\overline{\mathscr{G}}(G(E), \sigma) = \mathscr{G}(G(E), \sigma)/\mathscr{G}_{0+}(G(E), \sigma).$$

C'est un quotient de $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$.

Remarque. – Pour tout élément (Π, A) de $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$, on note encore Θ_Π^A la distribution sur $G(E)$ définie par linéarité comme en 2.7. Pour $\phi \in C_c^\infty(G(E))$, la forme $\mathbb{Z}$-linéaire $(\Pi, A) \mapsto \Theta_\Pi^A(\phi)$ sur $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$ se factorise à travers $\overline{\mathscr{G}}(G(E), \sigma)$: pour $(\Pi, A) \in \mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, on a $\Theta_\Pi^{\lambda A} = \lambda \Theta_\Pi^A$, et pour toute racine t-ième de l'unité μ, on a $\sum_{i=0}^{t-1} \mu^i = 0$.

II.5.5. – Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ une partition de n. Les définitions introduites pour $G(E)$ dans les n° précédents, s'étendent naturellemment à $G_\alpha(E)$. Notons que $\mathfrak{R}(G_\alpha(E), \sigma)$ est le produit des catégories $\mathfrak{R}(G_{\alpha_i}(E), \sigma)$ pour $i = 1, \ldots, m$. D'autre part, le lemme de 5.4 étant valable pour n'importe quel groupe réductif connexe G défini sur F, il l'est en particulier pour G_α. L'application qui à une σ-représentation (Π, A) de $G_\alpha(E)$ associe la σ-représentation $\iota_\alpha(\Pi, A) = (\iota_\alpha(\Pi), \iota_\alpha(A))$ de $G(E)$ — cf. 4.4 pour la définition de $\iota_\alpha(A)$ —, est fonctorielle en (Π, A), et compatible au foncteur induction parabolique normalisée de $\mathfrak{R}(G_\alpha(E))$ dans $\mathfrak{R}(G(E))$. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}(G_\alpha(E),\sigma) & \xrightarrow{\iota_\alpha} & \mathfrak{R}(G(E),\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{R}(G_\alpha(E)) & \xrightarrow[\iota_\alpha]{} & \mathfrak{R}(G(E)) \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs d'oubli. Comme les foncteurs d'oubli préservent la propriété d'être de longueur finie, le foncteur $\iota_\alpha : \mathfrak{R}(G_\alpha(E),\sigma) \to \mathfrak{R}(G(E),\sigma)$ préserve lui aussi cette propriété, donc induit un morphisme de groupes $\mathscr{G}(G_\alpha(E),\sigma) \to \mathscr{G}(G(E),\sigma)$, que l'on note encore ι_α.

II.5.6. – On appelle *paire cuspidale (dans $G(E)$)* un couple (α,ρ) formé d'une partition α de n et d'une représentation lisse irréductible cuspidale ρ de $G_\alpha(E)$. Notons $\mathfrak{S}_n$ le sous-groupe de $G(\mathbb{Z})$ formé des matrices de permutation. Si α est une partition de n, pour $w \in \mathfrak{S}_n$, on note $w\alpha$ la partition de n donnée par $G_{w\alpha} = wG_\alpha w^{-1}$. Deux paires cuspidales (α,ρ) et (β,ρ') sont dites *équivalentes* s'il existe un élément w de $\mathfrak{S}_n$ tel que $w\alpha = \beta$ et $\rho^w \simeq \rho'$, où ρ^w désigne la représentation $g \mapsto \rho(w^{-1}gw)$ de $G_\beta(E)$; elles sont dites *inertiellement équivalentes* s'il existe un élément w de $\mathfrak{S}_n$ et un caractère non ramifié ψ' de $G_\beta(E)$, tels que $w\alpha = \beta$ et $\rho^w \simeq \rho' \otimes \psi$.

Soit $\mathfrak{B}(G(E))$ l'ensemble des classes d'équivalence inertielle de paires cuspidales. Si π est une représentation lisse irréductible de $G(E)$, il existe une paire cuspidale (α,ρ) telle que π est isomorphe à un sous-quotient de l'induite parabolique $\iota_\alpha(\rho)$. De plus, la classe d'équivalence — et a fortiori la classe d'équivalence inertielle — de (α,ρ) est déterminée par la classe d'isomorphisme de π. On obtient donc une application surjective $j : \epsilon(G(E)) \to \mathfrak{B}(G(E))$, qui est Σ-équivariante pour l'action naturelle de σ sur $\mathfrak{B}(G(E))$, c'est-à-dire celle induite par $(\alpha,\rho) \mapsto (\alpha,\rho^\sigma)$. En particulier, j envoie $\epsilon(G(E))^\sigma$ dans $\mathfrak{B}(G(E))^\sigma$. Pour une σ-représentation fortement irréductible (Π, A) de $G(E)$, on pose $j(\Pi,A) = j(\Pi)$. D'après 5.4, l'application

$$j : \epsilon_0(G(E),\sigma) \to \mathfrak{B}(G(E))^\sigma$$

ainsi définie, se prolonge en une application

$$j : \epsilon(G(E),\sigma) \to \mathfrak{B}(G(E))/\sigma.$$

Précisément, pour une σ-représentation irréductible (Π, A) de $G(E)$, on écrit $(\Pi, A) \simeq \iota^s(\Pi_0, A_0)$, $s = s(\Pi)$, pour une σ^s-représentation fortement irréductible de $G(E)$, et l'on note $j(\Pi, A) = j(\Pi)$ la Σ-orbite de $j(\Pi_0)$ dans $\mathfrak{B}(G(E))$.

II.5.7. – Le théorème suivant, dit de Paley-Wiener (tordu), caractérise les formes $\mathbb{Z}$-linéaires sur $\mathscr{G}_0(G(E),\sigma)$ du type $(\Pi,A)\mapsto\Theta_\Pi^A(\phi)$ pour une fonction $\phi\in C_c^\infty(G(E))$.

Soit $\mathscr{G}_0^*(G(E),\sigma)$ l'espace des formes $\mathbb{Z}$-linéaires $\Phi:\mathscr{G}_0(G(E),\sigma)\to\mathbb{C}$ vérifiant

$$\Phi(\Pi,\lambda A)=\lambda\Phi(\Pi,A),\quad \lambda\in\mathbb{C}^\times$$

pour tout élément (Π,A) de $\epsilon_0(G(E),\sigma)$. D'après la remarque de 5.4, tout élément de $\mathscr{G}_0^*(G(E),\sigma)$ se factorise à travers $\mathscr{G}_{0+}(G(E),\sigma)$.

Rappelons que pour toute partition α de n, le groupe $\Psi(G_\alpha(E))$ est un tore complexe de dimension $l(\alpha)$.

NOTATION. – Si (Π,A) est une σ-représentation de longeur finie de $G(E)$, on note $[\Pi,A]$ son image dans $\mathscr{G}(G(E),\sigma)$.

THÉORÈME (Rogawski [**67**]). – *Pour tout élément Φ de $\mathscr{G}_0^*(G(E),\sigma)$, les conditions* (A) *et* (B) *suivantes sont équivalentes:*

(A) *Les deux propriétés suivantes sont satisfaites:*
   (i) *il existe un sous-ensemble fini $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{B}(G(E))^\sigma$ tel que pour toute σ-représentation fortement irréductible* (Π,A) *de $G(E)$ telle que $j(\Pi)\notin\mathfrak{S}$, on a $\Phi[\Pi,A]=0$;*
   (ii) *pour toute partition α de n et toute σ-représentation fortement irréductible* (Π,A) *de $G_\alpha(E)$, la fonction $\psi\mapsto\Phi(\iota_\alpha[\Pi_\psi,A_\psi])$ sur $\Psi(G_\alpha(E))$ est régulière.*

(B) *Il existe une fonction ϕ sur $G(E)$, localement constante et à support compact, telle que $\Phi[\Pi,A]=\Theta_\Pi^A(\phi)$ pour toute σ-représentation fortement irréductible* (Π,A) *de $G(E)$.*

REMARQUES. – (1) D'après [**5**, 3.7 et 3.9], on peut remplacer la condition (i) par la condition (i)' suivante: il existe un sous-groupe ouvert compact J de $G(E)$ tel que pour toute σ-représentation fortement irréductible (Π,A) de $G(E)$ n'ayant pas de vecteur non nul fixé par J, on a $\Phi[\Pi,A]=0$.

(2) On verra en 5.12 (lemme 2) que l'on peut remplacer dans la condition (*ii*) l'hypothèse “pour toute σ-représentation fortement irréductible (Π,A) de $G_\alpha(E)$”par “pour toute σ-représentation fortement irréductible *tempérée* (Π,A) de $G_\alpha(E)$”, c'est-à-dire telle que Π soit tempérée.

Le théorème de Paley-Wiener nous permettra en 5.13 de produire des pseudo-coefficients pour les séries σ-discrètes de $G(E)$. Les numéros 5.8 – 5.12 préparent à cette construction.

II.5.8. – Commençons par vérifier la version tordue du résultat bien connu suivant: toute représentation lisse irréductible générique elliptique de $G(E)$ est essentiellement discrète.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ une partition de n, on note $\Psi(G_\alpha(E))^+$ le sous-ensemble de $\Psi(G_\alpha(E))$ formé des caractères *positifs par rapport à* $P_\alpha(E)$, c'est-à-dire de la forme $\eta_{E,1}^{a_1} \otimes \cdots \otimes \eta_{E,m}^{a_m}$ pour des nombres réels a_i tels que $a_1 < \cdots < a_m$; où $\eta_{E,i}$ désigne ici le caractère $\nu_E \circ \det$ de $G_{\alpha_i}(E)$.

Soit Π une représentation lisse irréductible de $G(E)$. D'après le théorème du quotient de Langlands, il existe une partion α de n, une représentation lisse irréductible tempérée Ξ de $G_\alpha(E)$, et un caractère $\psi \in \Psi(G_\alpha(E))^+$, tels que Π soit isomorphe à l'unique quotient irréductible, disons $L_{\alpha,\Xi,\psi}$, de l'induite parabolique $\iota_\alpha(\Xi_\psi)$. De plus, la classe d'isomorphisme de Π détermine le triplet (α, Ξ, ψ) — appelé *triplet de Langlands (dans $G(E)$)* — à isomorphisme de Ξ près, et est déterminée par lui. Supposons de plus que Π soit σ-stable. Alors Ξ l'est aussi, et Π^σ est isomorphe à $L_{\alpha,\Xi^\sigma,\psi}$. Soit B un isomorphisme de Ξ sur Ξ^σ. L'isomorphisme $\iota_\alpha(B_\psi)$ de $\iota_\alpha(\Xi_\psi)$ sur $\iota_\alpha(\Xi_\psi)^\sigma$ envoie $L_{\alpha,\Xi,\psi}$ sur $L_{\alpha,\Xi^\sigma,\psi}$, donc définit un isomorphisme A de Π sur Π^σ. De plus, tout isomorphisme de Π sur Π^σ est obtenu de cette manière.

LEMME ([**1**, ch. 1, lemma 2.11]). – *Soit Π une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$. Si Π est σ-elliptique, alors Π est essentiellement σ-discrète.*

Démonstration. – Supposons que Π soit σ-elliptique, et soit A un isomorphisme de Π sur Π^σ. D'après la classification de Bernstein-Zelevinski (cf. 3.2), Π est isomorphe à une induite parabolique de la forme $\iota_\alpha(\Xi_\psi)$ pour une partition α de n, une représentation essentiellement discrète Ξ de $G_\alpha(E)$, et un caractère réel non ramifié ψ de $G_\alpha(E)$. Par transitivité des foncteurs induction parabolique, on en déduit qu'il existe un triplet de Langlands (α', Ξ', ψ') tel que $G_\alpha(E)$ est contenu dans $G_{\alpha'}(E)$ et Π soit isomorphe à l'induite parabolique $\iota_{\alpha'}(\Xi'_{\psi'})$. Puisque Π est σ-stable, Ξ' l'est aussi, et d'après 4.5, si α est différent de (n), alors la fonction caractère Θ_Π^A est nulle sur $G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$. Donc $\alpha = (n)$ et $\Pi \simeq \Xi'_{\psi'}$. D'après 4.11, il existe une partition α'' de n et une série σ-discrète Ξ'' de $G_{\alpha''}(E)$ telle que Ξ' est isomorphe à l'induite parabolique $\iota_{\alpha''}(\Xi'')$. L'argument précédent implique alors que $\alpha'' = (n)$ et $\Pi \simeq \Xi''_\psi$. □

II.5.9. – Deux triplets de Langlands (α, Ξ, ψ) et (α', Ξ', ψ') sont dits isomorphes si $\alpha = \alpha'$, $\Xi \simeq \Xi'$ et $\psi = \psi'$. D'après le théorème de la base de Langlands, on a la décomposition

$$\mathscr{G}(G(E)) = \bigoplus_{(\alpha,\Xi,\psi)} \mathbb{Z}\iota_\alpha(\Xi_\psi),$$

où (α, Ξ, ψ) parcourt l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets de Langlands.

Le groupe Σ opère naturellement sur l'ensemble des triplets de Langlands: si $\tau = (\alpha, \Xi, \psi)$ est l'un d'eux, on pose $\tau^\sigma = (\alpha, \Xi^\sigma, \psi)$. On dit que τ est σ-stable si τ et τ^σ sont isomorphes. Notons $s(\tau)$ l'entier $s \geq 1$ divisant d tel que σ^s engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de τ dans Σ; ou, ce qui revient au même, engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de $L_\tau = L_{\alpha,\Xi,\psi}$ dans Σ. Pour $\sigma' \in \Sigma$, la représentation $(\Xi_\psi)^{\sigma'} = (\Xi^{\sigma'})_\psi$, que l'on note $\Xi_\psi^{\sigma'}$, est isomorphe à Ξ_ψ si et seulement si $\Xi^{\sigma'} \simeq \Xi$. Ainsi $s(\tau)$ est aussi l'entier $s \geq 1$ divisant d tel que σ^s engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Ξ dans Σ.

Pour un triplet de Langlands $\tau = (\alpha, \Xi, \psi)$, on pose

$$\Xi_\tau = \Xi_\psi \oplus \Xi_\psi^\sigma \oplus \cdots \oplus \Xi_\psi^{\sigma^{s(\tau)-1}};$$

on pose aussi $\widetilde{\Pi}_\tau = \iota_\alpha(\Xi_\tau)$ $(\simeq \oplus_{i=0}^{s(\tau)-1} \iota_\alpha(\Xi_\psi)^{\sigma^i})$ et

$$\Pi_\tau = L_\tau \oplus L_\tau^\sigma \oplus \cdots \oplus L_\tau^{\sigma^{s(\tau)-1}}.$$

Les représentations (lisses) $\widetilde{\Pi}_\tau$ et Π_τ de $G(E)$ sont σ-stables, et Π_τ est un quotient de $\widetilde{\Pi}_\tau$. Si $\widetilde{A}$ est un isomorphisme de $\widetilde{\Pi}_\tau$ sur $\widetilde{\Pi}_\tau^\sigma$, alors $\widetilde{A}$ induit par passage aux quotients un isomorphisme A de Π_τ sur Π_τ^σ, la σ-représentation (Π_τ, A) de $G(E)$ est irréductible, et c'est l'unique quotient irréductible de $(\widetilde{\Pi}_\tau, \widetilde{A})$. De plus, la classe d'isomorphisme de Π_τ détermine la Σ-orbite de la classe d'isomorphisme de τ, et est déterminée par elle. Notons que

$$s(\tau) = s(\Xi_\tau) = s(L_\tau).$$

On peut d'ailleurs construire A explicitement à partir d'un isomorphisme B_0 de Ξ sur $\Xi^{\sigma^{s(\tau)}}$, ou ce qui revient au même, de Ξ_ψ sur $\Xi_\psi^{\sigma^{s(\tau)}}$. Notons B l'isomorphisme de Ξ_τ sur Ξ_τ^σ défini par B_0 comme dans le lemme de 5.4, c'est-à-dire par

$$(\Xi_\tau, B) = \iota^{s(\tau)}(\Xi_\psi, B_0).$$

Alors $\widetilde{A}_0 = \iota_\alpha(B_0)$ est un isomorphisme de $\iota_\alpha(\Xi_\psi)$ sur $\iota_\alpha(\Xi_\psi)^{\sigma^{s(\tau)}}$, $\widetilde{A} = \iota_\alpha(B)$ est un isomorphisme de $\widetilde{\Pi}_\tau$ sur $\widetilde{\Pi}_\tau^\sigma$, ils induisent par passage aux quotients des isomorphismes A_0 de L_τ sur $L_\tau^{\sigma^{s(\tau)}}$ et A de Π_τ sur Π_τ^σ, et A est l'isomorphisme de Π_τ sur Π_τ^σ défini par A_0 comme dans le lemme de 5.4, c'est-à-dire par

$$(\Pi_\tau, A) = \iota^{s(\tau)}(L_\tau, A_0).$$

Définition. – On appelle *σ-triplet de Langlands (dans $G(E)$)* un couple (τ, B_0) où $\tau = (\alpha, \Xi, \psi)$ est un triplet de Langlands et B_0 est un isomorphisme de Ξ_ψ sur $\Xi_\psi^{\sigma^{s(\tau)}}$.

Deux σ-triplets de Langlands $\xi = (\tau, B_0)$ et $\xi' = (\tau', B_0')$ sont dits *isomorphes* si les triplets de Langlands τ et τ' le sont — auquel cas on a $s(\tau) = s(\tau')$ —, et si les $\sigma^{s(\tau)}$-représentations sous-jacentes (Ξ, B_0) et (Ξ', B_0') le sont aussi. Le groupe Σ opère naturellement sur l'ensemble des σ-triplets de Langlands: si $\xi = (\tau, B_0)$ est l'un d'eux, on pose $\xi^\sigma = (\tau^\sigma, B_0)$. On dit que ξ est *σ-stable* si ξ et ξ^σ sont isomorphes, c'est-à-dire si τ est σ-stable. À un σ-triplet de Langlands ξ, on associe comme ci-dessus une σ-représentation fortement irréductible (Ξ_ξ, B_ξ) de $G_\alpha(E)$, et deux σ-représentations $(\widetilde{\Pi}_\xi, \tilde{A}_\xi)$ et (Π_ξ, A_ξ) de $G(E)$ telles que (Π_ξ, A_ξ) est l'unique quotient irréductible de $(\widetilde{\Pi}_\xi, \tilde{A}_\xi)$. À isomorphisme près, ces deux σ-représentations ne dépendent que de la Σ-orbite de la classe d'isomorphisme de ξ. Comme pour le théorème du quotient de Langlands, toute σ-représentation irréductible (Π, A) de $G(E)$ est isomorphe à (Π_ξ, A_ξ) pour un σ-triplet de Langlands ξ. De plus, la classe d'isomorphisme de (Π, A) détermine la Σ-orbite de la classe d'isomorphisme de ξ, et est déterminée par elle.

Remarque. – Le groupe $\mathbb{C}^\times$ opère sur les σ-triplets de Langlands par multiplication sur les opérateurs d'entrelacement: pour $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ et $\xi = (\tau, B_0)$ un σ-triplet de Langlands, posant $\lambda\xi = (\tau, \lambda B_0)$, on a $B_{\lambda\xi} = \lambda B_\xi$, d'où $\tilde{A}_{\lambda\xi} = \lambda \tilde{A}_\xi$ et $A_{\lambda\xi} = \lambda A_\xi$.

II.5.10. – La proposition suivante — ou plutôt son corollaire — est la version tordue du théorème de la base de Langlands.

Proposition. – *On a la décomposition*

$$\mathscr{G}(G(E), \sigma) = \bigoplus_\xi \mathbb{Z}(\widetilde{\Pi}_\xi, \widetilde{A}_\xi)$$

où ξ parcourt les Σ-orbites de classes d'isomorphisme de σ-triplets de Langlands dans $G(E)$.

Démonstration. – D'après le théorème de la base de Langlands, on a la décomposition

$$\mathscr{G}(G(E))^\sigma = \bigoplus_\tau \mathbb{Z}\widetilde{\Pi}_\tau,$$

où τ parcourt les Σ-orbites de classes d'isomorphisme de triplets de Langlands. Par suite la somme $X = \sum_\xi \mathbb{Z}(\widetilde{\Pi}_\xi, \widetilde{A}_\xi)$ est directe, où ξ parcourt les Σ-orbites de classes d'isomorphisme de σ-triplets de Langlands. Il suffit donc de montrer l'inclusion $\mathscr{G}(G(E), \sigma) \subset X$.

Soit (Π, A) une σ-représentation irréductible de $G(E)$. L'image de Π dans $\mathscr{G}(G(E))$ appartient à $\mathscr{G}(G(E))^\sigma$, donc s'écrit $\sum_{i=1}^m a_i \widetilde{\Pi}_{\tau_i}$ pour des classes d'isomorphisme de triplets de Langlands τ_i engendrant des Σ-orbites deux à deux distinctes, et des nombres complexes non nuls a_i. Pour chaque i, choisissons un σ-triplet de Langlands $\xi_i = (\tau_i', B_{i,0})$ tel que τ_i' appartient à la classe τ_i, c'est-à-dire tel que Π_{ξ_i} appartient à la classe Π_{τ_i}. Alors il existe un isomorphisme A' de Π sur Π^σ tel que

$$\sum_{i=1}^m a_i [\widetilde{\Pi}_{\xi_i}, \tilde{A}_{\xi_i}] = [\Pi, A'].$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que $A = \lambda A'$. Comme $\sum_{i=1}^m a_i[\widetilde{\Pi}_{\lambda\xi_i}, \tilde{A}_{\lambda\xi_i}] = [\Pi, \lambda A']$, l'image de (Π, A) dans $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ appartient à X. D'où la proposition. □

COROLLAIRE. – *On a la décomposition*

$$\mathscr{G}(G(E), \sigma) = \sum_\xi \mathbb{Z}(\widetilde{\Pi}_\xi, \widetilde{A}_\xi) + \mathscr{G}_{>0}(G(E), \sigma)$$

*où ξ parcourt les classes d'isomorphisme de σ-triplets de Langlands σ-*stables *dans $G(E)$.*

Démonstration. – Puisque $\mathscr{G}(G(E), \sigma) = \mathscr{G}_0(G(E), \sigma) + \mathscr{G}_{>0}(G(E), \sigma)$, il suffit de montrer que $\mathscr{G}_0(G(E), \sigma)$ est contenu dans l'expression à droite de l'égalité dans l'énoncé. Soit (Π, A) une σ-représentation fortement irréductible de $G(E)$. On a $(\Pi, A) \simeq (\Pi_\xi, A_\xi)$ pour un σ-triplet de Langlands σ-stable ξ dont la classe d'isomorphisme est déterminée par celle de (Π, A). Écrivons

$$[\Pi, A] = [\widetilde{\Pi}_\xi, \tilde{A}_\xi] - \sum_{i=1}^m [\Pi_i, A_i],$$

où (Π_i, A_i) est une σ-représentation irréductible de $G(E)$. Soit $i \in \{1, \ldots, m\}$. Si (Π_i, A_i) n'est pas fortement irréductible, alors la classe $[\Pi_i, A_i]$ appartient à $\mathscr{G}_{>0}(G(E), \sigma)$. Supposons que (Π_i, A_i) soit fortement irréductible. On peut de la même manière écrire

$$[\Pi_i, A_i] = [\widetilde{\Pi}_{\xi_i}, \tilde{A}_{\xi_i}] - \sum_{k=1}^{m_i} [\Pi_{i,k}, A_{i,k}],$$

où ξ_i est un σ-triplet de Langlands σ-stable dont la classe d'isomorphisme est déterminée par celle de (Π_i, A_i), et $(\Pi_{i,k}, A_{i,k})$ est une σ-représentation irréductible de $G(E)$. Comme l'application j de $\epsilon(G(E))$ dans $\mathfrak{B}(G(E))$ est à fibres finies, d'après [**7**, 2.9] et [**9**, 4.13] le processus de décomposition s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. D'où le corollaire. □

II.5.11. – Un triplet de Langlands (α, Ξ, ψ) est dit *induit* si $l(\alpha) > 1$. De même, un σ-triplet de Langlands (τ, B_0) est dit induit si le triplet de Langlands τ est induit.

Notons $\mathscr{G}^{\mathscr{L}}_{\mathrm{ind}}(G(E), \sigma)$ le sous-groupe de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ engendré par les éléments $(\widetilde{\Pi}_\xi, \tilde{A}_\xi)$ pour ξ parcourant les classes d'isomorphisme de σ-triplets de Langlands qui sont induits. Notons aussi $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E), \sigma)$ le sous-groupe de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ engendré par les classes d'isomorphisme de σ-représentations irréductibles *essentiellement tempérées* (Π, A) de $G(E)$, c'est-à-dire telles que Π est essentiellement tempérée. D'après la proposition de 5.10, on a la décomposition

$$\mathscr{G}(G(E), \sigma) = \mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E), \sigma) \oplus \mathscr{G}^{\mathscr{L}}_{\mathrm{ind}}(G(E), \sigma).$$

De manière analogue, notons $\mathscr{G}_{0,\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma)$ le sous-groupe de $\mathscr{G}_0(G(E),\sigma)$ engendré par les projections canoniques sur $\mathscr{G}(G(E),\sigma)/\mathscr{G}_{>0}(G(E),\sigma)$ des éléments $(\widetilde{\Pi}_\xi, \tilde{A}_\xi)$ pour ξ parcourant les classes d'isomorphisme de σ-triplets de Langlands *σ-stables* qui sont induits. Notons aussi $\mathscr{G}_{0,\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma)$ le sous-groupe de $\mathscr{G}_0(G(E),\sigma)$ engendré par les classes d'isomorphisme de σ-représentations fortement irréductibles essentiellement tempérées de $G(E)$.

Remarque. – D'après le corollaire de 5.10, on a l'égalité

$$\mathscr{G}_0(G(E),\sigma) = \mathscr{G}_{0,\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma) + \mathscr{G}_{0,\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma),$$

mais la somme n'est a priori pas directe. Elle le devient (cf. le lemme 2 ci-dessous) si l'on remplace $\mathscr{G}_0(G(E),\sigma)$ par son quotient $\overline{\mathscr{G}}(G(E),\sigma)$.

Lemme 1. – *Soit $s > 1$ un entier divisant d. On a l'inclusion*

$$\iota^s(\mathscr{G}(G(E),\sigma^s) \subset \mathscr{G}_{0+}(G(E),\sigma).$$

Démonstration. – Soit (Π_0, A_0) une σ^s-représentation irréductible de $G(E)$. Notons (Π, A) la σ-représentation $\iota^s(\Pi_0, A_0)$ de $G(E)$, et montrons que l'image de (Π, A) dans $\mathscr{G}(G(E),\sigma)$ appartient à $\mathscr{G}_{0+}(G(E),\sigma)$. Posons $d_0 = \frac{d}{s}$, $\sigma_0 = \sigma^s$ et $\Sigma_0 = \langle\sigma_0\rangle$. D'après le lemme de 5.4, il existe un entier $t \geq 1$ divisant d_0 et une σ_0^t-représentation fortement irréductible (Ξ_0, B_0) de $G(E)$ telle que σ_0^t engendre le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de Ξ_0 dans Σ_0, et (Π_0, A_0) est isomorphe à la σ_0-représentation (Π_0', A_0') de $G(E)$ donnée par $\Pi_0' = \oplus_{i=0}^{t-1}\Xi_0^{\sigma_0^i}$ et $A_0'(v_0,\ldots,v_{t-1}) = (v_1,\ldots,v_{t-1},B_0(v_0))$, $v_i \in V_{\Xi_0}$. Alors (Π, A) est isomorphe à la σ-représentation (Π', A') donnée par $\Pi' = \oplus_{i=0}^{ts-1}\Xi_0^{\sigma_0^i}$ et

$$\begin{aligned}A'(v_0,\ldots v_{s-1}; v_s,\ldots,v_{2s-1};\ldots;v_{(t-1)s},\ldots v_{ts-1})\\ = (v_1, v_{s+1},\ldots,v_{(t-1)s+1}; v_2, v_{s+2},\ldots,v_{(t-1)s+2};\ldots;v_s,\\ v_{2s},\ldots,v_{(t-1)s},B_0(v_0)).\end{aligned}$$

On en déduit si la représentation Ξ_0 n'est pas σ-stable, alors $[\Pi, A] = [\Pi', A']$ appartient à $\mathscr{G}_{>0}(G(E),\sigma)$. Supposons maintenant que Ξ_0 soit σ-stable. Alors $t = 1$, et l'on peut prendre $(\Xi_0, B_0) = (\Pi_0, A_0)$. Soit I_0 un isomorphisme de Π_0 sur Π_0^σ tel que $I_0^s = A_0$, et soit μ une racine primitive s-ième de l'unité. Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons $I_i = \mu^i I_0$; on a donc $I_i^s = A_0$. Soit $\iota = \iota_0 \times \iota_1 \times \cdots \times \iota_{s-1}$ l'automorphisme de l'espace $V = V_{\Pi_0}^{\times s}$ défini par

$$\iota_i(v) = v_0 + I_i^{-1}(v_1) + \cdots + I_i^{-s+1}(v_{s-1}), \quad v = (v_0, v_1, \ldots, v_{s-1}).$$

Pour $g \in G(E)$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_{s-1}) \in V$ et $i = 0, \dots, s-1$, on a

$$\begin{aligned}\iota_i(\Pi(g)(v)) &= \iota_i(\Pi_0(g)(v_0), \Pi_0^{\sigma}(g)(v_1), \dots, \Pi_0^{\sigma^{s-1}}(g)(v_{s-1}) \\ &= \Pi_0(g)(v_0) + I_i^{-1} \circ \Pi_0^{\sigma}(g)(v_1), \dots, I_i^{s-1} \circ \Pi_0^{\sigma^{-s+1}}(v_{s-1}) \\ &= \Pi_0(g)(\iota_i(v))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\iota_i(A(v)) &= \iota_i(v_1, \dots, v_{s-1}, A_0(v_0)) \\ &= v_1 + I_i^{-1}(v_2) + \cdots + I_i^{-s+1} \circ A_0(v_0) \\ &= I_i(\iota_i(v)).\end{aligned}$$

En d'autres termes, ι est un isomorphisme entre (Π, A) et $(\Pi_0^{\oplus s}, I_0 \times I_1 \times \cdots \times I_{s-1})$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

La décomposition suivante trouvera son utilité dans la preuve de la proposition de 5.13. Notons $\overline{\mathscr{G}}_{\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma)$ et $\overline{\mathscr{G}}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma)$ les projections canoniques de $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma)$ et $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma)$ sur $\overline{\mathscr{G}}(G(E),\sigma)$.

Lemme 2. – *L'espace $\overline{\mathscr{G}}(G(E),\sigma)$ est somme directe de $\overline{\mathscr{G}}_{\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma)$ et de $\overline{\mathscr{G}}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma)$.*

Démonstration. – Il s'agit d'établir la décomposition

$$(*) \qquad \begin{aligned}&\mathscr{G}_{0^+}(G(E),\sigma) = \\ &(\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma) \cap \mathscr{G}_{0^+}(G(E),\sigma)) \oplus (\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma) \cap \mathscr{G}_{0^+}(G(E),\sigma)).\end{aligned}$$

La somme à droite de l'égalité ci-dessus est directe, et elle est contenue dans $\mathscr{G}_{0^+}(G(E),\sigma)$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit (Π, A) une σ-représentation irréductible de $G(E)$ telle que $s(\Pi) > 1$. Posons $s = s(\Pi)$ et écrivons $(\Pi, A) \simeq \iota^s(\Pi_0, A_0)$ pour une σ^s-représentation fortement irréductible (Π_0, A_0) de $G(E)$. On a la décomposition

$$\mathscr{G}(G(E),\sigma^s) = \mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma^s) \oplus \mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma^s).$$

Écrivons $[\Pi_0, A_0] = (\Pi_0', A_0') + (\Pi_0'', A_0'')$ pour des éléments (Π_0', A_0') du groupe $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma^s)$ et (Π_0'', A_0'') de $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma^s)$. Alors $\iota^s(\Pi_0', A_0')$ appartient à $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E),\sigma)$ et $\iota^s(\Pi_0'', A_0'')$ appartient à $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma)$. Comme

$$[\Pi, A] = \iota^s(\Pi_0', A_0') + \iota^s(\Pi_0'', A_0''),$$

d'après le lemme 1, on obtient que $\mathscr{G}_{>0}(G(E),\sigma)$ est contenu dans la somme à droite de l'égalité $(*)$.

Reste à considérer les autres générateurs de $\mathscr{G}_{0^+}(G(E),\sigma)$: soit maintenant (Π, A) une σ-représentation (réductible!) de $G(E)$ de la forme $\oplus_{i=0}^{t-1}(\Pi_0, \mu^i A_0)$ pour une σ-représentation fortement irréductible (Π_0, A_0) de $G(E)$, un entier $t > 1$ et une racine primitive t-ième de l'unité μ. Écrivons $[\Pi_0, A_0] = (\Pi_0', A_0') + (\Pi_0'', A_0'')$ pour des éléments (Π_0', A_0') de $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E), \sigma)$ et (Π_0'', A_0'') de $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E), \sigma)$. On a

$$[\Pi, A] = \sum_{i=0}^{t-1} (\Pi_0', \mu^i A_0') + \sum_{i=0}^{t-1} (\Pi_0'', \mu^i A_0'').$$

Comme la somme $\sum_{i=0}^{t-1} (\Pi_0', \mu^i A_0)$ appartient à $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t.}}(G(E), \sigma) \cap \mathscr{G}_{0^+}(G(E), \sigma)$, et la somme $\sum_{i=0}^{t-1} (\Pi_0'', \mu^i A_0'')$ appartient à $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E), \sigma) \cap \mathscr{G}_{0^+}(G(E), \sigma)$, le lemme est démontré. □

II.5.12. – On peut maintenant prouver la remarque (2) de 5.7. Soit α une partition de n. Les définitions introduites en 5.8 et 5.9 pour $G(E)$, ainsi que les résultats de 5.10 et 5.11, s'étendent naturellement à $G_\alpha(E)$.

LEMME 1. – *On a l'inclusion*

$$\iota_\alpha(\mathscr{G}_{>0}(G_\alpha(E), \sigma)) \subset \mathscr{G}_{0^+}(G(E), \sigma).$$

Démonstration. – Si $\alpha = (n)$, il n'y a rien démontrer. Supposons $l(\alpha) > 0$, et soit (Ξ, B) une σ-représentation irréductible de $G_\alpha(E)$ telle que $s(\Xi) > 1$. Posons $s = s(\Xi)$ et écrivons $(\Xi, B) = \iota^s(\Xi_0, B_0)$ pour une σ^s-représentation fortement irréductible (Ξ_0, B_0) de $G_\alpha(E)$. Notons (Π_0, A_0) la σ^s-représentation $\iota_\alpha(\Xi_0, B_0)$ de $G(E)$, et (Π', A') la σ-représentation $\iota^s(\Pi_0, A_0)$ de $G(E)$. Alors $\iota_\alpha(\Xi, B)$ est isomorphe à (Π', A'), et d'après le lemme 1 de 5.11, son image dans $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ appartient à $\mathscr{G}_{0^+}(G(E), \sigma)$. □

LEMME 2. – *Soit Φ un élément de $\mathscr{G}_0^*(G(E), \sigma)$ tel que pour pour toute σ-représentation fortement irréductible* tempérée *(Π, A) de $G_\alpha(E)$, la fonction $\psi \mapsto \Phi(\iota_\alpha[\Pi_\psi, A_\psi])$ est régulière. Alors pour pour toute σ-représentation fortement irréductible (Π, A) de $G_\alpha(E)$, la fonction $\psi \mapsto \Phi(\iota_\alpha[\Pi_\psi, A_\psi])$ est régulière*

Démonstration. – Soit (Π, A) une σ-représentation fortement irréductible de $G_\alpha(E)$. D'après le corollaire de 5.10, il existe des σ-triplets de Langlands σ-stables $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *dans* $G_\alpha(E)$ deux à deux non isomorphes et des entiers $a_1, \ldots, a_m$ non nuls, tels que l'élément $[\Pi, A] - \sum_{i=1}^m a_i[\widetilde{\Pi}_{\xi_i}, \tilde{A}_{\xi_i}]$ de $\mathscr{G}(G_\alpha(E), \sigma)$ appartient à $\mathscr{G}_{>0}(G_\alpha(E), \sigma)$, où $(\widetilde{\Pi}_{\xi_i}, \tilde{A}_{\xi_i})$ est la σ-représentation de $G_\alpha(E)$ construite à partir de ξ_i comme en 5.9. Pour $i = 1, \ldots, m$, écrivons $\xi_i = (\tau_i, B_i)$ et $\tau_i = (\beta_i, \Xi_i, \psi_i)$, où:

— β_i est une partition de n telle que $G_{\beta_i} \subset G_\alpha$,
— (Ξ_i, B_i) est une σ-représentation fortement irréductible tempérée de $G_{\beta_i}(E)$,
— Ψ_i est un caractère non ramifié de $G_{\beta_i}(E)$ positif par rapport à $(P_{\beta_i} \cap G_\alpha)(E)$.

Par hypothèse, la fonction $\psi \mapsto \Phi(\iota_{\beta_i}[\Xi_{i,\psi}, B_{i,\psi}])$ sur $\Psi(G_{\beta_i}(E))$ est régulière. D'autre part, l'application $\psi \mapsto (\psi|_{G_{\alpha_i}(E)})\psi_i$ de $\Psi(G_\alpha(E))$ dans $\Psi(G_{\beta_i}(E))$, est un morphisme de variétés algébriques. Par transitivité des foncteurs induction parabolique, on en déduit grâce au lemme 1 que la fonction $\psi \mapsto \Phi(\iota_\alpha[\Pi_\psi, A_\psi])$ sur $\Psi(G_\alpha(E))$ est régulière. □

II.5.13. – La proposition ci-dessous est le résultat principal de cette section.

Définition. – Soit (Π, A) une σ-représentation fortement irréductible tempérée de $G(E)$, et soit $\chi = \omega_\Pi$ le caractère central de Π. On appelle *pseudo-coefficient* pour (Π, A) une fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \chi)$ vérifiant la propriété: pour toute σ-représentation fortement irréductible tempérée (Π', A') de $G(E)$ telle que $\omega_{\Pi'} = \chi$, on a

$$\Theta_{\Pi'}^{A'}(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \Pi' \not\simeq \Pi \\ 1 & \text{si} \quad (\Pi', A') \simeq (\Pi, A) \end{cases}.$$

Proposition. – *Soit* (Π, A) *une σ-représentation fortement irréductible de* $G(E)$ *telle que* Π *est une série σ-discrète. Il existe des pseudo-coefficients pour* (Π, A).

Démonstration. – Notons χ le caractère central de Π. Soit D l'ensemble des classes d'isomorphisme de σ-représentations de $G(E)$ de la forme (Π_ψ, A_ψ) pour un caractère $\psi \in \Psi(G(E))$. C'est une variété algébrique affine complexe, identifiée au quotient de $\Psi(G(E))$ par le sous-groupe Ψ_1 de $\Psi(G(E))$ formé des caractères ψ tels que $\Pi_\psi \simeq \Pi$. Soit aussi Ψ_2 le sous-groupe (fini) de $\Psi(G(E))$ formé des caractères dont la restriction au centre $E^\times$ de $G(E)$ est triviale. On a l'inclusion $\Psi_1 \subset \Psi_2$. Choisissons une fonction régulière Φ sur D telle que pour $\psi \in \Psi_2$, on ait

$$\Phi[\Pi_\psi, A_\psi] = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi \in \Psi_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour $\psi \in \Psi(G(E))$ et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, on pose $\Phi[\Pi_\psi, \lambda A_\psi] = \lambda\Phi[\Pi_\psi, A_\psi]$. Alors la σ-représentation $(\Pi_\psi, \lambda A_\psi)$ est isomorphe à $(\Pi_\xi, A_\xi) = (\widetilde{\Pi}_\xi, \tilde{A}_\xi)$ pour un σ-triplet de Langlands σ-stable ξ unique à isomorphisme près. Faisons varier ψ et λ, et notons $\mathfrak{Y}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des ξ obtenus de cette manière. Soit Y le sous-groupe de $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E), \sigma)$ engendré par les éléments (Π_ξ, A_ξ) pour $\xi \in \mathfrak{Y}$. Pour toute σ-représentation essentiellement tempérée (Π', A') de $G(E)$ dont la classe d'isomorphisme n'appartient pas à Y, on pose $\Phi[\Pi', A'] = 0$. On obtient ainsi une forme $\mathbb{Z}$-linéaire Φ sur $\mathscr{G}_{\mathrm{e.t}}(G(E), \sigma)$ qui, par construction, se factorise à travers $\overline{\mathscr{G}}_{\mathrm{e.t}}(G(E), \sigma)$. On prolonge Φ par 0 sur $\overline{\mathscr{G}}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E), \sigma)$ grâce au lemme 2 de 5.11. Au final, on a construit une forme $\mathbb{Z}$-linéaire Φ sur $\overline{\mathscr{G}}(G(E), \sigma)$, qui est un élément de $\mathscr{G}_0^*(G(E), \sigma)$.

L'élément Φ construit dans le paragraphe précédent vérifie la propriété (i) du théorème de 5.7: pour $\psi \in \Phi(G(E))$ et $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, on a $j(\Pi_\psi, \lambda A_\psi) = j(\Pi_\psi) = j(\Pi)$. Montrons que la propriété (ii) est elle aussi vérifiée. Soit α une partition de n, et soit (Ξ, B) une σ-représentation fortement irréductible de $G_\alpha(E)$, que l'on peut supposer tempérée d'après le lemme 2 de 5.12. Si $\alpha = (n)$, la fonction $\psi \mapsto \Phi(\iota_\alpha[\Xi_\psi, B_\psi])$ sur $\Psi(G(E))$ est régulière par construction. Supposons $l(\alpha) > 1$, et soit $\psi \in \Psi(G(E))$. D'après le lemme 2 de [**41**, 1.3], on a deux cas possibles:

Cas 1: l'image de $\iota_\alpha(\Xi_\psi)$ dans $\mathscr{G}(G(E))$ appartient au sous-groupe engendré par les $\iota_\beta(\Xi'_{\psi'})$ pour (β, Ξ', ψ') parcourant les classes d'isomorphisme de triplets Langlands qui sont induits. D'après la proposition de 5.10, l'image de $\iota_\alpha(\Xi_\psi, B_\psi)$ dans $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ s'écrit $\sum_{i=1}^m a_i(\widetilde{\Pi}_{\xi_i}, \tilde{A}_{\xi_i})$ pour des classes d'isomorphisme de σ-triplets de Langlands $\xi_1, \ldots, \xi_m$ engendrant des Σ-orbites deux à deux distinctes, et des entiers $a_1, \ldots, a_m$ non nuls. Par conséquent l'image de $\iota_\alpha(\Xi_\psi)$ dans $\mathscr{G}(G(E))$ s'écrit $\sum_{i=1}^m a_i\widetilde{\Pi}_{\xi_i}$, et d'après le théorème de la base de Langlands (non tordu), tous les ξ_i sont induits. Par suite $\iota_\alpha[\Xi_\psi, B_\psi]$ appartient à $\mathscr{G}^{\mathscr{L}}_{\mathrm{ind}}(G(E), \sigma)$, et l'on a $\Phi(\iota_\alpha[\Xi_\psi, B_\psi]) = 0$.

Cas 2: il existe un caractère non ramifié réel η de $G(E)$ tel que le caractère (non ramifié) $\psi' = \eta^{-1}|_{G_\alpha(E)}\psi$ de $G_\alpha(E)$ est unitaire. La σ-représentation $(\Pi', A') = \iota_\alpha(\Xi_{\psi'}, A_{\psi'})$ de $G(E)$ est fortement irréductible et tempérée, et l'on a $\iota_\alpha(\Xi_\psi, A_\psi) = (\Pi'_\eta, A'_\eta)$. Comme Π'_η est essentiellement tempérée et non essentiellement σ-discrète, on a $\Phi(\iota_\alpha[\Xi_\psi, A_\psi]) = 0$ par construction.

On peut donc appliquer le théorème de 5.7: il existe une fonction $\tilde{\phi}$ sur $G(E)$ localement constante et à support compact, telle que pour toute σ-représentation fortement irréductible (Π', A') de $G(E)$, on a $\Theta^{A'}_{\Pi'}(\tilde{\phi}) = \Phi[\Pi', A']$. Par construction la fonction $\phi = \tilde{\phi}_\chi$ est un pseudo-coefficient pour (Π, A). $\square$

Remarque. – La fonction $\tilde{\phi}$ vérifie $\Theta^{A'}_{\Pi'}(\tilde{\phi}) = 0$ pour tout élément (Π', A') de $\mathscr{G}^{\mathscr{L}}_{\mathrm{ind}}(G(E), \sigma)$, et pour toute σ-représentation fortement irréductible essentiellement tempérée (Π', A') de $G(E)$ telle que Π' ne soit pas essentiellement σ-discrète.

II.5.14. – Le lemme suivant est la version tordue d'un résultat bien connu. D'ailleurs nous épargnons au lecteur les détails de la démonstration, pratiquement identique à celle du cas non tordu.

Proposition 1. – *Soit χ un caractère unitaire σ-stable de $E^\times$, et soit $\phi \in C^\infty_c(G(E), \chi)$ une fonction telle que $\Theta^{A'}_{\Pi'}(\phi) = 0$ pour toute σ-représentation fortement irréductible* tempérée (Π', A') *de $G(E)$ telle que $\omega_{\Pi'} = \chi$. Alors:*

(1) $\Theta^{A'}_{\Pi'}(\phi) = 0$ *pour tout σ-représentation fortement irréductible* (Π', A') *de $G(E)$ telle que le caractère central de Π' soit égal à χ;*
(2) $\Lambda^{G(E)}_\sigma(\phi, \delta) = 0$ *pour tout élément σ-régulier δ de $G(E)$.*

Démonstration. – La preuve du point (1) est identique à celle du point (1) de la proposition de [**41**, 1.8], en remplaçant le théorème de la base de Langlands (non tordu) par le corollaire de 5.10. Quant au point (2), on l'obtient par un argument global standard utilisant la formule de descente pour les intégrales orbitales tordues (formule (1) et remarque de 4.5) et la formule des traces de Deligne-Kazhdan tordue (voir la section suivante). □

COROLLAIRE 1. – *Soit* (Π, A) *une* σ*-représentation fortement irréductible de* $G(E)$ *telle que* Π *est une série* σ*-discrète, et soient* ϕ_1 *et* ϕ_2 *deux pseudo-coefficients pour* (Π, A)*. On a:*

— $\Theta_{\Pi'}^{A'}(\phi_1) = \Theta_{\Pi'}^{A'}(\phi_2)$ *pour toute* σ*-représentation fortement irréductible* (Π', A') *de* $G(E)$ *telle que le caractère central de* Π' *soit égal à* ω_Π*;*
— $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi_1, \delta) = \Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi_2, \delta)$ *pour tout élément* σ*-régulier* δ *de* $G(E)$*.*

Pour tout caractère σ-stable χ de $E^\times$, notons $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}(G(E), \chi, \sigma)$ le sous-groupe de $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ engendré par les images dans $\mathscr{G}(G(E), \sigma)$ des σ-représentations de $G(E)$ de la forme $\iota_\alpha(\Xi, B)$ où α est une partition de (n) telle que $l(\alpha) > 1$ et (Ξ, B) est une σ-représentation irréductible de $G_\alpha(E)$ telle que le caractère central ω_Ξ de Ξ prolonge χ.

PROPOSITION 2. – *Soit* (Π, A) *une* σ*-représentation fortement irréductible de* $G(E)$ *telle que* Π *est une série* σ*-discrète, et soit* $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E), \omega_\Pi)$ *un pseudo-coefficient pour* (Π, A)*. On a:*

(1) $\Theta_{\Pi'}^{A'}(\phi) = 0$ *pour tout élément* (Π, A) *de* $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}(G(E), \omega_\Pi, \sigma)$*.*
(2) $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = 0$ *pour tout élément* σ*-régulier non* σ*-elliptique* δ *de* $G(E)$*.*

Démonstration. – Posons $\chi = \omega_\Pi$. D'après la proposition 1, on peut supposer que ϕ est le pseudo-coefficient pour (Π, A) construit dans la démonstration de la proposition de 5.13. En particulier, $\phi = \tilde{\phi}_\chi$ pour une fonction $\tilde{\phi} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(E))$ vérifiant la propriété de la remarque de 5.13.

Démontrons (1). Soit (Π', A') une σ-représentation de $G(E)$ de la forme $\iota_\alpha(\Xi, B)$ pour une partition α de n tel que $l(\alpha) > 1$ et une σ-représentation irréductible (Ξ, B) de $G_\alpha(E)$ telle que ω_Ξ prolonge χ. D'après le corollaire de 5.10, il existe des triplets de Langlands σ-stables $\xi_1, \ldots, \xi_m$ *dans* $G_\alpha(E)$ deux à deux non isomorphes et des entiers $a_1, \ldots, a_m$ non nuls tels que l'élément $[\Xi, B] - \sum_{i=1}^m a_m[\widetilde{\Pi}_{\xi_i}, \tilde{A}_{\xi_i}]$ de $\mathscr{G}(G_\alpha(E), \sigma)$ appartient à $\mathscr{G}_{>0}(G_\alpha(E), \sigma)$, où $(\widetilde{\Pi}_{\xi_i}, \tilde{A}_{\xi_i})$ est la σ-représentation de $G_\alpha(E)$ construite à partir de ξ_i comme en 5.9. Pour $i = 1, \ldots, m$, écrivons $\xi_i = (\tau_i, B_i)$ et $\tau_i = (\alpha_i, \Xi_i, \psi_i)$ comme dans la démonstration du lemme 2 de 5.12, et notons (Π_i, A_i) la σ-représentation $\iota_{\alpha_i}((\Xi_i)_{\psi_i}, (B_i)_{\psi_i})$ de $G(E)$. Par transitivité des foncteurs induction parabolique, et d'après le lemme 1 de 5.12, l'élément $[\Pi', A'] -$

$\sum_{i=1}^{m} a_i[\Pi_i, A_i]$ de $\mathscr{G}(G(E),\sigma)$ appartient à $\mathscr{G}_{0^+}(G(E),\sigma)$. D'après la démonstration de la proposition de 5.13, on a deux cas possibles: ou bien l'élément $[\Pi_i, A_i]$ de $\mathscr{G}(G(E),\sigma)$ appartient à $\mathscr{G}_{\mathrm{ind}}^{\mathscr{L}}(G(E),\sigma)$; ou bien Π_i est irréductible, essentiellement tempérée et non essentiellement σ-discrète. Dans les deux cas, on a $\Theta_{\Pi_i}^{A_i}(\tilde{\phi}) = 0$. Par conséquent $\Theta_{\Pi'}^{A'}(\phi) = 0$ et le point (1) est démontré.

Démontrons (2). Supposons par l'absurde qu'il existe un élément σ-régulier non σ-elliptique δ de $G(E)$ tel que $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi,\delta) \neq 0$. Alors il existe une partition α de n et un élément g de $G(E)$ tels que $l(\alpha) > 1$ et $\delta' = g^{-1}\delta g^\sigma$ appartient à $G_\alpha(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$. Quitte à remplacer δ par δ', on peut supposer que $\delta \in G_\alpha(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$. D'après la formule de descente pour les intégrales orbitales tordues (formule (1) et remarque de 4.5), on a $\Lambda_\sigma^{G_\alpha(E)}(\phi_{P_\alpha,\sigma},\delta) \neq 0$. Notons Z_α le centre de G_α (cf. 2.1). La fonction Φ sur $Z_\alpha(E)$ définie par
$$\Phi(a) = \Lambda_\sigma^{G_\alpha(E)}(\phi_{P_\alpha,\sigma}, a\delta)$$
appartient à $C_{\mathrm{c}}^\infty(Z_\alpha(E),\chi)$, et elle se factorise à travers $Z_\alpha(E)^{\sigma-1}\backslash Z_\alpha(E)$. D'après 2.10, l'application norme induit un morphisme ouvert $Z_\alpha(E) \to Z_\alpha(F)$ de noyau $Z_\alpha(E)^{\sigma-1}$. On en déduit qu'il existe une (unique) fonction $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(N(Z_\alpha(E)),\omega)$ telle que $\Phi = \varphi\circ N$, où ω est le caractère de $N_{E/F}(E^\times)$ défini par $\chi = \omega\circ N_{E/F}$. Choisissons un caractère unitaire $\widetilde{\omega}$ de $Z_\alpha(F)$ prolongeant ω. Alors la fonction $\varphi_0 = \widetilde{\omega}\varphi$ sur $N(Z_\alpha(E))$ appartient à $C_{\mathrm{c}}^\infty(N_{E/F}(E^\times)\backslash N(Z_\alpha(E)))$, et comme $\varphi_0(1) \neq 0$, d'après le théorème d'inversion de Fourier, il existe un caractère unitaire ω_0 de $N(Z_\alpha(E))$ trivial sur $N_{E/F}(E^\times)$ tel que
$$\int_{N_{E/F}(E^\times)\backslash N(Z_\alpha(E))} \omega_0(b)\varphi_0(b)\frac{db}{dz} \neq 0,$$
où db désigne une mesure de Haar sur $Z_\alpha(F)$. Notons $\widetilde{\chi}$ le caractère $(\omega_0\widetilde{\omega})\circ N$ de $Z_\alpha(E)$. Il est unitaire et σ-stable, et il prolonge χ. D'après l'inégalité ci-dessus, on a
$$\int_{E^\times\backslash Z_\alpha(E)} \widetilde{\chi}(a)\Phi(a)\frac{da}{dz_E} \neq 0,$$
où da désigne une mesure de Haar sur $Z_\alpha(E)$. Soit $\phi_{P_\alpha,\sigma}^*$ la fonction sur $G_\alpha(E)$ définie par
$$\phi_{P_\alpha,\sigma}^*(g) = \int_{E^\times\backslash Z_\alpha(E)} \widetilde{\chi}(a)\phi_{P_\alpha,\sigma}(ag)\frac{da}{dz_E}.$$
Elle appartient à $C_{\mathrm{c}}^\infty(G_\alpha(E),\widetilde{\chi})$, et vérifie
$$\Lambda_\sigma^{G_\alpha(E)}(\phi_{P_\alpha,\sigma}^*,\delta) = \int_{E^\times\backslash Z_\alpha(E)} \widetilde{\chi}(a)\Lambda_\sigma^{G_\alpha(E)}(\phi_{P_\alpha,\sigma},a\delta)\frac{da}{dz_E} \neq 0.$$
Le lemme ci-dessus appliqué au groupe $G_\alpha(E)$ implique qu'il existe une σ-représentation fortement irréductible tempérée (Ξ, B) de $G_\alpha(E)$ de caractère central $\widetilde{\chi}$ telle que $\Theta_\Xi^B(\phi_{P_\alpha,\sigma}) = \Theta_\Xi^B(\phi_{P_\alpha,\sigma}^*) \neq 0$. La σ-représentation $(\Pi', A') = \iota_\alpha(\Xi, B)$ de $G(E)$ est fortement irréductible et tempérée, et d'après la formule de descente pour les

caractères tordus (formule (2) et remarque de 4.5), on a $\Theta_{\Pi'}^{A'}(\phi) \neq 0$, ce qui contredit le point (1) déjà montré. $\square$

COROLLAIRE 2. – *Toute représentation essentiellement σ-discrète de $G(E)$ est σ-elliptique.*

Démonstration. – Soit (Π, A) une σ-représentation fortement irréductible de $G(E)$ telle que Π est essentiellement σ-discrète. Quitte à remplacer Π par Π_ψ pour un caractère non ramifié ψ de $G(E)$, on peut supposer que Π est une série σ-discrète. Soit $\phi \in C_c^\infty(G(E), \omega_\Pi)$ un pseudo-coefficient pour (Π, A). Soient (Π, A) et ϕ comme dans l'énoncé de la proposition 2. Supposons par l'absurde que Π ne soit pas σ-elliptique. Alors $\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = 0$ pour tout élément σ-régulier δ de $G(E)$, et d'après la formule (1) de 2.10, $\Theta_{\Pi'}^{A'}(\phi) = 0$ pour toute σ-représentation fortement irréductible (Π', A') de $G(E)$, ce qui est impossible puisque $\Theta_\Pi^A(\phi) = 1$. $\square$

II.5.15. – D'après le lemme de 5.8 et le corollaire 2 de 5.14, la proposition suivante (annoncée dans la remarque (2) de 4.13) est maintenant démontrée, indépendamment des théorèmes de 4.2 et 4.6.

PROPOSITION 1. – *Soit Π une représentation lisse irréductible générique σ-stable de $G(E)$. Alors Π est σ-elliptique si et seulement si elle est essentiellement σ-discrète.*

La proposition suivante est une simple application de la formule des traces locale simple σ-tordue (proposition de 4.10). Rappelons que cette dernière a été établie en supposant démontrés le théorème de 4.6 et la conjecture de transfert (cf. la remarque de 2.5).

PROPOSITION 2. – *On suppose établie la formule des traces locale simple σ-tordue (proposition de 4.10). Soit (Π, A) une σ-représentation fortement irréductible de $G(E)$ telle que Π est une série σ-discrète, et soit $\phi \in C_c^\infty(G(E), \omega_\Pi)$ un pseudo-coefficient pour (Π, A). Alors pour tout élément σ-elliptique δ de $G(E)$, on a*

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = m_\Pi \Theta_{\check{\Pi}}^{\check{A}}(\delta).$$

Démonstration. – Si $A = I_\sigma(\Pi)$, d'après la formule des traces locale simple σ-tordue, on a

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = m_\Pi \Theta_{\check{\Pi}}^{\sigma}(\delta)$$

pour tout $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$. Supposons maintenant que $A = \lambda I_\sigma(\Pi)$ pour un nombre complexe $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda\phi$ est un pseudo-coefficient pour $(\Pi, I_\sigma(\Pi))$, par suite on a

$$\Lambda_\sigma^{G(E)}(\phi, \delta) = \lambda^{-1} m_\Pi \Theta_{\check{\Pi}}^{\sigma}(\delta) = m_\Pi \Theta_{\check{\Pi}}^{\lambda^{-1} I_\sigma(\check{\Pi})}(\delta)$$

pour tout $\delta \in G(E)_{\sigma-\mathrm{e}}$. Or d'après la remarque de 4.1, on a $\lambda^{-1} I_\sigma(\check{\Pi}) = \check{A}$. $\square$

II.6. Une méthode globale

II.6.1. – On suppose toujours que la F-algèbre cyclique E est un corps. Dans cette section 6, on prouve le théorème de 4.6 par la méthode globale habituelle, grâce à l'existence de pseudo-coefficients établie dans la section 5. Le résultat étant déjà connu en caractéristique nulle [**1**, ch. 1, 6.3], on suppose désormais que F est de caractéristique > 0.

On choisit une extension $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ de corps de fonctions, cyclique de degré d, et redonnant en une place finie v_0 de $\mathbf{F}$ inerte dans $\mathbf{E}$, l'extension de corps locaux E/F. Précisément, on se donne une place v_0 de $\mathbf{F}$ inerte dans $\mathbf{E}$, c'est-à-dire n'ayant qu'une extension à $\mathbf{E}$, et un isomorphisme de corps topologiques ι de $\mathbf{E}_{v_0}$ sur E, qui induit un isomorphisme, encore noté ι, de $\mathbf{F}_{v_0}$ sur F; où, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_v$ désigne le complété de $\mathbf{F}$ en v, et $\mathbf{E}_v = \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}_v$. L'existence de telles données est bien connue [**32**, lemme 3.6].

Notons $\boldsymbol{\Sigma}$ le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{E}/\mathbf{F}$. Si v est une place de $\mathbf{F}$, chaque élément de $\boldsymbol{\Sigma}$ se prolonge de manière unique à $\mathbf{E}_v$, ce qui fait de $\mathbf{E}_v$ une $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique de groupe $\boldsymbol{\Sigma}$. Précisément, on a la décomposition $\mathbf{E}_v = \prod_{w|v} \mathbf{E}_w$ où w parcourt l'ensemble, disons $\mathscr{E}_v$, des places au-dessus de v, et $\mathbf{E}_w$ désigne le complété de $\mathbf{E}$ en w. Les corps $\mathbf{E}_w$ sont des extensions finies cycliques de $\mathbf{F}_v$, toutes isomorphes, de degré $d_v = \frac{d}{r_v}$ où r_v est le cardinal de $\mathscr{E}_v$.

Via ι, on identifie le groupe de Galois $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ avec le groupe de Galois $\Sigma = \mathrm{Gal}(E/F)$. Le générateur σ de Σ fixé en 2.1 donne donc un générateur de $\boldsymbol{\Sigma}$, encore noté σ. On note N l'application norme de $G(\mathbf{E})$ à $G(\mathbf{E})$, donnée par $N(\delta) = \delta\delta^{\sigma}\cdots\delta^{\sigma^{d-1}}$; d'après 2.1 elle induit une application injective, notée $\mathbb{N}$, entre l'ensemble des σ-orbites dans $G(\mathbf{E})$ et l'ensemble des orbites dans $G(\mathbf{F})$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on note N_v l'application norme de $G(\mathbf{E}_v)$ à $G(\mathbf{E}_v)$, définie de la même manière. Pour $\delta \in G(\mathbf{E})$, on a donc $N_v(\delta) = N(\delta)$.

On note $\mathfrak{N}$ l'application norme de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ à $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, donnée par $\mathfrak{N} = \prod_v N_v$; où $\mathbb{A}_{\mathbf{E}}$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbf{E}$. Ainsi la restriction de $\mathfrak{N}$ à $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}) = \mathbb{A}_{\mathbf{E}}^{\times}$ coïncide avec l'application norme de $\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^{\times}$ à $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$, donnée par $\prod_v N_{\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v}$.

II.6.2. – Si w est une place de $\mathbf{E}$, on note $\mathfrak{o}_w$ l'anneau des entiers de $\mathbf{E}_w$. Si v est une place de $\mathbf{F}$, on note $\mathfrak{o}_v$ l'anneau des entiers de $\mathbf{F}_v$, et $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v} = \prod_{w|v} \mathfrak{o}_w$ celui de $\mathbf{E}_v$. On note aussi K_v le sous-groupe compact maximal $G(\mathfrak{o}_v)$ de $G(\mathbf{F}_v)$, et $K_{\mathbf{E}_v}$ le sous-groupe compact maximal $G(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$ de $G(\mathbf{E}_v)$. On choisit, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, des mesures de Haar dg_v sur $G(\mathbf{F}_v)$ et $dg_{\mathbf{E}_v}$ sur $G(\mathbf{E}_v)$. On suppose que pour presque tout v, ces mesures sont celles qui donnent le volume 1 à K_v et $K_{\mathbf{E}_v}$. Cela détermine des mesures de Haar dg sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ et $dg_{\mathbf{E}}$ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

Notons $\mathfrak{Z}^1$ le sous-groupe $\mathfrak{N}(Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}))$ de $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, et fixons un caractère unitaire $\omega = \prod_v \omega_v$ de $\mathfrak{Z}^1$ trivial sur $\mathfrak{Z}^1 \cap Z(\mathbf{F})$. Soit χ le caractère $\omega \circ \mathfrak{N}$ de $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, et pour chaque place v de $\mathbf{F}$, soit χ_v le caractère $\omega_v \circ N_v$ de $Z(\mathbf{E}_v)$. On a la décomposition $\chi = \prod_v \chi_v$ où v parcourt les places de $\mathbf{F}$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on choisit des mesures de Haar dz_v sur $\mathfrak{Z}_v^1 = N_v(Z(\mathbf{E}_v))$ et $dz_{\mathbf{E}_v}$ sur $Z(\mathbf{E}_v)$. On suppose que pour presque toute place v de $\mathbf{F}$ *non ramifiée dans* $\mathbf{E}$, c'est-à-dire telle que le groupe $Z(\mathfrak{o}_v)$ est contenu dans $\mathfrak{Z}_v^1$, ces mesures sont celles qui donnent le volume 1 à $Z(\mathfrak{o}_v)$ et $Z(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$. Cela détermine des mesures de Haar dz sur $\mathfrak{Z}^1$ et $dz_{\mathbf{E}}$ sur $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

On note $d\bar{g}$ la mesure quotient $\frac{dg}{dz}$ sur le groupe $\mathfrak{Z}^1\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, et $d\bar{g}_{\mathbf{E}}$ la mesure quotient $\frac{dg_{\mathbf{E}}}{dz_{\mathbf{E}}}$ sur le groupe $Z(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$.

II.6.3. – Dans ce n°, on rappelle la formule des traces simple (i.e. de Deligne-Kazhdan) que l'on utilise. Notons $\mathscr{L}_\omega^0(G,\mathbf{F})$ l'espace des formes automorphes cuspidales sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ se transformant suivant ω sous l'action de $\mathfrak{Z}^1$. Il est somme directe hilbertienne de représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, chacune apparaissant avec multiplicité 1.

On considère des fonctions f sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ décomposées en produit de fonctions locales f_v suivant les places v de $\mathbf{F}$, où f_v est une fonction localement constante sur $G(\mathbf{F}_v)$, à support compact modulo $Z(\mathbf{F}_v)$ et se transformant suivant ω_v^{-1} sous l'action de $\mathfrak{Z}_v^1$ par translations. On demande de plus qu'à presque toute place v de $\mathbf{F}$ non ramifiée dans $\mathbf{E}$, f_v soit la fonction particulière f_v^0 à support dans $\mathfrak{Z}_v^1 K_v$ telle que $f_v^0(zg) = \omega_v^{-1}(z)$ pour $z \in \mathfrak{Z}_v^1$ et $g \in K_v$. De telles fonctions f agissent sur l'espace $\mathscr{L}_\omega^0(G,\mathbf{F})$ par convolution. L'opérateur $\rho_\omega^0(f) = \rho_\omega^0(f d\bar{g})$ obtenu est à trace, et l'on a

$$\mathrm{tr}(\rho_\omega^0(f)) = \sum_\pi \mathrm{tr}(\pi(f)) = \sum_\pi \sum_v \mathrm{tr}(\pi_v(f_v))$$

où π parcourt les représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G,\mathbf{F})$, et v les places de $\mathbf{F}$. Pour chaque π, on a la décomposition en produit tensoriel complété $\pi \simeq \widehat{\otimes}_v \tilde{\pi}_v$ où $\tilde{\pi}_v$ est une représentation unitaire irréductible de $G(\mathbf{F}_v)$, et π_v désigne la partie lisse de $\tilde{\pi}_v$, c'est-à-dire la représentation lisse irréductible de $G(\mathbf{F}_v)$ sur le sous-espace de l'espace de $\tilde{\pi}_v$ formé des vecteurs lisses; comme f_v est localement constante, on a l'égalité $\mathrm{tr}(\tilde{\pi}_v(f_v)) = \mathrm{tr}(\pi_v(f_v))$.

Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, si γ est un élément régulier de $G(\mathbf{F}_v)$, on choisit une mesure de Haar $dg_{v,\gamma}$ sur le centralisateur $G_\gamma(\mathbf{F}_v)$ de γ dans $G(\mathbf{F}_v)$, et l'on note $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(\cdot,\gamma)$ la forme linéaire sur $C_c^\infty(G(\mathbf{F}_v),\omega_v)$ définie par la mesure quotient $\frac{dg_v}{dg_{v,\gamma}}$ sur l'espace homogène $G_\gamma(\mathbf{F}_v)\backslash G(\mathbf{F}_v)$ comme en 2.3 et 2.6. Pour $\gamma \in G(\mathbf{F})''$, on suppose que les mesures $dg_{v,\gamma}$ sont choisies de telle manière que leur produit définisse une mesure de Haar dg_γ sur le centralisateur $G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de γ dans $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, et l'on note $d\bar{g}_\gamma$ la mesure quotient $\frac{dg_\gamma}{dz}$ sur le groupe $\mathfrak{Z}^1\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$. Pour $\gamma \in G(\mathbf{F})''$ et $f = \prod_v f_v$ comme ci-dessus, on pose

$$\Lambda^{G(\mathbf{F})}(f,\gamma) = \prod_v \Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v,\gamma)$$

où v parcourt les places de $\mathbf{F}$. Supposons de plus que f vérifie la condition $c_{v_1}(f)$ suivante, pour une place v_1 de $\mathbf{F}$:

$c_{v_1}(f)$: f_{v_1} s'annule en dehors des éléments (réguliers) elliptiques de $G(\mathbf{F}_{v_1})$, et est combinaison linéaire de coefficients de représentations lisses irréductibles cuspidales de $G(\mathbf{F}_{v_1})$.

Alors on a la formule des traces simple [**32**, 4.9], **I**.6.2, rem.:

$$\mathrm{tr}(\rho^0_\omega(f)) = \sum_\gamma \mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbf{F})\mathfrak{N}^1\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{F}))\Lambda^{G(\mathbf{F})}(f,\gamma)$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison (sous $G(\mathbf{F})$) d'éléments de $G(\mathbf{F})''$, et le volume est calculé à l'aide de la mesure $d\bar{g}_\gamma$.

II.6.4. – Rappelons maintenant la version σ-tordue de la formule des traces simple. Comme en 6.3, on note $\mathscr{L}^0_\chi(G,\mathbf{E})$ l'espace des formes automorphes cuspidales sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ se transformant suivant χ sous l'action de $Z(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ par translations. On note I_σ l'opérateur sur $\mathscr{L}^0_\chi(G,\mathbf{E})$ donné par $I_\sigma(\xi)(g) = \xi(g^\sigma)$, $g \in G(\mathbf{E})$. Cet opérateur envoie une représentation automorphe cuspidale Π de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}^0_\chi(G,\mathbf{E})$ sur une représentation isomorphe à Π^σ; en particulier si Π est σ-stable, d'après le théorème de multiplicité 1, on a $\Pi^\sigma = \Pi$.

On considère des fonctions ϕ sur $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ décomposées en produit de fonctions locales ϕ_v suivant les places v de $\mathbf{F}$, où ϕ_v est une fonction localement constante sur $G(\mathbf{E}_v)$, à support compact modulo $Z(\mathbf{E}_v)$ et se transformant suivant χ_v^{-1} sous l'action de $Z(\mathbf{E}_v)$ par translations. On demande de plus qu'à presque toute place v de $\mathbf{F}$ non ramifiée dans $\mathbf{E}$, ϕ_v soit la fonction particulière ϕ^0_v à support dans $Z(\mathbf{E}_v)K_{\mathbf{E}_v}$ telle que $\phi^0_v(zg) = \chi_v^{-1}(z)$ pour $z \in Z(\mathbf{E}_v)$ et $g \in K_{\mathbf{E}_v}$. De telles fonctions ϕ agissent sur l'espace $\mathscr{L}^0_\chi(G,\mathbf{E})$ par convolution. L'opérateur $\mathrm{R}^0_\chi(\phi) = \mathrm{R}^0_\chi(\phi d\bar{g}_\mathbf{E})$ obtenu est à trace, de même que l'opérateur $\mathrm{R}^0_\chi(\phi)\circ I_\sigma$, et l'on a

$$\mathrm{tr}(\mathrm{R}^0_\chi(\phi)\circ I_\sigma) = \sum_\Pi \mathrm{tr}(\Pi(f)\circ A_\Pi) = \sum_\Pi\sum_v \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)\circ A_{\Pi_v})$$

où Π parcourt les représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}^0_\chi(G,\mathbf{E})$ telles que $\Pi^\sigma = \Pi$, et v les places de $\mathbf{F}$. Pour chaque Π, on a la décomposition en produit tensoriel complété $\Pi \simeq \widehat{\otimes}_v\widetilde{\Pi}_v$ où $\widetilde{\Pi}_v$ est une représentation unitaire irréductible σ-stable de $G(\mathbf{E}_v)$, et Π_v désigne la partie lisse de $\widetilde{\Pi}_v$; l'opérateur I_σ induit par restriction un isomorphisme A_Π de Π sur Π^σ, qui se décompose en produit tensoriel d'isomorphismes locaux $A_{\widetilde{\Pi}_v}$ de $\widetilde{\Pi}_v$ sur $\widetilde{\Pi}^\sigma_v$, et $A_{\widetilde{\Pi}_v}$ induit par restriction un isomorphisme A_{Π_v} de Π_v sur Π^σ_v; comme ϕ_v est localement constante, on a l'égalité $\mathrm{tr}(\widetilde{\Pi}_v(\phi_v)\circ A_{\widetilde{\Pi}_v}) = \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)\circ A_{\Pi_v})$. Notons qu'en presque toute place v de $\mathbf{F}$, A_{Π_v} est l'identité sur le sous-espace de l'espace de Π_v formé des vecteurs fixés par $K_{\mathbf{E}_v}$.

On verra en 6.5 que pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on peut prendre pour A_{Π_v} l'opérateur local normalisé $I_\sigma(\Pi_v)$.

Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, si δ est un élément σ-régulier de $G(\mathbf{E}_v)$, on choisit une mesure de Haar $dg^\sigma_{\mathbf{E}_v,\delta}$ sur le σ-centralisateur $G^\sigma_\delta(\mathbf{E}_v)$ de δ dans $G(\mathbf{E}_v)$, et l'on note $\Lambda^{G(\mathbf{E}_v)}_\sigma(\cdot,\delta)$ la forme linéaire sur $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbf{E}_v),\chi_v)$ définie par la mesure quotient $\frac{dg_{\mathbf{E}_v}}{dg^\sigma_{\mathbf{E}_v,\delta}}$ sur l'espace homogène $G^\sigma_\delta(\mathbf{F}_v)\backslash G(\mathbf{E}_v)$ comme en 2.3 et 2.6. Pour $\delta\in G(\mathbf{E})''$, on suppose que les mesures $dg^\sigma_{\mathbf{E}_v,\delta}$ sont choisies de telle manière que leur produit définisse une mesure de Haar $dg^\sigma_{\mathbf{E},\delta}$ sur le σ-centralisateur $G^\sigma_\delta(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ de δ dans $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$, et l'on note $d\bar{g}^\sigma_{\mathbf{E},\delta}$ la mesure quotient $\frac{dg^\sigma_{\mathbf{E},\delta}}{dz_\mathbf{E}}$ sur le groupe $Z(\mathbb{A}_\mathbf{E})\backslash G_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{E})$. Pour $\delta\in G(\mathbf{E})''$ et $\phi=\prod_v\phi_v$ comme ci-dessus, on pose

$$\Lambda^{G(\mathbf{E})}_\sigma(\phi,\delta)=\prod_v\Lambda^{G(\mathbf{E}_v)}_\sigma(\phi_v,\delta)$$

où v parcourt les places de $\mathbf{F}$. Supposons de plus que ϕ vérifie la condition $c^\sigma_{v_1}(\phi)$ suivante, pour une place v_1 de $\mathbf{F}$:

$c^\sigma_{v_1}(\phi)$: ϕ_{v_1} s'annule en dehors des éléments (σ-réguliers) σ-elliptiques de $G(\mathbf{E}_{v_1})$, et est combinaison linéaire de coefficients de représentations lisses irréductibles cuspidales σ-stables de $G(\mathbf{F}_{v_1})$.

Alors on a la formule des traces simple tordue [**1**, ch. 1, lemma 2.5]:

$$\mathrm{tr}(\mathrm{R}^0_\chi(\phi)\circ I_\sigma)=\sum_\delta\mathrm{vol}(G^\sigma_\delta(\mathbf{F})Z(\mathbb{A}_\mathbf{F})\backslash G^\sigma_\delta(\mathbb{A}_\mathbf{F}))\Lambda^{G(\mathbf{E})}_\sigma(\phi,\delta)$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants des classes de σ-conjugaison (sous $G(\mathbf{E})$) dont l'image par l'application $\mathbb{N}$ est contenue dans $G(\mathbf{F})''$.

II.6.5. – On a fixé en 3.1 un caractère additif non trivial ψ de F. On choisit un caractère additif $\Psi=\prod_v\Psi_v$ de $\mathbb{A}_\mathbf{F}$, trivial sur $\mathbf{F}$, correspondant à ψ en la place v_0, c'est-à-dire tel que $\Psi_{v_0}=\psi\circ\iota$. Posons $\Psi_\mathbf{E}=\Psi\circ\mathrm{Tr}$ où Tr désigne l'application trace de $\mathbb{A}_\mathbf{E}$ à $\mathbb{A}_\mathbf{F}$; c'est un caractère additif de $\mathbb{A}_\mathbf{E}$, trivial sur $\mathbf{E}$ et σ-invariant. Notons $\theta_{\Psi_\mathbf{E}}$ le caractère de $U_0(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ défini par $\Psi_\mathbf{E}$ comme en 4.1; puisque $\Psi_\mathbf{E}$ est trivial sur $\mathbf{E}$, $\theta_{\Psi_\mathbf{E}}$ est trivial sur $U_0(\mathbf{E})$. Posant $\Psi_{\mathbf{E}_v}=\Psi_v\circ\mathrm{Tr}_v$ où Tr_v désigne l'application trace de $\mathbf{E}_v$ à $\mathbf{F}_v$, on a $\theta_{\Psi_\mathbf{E}}=\prod_v\theta_{\Psi_{\mathbf{E}_v}}$.

Proposition. – *Pour chaque représentation automorphe cuspidale* Π *de* $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ *dans* $\mathscr{L}^0_\chi(G,\mathbf{E})$, *l'opérateur global* $I_\sigma(\Pi)$ *est le produit tensoriel des opérateurs locaux normalisés: pour chaque place* v *de* $\mathbf{F}$, *on peut prendre pour* A_{Π_v} *l'opérateur local normalisé* $I_\sigma(\Pi_v)$.

Démonstration. – Soit Π une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}^0_\chi(G,\mathbf{E})$. Considérons un isomorphisme φ de Π avec $\widehat{\otimes}_v\widetilde{\Pi}_v$ où $\widetilde{\Pi}_v$ est une représentation unitaire irréductible σ-stable de $G(\mathbf{E}_v)$, le produit tensoriel étant pris suivant le choix, pour presque toute place v de $\mathbf{F}$, d'un vecteur $K_{\mathbf{E}_v}$-invariant unitaire x_v dans l'espace $\widetilde{V}_v$ de $\widetilde{\Pi}_v$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, la partie lisse Π_v de $\widetilde{\Pi}_v$ est σ-stable, et l'on dispose d'un opérateur d'entrelacement normalisé $I_\sigma(\Pi_v)$ sur l'espace V_v de Π_v (cf. 4.1): pour n'importe quelle fonctionnelle de Whittaker λ pour Π_v (relativement à $\theta_{\Psi_{\mathbf{E}_v}}$), on a $\lambda \circ I_\sigma(\Pi_v) = \lambda$.

L'isomorphisme $I_\sigma(\Pi)$ de Π sur $\Pi^\sigma = \Pi$ stabilise le sous-espace $V = \varphi^{-1}(\otimes'_v V_v)$ de l'espace de Π, où $\otimes'$ désigne le produit tensoriel restreint, et induit par restriction un automorphisme de V. Précisément, pour tout sous-ensemble fini S' de places de $\mathbf{F}$ contenant les places où le vecteur x_v n'a pas été choisi, $I_\sigma(\Pi)$ stabilise le sous-espace de l'espace de Π formé des vecteurs fixés par $\prod_v K_{\mathbf{E}_v}$, c'est-à-dire l'espace $\varphi^{-1}(\otimes_{v\in S'}\widetilde{V}_v \otimes_{v\notin S'} \mathbb{C}x_v)$, et $I_\sigma(\Pi)$ stabilise aussi le sous-espace $\varphi^{-1}(\otimes_{v\in S'}V_v \otimes_{v\notin S'} \mathbb{C}x_v)$ de V.

Fixons une mesure de Haar (invariante à droite) du sur l'espace homogène $U_0(\mathbf{E})\backslash U_0(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$. Sur V on dispose de la fonctionnelle de Whittaker Λ définie par

$$\Lambda(\xi) = \int_{U_0(\mathbf{E})\backslash U_0(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})} \xi(u)\theta_{\Psi_{\mathbf{E}}}(u)du.$$

D'après [**70**, theo. 4.5], Λ se factorise en produit de fonctionnelles de Whittaker suivant les places v de $\mathbf{F}$: $\Lambda\circ\varphi^{-1}$ est de la forme $\prod_v \Lambda_v$ où, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, Λ_v est une fonctionnelle de Whittaker pour Π_v relativement à $\theta_{\Psi_{\mathbf{E}_v}}$, prenant la valeur 1 en x_v pour presque tout $v \notin S'$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on a $\Lambda_v \circ I_\sigma(\Pi_v) = \Lambda_v$. Par suite, notant A le produit tensoriel des $I_\sigma(\Pi_v)$, bien défini sur $\otimes'_v V_v$ puisque $I_\sigma(\Pi_v)(x_v) = x_v$ pour presque toute place v de $\mathbf{F}$, on obtient que $(\Lambda\circ\varphi^{-1})\circ A = \Lambda\circ\varphi^{-1}$. Par conséquent $\varphi^{-1}\circ A\circ\varphi$ coïncide avec $I_\sigma(\Pi)$. En d'autres termes, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on peut prendre pour A_{Π_v} l'opérateur local normalisé $I_\sigma(\Pi_v)$. □

II.6.6. – On veut maintenant comparer les formules des traces de 6.3 et 6.4. On suppose que pour toute place v de $\mathbf{F}$ et toute paire d'éléments associés (δ,γ) de $G(\mathbf{E}_v)\times G(\mathbf{F}_v)$ telle que γ soit régulier, les mesures de Haar $dg^\sigma_{v,\delta}$ sur $G^\sigma_\delta(\mathbf{F}_v)$ et dg_γ sur $G_\gamma(\mathbf{F}_v)$ sont associées au sens de [**39**, 2.5], et que pour presque toute place v, ces mesures sont celles qui donnent le volume 1 au sous-groupe compact maximal respectivement de $G^\sigma_\delta(\mathbf{F}_v)$ et de $G_\gamma(\mathbf{F}_v)$. Ces normalisations sont compatibles avec les conditions imposées en 6.3 et 6.4: pour $\delta\in G(\mathbf{E})_{\sigma-\mathrm{r}}$, les mesures $dg^\sigma_{v,\delta}$ définissent une mesure de Haar dg^σ_δ sur $G^\sigma_\delta(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, et pour pour $\gamma\in G(\mathbf{F})_{\mathrm{r}}\cap N(G(\mathbf{E}))$, les mesures $dg_{v,\gamma}$ définissent une mesure de Haar dg_γ sur $G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$.

Définition. – Deux fonctions ϕ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ et f sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ décomposées en produit de fonctions locales $\phi = \prod_v \phi_v$ et $f = \prod_v f_v$, où v parcourt les places de $\mathbf{F}$, telles que $\phi_v \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbf{E}_v),\chi_v)$ et $f_v \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(\mathbf{F}_v),\omega_v)$, sont dite *concordantes* si pour chaque place v, les fonctions ϕ_v et f_v le sont.

Soient des fonctions f sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ et ϕ sur $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ vérifiant toutes les conditions de 6.3 et 6.4, en particulier les conditions $c_{v_1}(f)$ et $c^{\sigma}_{v_2}(\phi)$ pour des places v_1 et v_2 de $\mathbf{F}$ éventuellement distinctes. Si ϕ et f concordent, on a l'égalité [**39**, 6.4]

$$d\sum_{\Pi}\mathrm{tr}(\Pi(\phi)\circ A_{\Pi})=\sum_{\pi}\mathrm{tr}(\pi(f))$$

où Π parcourt les représentations automorphes cuspidales σ-stables de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathcal{L}^0_{\chi}(G,\mathbf{E})$, et π parcourt les représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathcal{L}^0_{\omega}(G,\mathbf{F})$.

II.6.7. – On a désormais réuni tous les ingrédients nécessaires à la démonstration du théorème de 4.6. Choisissons une place finie v_1 de $\mathbf{F}$ *scindée* dans $\mathbf{E}$ — elle est donc distincte de v_0 —, et telle que le cardinal du corps résiduel $\kappa_{\mathbf{F}_{v_1}}$ soit supérieur ou égal à 3. On suppose aussi que ω a été choisi de telle manière que le caractère ω_{v_1} de $\mathbf{F}^{\times}_{v_1}$ soit trivial sur $U^1_{v_1}=1+\mathfrak{p}_{v_1}$, et induise par restriction un caractère fidèle, disons η_{v_1}, de $\kappa^{\times}_{F_{v_1}}$.

Démontrons le point (1): l'existence d'un relèvement. On part d'une série discrète π_0 de $G(F)$, de caractère central $\omega_0=\omega_{\pi_0}$. Quitte à changer le caractère ω de $\mathfrak{N}^1$ (tout en conservant la condition ci-dessus en la place v_1), on peut supposer que le caractère $\omega_0\circ\iota$ de $\mathbf{F}^{\times}_{v_0}=Z(\mathbf{F}_{v_0})$ prolonge ω_{v_0}. Dans ce n° et dans le suivant, on fixe des fonctions f_v pour chaque place v de $\mathbf{F}$, de manière à produire en 6.9 une représentation automorphe cuspidale π de $G(\mathbf{F}_{v_0})$ dans $\mathcal{L}^0_{\omega}(G,\mathbf{F})$ telle que $\pi_{v_0}\simeq\pi_0$. Commençons par les places v_0 et v_1.

En la place v_0, on prend pour f_{v_0} un pseudo-coefficient pour la série discrète τ_0, identifiée à une série discrète de $G(\mathbf{F}_{v_0})$ via ι — notons que l'existence de f_{v_0} est un cas particulier de la proposition de 5.13. Comme la fonction f_{v_0} est elliptique (5.14, proposition 2), d'après la formule des traces locale simple (cf. 4.10), pour tout élément régulier elliptique γ de $G(\mathbf{F}_{v_0})$, on a l'égalité $\Lambda^{G(F)}(f_{v_0},\gamma)=\overline{\Theta_{\tau_0}(\gamma)}$. D'autre part on sait, par exemple grâce à la correspondance de Jacquet-Langlands, que la fonction caractère Θ_{τ_0} est égale à une constante non nulle au voisinage de 1 dans $G(\mathbf{F}_{v_0})_{\mathrm{e}}$. Puisque la norme de $N^{-1}_{v_0}(G(\mathbf{F}_{v_0}))$ à $G(\mathbf{F}_{v_0})$ est continue et submersive (donc ouverte) au voisinage de 1 dans $N^{-1}_{v_0}(G(\mathbf{F}_{v_0}))$, on en déduit qu'il existe un élément $\gamma_{v_0}\in G(\mathbf{F}_{v_0})_{\mathrm{e}}\cap N_{v_0}(G(\mathbf{E}_{v_0}))$ tel que $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_0}}(f_{v_0},\gamma_{v_0})\neq 0$.

En la place v_1, on fixe comme en 2.13 une extension non ramifiée $\mathbf{F}'_{v_1}$ de $\mathbf{F}_{v_1}$ de degré n, une $\mathfrak{o}_{v_1}$-base de $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}'_{v_1}}$, d'où des plongements $\mathbf{F}'_{v_1}\subset G(\mathbf{F}_{v_1})$ et $\kappa_{\mathbf{F}'_{v_1}}\subset G(\kappa_{\mathbf{F}_{v_1}})$. On fixe aussi, comme en 2.14, deux caractères $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}'_{v_1}/\mathbf{F}_{v_1})$-réguliers θ_1 et θ_2 de $\kappa^{\times}_{\mathbf{F}'_{v_1}}$ prolongeant η_{v_1}, compatibles sur les éléments non $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}'_{v_1}/\mathbf{F}_{v_1})$-réguliers de $\kappa^{\times}_{\mathbf{F}'_{v_1}}$, et engendrant deux $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}'_{v_1}/\mathbf{F}_{v_1})$-orbites distinctes ϑ_1 et ϑ_2. Soit $\underline{\lambda}=(\lambda_{\vartheta})_{\vartheta\in\Omega(\eta_{v_1})}$ la famille définie par $\lambda_{\vartheta_1}=1$, $\lambda_{\vartheta_2}=-1$ et $\lambda_{\vartheta}=0$ si $\vartheta\notin\{\vartheta_1,\vartheta_2\}$. Choisissons le nombre complexe $\alpha \neq 0$ de sorte que la fonction $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$ sur $G(\mathbf{F}_{v_1})$ définie en 2.14 à l'aide de ces données, se transforme suivant $\omega_{v_1}^{-1}$ sous l'action de $\mathbf{F}_{v_1}^{\times}$ par translations. On prend pour f_{v_1} cette fonction $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$. Par construction, f_{v_1} s'annule en dehors des éléments réguliers elliptiques de $G(\mathbf{F}_{v_1})$. Précisément, f_{v_1} s'annule en dehors des éléments de la forme $\varpi_{\mathbf{F}_{v_1}}^a x$ où $a \in \mathbb{Z}$ et x est conjugué dans $G(\mathbf{F}_{v_1})$ à un élément y de $U_{\mathbf{F}'_{v_1}}$ dont l'image $\bar{y}$ dans $\kappa_{\mathbf{F}'_{v_1}}$ est $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}'_{v_1}/\mathbf{F}_{v_1})$-régulière. De plus, puisque le caractère η est fidèle, d'après la remarque (2) de 3.11, f_{v_1} s'annule en dehors des éléments réguliers de $G(\mathbf{F}_{v_1})$ dont l'image dans $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{F}_{v_1}) = G(\mathbf{F}_{v_1})/Z(\mathbf{F}_{v_1})$ est fortement régulière. D'après la démonstration de la proposition de [**40**, 3.11], pour y comme ci-dessus, on a $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_1})}(f_{v_1}, y) = \theta_1(\bar{y})^{-1} - \theta_2(\bar{y})^{-1}$. Choisissons y tel que $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_1})}(f_{v_1}, y) \neq 0$, et posons $\gamma_{v_1} = y$. Notons que γ_{v_1} appartient à $G(\mathbf{F}_{v_1})_{\mathrm{e}} \cap K_{\mathbf{F}_{v_1}}$, et comme v_1 est scindée dans $\mathbf{E}$, c'est une norme de $G(\mathbf{E}_{v_1})$ à $G(\mathbf{F}_{v_1})$.

Pour $i = 1, 2$, l'application $x \mapsto \Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_i})}(f_{v_i}, x)$ est localement constante sur $G(\mathbf{F}_{v_i})_{\mathrm{r}}$ — pourvu que les mesures de Haar $dg_{v_i,x}$ sur $G_x(\mathbf{F}_{v_i})$ aient été choisies de manière compatible (2.4, remarque). On peut donc trouver un élément γ dans $G(\mathbf{F})'' \cap N(G(\mathbf{E}))$, suffisamment proche de γ_{v_0} et γ_{v_1}, tel que les intégrales orbitales $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_0})}(f_{v_0}, \gamma)$ et $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_1})}(f_{v_1}, \gamma)$ sont non nulles. Notons que puisque $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_1})}(f_{v_1}, \gamma) \neq 0$, l'image de γ dans $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{F})$ est fortement régulière.

II.6.8. – Fixons un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$, contenant v_0, v_1 et une place v_2 scindée dans $\mathbf{E}$ distincte de v_1, tel que pour $v \notin S$, les conditions suivantes soient vérifiées:

(i) la $\mathbf{F}_v$-algèbre cyclique $\mathbf{E}_v$ est non ramifiée, i.e. $Z(\mathfrak{o}_v) \subset \mathfrak{Z}_v^1$;
(ii) le caractère ω_v est non ramifié, i.e. trivial sur $Z(\mathfrak{o}_v)$;
(iii) les mesures dg_v, $dg_{\mathbf{E}_v}$, dz_v, $dz_{\mathbf{E}_v}$ sont celles qui donnent le volume 1 aux groupes K_v, $K_{\mathbf{E}_v}$, $Z(\mathfrak{o}_v)$, $Z(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$;
(iv) l'élément γ de 6.7 appartient à K_v.

En chaque place $v \notin S$, on prend pour f_v la fonction particulière f_v^0. Puisque γ appartient à K_v, on a $\Lambda^{G(\mathbf{F}_{v_0})}(f_v^0, \gamma) > 0$.

Pour $v \in S \smallsetminus \{v_0, v_1\}$, on peut choisir une fonction f_v à support dans $G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}} \cap N_v(G(\mathbf{E}_v))$ telle que $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v}(f_v, \gamma) > 0$. En effet, l'élément γ appartient à $G(\mathbf{F}_v)' \cap N_v(G(\mathbf{E}_v))$ et son image dans $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{F}_v)$ est fortement régulière. Le centralisateur G_γ de γ dans G est un tore, disons T, et l'on peut choisir un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_{\gamma,v}$ de 1 dans $T(\mathbf{F}_v)$ vérifiant les conditions:

— $\mathcal{V}_{\gamma,v} \subset N_v(T(\mathbf{E}_v))$ et $\gamma\mathcal{V}_{\gamma,v} \subset G(\mathbf{F}_v)'$, i.e. $\gamma\mathcal{V}_{\gamma,v} \subset G(\mathbf{F}_v)' \cap N_v(T(\mathbf{E}_v))$;
— $Z(\mathbf{F}_v)\mathcal{V}_{\gamma,v} \cap \mathcal{O}_{G(\mathbf{F}_v)}(\gamma) = \{\gamma\}$;
— $\omega_v(u'u^{-1}) = 1$ pour tous u, $u' \in \mathcal{V}_{\gamma,v}$ tels que $u'u^{-1} \in \mathfrak{Z}_v^1$.

Soit Γ_v un (petit) sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbf{F}_v)$, et soit $\tilde{f}_v$ la fonction caractéristique de l'ouvert compact X_v de $G(\mathbf{F}_v)$ formé des $k^{-1}xk$ pour $k \in \Gamma_v$ et $x \in \gamma\mathscr{V}_{\gamma,v}$. La fonction $f_v = (\tilde{f}_v)_{\omega_v}$ est à support dans $\mathfrak{N}_v^1 X_v$, et si le groupe Γ_v est suffisamment petit — ce que l'on suppose — elle est donnée par $f_v(zx) = \omega_v(z)^{-1}$ pour $z \in \mathfrak{N}_v^1$ et $x \in \gamma\mathscr{V}_{\gamma,v}$. Par construction, le support de f_v est contenu dans $G(\mathbf{F}_v)' \cap N(G(\mathbf{E}_v))$, et l'on a $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v, \gamma) > 0$.

II.6.9. – Soit f la fonction $\prod_v f_v$ sur $G(\mathbb{A}_\mathbb{F})$, où les fonctions f_v sont celles fixées en 6.7 et 6.8. Comme la condition $c_{v_1}(f)$ est vérifiée, on a la formule des traces simples de 6.3. De plus, quitte à restreindre le voisinage ouvert compact $\mathscr{V}_{\gamma,v_2}$ de 1 dans $G_\gamma(\mathbf{F}_{v_2})$, on peut supposer que seule l'orbite de γ contribue de manière non triviale au côté géométrique de cette formule des traces. Alors on a

$$\mathrm{tr}(\rho_\omega^0(f)) = \Lambda^{G(\mathbf{F})}(f, \gamma) \neq 0.$$

Cela implique qu'il existe une représentation automorphe cuspidale $\pi^\natural$ de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G, \mathbf{F})$ telle que $\mathrm{tr}(\pi^\natural(f)) \neq 0$. On a donc $\mathrm{tr}(\pi_v^\natural(f_v)) \neq 0$ pour toute place v de $\mathbf{F}$. En particulier, $\pi_v^\natural$ est non ramifiée pour $v \notin S$, et $\pi_{v_1}^\natural$ est cuspidale de niveau zéro; précisément $\pi_{v_1}^\natural$ est isomorphe à $\pi_{\vartheta_1,\alpha}$ ou à $\pi_{\vartheta_2,\alpha}$. Quant à la représentation $\pi_{v_0}^\natural$, puisqu'elle est générique et unitaire, c'est ou bien une induite parabolique stricte ou bien une série discrète (cf. 3.3). Or f_{v_0} annule les traces des induites paraboliques strictes (5.14, proposition 2), par conséquent c'est une série discrète. Donc $\pi_{v_0}^\natural$ est isomorphe à π_0.

Remarque. – Plus simplement, puisqu'on est en caractéristique non nulle, on sait d'emblée que $\pi_{v_0}^\natural$ est tempérée, d'après la conjecture de Ramanujan-Peterson [**54**].

II.6.10. – L'étape suivante consiste à produire une représentation automorphe cuspidale σ-stable $\Pi^\natural$ de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}_\chi^0(G, \mathbf{E})$ qui relève $\pi^\natural$ au sens suivant:

Définition. – Soit π une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G, \mathbf{F})$, et soit Π une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}_\chi^0(G, \mathbf{E})$. On dit que Π *est un relèvement de* π si pour presque toute place v de $\mathbf{F}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 6.8, et pour toute fonction $\phi_v \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_v,\chi_v}$, on a l'égalité

$$\mathrm{tr}(\pi_v(b_v(\phi_v))) = \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v));$$

où $b_v : \mathscr{H}_{\mathbf{E}_v,\chi_v} \to \mathscr{H}_{\mathbf{F}_v,\omega_v}$ est l'application définie comme en 2.12.

Fixons, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, des fonctions ϕ_v et f_v qui concordent.

En $v \notin S$, on prend pour ϕ_v n'importe quelle fonction de $\mathscr{H}_{\mathbf{E}_v,\chi_v}$, et pour f_v la fonction $b_v(\phi_v)$, en imposant la condition habituelle: pour presque toute place v de $\mathbf{F}$ n'appartenant pas à S, ϕ_v est la fonction particulière ϕ_v^0.

En $v \in S \smallsetminus \{v_1\}$, on prend pour (ϕ_v, f_v) n'importe quelle paire de fonctions concordantes à support dans $G(\mathbf{E})_{\sigma-\mathrm{r}} \times G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}}$.

En v_1, on reprend la fonction $f_{v_1} = \mathrm{F}_{\underline{\Lambda},\alpha}$ de 6.7. On choisit une famille $\underline{\Lambda} = (\Lambda_\vartheta)_{\vartheta \in \Omega(\eta_{v_1})}$ de d-uplets $\Lambda_\vartheta = (\Lambda_{\vartheta,1}, \dots, \Lambda_{\vartheta,d})$ telle que le produit $\prod_{k=1}^d \Lambda_{\vartheta,k}$ soit égal à $(\dim \rho_{\vartheta_1,\alpha})^{d-1}$ si $\vartheta = \vartheta_1$, à $-(\dim \rho_{\vartheta_2,\alpha})^{d-1}$ si $\vartheta = \vartheta_2$, et à 0 sinon. On prend pour ϕ_{v_1} la fonction $\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}$. D'après le lemme de 2.16, les fonctions ϕ_{v_1} et f_{v_1} concordent.

Les fonctions $\phi = \prod_v \phi_v$ et $f = \prod_v f_v$ concordent, et comme les conditions $c_{v_1}^\sigma(\phi)$ et $c_{v_1}(f)$ sont vérifiées, d'après 6.6 on a l'égalité

$$d \sum_{\Pi} \mathrm{tr}(\Pi(\phi) \circ A_\Pi) = \sum_\pi \mathrm{tr}(\pi(f)) \tag{1}$$

où Π parcourt les représentations automorphes cuspidales σ-stables de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}_\chi^0(G, \mathbf{E})$ et π parcourt les représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G, \mathbf{F})$. Pour $v \notin S$, l'opérateur $A_{\Pi_v} = I_\sigma(\Pi_v)$ opère trivialement sur le sous-espace de l'espace de Π_v formé des vecteurs fixés par $K_{\mathbf{E}_v}$, et comme ϕ_v est bi-invariante par $K_{\mathbf{E}_v}$, on a $\mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v) \circ A_{\Pi_v}) = \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v))$. Par suite, l'égalité (1) s'écrit aussi

$$d \sum_\Pi \alpha_{\Pi,\phi} \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v) \circ A_{\Pi_v}) = \sum_\pi \beta_{\pi,\phi} \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\pi_v(f_v)) \tag{2}$$

où l'on a posé $\alpha_{\Pi,\phi} = \prod_{v \notin S} \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v))$ et $\beta_{\pi,\phi} = \prod_{v \notin S} \mathrm{tr}(\pi_v(b_v(\phi_v)))$.

Dans l'égalité (2), les fonctions ϕ_v et f_v sont fixées seulement en la place $v = v_1$. Pour $v \notin S$, on peut faire varier ϕ_v dans $\mathscr{H}_{\mathbf{E}_v,\chi_v}$, et pour $v \in S \smallsetminus \{v_1\}$, on peut prendre pour (ϕ_v, f_v) n'importe quelle paire de fonctions concordantes à support dans $G(\mathbf{E}_v)_{\sigma-\mathrm{r}} \times G(\mathbf{F}_v)_\mathrm{r}$. Par un argument standard [**43**, § 15], [**24**, §6], on en déduit, pour chaque représentation automorphe cuspidale σ-stable Π de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}_\chi^0(G, \mathbf{E})$, l'égalité

$$d \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v) \circ A_{\Pi_v}) = \sum_\pi \prod_{v \in S} \mathrm{tr}(\pi_v(f_v)) \tag{3}$$

où π parcourt les représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G, \mathbf{F})$ telles que pour $v \notin S$, les fonctionnelles linéaires

$$\phi_v \mapsto \mathrm{tr}(\pi_v(b_v(\phi_v)))$$

et

$$\phi_v \mapsto \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v))$$

sur $\mathscr{H}_{\mathbf{E}_v,\chi_v}$, coïncident. D'après 6.9, on peut choisir Π de telle manière que pour $v \notin S$, ces fonctionelles linéaires soient égales à $\phi_v \mapsto \mathrm{tr}(\pi_v^\natural(b_v(\phi_v)))$; on note $\Pi^\natural$ cette représentation Π. C'est un relèvement de $\pi^\natural$.

II.6.11. – Le lemme technique suivant sera utilisé dans la preuve du lemme de 6.12.

LEMME. – *Soit v une place de $\mathbf{F}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 6.8. Soient Π_1, Π_2 deux représentations lisses irréductibles génériques non ramifiées σ-stables de $G(\mathbf{E}_v)$ de caractère central χ_v, et π_1, π_2 deux représentations lisses irréductibles génériques non ramifiées de $G(\mathbf{F}_v)$ de caractère central prolongeant ω_v, telles que pour $i = 1, 2$, on ait $\mathrm{tr}(\pi_i(b_v(\phi_v))) = \mathrm{tr}(\Pi_i(\phi_v))$ pour toute fonction $\phi_v \in \mathscr{H}(G(\mathbf{E}_v), \chi_v)$. Alors*

$$\prod_{\eta} L(\pi_1, \eta^{-1}\check{\pi}_2)^{r_v} = L(\Pi_1, \check{\Pi}_2)$$

où η parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v)$.

Démonstration. – Supposons tout d'abord que v soit inerte dans $\mathbf{E}$. Pour $i = 1, 2$, écrivons $\pi_i = \psi_{i,1} \times \cdots \times \psi_{i,n}$ pour des caractères non ramifiés $\psi_{i,j}$ de $\mathbf{F}_v^\times$, et $\Pi_i = \Psi_{i,1} \times \cdots \times \Psi_{i,n}$ pour des caractères non ramifiés $\Psi_{i,j}$ de $\mathbf{E}_v^\times$. Notons ψ_i le caractère $\psi_{i,1} \otimes \cdots \otimes \psi_{i,n}$ de $A_0(\mathbf{F}_v)$, et Ψ_i le caractère $\Psi_{i,1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{i,n}$ de $A_0(\mathbf{E}_v)$. Pour $\phi \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_v, \chi_v}$, d'après la formule (2) de 4.5, on a $\mathrm{tr}(\Pi_i(\phi)) = \Psi_i(\phi_{P_0(\mathbf{E}_v)})$ et $\mathrm{tr}(\pi_i(b_v(\phi))) = \psi_i(b_v(\phi)_{P_0(\mathbf{F}_v)})$, où les fonctions $\phi_{P_0(\mathbf{E}_v)}$ et $b_v(\phi)_{P_0(\mathbf{F}_v)}$ sont définies comme en 4.5 en prenant $\sigma = 1$. Or d'après la définition de b_v (cf. **I**.3.1), on a $b_v(\phi)_{P_0(\mathbf{F}_v)} = b_{v,0}(\phi_{P_0(\mathbf{E}_v)})$ où

$$b_{v,0} : \mathscr{H}(A_0(\mathbf{E}_v), A_0(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})) \to \mathscr{H}(A_0(\mathbf{F}_v), A_0(\mathfrak{o}_v))$$

est le morphisme d'algèbres donné, via les isomorphismes de Satake, par l'application

$$(X_1, \ldots, X_n) \mapsto (X_1^d, \ldots, X_n^d).$$

Cela implique qu'il existe une permutation w de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\Psi_{i,j} = \psi_{w(i),j} \circ N_{\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v}$, $j = 1, \ldots, n$. Quitte à remplacer ψ_i par $\psi_{w(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{i,\omega(n)}$, on peut supposer que $\Psi_i = \psi_i \circ N_v$.

Soit η un générateur du groupe $\mathfrak{K}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v)$. Pour $k = 0, \ldots, d-1$, d'après 3.5.(iv), on a

$$L(\pi_1, \eta^{-k}\check{\pi}_2) = \prod_{i,j} L(\eta^{-k}\psi_i\psi_j^{-1}).$$

Posons $\zeta = \eta(\varpi_v)$ pour une uniformisante ϖ_v de $\mathbf{F}_v$; alors ζ est une racine primitive d-ième de l'unité. Soient i, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Écrivons $\psi_i\psi_j^{-1} = \nu^t$ pour un (unique) nombre complexe t. On a

$$L(\eta^{-k}\psi_i\psi_j^{-1})(s) = (1 - \zeta^{-k}q^{-(t+s)})^{-1}$$

et

$$\prod_{k=0}^{d-1}(1 - \zeta^{-k}q^{-(t+s)})^{-1} = (1 - q^{-d(t+s)})^{-1}.$$

Comme $\Psi_i\Psi_j^{-1} = \psi_i\psi_j^{-1} \circ N_{\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v}$, on en déduit que

$$\prod_{k=0}^{d-1} L(\eta^{-k}\psi_i\psi_j^{-1}) = L(\Psi_i\Psi_j^{-1})$$

D'où le résultat, puisque d'après 3.5.(iv), on a $\prod_{i,j} L(\Psi_i\Psi_j^{-1}) = L(\Pi_1, \check{\Pi}_2)$.

Si maintenant v n'est plus supposée inerte dans $\mathbf{E}$, le résultat est impliqué par le cas ci-dessus, d'après la définition de b_v (cf. **I**.3.2) et celle de $L(\Pi_1, \check{\Pi}_2)$. □

Remarque 1. – Ce lemme reste vrai sans hypothèse sur les caractères centraux, c'est-à-dire sans supposer que les caractères centraux des Π_i sont égaux, ni même unitaires; de même les caractères centraux des π_i peuvent ne pas coïncider sur $\mathfrak{Z}_v^1$, et ne pas être unitaires. Il faut alors remplacer b_v par l'homomorphisme d'algèbres $\mathscr{H}_{K_{\mathbf{E}_v}} \to \mathscr{H}_{K_v}$.

Remarque 2. – Soit v une place de $\mathbf{F}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 6.8. Soient Π une représentation lisse irréductible générique non ramifiée σ-stable de $G(\mathbf{E}_v)$ de caractère central χ_v, et π une représentation lisse irréductible générique non ramifiée de $G(\mathbf{F}_v)$ de caractère central prolongeant ω_v, telles que $\mathrm{tr}(\pi(b_v(\phi_v))) = \mathrm{tr}(\Pi(\phi_v))$ pour toute fonction $\phi_v \in \mathscr{H}(G(\mathbf{E}_v), \chi_v)$. D'après la démonstration du lemme, Π est un σ-relèvement de π — par suite la constante $c(\pi, I_\sigma(\Pi))$ vaut 1 — et π est à segments $\mathfrak{K}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v)$-réguliers. Si de plus v est inerte dans $\mathbf{E}$, d'après la démonstration du lemme de 4.14, la représentation $\tau(\Pi)$ de $W_{\mathbf{E}_v}$ est la restriction à $W_{\mathbf{E}_v}$ de la représentation $\tau(\pi)$ de $W_{\mathbf{F}_v}$. D'ailleurs si v n'est pas inerte dans $\mathbf{E}$, on écrit $\Pi = \otimes_{w\in\mathscr{E}(v)}\Pi_w$ où Π_w est une représentation lisse irréductible σ^{r_v}-stable de $G(\mathbf{E}_{r_v})$, et pour chaque $w \in \mathscr{E}(v)$, la représentation $\tau(\Pi_w)$ de $W_{\mathbf{E}_w}$ est la restriction de $\tau(\pi)$ à $W_{\mathbf{E}_w}$.

II.6.12. – Fixons un caractère κ_0 de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times)$, et soit $\kappa = \prod_v \kappa_v$ l'unique caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ de noyau $\mathbf{F}^\times\mathfrak{N}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times)$ dont le composant en v_0 correspond à κ_0, c'est-à-dire tel que $\kappa_{v_0} = \kappa \circ \iota$. Notons que pour chaque place v de $\mathbf{F}$, κ_v engendre le groupe $\mathfrak{K}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v)$ des caractères de $\mathbf{F}_v^\times$ qui sont triviaux sur $N_{\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v}(\mathbf{E}_v^\times)$; en particulier, κ_v est d'ordre d_v.

Lemme. – *Soit Π une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}_\chi^0(G, \mathbf{E})$, et soit π une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G, \mathbf{F})$, telles que Π soit un σ-relèvement de π. Les représentations automorphes cuspidales de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G, \mathbf{F})$ se relevant en Π sont les $\kappa^i\pi = \pi \otimes (\kappa^i \circ \det)$ pour $i = 0, \dots, d-1$; elles sont deux à deux non isomorphes.*

Démonstration. – Soit ρ une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_\omega(G,\mathbf{F})$ se relevant en Π. Fixons un ensemble fini S' de places de $\mathbf{F}$ tel que pour $v \notin S'$, les conditions (i), (ii), (iii) de 6.8 soient vérifiées, et $\mathrm{tr}(\pi_v(b_v(\phi_v))) = \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)) = \mathrm{tr}(\rho_v(b_v(\phi_v)))$ pour toute fonction $\phi_v \in \mathscr{H}(G(\mathbf{E}_v),\chi_v)$. Soit une place $v \notin S'$. D'après le lemme de 6.11, on a

$$\prod_\eta L(\rho_v, \eta^{-1}\check{\pi}_v)^{r_v} = L(\Pi_v, \check{\Pi}_v)$$

où η parcourt les éléments de $\mathfrak{K}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v)$, i.e.

$$\prod_{i=0}^{d-1} L(\rho_v, \kappa_v^{-i}\check{\pi}_v) = L(\Pi_v, \check{\Pi}_v).$$

On en déduit l'égalité

$$\prod_{i=0}^{d-1} L^{S'}(\rho, \kappa^{-i}\check{\pi}) = L^{S'}(\Pi_v, \check{\Pi}_v),$$

où $L^{S'}$ désigne le produit des facteurs L locaux en les places $v \notin S'$. D'après [**45**, theo. 4.1], le terme à droite de l'égalité a un pôle d'ordre 1 en $s=1$; le même résultat implique que ρ est isomorphe, donc égale, à $\kappa^i\pi$ pour un $i \in \{0,\dots,d-1\}$ et un seul. Réciproquement, si $\rho = \kappa^{-j}\pi$ pour un $j \in \{0,\dots,d-1\}$, alors Π relève π, et $\rho \not\simeq \kappa^{-i}\pi$ pour $i=0,\dots,d-1$, $i \neq j$. $\square$

II.6.13. – Montrons que $\Pi^\natural_{v_0}$, identifiée à une représentation de $G(E)$ via ι, est un σ-relèvement de τ_0. Remarquons que d'après la remarque de 2.12, pour $v \notin S$, $\phi \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_v,\chi_v}$ et $\chi \in \mathfrak{K}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v)$, le support de la fonction $b_v(\phi_v)$ est contenu dans le noyau de $\chi\circ\det$. D'autre part, pour $v \in S$, puisque ϕ_v et f_v concordent, on a $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v,\gamma) = 0$ pour tout $x \in G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}}$ tel que $x \notin N_v(G(\mathbf{E}_v))$; d'après la formule d'intégration de Weyl, on en déduit que pour toute représentation lisse admissible ρ de $G(\mathbf{F}_v)$ et tout caractère χ de $\mathbf{F}_v^\times$ trivial sur $N_{\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v}(\mathbf{E}_v^\times)$, on a $\mathrm{tr}((\chi\rho)(f_v)) = \mathrm{tr}(\rho(f_v))$. Grâce au lemme ci-dessus, l'égalité (3) de 6.10 pour $\Pi = \Pi^\natural$ s'écrit

$$(*) \qquad \prod_{v\in S} \mathrm{tr}(\Pi^\natural_v(\phi_v)\circ A_{\Pi^\natural_v}) = \prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi^\natural_v(f_v)).$$

Rappelons que pour $v \in S \smallsetminus \{v_1\}$, l'égalité $(*)$ est vraie pour n'importe quelle paire de fonctions concordantes (ϕ_v, f_v) à support dans $G(\mathbf{E}_v)_{\sigma-\mathrm{r}} \times G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}}$.

En v_1, d'après 6.9, on a $\mathrm{tr}(\pi^\natural_{v_1}(f_{v_1})) \neq 0$. En $v \in S \smallsetminus \{v_0, v_1\}$, on peut reprendre la fonction f_v de 6.8 — rappelons qu'elle est à support dans $G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}} \cap N_v(G(\mathbf{E}_v))$ — et choisir une fonction ϕ_v à support dans $G(\mathbf{E}_v)_{\sigma-\mathrm{r}}$ telle que ϕ_v et f_v concordent; à nouveau d'après 6.9, on a $\mathrm{tr}(\pi^\natural_v(f_v)) \neq 0$. On en déduit qu'il existe une constante c telle que pour toute paire de fonctions concordantes (ϕ_{v_0}, f_{v_0}) à support dans $G(\mathbf{E}_{v_0})_{\sigma-\mathrm{r}} \times G(\mathbf{F}_{v_0})_{\mathrm{r}}$, on ait l'égalité

$$\mathrm{tr}(\pi_{v_0}^{\natural}(f_{v_0})) = c\,\mathrm{tr}(\Pi_{v_0}^{\natural}(\phi_{v_0}) \circ A_{\Pi_{v_0}^{\natural}}).$$

La constante c est non nulle: puisque la fonction caractère $\Theta_{\pi_{v_0}^{\natural}}$ est localement constante sur $G(\mathbf{F}_{v_0})_{\mathrm{r}}$ (et non nulle!), il suffit de choisir une partie ouverte compacte U de $G(\mathbf{F}_{v_0})_{\mathrm{r}}$ sur laquelle $\Theta_{\pi_{v_0}}$ est constante et non nulle, et de prendre pour f_{v_0} la fonction $(\mathbf{1}_U)_{\omega_{v_0}}$ où $\mathbf{1}_U$ désigne la fonction caractéristique de U. Par conséquent $\Pi_{v_0}^{\natural}$, identifiée via ι à une représentation Π_0 de $G(E)$, est un σ-relèvement de τ_0. Puisque Π_0 est générique et σ-elliptique, c'est une série σ-discrète (5.15, proposition 1).

Remarque. – Le raisonnement ci-dessus implique que pour $v \in S \smallsetminus \{v_1\}$, $\Pi_v^{\natural}$ est une σ-relèvement de $\pi_v^{\natural}$. D'autre part en v_1, puisque $\mathrm{tr}(\Pi_{v_1}^{\natural}(\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}) \circ A_{\Pi_{v_1}^{\natural}}) \neq 0$, $\Pi_{v_1}^{\natural}$ est isomorphe à $\Pi_{\vartheta_1,\alpha}$ ou à $\Pi_{\vartheta_2,\alpha}$. On verra dans le n° suivant que $\Pi_{v_1}^{\natural}$ est un σ-relèvement de π_{v_1}.

II.6.14. – Montrons que $\Pi_{v_1}^{\natural}$ est un σ-relèvement de $\pi_{v_1}^{\natural}$. La représentation $\pi_1 = \pi_{v_1}^{\natural}$ de $G(\mathbf{F}_{v_1})$ étant cuspidale, elle possède un σ-relèvement à $G(\mathbf{E}_{v_1})$, disons Π_1. Précisément, par la construction précédente (appliquée à la place v_1 plutôt qu'à la place v_0), on produit une représentation automorphe cuspidale $\pi \simeq \prod_v \pi_v$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}_{\omega}^0(G, \mathbf{F})$ telle que le composant local π_{v_1} soit isomorphe à π_1, et une représentation automorphe cuspidale σ-stable $\Pi \simeq \prod_v \Pi_v$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}_{\chi}^0(G, \mathbf{E})$ telle que le composant local Π_{v_1} relève π_1, les composant locaux π_v et Π_v se correspondant, pour presque toute place v de $\mathbf{F}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 6.8, par le changement de base non ramifié (6.11, remarque 2) — i.e. $\mathrm{tr}(\pi_v(b_v(\phi_v))) = \mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v))$ pour toute fonction $\phi \in \mathscr{H}(G(\mathbf{E}_v), \chi_v)$. Rappelons que puisque la place v_1 est inerte dans $\mathbf{E}$, on a $r_v = d$ et $\mathfrak{K}(\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v) = \{1\}$. La méthode habituelle de dégénérescence des facteurs L et ϵ (cf. plus loin le n° 6.19, ou bien [**38**, 8.14 à 8.17]) donne qu'on a

$$L(\pi_1, \check{\pi}_{v_1})^d = L(\Pi_1, \check{\Pi}_{v_1})$$

et

$$L(\pi_{v_1}, \check{\pi}_{v_1})^d = L(\Pi_{v_1}, \check{\Pi}_{v_1}).$$

Comme $\pi_1 \simeq \pi_{v_1}$, les facteurs de gauche sont égaux. Par conséquent $L(\Pi_1, \check{\Pi}_{v_1})$ a, comme $L(\Pi_{v_1}, \check{\Pi}_{v_1})$, un pôle d'ordre d en $s = 0$, ce qui implique que Π_1 et Π_{v_1} sont isomorphes.

II.6.15. – Dans ce n°, on montre que la constante $c(\Pi_0, I_\sigma(\Pi_0))$ vaut 1. D'après [**40**, 4.8], on peut ajuster le caractère unitaire $\omega = \prod_v \omega_v$ de $\mathfrak{Z}^1$ de telle manière que pour $v \notin \{v_0, v_1, v_2\}$, le caractère ω_v soit non ramifié, tout en conservant les conditions de 6.7 sur ω_{v_0} et ω_{v_1} (à savoir que ω_{v_1} induit par restriction un caractère fidèle de $\kappa_{\mathbf{F}_{v_1}}^\times$, et que $\omega_0 \circ \iota$ prolonge ω_{v_0}). Notons qu'alors la condition (ii) de 6.8 est vide. On peut, comme en [**40**, 4.10], s'arranger pour que la représentation automorphe cuspidale $\pi^\natural$ de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G, \mathbf{F})$ sélectionnée en 6.9, soit non ramifiée en dehors de $\{v_0, v_1, v_2\}$. On produit ensuite, comme en 6.11, un relèvement $\Pi^\natural$ de $\pi^\natural$. Précisément, $\Pi^\natural$ est une représentation automorphe cuspidale σ-stable de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}_\chi^0(G, \mathbf{E})$ telle que $\mathrm{tr}(\Pi_v^\natural(\phi_v)) = \mathrm{tr}(\pi_v^\natural(b_v(\phi_v)))$ pour toute place $v \notin S$ et toute fonction $\phi \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_v, \chi_v}$. D'après 6.14, la remarque de 6.13 et la remarque 2 de 6.11, pour toute place v de $\mathbf{F}$, $\Pi_v^\natural$ est un σ-relèvement de π_v. L'égalité $(*)$ de 6.13 implique que

$$\prod_{v \in S} c(\pi_v^\natural, I_\sigma(\Pi_v^\natural)) = 1.$$

En $v \in S \smallsetminus \{v_0, v_1, v_2\}$, d'après la remarque 2 de 6.11, la constante $c(\pi_v^\natural, I_\sigma(\Pi_v^\natural))$ vaut 1. D'après 2.16, elle vaut aussi 1 en $v = v_1$. D'ailleurs, elle vaut 1 en toute place v de $\mathbf{F}$ scindée dans $\mathbf{E}$, donc en particulier en $v = v_1$ et $v = v_2$. D'où le résultat cherché: $c(\pi_{v_0}^\natural, I_\sigma(\Pi_{v_0}^\natural)) = 1$.

II.6.16. – Le point (1) du théorème de 4.6 est complètement démontré. Démontrons le point (2): la surjectivité de l'application de relèvement. La démonstration est, mutatis mutandis, identique à celle de l'existence, c'est pourquoi on donnera les arguments plus rapidement. On continue avec la place v_1 choisie au début 6.7, en conservant l'hypothèse imposée à ω_{v_1}. On part d'une série σ-discrète Π_0 de $G(E)$, de caractère central $\chi_0 = \omega_{\Pi_0}$. Quitte à changer ω, on peut supposer que le caractère $\chi_0 \circ \iota$ de $\mathbf{E}_{v_0}^\times = Z(\mathbf{E}_{v_0})$ coïncide avec χ_{v_0}. On commence par fixer, comme en 6.8, des fonctions ϕ_v en chaque place v de $\mathbf{F}$.

En v_0, on prend pour ϕ_{v_0} un pseudo-coefficient pour $(\Pi_0, I_\sigma(\Pi_0))$. Puisque Π_0 est σ-elliptique (5.14, corollaire 2), il existe un élément $\delta_0 \in G(\mathbf{F}_{v_0})_{\sigma-\mathrm{e}}$ tel que $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_0})}(\phi, \delta_{v_0}) \neq 0$. En v_1, on fixe ϑ_1, ϑ_2 et l'on définit Λ comme 6.7, puis on choisit $\alpha \neq 0$ de telle manière que $\mathrm{F}_{\underline{\lambda}, \alpha}$ se transforme suivant $\omega_{v_1}^{-1}$ sous l'action de $\mathbf{F}_{v_1}^\times$ par translations. Ensuite on choisit $\underline{\Lambda}$ comme en 6.10, et l'on prend pour ϕ_{v_1} la fonction $\Phi_{\underline{\Lambda}, \alpha}$. On pose aussi $f_{v_1} = \mathrm{F}_{\underline{\lambda}, \alpha}$. On choisit un élément δ dans $G(\mathbf{E})$ tel que $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta)) \subset G(\mathbf{F})''$, suffisamment proche de δ_{v_0} et δ_{v_1}, tel que $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_i})}(\phi_{v_i}, \delta_{v_i}) \neq 0$ pour $i = 1, 2$. On choisit aussi un élément γ dans l'orbite $\mathbb{N}(\mathcal{O}_\sigma(\delta))$. On fixe un ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$, contenant v_0, v_1 et une place v_2 distincte de v_0 et v_1, tel que pour $v \notin S$, les conditions (i),(ii), (iii), (iv) de 6.8 soient vérifiées. En $v \notin S$, on prend pour ϕ_v la fonction particulière ϕ_v^0; puisque γ appartient à K_v, on a $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_v)}(\phi_v^0,\delta)=\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v^0,\gamma)\neq 0$. En $v\in S\smallsetminus\{v_0,v_1\}$, on choisit comme en 6.8 une fonction f_v à support dans $G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}}\cap N_v(G(\mathbf{E}_v))$ telle que $\Lambda^{G(\mathbf{F}_v)}(f_v,\gamma)>0$, puis une fonction ϕ_v à support dans $G(\mathbf{E}_v)_{\sigma-\mathrm{r}}$ telle que ϕ_v et f_v concordent; on a $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_v)}(\phi_v,\delta)\neq 0$.

Posons $\phi=\prod_v\phi_v$. Quitte à restreindre comme en 6.9 le support de la fonction f_{v_2}, on peut supposer que seule la σ-orbite de δ contribue au côté géométrique de la formule des traces simple tordue de 6.4 appliquée à ϕ. Comme en 6.9, on obtient qu'il existe une représentation automorphe cuspidale σ-stable $\Pi^\natural$ de $G(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}_\chi^0(G,\mathbf{E})$ telle que $\mathrm{tr}(\Pi^\natural(\phi)\circ A_{\Pi^\natural})\neq 0$. On a donc $\mathrm{tr}(\Pi_v^\natural(\phi_v)\circ A_{\Pi_v^\natural})\neq 0$ pour toute place v de $\mathbf{F}$. En particulier, $\Pi_v^\natural$ est non ramifiée pour $v\notin S$, et $\Pi_{v_1}^\natural$ est isomorphe à $\Pi_{\vartheta_1,\alpha}$ ou $\Pi_{\vartheta_2,\alpha}$. Enfin, puisque $\mathrm{tr}(\Pi_{v_0}^\natural(\phi_{v_0})\circ A_{\Pi_{v_0}^\natural})\neq 0$ et que $\Lambda_\sigma^{G(\mathbf{E}_{v_0})}(\phi_{v_0},\delta'_{v_0})=0$ pour tout élément δ'_{v_0} de $G(\mathbf{E}_{v_0})_{\sigma-\mathrm{r}}$ qui n'est pas σ-elliptique (5.14, proposition 2), d'après la formule d'intégration de Weyl tordue (2.10, formule (1)), $\Pi_{v_0}^\natural$ est σ-elliptique. Comme d'autre part $\Pi_{v_0}^\natural$ est générique et unitaire, elle est σ-discrète (5.15, proposition 1), donc isomorphe à Π_0; en identifiant $\Pi_{v_0}^\natural$ à une représentation de $G(\mathbf{E}_{v_0})$ via ι.

II.6.17. – Fixons, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, des fonctions ϕ_v et f_v qui concordent. En $v\notin S$, on prend pour ϕ_v n'importe quelle fonction de $\mathscr{H}_{\mathbf{E}_v,\chi_v}$ et pour f_v la fonction $b_v(\phi_v)$, en imposant que pour presque toute place $v\notin S$, on ait $\phi_v=\phi_v^0$. En $v\in S\smallsetminus\{v_1\}$, on prend pour (ϕ_v,f_v) n'importe quelle paire de fonctions concordantes à support dans $G(\mathbf{E}_v)_{\sigma-\mathrm{r}}\times G(\mathbf{F}_v)_{\mathrm{r}}$, et en v_1 on reprend les fonctions $\phi_{v_1}=\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}$ et $f_{v_1}=\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$ fixées en 6.16.

Les fonctions $\phi=\prod_v\phi_v$ et $f=\prod_v f_v$ concordent, et vérifient les égalités (1), (2), (3) de 6.10. On en déduit qu'il existe une représentation automorphe cuspidale $\tau^\natural$ de $G(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ dans $\mathscr{L}_\omega^0(G,\mathbf{F})$ telle que pour $v\notin S$, on ait $\mathrm{tr}(\tau_v^\natural(b_v(\phi_v)))=\mathrm{tr}(\Pi_v^\natural(\phi_v))$ pour toute fonction $\phi_v\in\mathscr{H}(G(\mathbf{E}_v,\chi_v)$. On montre ensuite, comme en 6.13, qu'il existe une constante c telle que pour toute paire de fonctions concordantes (ϕ_{v_0},f_{v_0}) à support dans $G(\mathbf{E}_{v_0})_{\sigma-\mathrm{r}}\times G(\mathbf{F}_{v_0})_{\mathrm{r}}$, on ait

$$\mathrm{tr}(\Pi_{v_0}^\natural(\phi_{v_0})\circ A_{\Pi_{v_0}^\natural})=c\,\mathrm{tr}(\tau_{v_0}^\natural(f_{v_0})).$$

Puisque pour tout isomorphisme A_0 de Π_0 sur Π_0^σ, la fonction caractère $\Theta_{\Pi_0}^{A_0}$ est localement constante sur $G(\mathbf{E}_{v_0})_{\sigma-\mathrm{r}}$ (et non nulle), la constante c est non nulle (cf. 6.13). Donc Π_0 est un σ-relèvement de $\tau_{v_0}^\natural$. En fait pour chaque place v de $\mathbf{F}$, $\Pi_v^\natural$ est un σ-relèvement de $\tau_v^\natural$ (6.14, remarque de 6.13 et remarque 2 de 6.11). Cela achève la démonstration du point (2) du théorème de 4.6.

II.6.18. – Démontrons le point (3) du théorème de 4.6. Soit σ' un autre générateur de l'extension E/F. Soient π_0, π'_0 deux séries discrètes de $G(F)$. On suppose que les caractères centraux $\omega_0=\omega_{\pi_0}$ et $\omega'_0=\omega_{\pi'_0}$ ont même restriction au groupe des normes $N_{E/F}(E^\times)$, disons $\widetilde{\omega}_0$. Quitte à changer le caractère ω de $\mathfrak{N}^1$, on peut aussi supposer que $\widetilde{\omega}_0 \circ \iota = \omega_{v_0}$. Soient Π_0 un σ-relèvement de π_0 à $G(E)$, et Π'_0 un σ'-relèvement de π'_0 à $G(E)$. Via ι, on identifie π_0, π'_0 à des représentations de $G(\mathbf{F}_{v_0})$, et Π_0, Π'_0 à des représentations de $G(\mathbf{E}_{v_0})$. Comme dans les n° précédents, on construit des représentations automorphes cuspidales $\pi \simeq \prod_v \pi_v$, $\pi' \simeq \prod_v \pi'_v$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_\omega(G, \mathbf{F})$ telles que $\pi_{v_0} \simeq \pi_0$, $\pi'_{v_0} \simeq \pi'_0$. On construit aussi des représentations automorphes cuspidales σ-stables (i.e. σ'-stables) $\Pi \simeq \prod_v \Pi_v$, $\Pi' \simeq \prod_v \Pi'_v$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}^0_\chi(G, \mathbf{E})$ telles que $\Pi_{v_0} \simeq \Pi_0$, $\Pi'_{v_0} \simeq \Pi'_0$. Par construction, il existe un ensemble fini S de place de $\mathbf{F}$ tel que pour $v \notin S$, les conditions (i), (ii), (iii) de 6.8 sont vérifiées, et pour $\phi_v \in \mathscr{H}_{\mathbf{E}_v, \chi_v}$, on a $\mathrm{tr}(\Pi_v(\phi_v)) = \mathrm{tr}(\pi_v(b_v(\phi_v)))$ et $\mathrm{tr}(\Pi'_v(\phi_v)) = \mathrm{tr}(\pi'_v(b_v(\phi_v)))$. D'après le lemme de 6.11 (cf. la démonstration du lemme de 6.12), on a

$$\prod_{i=0}^{d-1} L^S(\pi, \kappa^{-i}\check{\pi}') = L^S(\Pi, \check{\Pi}').$$

Si $\pi'_0 = \pi_0$, on peut prendre $\pi' = \pi$, auquel cas d'après [**45**, theo. 4.1] et le lemme de 6.12, le terme à gauche de l'égalité ci-dessus a un pôle d'ordre 1 en $s = 1$; le même résultat implique que Π' est isomorphe, donc égale, à Π. Par conséquent $\Pi_{v_0} \simeq \Pi'_{v_0}$, ce qu'il fallait démontrer.

II.6.19. – Démontrons le point (4) du théorème de 4.6. Soient k, $k' \geq 1$ deux entiers, π_0 une série discrète de $G_k(F)$, π'_0 une série discrète de $G_{k'}(F)$, Π_0 un σ-relèvement de π_0 à $G_k(E)$, et Π'_0 un σ-relèvement de π'_0 à $G_{k'}(E)$. On peut supposer $k' = k$ sinon il n'y a rien à démontrer, et pour simplifier les notations, on peut prendre $k = n$. Reprenons les hypothèses et les notations de 6.18. D'après le lemme de 6.11, on a

$$\prod_{i=0}^{d-1} L^S(\pi, \kappa^i \pi') = L^S(\Pi, \Pi'). \tag{1}$$

D'autre part on a aussi

$$\prod_{i=0}^{d-1} \frac{\epsilon^S(\pi, \kappa^i\pi', \Psi)}{\epsilon^S(\kappa^i, \Psi)^{n^2}} = \frac{\epsilon^S(\Pi, \Pi', \Psi_{\mathbf{E}})}{\epsilon^S(1_{\mathbf{E}}, \Psi_{\mathbf{E}})^{n^2}} = 1, \tag{2}$$

où ϵ^S désigne le produit des facteurs ϵ locaux en les places $v \notin S$, et $1_{\mathbf{E}}$ le caractère trivial de $\mathbf{E}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times$. On procède ensuite comme dans [**38**, 8.16]: grâce à l'équation fonctionnelle pour les fonctions L de paires (loc. cit., formule (6) p. 181), on obtient l'égalité

$$\prod_{v \in S} \alpha_v(s) = \prod_{v \in S} \beta_v(s), \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\alpha_v(s) = \left[\frac{\prod_{i=0}^{d-1} L(\pi_v, \kappa_v^i \pi'_v)}{L(\Pi_v, \Pi'_v)}\right](s)$$

et

$$\beta_v(s) = \beta_v^1(s)\beta_v^2(1-s)$$

avec

$$\beta_v^1(s) = \left[\frac{\prod_{i=0}^{d-1}\epsilon(\pi_v, \kappa_v^i\pi'_v, \Psi_v)}{\epsilon(1_{\mathbf{E}_v^\times}, \Psi_{\mathbf{E}_v})^{n^2}}\right](s)\left[\frac{\prod_{i=0}^{d-1}\epsilon(\kappa_v^i, \Psi_v)^{n^2}}{\epsilon(\Pi_v, \Pi'_v, \Psi_{\mathbf{E}_v})}\right](s)$$

et

$$\beta_v^2(s) = \left[\frac{\prod_{i=0}^{d-1} L(\check{\pi}_v, \kappa^{-i}\check{\pi}'_v)}{L(\check{\Pi}_v, \check{\Pi}'_v)}\right](s).$$

On en déduit ensuite (loc. cit., p.183) que

$$\alpha_{v_0}(s) = \beta_{v_0}(s), \tag{4}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\prod_{i=0}^{d-1}\frac{L(\pi_{v_0}, \kappa_v^i\pi'_{v_0})(s)}{L(\check{\pi}_{v_0}, \kappa^{-i}\check{\pi}'_{v_0})(1-s)} = \xi(s)\frac{L(\Pi_{v_0}, \Pi'_{v_0})(s)}{L(\check{\Pi}_{v_0}, \check{\Pi}'_{v_0})(1-s)} \tag{5}$$

où $\xi(s)$ est un monôme en q^{-s}. Dans la formule (5), tous les facteurs L du terme à gauche de l'égalité sont de la forme $\prod_{\alpha\in A}(1-\alpha q^s)^{-1}$ pour un sous-ensemble fini A de $\mathbb{C}^\times$, et puisque π_{v_0} et les $\kappa^i\pi'_{v_0}$ sont des séries discrètes, d'après [**33**, prop. 4.5], il n'y a pas de simplification entre les facteurs $(1-\alpha q^{-s})$. Pour les facteurs L du terme à droite de l'égalité, on commence par écrire $\Pi_{v_0} = \Pi_1 \times \Pi_1^\sigma \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{e-1}}$ et $\Pi'_{v_0} = \Pi'_1 \times \Pi_1'^\sigma \times \cdots \times \Pi_1'^{\sigma^{e'-1}}$ pour des séries discrètes Π_1 de $G_{n_1}(F)$, Π'_1 de $G_{n'_1}(F)$, et des entiers e, $e' \geq 1$, $n_1e_1 = e'_1n'_1 = n$, tels que σ^e engendre le stabilsateur de la classe d'isomorphisme de Π_1 dans Σ et $\sigma^{e'}$ engendre celui de la classe d'isomorphisme de Π'_1 dans Σ. D'après 3.5.(iii), on a

$$L(\Pi_{v_0}, \Pi'_{v_0}) = \prod_{i=0}^{e-1}\prod_{j=0}^{e'-1} L(\Pi_1, \Pi_1'^{\sigma^{j-i}})$$

et

$$L(\check{\Pi}_{v_0}, \check{\Pi}'_{v_0}) = \prod_{i=0}^{e-1}\prod_{j=0}^{e'-1} L(\check{\Pi}_1, \check{\Pi}_1'^{\sigma^{j-i}}),$$

ce qui permet à nouveau d'appliquer loc. cit. On en déduit la première égalité du point (4) du théorème de 4.6; puis la seconde ($\xi = 1$). Cela achève la démonstration du théorème de 4.6.

Remarque. – On peut aussi s'arranger, comme en 6.15, pour que les représentations automorphes cuspidales π et π' soient non ramifiées en dehors de $\{v_0, v_1, v_2\}$, et utiliser la description explicite des relèvements Π_{v_1} de π_{v_1} et Π'_{v_1} de π'_{v_1}.

II.6.20. – Nous terminons cette section 6 par un commentaire (qui fait pendant à celui de [**40**, 4.2] pour l'induction automorphe). La méthode utilisée ici repose sur une utilisation particulière de la formule des traces, différente de celle de [**1**]: les fonctions $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$ et $\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}$ imposées à la place v_1 non seulement donnent lieu à des formules des traces simples, mais permettent aussi de sélectionner des représentations automorphes cuspidales dont le composant en la place v_1 est cuspidal de niveau 0. Notant $\mathfrak{K}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ le groupe — isomorphe à $\mathfrak{K}(E/F)$ — des caractères de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ qui sont triviaux sur $\mathbf{F}^{\times}\mathfrak{N}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^{\times})$, on obtient ainsi une bijection entre:

- les orbites sous $\mathfrak{K}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ des représentations automorphes cuspidales dans $\mathscr{L}_{\omega}^{0}(G,\mathbf{F})$ π de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ — elles sont toutes $\mathfrak{K}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$-régulières — dont le composant π_{v_1} est sélectionné par la fonction $\mathrm{F}_{\underline{\lambda},\alpha}$,
- les représentations automorphes cuspidales σ-stables Π de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}_{\chi}^{0}(G,\mathbf{E})$ dont le composant Π_{v_1} est sélectionné par $\Phi_{\underline{\Lambda},\alpha}$.

Si π est une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}_{\omega}^{0}(G,\mathbf{F})$ dont le composant π_{v_1} est sélectionné par $F_{\underline{\lambda},\alpha}$, la représentation automorphe cuspidale σ-stable de $G(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}_{\chi}^{0}(G,\mathbf{E})$ qui lui correspond par la bijection ci-dessus, disons $\Pi(\pi)$, est déterminée par le fait qu'à presque toute place v de $\mathbf{F}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 6.8, la représentation π_v est non ramifiée et $\Pi(\pi)_v$ lui correspond par le changement de base non ramifié. De plus cette correspondance globale (partielle) est *forte*, au sens où à *toute* place v de $\mathbf{F}$ — y compris v_0 et v_1 —, $\Pi(\pi)_v$ est un σ-relèvement de π_v.

CHAPITRE III

FORMULES DE CARACTÈRES POUR L'INDUCTION AUTOMORPHE, II

Soit E/F une extension finie cyclique de corps commutatifs localement compacts non archimédiens de caractéristique $p > 0$, d son degré, et soit κ un caractère de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times)$. L'induction automorphe correspond, par la correspondance de Langlands, à l'induction de E à F des représentations galoisiennes ; à une représentation lisse irréductible τ de $\mathrm{GL}_m(E)$ le processus d'induction automorphe associe une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_{md}(F)$, qui est isomorphe à $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$. Le lien entre τ et π s'exprime par le fait qu'une certaine fonction caractère attachée à τ est proportionnelle à une autre fonction caractère attachée à π et au choix d'un opérateur d'entrelacement A entre $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$ et π. Nous prouvons ici l'existence et l'unicité de π, à isomorphisme près, quand τ est générique et unitaire ; en ce cas π est générique et nous donnons une normalisation de A, utilisant un modèle de Whittaker pour π, pour laquelle la constante de proportionalité est indépendante de τ. Tout cela étend au cas de caractéristique non nulle des résultats précédents des deux auteurs pour les corps p-adiques.

III.1. Introduction

III.1.1. − Soient p un nombre premier, F un corps commutatif localement compact de caractéristique p, E une extension finie cyclique de F, et d le degré de E sur F. On fixe un caractère κ de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times)$, et un entier $m \geq 1$; on pose $n = md$.

Suivant [**38**] nous cherchons à associer à une représentation (complexe) lisse irréductible τ de $H = \mathrm{GL}_m(E)$ une représentation lisse irréductible π de $G = \mathrm{GL}_n(F)$, appelée *κ-relèvement* ou *induite automorphe* de τ, qui soit κ-stable, c'est-à-dire isomorphe à la représentation tordue $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$, que nous noterons $\kappa\pi$. Cette induction automorphe est construite pour correspondre, par la correspondance de Langlands [**58**], à l'induction de E à F des représentations galoisiennes. Plus précisément, si σ est une représentation du groupe de Weil-Deligne W'_E de E qui correspond à τ — elle est de dimension m, et est unique à isomorphisme près — alors π correspond à la représentation du groupe de Weil-Deligne W'_F de F, de dimension n, obtenue en induisant σ de W'_E à W'_F.

III.1.2. – Nous prouvons ici que si τ est unitaire et générique — et en fait dans des cas plus généraux — alors il existe un κ-relèvement π de τ ; ce κ-relèvement est unique à isomorphisme près et est générique. La compatibilité à la correspondance de Langlands qu'on vient de mentionner est prouvée par les deux auteurs dans **IV** où une théorie de l'induction automorphe est établie pour les corps globaux de caractéristique p, ainsi que la compatibilité entre cette théorie globale et la présente théorie locale.

L'existence et l'unicité de π quand τ est unitaire et générique sont déjà sous-jacentes à [**38**]. En effet, la démarche de [**38**] est indépendante de la caractéristique de F, et maintenant les outils nécessaires en caractéristique p sont tous disponibles : intégrabilité locale des caractères [**59, 61**], existence de pseudo-coefficients dans le cadre de l'induction automorphe [**41**], lemme fondamental pour l'induction automorphe en caractéristique p [**39, 40**].

Mais nous voulons ici obtenir, non seulement l'équivalent en caractéristique p des résultats de [**38**], mais aussi de ceux de [**40**]. Il nous a paru nécessaire pour cela de reprendre, dans notre cadre de caractéristique p, les arguments de [**38**] et [**40**].

III.1.3. – Précisons l'identité de caractères que nous obtenons, suivant [**40**], et qui exprime que π est un κ-relèvement de τ. Il s'agit de comparer deux *fonctions caractères*, qui sont des fonctions localement constantes sur l'ensemble $H \cap G_{\mathrm{reg}}$ des éléments de H qui sont réguliers (absolument semi-simples) dans G — il y a quelques choix auxiliaires à effectuer, dont celui d'un plongement de H dans G et celui de facteurs de transfert. L'une de ces fonctions caractères, qu'on appelle le *caractère pondéré* de τ, est une somme finie de valeurs du caractère (ordinaire) de τ, pondérées par des facteurs de transfert. L'autre, le *caractère κ-tordu* de π, dépend aussi du choix d'un isomorphisme A de $\kappa\pi$ sur π.

L'identité qui détermine la classe de π à partir de celle de τ dit que le caractère κ-tordu de π vaut c fois le caractère pondéré de τ, où $c = c(\tau, \pi, A)$ est un nombre complexe non nul.

Étendant à notre cadre les résultats de [**40**] nous prouvons ici, au moins quand τ est unitaire et générique, que si l'on normalise A à l'aide du modèle de Whittaker de π, alors $c(\tau, \pi, A)$ ne dépend que des données auxiliaires fixées au départ, et non de τ ou π. C'est cette indépendance qui est utilisée dans [**11**, III] pour décrire explicitement la correspondance de Langlands entre représentations irréductibles de degré n du groupe de Weil de F et représentations lisses irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, dans le cas dit modéré où p est premier à n.

III.1.4. – Dans la section 2, nous rappelons — suivant [**40**, ch. 2] les considérations qui donnent naissance aux fonctions caractères mentionnées ci-dessus.

Dans la section 3, nous précisons la définition de l'opérateur d'entrelacement normalisé, et, parallèlement à [**40**, ch. 3], établissons le comportement des κ-relèvements vis-à-vis de l'induction parabolique. Nous étendons ces résultats au cas — nécessaire pour les arguments globaux — où E est une algèbre cyclique sur F. Puis nous réduisons nos résultats principaux au cas où τ est une représentation de la série discrète, c'est-à-dire de carré intégrable (modulo le centre). Ce cas est traité par la méthode locale-globale de [**38**], augmentée des considérations permettant le contrôle de $c(\tau, \pi, A)$, suivant [**40**, ch. 4]. La mise en œuvre nécessaire de la formule des traces fait l'objet de notre section 4, qui termine la démonstration.

III.1.5. – Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs complexes. Toutes les représentations de groupes sont des représentations complexes, c'est-à-dire à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On appelle *caractère* d'un groupe topologique un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$. Tous les corps sont supposés commutatifs. Toutes les induites paraboliques sont supposées normalisées.

III.2. Identités de caractères

III.2.1. – Dans cette section nous rappelons les considérations de [**40**, ch. 2] sur les identités de caractères définissant les κ-relèvements. Comme loc. cit. est essentiellement indépendant de la caractéristique de F, nous n'en rappelons que l'essentiel, en y référant pour les détails.

Pour l'instant F est un corps commutatif quelconque. On fixe un entier $d \geq 2$, un groupe cyclique Γ de cardinal d et un générateur σ de Γ. On considère une algèbre cyclique E sur F, de groupe Γ. On dispose de l'application norme $N_{E/F}$ de $E^\times$ dans $F^\times$.

On fixe également un entier $m \geq 1$, et l'on pose $n = md$. On note G le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$, H le groupe $\mathrm{GL}_m(E)$. On fixe une base de E^m vu comme F-espace vectoriel, ce qui donne un plongement φ du groupe H dans le groupe G ; changer de base donne un plongement conjugué à φ.

Supposons un instant que F est un corps global de caractéristique p. Si v est une place de F, on note F_v le complété de F en v et on pose $E_v = F_v \otimes_F E$; alors E_v est une F_v-algèbre cyclique de groupe Γ. La F-base de E^m est aussi une base de E_v^m vu comme F_v-espace vectoriel, ce qui donne un plongement φ_v du groupe

$\mathrm{GL}_m(E_v)$ dans le groupe $\mathrm{GL}_n(F_v)$. Notons $\mathfrak{o}_{F_v}$, $\mathfrak{o}_{E_v}$ les anneaux d'entiers de F_v et E_v respectivement. Pour presque toute place v de F, E_v est une F_v-algèbre cyclique non ramifiée, et $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{o}_{E_v})$ apparaît, via φ_v, comme l'intersection de $\mathrm{GL}_m(E_v)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_{F_v})$.

III.2.2. – Pour un élément x de $\mathrm{GL}_m(E)$ on définit comme dans [**40**, 2.2] le facteur $\widetilde{\Delta}(x)$, qui appartient à E; on définit aussi les fonctions discriminant D_G et D_H. On fixe un élément e de $E^\times$ tel que $\sigma e = (-1)^{m(d-1)}e$. Si F est un corps local non archimédien et que E est une F-algèbre cyclique non ramifiée, on peut prendre pour e une unité de E.

On suppose désormais que F est localement compact non archimédien de caractéristique $p > 0$, et l'on fixe un caractère κ de $F^\times$ de noyau $N_{E/F}(E^\times)$. Notons G_{reg} l'ensemble des éléments réguliers absolument semisimples de G. Pour $x \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, l'élément $e\widetilde{\Delta}(x)$ appartient à $F^\times$, et on pose

$$\Delta(x) = \kappa(e\widetilde{\Delta}(x))\,.$$

On note encore κ le caractère $\kappa \circ \det$ de G.

III.2.3. – Exprimons d'abord l'induction automorphe, ou κ-relèvement, de H à G, en termes d'intégrales orbitales. Cela occupera les n° 2.3 à 2.5.

Pour chaque élément γ de G_{reg}, le centralisateur de γ dans G est un tore T_γ, et on fixe sur T_γ la mesure de Haar dt_γ qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal de T_γ. On fixe aussi une mesure de Haar dg sur le groupe localement compact unimodulaire G, et de même une mesure de Haar dh sur H. Soit φ une fonction sur G, localement constante et à support compact. Pour γ dans G_{reg} on pose

$$\Lambda^G_\kappa(\varphi,\gamma) = \int_{T_\gamma\backslash G} \varphi(g^{-1}\gamma g)\kappa(g)\frac{dg}{dt_\gamma}$$

si T_γ est contenu dans le noyau de κ, et $\Lambda^G_\kappa(\varphi,\gamma) = 0$ sinon ; pour x dans G on a

$$\Lambda^G_\kappa(\varphi, x^{-1}\gamma x) = \kappa(x)^{-1}\Lambda^G_\kappa(\varphi,\gamma)\,.$$

Soit aussi f une fonction sur H, localement constante et à support compact. Pour γ dans $H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda^H(f,\gamma) = \int_{T_\gamma\backslash H} f(h^{-1}\gamma h)\frac{dh}{dt_\gamma}$$

(le centralisateur de γ dans H est aussi son centralisateur dans G). On dit que φ et f *concordent* si l'on a

$$\Delta(\gamma)|D_G(\gamma)|_F^{1/2}\Lambda^G_\kappa(\varphi,\gamma) = |D_H(\gamma)|_E^{1/2}\Lambda^H(f,\gamma)$$

pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, où les valeurs absolues sont les valeurs absolues normalisées de F et E. On peut trouver suffisamment de couples de telles fonctions φ et f qui concordent [**38**, 3.8, theo.] ; en particulier, on peut prendre pour φ n'importe quelle fonction localement constante à support compact contenu dans G_{reg}.

Remarque. – Les remarques (1) à (3) de [**40**, 2.4] sont encore valables:

(1) Pour $h \in H$, on a $\det_G(h) = N_{E/F}(\det_H(h))$, par suite H est contenu dans le noyau de κ. Si γ appartient à $H \cap G_{\mathrm{reg}}$, alors T_γ est aussi le centralisateur de γ dans H, donc est contenu dans $\ker(\kappa)$. Plus précisément, pour $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$, T_γ est contenu dans $\ker(\kappa)$ si et seulement si la F-algèbre semisimple $F[\gamma]$ est produit d'extensions de E_1; si de plus $E = E_1$, cela n'est possible que si γ est conjugué dans G à un élément de H [HH, 3.9, p. 144].

(2) Notons χ_0 le caractère $\kappa^{md(d-1)/2}$ de $F^\times$; il est trivial si $m(d-1)$ est pair, et vaut $\kappa^{d/2}$ sinon. Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ et $z \in F^\times$, en identifiant $F^\times$ au centre de G, on a
$$\widetilde{\Delta}(z\gamma) = z^{m^2 d(d-1)/2}\widetilde{\Delta}(\gamma)$$
d'où $\Delta(z\gamma) = \chi_0(z)\Delta(\gamma)$.

(3) Pour utiliser la formule des traces globale, il nous faut considérer la variante où f est une fonction sur H, localement constante et à support compact modulo $F^\times$ (vu comme un sous-groupe du centre de H), se transformant selon un caractère ω de $F^\times$ sous l'action de $F^\times$; et où φ est une fonction sur G, elle aussi localement constante et à support compact modulo $F^\times$, mais se transformant selon $\omega\chi_0$ sous l'action de $F^\times$. On définit alors la concordance de φ et f comme plus haut; et il existe suffisamment de couples de telles fonctions φ et f qui concordent [HH, 7.6].

III.2.4. – Supposons un instant que la F-algèbre cyclique E est non ramifiée, que la base de E^m sur F donne un isomorphisme de $\mathfrak{o}_F$-modules de $\mathfrak{o}_E^m$ sur $\mathfrak{o}_F^n$, et que e est une unité de E. Notant K_G le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_F)$, K_H le groupe $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{o}_E)$, et $\mathcal{H}(G, K_G)$, $\mathcal{H}(H, K_H)$ les algèbres de Hecke correspondantes, on dispose d'un homomorphisme d'algèbres canonique b de $\mathcal{H}(G, K_G)$ dans $\mathcal{H}(H, K_H)$ [**40**, 2.5].

Le *lemme fondamental* dans ce contexte dit que pour φ dans $\mathcal{H}(G, K_G)$, φ et $f = b\varphi$ concordent. Pour F de caractéristique p, c'est le résultat fondamental de [**39**] — il est obtenu par la méthode des corps proches à partir du lemme fondamental en caractéristique nulle, établi en toute caractéristique résiduelle dans [**40, 73**].

III.2.5. – Soient τ une représentation lisse irréductible de H, π une représentation lisse irréductible de G, et A un isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π. On dit que π est un *κ-relèvement* de τ s'il existe un nombre complexe non nul $c = c(\tau, \pi, A)$ tel que l'on ait

$$(*) \qquad \mathrm{tr}(\pi(\varphi) \circ A) = c(\tau, \pi, A)\mathrm{tr}(\tau(f))$$

à chaque fois que φ fonction sur G, localement constante et à support compact contenu dans G_{reg}, et f fonction sur H, localement constante et à support compact contenu dans $H \cap G_{\text{reg}}$, concordent. La validité de (*) ne dépend pas des mesures de Haar choisies sur G et H, et qui servent à définir aussi bien la concordance des fonctions que les traces apparaissant dans (*). Multiplier A par un scalaire λ multiplie $c(\tau, \pi, A)$ par λ. Manifestement la validité de (*) ne dépend que des classes d'isomorphisme de τ et π.

Remarque. – On a une variante [**40**, 2.6, rem.] de (*) pour des fonctions φ et f se transformant suivant un caractère du centre Z de G.

III.2.6. – Passons à la formulation de l'induction automorphe en termes de fonctions caractères.

Notons G_0 le noyau du caractère κ de G. On sait, en caractéristique nulle [**29**] puis en caractéristique p [**61**], que pour toute représentation lisse irréductible ρ de G_0, le caractère-distribution de ρ est en fait donné par une fonction localement L^1 sur G_0, qui est de plus localement constante sur $G_0 \cap G_{\text{reg}}$.

Il s'ensuit [**40**, 2.7] que le caractère-distribution $\varphi \longmapsto \operatorname{tr}(\pi(\varphi) \circ A)$ sur G est donné par une fonction Θ_π^A localement L^1 sur G, qui est localement constante sur G_{reg}. Pour x dans G et γ dans G_{reg} on a

$$\Theta_\pi^A(x^{-1}\gamma x) = \kappa(x)\Theta_\pi^A(\gamma).$$

Comme les fonctions caractères de représentations lisses irréductibles de G_0 deux à deux non isomorphes sont linéairement indépendants, on peut alors comme dans [**38**, 3.10 et 3.11] caractériser les κ-relèvements en termes de fonctions caractères, ce que nous faisons maintenant.

Soit $\gamma \in H \cap G_{\text{reg}}$; la classe de conjugaison $\mathcal{O}(\gamma)$ de γ dans G rencontre H en un nombre fini de classes de conjugaison dans H. Pour chaque telle classe C dans H choisissons un élément x_C dans G tel que $x_C^{-1}\gamma x_C$ appartienne à C, et notons $X(\gamma)$ l'ensemble des éléments x_C pour C parcourant les classes dans H rencontrant $\mathcal{O}(\gamma)$. Dire que π est un κ-relèvement de τ équivaut à dire qu'il existe une constante $c = c(\tau, \pi, A)$ — la même que celle de $(*)$ — telle que soient vérifiées les identités de caractères suivantes:

(i) pour $\gamma \in H \cap G_{\text{reg}}$,

$$|D_G(\gamma)|_F^{1/2}\Theta_\pi^A(\gamma) = c \sum_{x \in X(\gamma)} \kappa(x^{-1})\Delta(x^{-1}\gamma x)|D_H(x^{-1}\gamma x)|_E^{1/2}\Theta_\tau(x^{-1}\gamma x);$$

(ii) pour $\gamma \in G_{\text{reg}}$ non conjugué à un élément de H,

$$\Theta_\pi^A(\gamma) = 0\,.$$

De plus, si π est un κ-relèvement de τ, il est unique à isomorphisme près. Par abus de langage, il nous arrivera de parler “du” κ-relèvement de τ.

REMARQUES. – (1) Dans (i), Θ_τ est la fonction caractère sur l'ensemble H_{reg} des éléments réguliers absolument semisimples de H, qui donne le caractère-distribution $f \mapsto \mathrm{tr}(\tau(f))$ sur H. L'expression a un sens, puisque $H \cap G_{\mathrm{reg}}$ est contenu dans H_{reg}.

(2) Si E est une extension cyclique de F, la relation (ii) est automatique, et la relation (i), pour γ *elliptique* dans $H \cap G_{\mathrm{reg}}$ se simplifie en

$$|D_G(\gamma)|_F^{1/2}\Theta_\pi^A(\gamma) = c(\tau,\pi,A)\Delta(\gamma)|D_H(\gamma)|_E^{1/2} \sum_{\sigma' \in \mathrm{Gal}(E/F)} \Theta_\tau(\sigma'\gamma)$$

[**40**, 2.8, rem. (3)]. De plus [loc. cit., rem. (4)] on peut remplacer A par A^{-1} dans la formule précédente, quitte à multiplier $c(\tau,\pi,A)$ par une constante non nulle indépendante de π et A. Ainsi les identités utilisées dans les différents travaux de C.J. Bushnell et du premier auteur [**10**], [**12**], [**11**, I, II, III] sont toutes valables en caractéristique p.

(3) Si π est un κ-relèvement de τ, c'est un κ-relèvement de $\tau \circ \sigma'$ pour tout $\sigma' \in \mathrm{Gal}(E/F)$. En effet il existe un élément $x_{\sigma'}$ de G tel que $\sigma'\gamma = x_{\sigma'}\gamma x_{\sigma'}^{-1}$ pour tout $\gamma \in H$. On sait aussi que la contragrédiente $\check{\pi}$ de π est un κ-relèvement de $\check{\tau}$ [**38**, 4.5, prop.]. De plus on a, pour les caractères centraux de τ et π, l'identité (loc. cit.)

$$\omega_\pi = \kappa^{md(d-1)/2}\omega_\tau|_{F^\times}.$$

III.3. Réduction au cas des séries discrètes et normalisation

III.3.1. – Dans cette section, suivant [**38, 40**] nous présentons un certain nombre de propriétés de la notion de κ-relèvement, qui en particulier réduisent la question de l'existence du κ-relèvement d'une représentation unitaire générique τ de H au cas où τ est de la série discrète. Comme nous l'avons dit ce dernier cas sera traité par voie globale dans la section 4.

Nous donnons également la normalisation de l'opérateur d'entrelacement A donnée par le modèle de Whittaker, et établissons son comportement vis-à-vis des propriétés précédentes.

Les preuves des résultats de cette section sont pour l'essentiel les mêmes que celles de loc. cit.; nous nous contentons donc souvent d'y référer.

III.3.2. – Commençons par la normalisation de l'opérateur d'entrelacement A. Il faut pour cela fixer un caractère additif non trivial ψ de F. Il définit un caractère $\theta = \theta_\psi$ du sous-groupe unipotent supérieur U de G par la formule

$$\theta(u) = \psi\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}\Big) \quad \text{pour } u = (u_{ij}) \in U\,.$$

Soit π une représentation lisse irréductible de G ; dire que π est générique signifie qu'il existe une forme linéaire non nulle λ sur l'espace V_π de π telle que l'on ait $\lambda(\pi(u)(v)) = \theta(u)\lambda(v)$ pour $u \in U$ et $v \in V_\pi$; cette existence ne dépend pas du choix de ψ, et la fonctionnelle λ, qui est unique à un scalaire près, s'appelle une *fonctionnelle de Whittaker pour π relative à ψ.*

La représentation $\kappa\pi$ agit sur le même espace V_π et l'action est donnée par $\kappa\pi(g) = \kappa \circ \det(g)\pi(g)$ pour g dans G. Ainsi λ est également une fonctionnelle de Whittaker pour $\kappa\pi$ relative à ψ. Si $\kappa\pi$ est isomorphe à π, on peut normaliser l'opérateur d'entrelacement A entre $\kappa\pi$ et π en imposant $\lambda \circ A = \lambda$ pour toute telle fonctionnelle de Whittaker λ ; on note $A(\pi,\psi)$ cet opérateur d'entrelacement normalisé.

REMARQUES. – (1) Soit $a \in F^\times$ et notons ψ^a le caractère $x \longmapsto \psi(ax)$ de F. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$ on a

$$\Theta_\pi^{A(\pi,\psi^a)}(\gamma) = \kappa(a)^{n(n-1)/2}\Theta_\pi^{A(\pi,\psi)}(\gamma),$$

de sorte que si π est un κ-relèvement de τ, on a [**40**, 3.3]

$$c(\tau,\pi,A(\pi,\psi^a)) = \kappa(a)^{n(n-1)/2}c(\tau,\pi,A(\pi,\psi)).$$

(2) Si en outre π est non ramifiée, l'opérateur $A(\pi,\psi)$ est l'identité sur la droite de V_π formée des vecteurs fixés par $K_G = GL(n,\mathfrak{o}_F)$, pourvu que ψ soit de niveau 0 [**40**, 3.1].

III.3.3. – Soit τ une représentation lisse irréductible de H, et soit π un κ-relèvement de τ. Pour tout caractère χ de $F^\times$, notant χ_E le caractère $\chi \circ N_{E/F}$ de $E^\times$, $\chi\pi = (\chi \circ \det) \otimes \pi$ est un κ-relèvement de $\chi_E\tau = (\chi \circ N_{E/F} \circ \det_E) \otimes \tau$; si A est un isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π — par exemple $A = A(\pi,\psi)$ si π est générique — c'est aussi un isomorphisme de $\kappa\chi\pi$ sur $\chi\pi$, et on a [**40**, 2.9]

$$c(\chi_E\tau,\chi\pi,A) = c(\tau,\pi,A).$$

III.3.4. – On peut aussi donner le comportement des κ-relèvements vis-à-vis de l'induction parabolique [**38**, § 4; HL, 3.4 à 3.7].

On garde les entiers m et $n = md$, ainsi que les choix effectués de σ, e et κ, mais on va adapter le plongement de H dans G à une situation d'induction parabolique. Pour cela on se donne des entiers strictement positifs $m_1, \ldots, m_t$ tels que $\sum_{i=1}^{t} m_i = m$. Pour $i = 1, \ldots, t$, on choisit un élément e_i de $E^\times$ tel que $\sigma(e_i) = (-1)^{m_i(d-1)} e_i$, ce qui permet de considérer les facteurs de transfert $\widetilde{\Delta}_i$ et Δ_i relatifs à l'induction automorphe de $L_{H,i} = \mathrm{GL}_{m_i}(E)$ à $L_i = \mathrm{GL}_{m_i d}(F)$. Pour $i = 1, \ldots, t$, on se donne une base du F-espace vectoriel E^{m_i}, ce qui donne un plongement de $L_{H,i}$ dans L_i. Voyant E^m comme $E^{m_1} \oplus \cdots \oplus E^{m_t}$, on obtient une base du F-espace vectoriel E^m, d'où un plongement de H dans G. Le groupe $L = L_1 \times \cdots \times L_t$ apparaît comme un sous-groupe de Levi de G, $L_H = L_{H,1} \times \cdots \times L_{H,t}$ comme un sous-groupe de Levi de H, et on a $L_H = L \cap H$.

Soit P le sous-groupe parabolique de G formé des matrices triangulaires *inférieures* par blocs de taille $m_1 d, \ldots, m_t d$, et soit U_P le radical unipotent de P, de sorte que P est le produit semi-direct de L et U_P. Pour $i = 1, \ldots, t$, donnons-nous une représentation lisse π_i de L_i, notons π_L la représentation lisse $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t$ de L, et $\pi = \iota_P^G(\pi_L)$ la représentation lisse de G obtenue par induction parabolique (normalisée) de π_L vue comme représentation de P/U_P. Si pour $i = 1, \ldots, t$, V_{π_i} désigne l'espace de π_i, l'espace V_π de π est formé des applications localement constantes f de G dans l'espace $V_{\pi_L} = V_{\pi_1} \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} V_{\pi_t}$ de π_L, qui vérifient

$$f(lug) = \delta_P(l)^{1/2} \pi_L(l)(f(g))$$

pour $l \in L$, $u \in U_P$, $g \in G$. Ici, δ_P est le caractère module de P, donné par $d\mu(xpx^{-1}) = \delta_P(x) d\mu(p)$ pour n'importe quelle mesure de Haar (à droite ou à gauche) μ sur P. Le groupe G agit sur V_π par translations à droite. Notons $\kappa\pi_L$ la représentation lisse $\kappa\pi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa\pi_t$ de L. On dispose alors d'un isomorphisme de $\kappa\pi$ sur l'induite parabolique $\iota_P^G(\kappa\pi_L)$, obtenu en associant à la fonction $f \in V_\pi$ la fonction κf sur G.

Supposons que pour $i = 1, \ldots, t$, la représentation π_i soit irréductible et κ-stable, et choisissons un isomorphisme A_i de $\kappa\pi_i$ sur π_i. Notons A_L l'isomorphisme $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} A_t$ de $\kappa\pi_L$ sur π_L. Alors on dispose d'un isomorphisme A de $\kappa\pi$ sur π donné par la formule:

$$A(f)(g) = \kappa(g) A_L(f(g))$$

pour $f \in V_\pi$ et $g \in G$. Supposons de plus que pour $i = 1, \ldots, t$, la représentation π_i soit générique, et pour chaque i choisissons une fonctionnelle de Whittaker λ_i pour π_i relative à ψ. Alors [**65**] π est générique, et si de plus π est irréductible et qu'on prend $A_i = A(\pi_i, \psi)$ pour $i = 1, \ldots, t$, on a $A = A(\pi, \psi)$.

Le groupe $P_H = P \cap H$ est un sous-groupe parabolique de H, de radical unipotent $U_{P,H} = U_P \cap H$, et L_H est une composante de Levi de P_H. Comme plus haut, si pour $i = 1, \ldots, t$, τ_i est une représentation lisse de H_i, on note $\iota_{P_H}^H(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_t)$ la représentation lisse de H obtenue par induction parabolique de $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_t$ vue comme représentation de $P_H/U_{P,H}$. On peut alors utiliser le lemme 2 de [**38**, 4.6] pour obtenir le résultat suivant [**40**, 3.7, prop.], qui précise [**38**, 4.6, prop.]:

PROPOSITION. – *Supposons que pour $i = 1, \ldots, t$, la représentation (lisse, irréductible, κ-stable) π_i de G_i soit un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible τ_i de H_i, et que les représentations $\pi = \iota_P^G(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t)$ de G et $\tau = \iota_{P_H}^H(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_t)$ de H soient irréductibles. Alors π est un κ-relèvement de τ. De plus il existe une racine de l'unité ζ, qui ne dépend ni des π_i ni des τ_i, telle que si pour $i = 1, \ldots, t$, A_i est un isomorphisme de $\kappa\pi_i$ sur π_i, et que A est l'isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π associé aux A_i comme plus haut, on ait*

$$c(\tau, \pi, A) = \zeta \prod_{i=1}^{t} c(\tau_i, \pi_i, A_i).$$

Si les π_i sont génériques, alors π l'est aussi et on a

$$c(\tau, \psi) = \zeta \prod_{i=1}^{t} c(\tau_i, \psi).$$

Si l'algèbre cyclique E/F est non ramifiée et que $e, e_1, \ldots, e_t$ sont des unités de $\mathfrak{o}_E$, alors $\zeta = 1$.

Pour la démonstration, voir [**40**, 3.6 et 3.7]. Notons que l'existence de la racine de l'unité ζ est constructive: on peut donner sa valeur explicite [**40**, 3.7, prop.].

III.3.5. – On peut également, suivant [loc. cit., 3.8] ramener l'étude des κ-relèvements au cas où E est une extension cyclique de F. D'ailleurs ce cas d'une extension cyclique est celui qui nous intéresse pour les résultats locaux, le cas général d'une algèbre cyclique ne servant que marginalement lors des arguments globaux.

De façon précise, écrivons E comme un produit de corps $E_1 \times \cdots \times E_r$ $d = rs$, de sorte que $\sigma E_i = E_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, r-1$ et $\sigma E_r = E_1$; chaque E_i est une extension cyclique de F, de degré s et de groupe de Galois engendré par la restriction à E_i de σ^r, restriction que nous notons encore σ^r. Remarquons qu'on a $N_{E/F}(E^\times) = N_{E_i/F}(E_i^\times)$, de sorte que l'on peut utiliser le caractère κ pour l'induction automorphe de $\mathrm{GL}_m(E_i)$ à $\mathrm{GL}_{ms}(F)$.

Une représentation lisse irréductible τ de $H = \mathrm{GL}_m(E_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}_m(E_r)$ apparaît comme un produit tensoriel $\tau = \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ où τ_i est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_m(E_i)$. On forme la représentation $\tau' = \tau_1 \otimes (\tau_2 \circ \sigma) \otimes \cdots \otimes (\tau_r \circ \sigma^{r-1})$ de $\mathrm{GL}_m(E_1)^r$ et, par induction parabolique suivant un sous-groupe parabolique de

$\mathrm{GL}_{mr}(E_1)$ de composante de Levi $\mathrm{GL}_m(E_1)^r$, on obtient une représentation lisse ρ de $\mathrm{GL}_{mr}(E_1)$. On suppose que ρ est *irréductible* — de sorte que le choix du sous-groupe parabolique pour l'induction parabolique n'a pas d'importance. Si π est un κ-relèvement de ρ (pour l'extension cyclique E_1/F), c'est aussi un κ-relèvement de τ (pour l'algèbre cyclique E/F). Si de plus π est générique, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, ne dépendant pas de τ mais seulement des données auxiliaires fixées pour définir les κ-relèvements, telle que

$$c(\tau, \pi, A(\pi, \psi)) = \lambda\, c(\rho, \pi, A(\pi, \psi)).$$

III.3.6. – Dans la section 4, par voie globale, nous prouverons le résultat suivant.

Théorème. – *On suppose que E est une extension cyclique de F.*

(a) *Soit τ une représentation lisse irréductible de carré intégrable H. Alors τ possède un κ-relèvement π qui est générique et unitaire, et indépendant de κ.*

(b) *Soient τ, τ' deux représentations lisses irréductibles de carré intégrable de H, et soient π un κ-relèvement de τ, π' un κ-relèvement de τ'. Alors on a*

$$\begin{aligned} L(\pi \times \pi', s) &= \prod_{i=0}^{d-1} L(\tau \times (\tau' \circ \sigma^i), s), \\ \frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\prod_{i=0}^{d-1} \varepsilon(\kappa^i, s, \psi)^{dm^2}} &= \prod_{i=0}^{d-1} \frac{\varepsilon(\tau \times (\tau' \circ \sigma^i), s, \psi_E)}{\varepsilon(1_E, s, \psi_E)^{m^2}}. \end{aligned}$$

Dans cette formule, les facteurs L et ε de paires sont ceux de [**44**] ou [**68**] — l'équation fonctionnelle globale a d'abord été obtenue par Shahidi [**68**] qui a ensuite montré dans [**69**] que ses facteurs sont les mêmes que ceux de [**44**] —, 1_E désigne le caractère trivial de $E^\times$ et ψ_E le caractère additif $\psi \circ \mathrm{tr}_{E/F}$ de E.

Cet énoncé est déjà dans [**38**, § 1 et 8.1] et nous pourrions nous contenter d'y référer. Cependant, nous reprenons la démonstration dans la section 4 — ou plus exactement la variante utilisée dans [**40**] — parce que nous voulons, d'une part déterminer quels sont les κ-relèvements des représentations de la série discrète (voir la proposition de 3.8 ci-dessous; [**38**, § 6] ne traitait que le cas où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$), d'autre part et surtout parce que nous voulons contrôler le comportement des “constantes” $c(\tau, \psi, A(\pi, \psi))$ (voir ci-dessous, 3.11).

Remarque. – Par torsion par un caractère non ramifié de H (cf. 3.3) on déduit que si τ est essentiellement de carré intégrable (modulo le centre), τ possède un κ-relèvement générique, indépendant de κ. La partie (b) du théorème s'étend aussitôt au cas où τ et τ' sont essentiellement de carré intégrable.

III.3.7. – On suppose, jusqu'au n° 3.11 inclus, que E est une extension cyclique de F. Grâce à la correspondance de Jacquet-Langlands prouvée par Badulescu [**3**], on sait que les restrictions à $H \cap G_{\mathrm{reg}}$ des caractères de représentations lisses irréductibles essentiellement de carré intégrable de H non isomorphes deux à deux, sont linéairement indépendants. On en déduit la proposition suivante [**38**, 5.2, cor.]:

PROPOSITION. – *Soit τ une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable de H. Si une représentation lisse irréductible générique τ' de H a même κ-relèvement que τ, alors τ' est isomorphe à l'un des conjugués de τ sous $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$.*

REMARQUE. – Il est vraisemblable que l'on peut omettre l'hypothèse de généricité sur τ', mais nous ne l'avons pas établi. Voir ci-dessous 3.9 pour quelles représentations lisses irréductibles génériques de H nous établissons l'existence d'un κ-relèvement.

III.3.8. – Soit π une représentation lisse irréductible κ-stable de G. On dit que π est *κ-discrète* si elle est tempérée mais n'est pas l'induite parabolique d'une représentation tempérée κ-stable d'un sous-groupe de Levi propre de G. On dit que π est *essentiellement κ-discrète* si elle est obtenue, par torsion par un caractère de G (qu'on peut prendre non ramifié), à partir d'une représentation (lisse irréductible κ-stable) κ-discrète.

D'après [**38**, 5.3, lemma], si $d_1 \geq 1$ est un entier divisant d, et si π_1 est une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$, $n = n_1 d_1$, telle que le stabilisateur de la classe d'isomorphisme de π_1 dans $\kappa^{d\mathbb{Z}}$ (agissant par torsion) soit engendré par κ^{d_1}, alors par induction parabolique de $\pi_1 \otimes \kappa\pi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa^{d_1 - 1}\pi_1$ à G suivant un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi $\mathrm{GL}_{n_1}(F)^{d_1}$, on obtient une représentation (lisse irréductible κ-stable) essentiellement κ-discrète π de G, dont la classe d'isomorphisme ne dépend que de celle de π_1. De plus (loc. cit.), π est κ-discrète (i.e. unitaire) si et seulement si π_1 est de carré intégrable, et à isomorphisme près, toutes les représentations κ-discrètes de G sont obtenues de cette manière.

On déduit comme dans [**38**, 5.3] la proposition suivante.

PROPOSITION. – *Soit τ une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable de H, et soit π un κ-relèvement de τ. Alors π est essentiellement κ-discrète, et est κ-discrète si τ est de carré intégrable.*

REMARQUES. – On peut même suivant [**38**, 5.5] analyser plus en détail la situation.

(1) Si τ est cuspidale et si sa classe d'isomorphisme a un stabilisateur d'ordre d_1 dans $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$, alors son κ-relèvement π est induite parabolique de $\pi_1 \otimes \kappa\pi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa^{d_1-1}\pi_1$ à G, où π_1 est une représentation lisse irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$, $n = n_1 d_1$, et a pour stabilisateur $\kappa^{d_1\mathbb{Z}}$ dans $\kappa^{\mathbb{Z}}$.

(2) Si τ est essentiellement de carré intégrable, elle est déterminée par son support cuspidal qui forme un "segment" $\rho \otimes \nu_E \rho \otimes \cdots \otimes \nu_E^{t-1}\rho$, où ρ est une représentation lisse irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_s(E)$, $st = m$, et ν désigne le caractère $x \longmapsto |x|_F$ de $F^\times$; rappelons que $\nu_E = \nu \circ N_{E/F}$. Écrivant le κ-relèvement de ρ comme induite parabolique de $\pi_1 \otimes \kappa\pi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa^{d_1-1}\pi_1$ à $\mathrm{GL}_{sd}(F)$, $sd = n_1 d_1$, comme en (1), on voit que le κ-relèvement de τ est induite parabolique de $\pi_1' \otimes \kappa\pi_1' \otimes \cdots \otimes \kappa^{d_1-1}\pi_1'$ à G, où π_1' est la représentation de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{n_1 t}(F)$ de support cuspidal $\pi_1 \otimes \nu\pi_1 \otimes \cdots \otimes \nu^{t-1}\pi_1$.

III.3.9. – Nous pouvons maintenant établir l'existence du κ-relèvement pour les représentations lisses irréductibles génériques et unitaires de H. En effet, nous savons désormais que les représentations lisses irréductibles essentiellement de carré intégrable de H ont un κ-relèvement. Une représentation lisse irréductible générique τ de H est (à isomorphisme près) induite parabolique d'une représentation $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ où, pour $i = 1, \ldots, r$, τ_i est une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{m_i}(E)$, avec $m_1 + \cdots + m_r = m$ [**75**, § 7]. Si, pour $i = 1, \ldots, r$, π_i est un κ-relèvement de τ_i, et si π est induite parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ à G, alors cette induite π est un κ-relèvement de τ, *pourvu qu'elle soit irréductible* — de sorte que, là encore, le choix du parabolique pour l'induction parabolique n'a pas d'importance.

Cette condition d'irréductibilité est vérifiée exactement quand τ est *à segments* Γ*-réguliers* au sens de [**40**, 3.8, rem. (2)] — i.e. est "Γ-régulière" au sens de [**38**, 2.4], mais nous préférons la terminologie de [**40**]. Rappelons cette définition: avec les notations de [**38**, 2], la classe d'isomorphisme de τ est de la forme $L(\Delta_1, \ldots, \Delta_s)$ où les Δ_i sont des segments sur E deux-à-deux non liés. On dit que τ est à segments Γ-réguliers si pour tous i, j tels que $1 \leq i < j \leq s$ et tout $\theta \in \Gamma$, les segments Δ_i et $\Delta_j \circ \theta$ ne sont pas liés. Cette condition est vérifiée en particulier quand τ est unitaire, en vertu de la classification de Tadić [**4, 71**]. On a donc :

Théorème. – *Soit τ une représentation lisse irréductible générique de H. Si τ est unitaire, ou plus généralement à segments Γ-réguliers, alors τ possède un κ-relèvement π qui est générique et indépendant de κ.*

Remarque. – Il est facile de voir quand deux représentations lisses irréductibles génériques à segments Γ-réguliers τ et τ' de H ont des κ-relèvements isomorphes, mais nous ne savons pas répondre à cette question sans hypothèse sur τ et τ'.

III.3.10. – Dans la section 4 nous prouvons par voie globale le résultat suivant (quand F est un corps p-adique, une démonstration, particulière à la caractéristique nulle, est donnée dans [**38**, § 6], mais la preuve en caractéristique p annoncée dans [**38**, 5.4] n'a jamais été rédigée ; la preuve de la présente section 4 est en fait valide en toute caractéristique).

Théorème. – *Soit π une représentation lisse irréductible κ-stable de G. Supposons que π est κ-discrète. Alors π est un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible de carré intégrable de H.*

Remarque. – Par torsion par un caractère de $F^\times$, on voit que si π est toujours lisse irréductible κ-stable, mais seulement essentiellement κ-discrète, c'est un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable de H.

Corollaire. – *Soit π une représentation lisse irréductible générique de G, qui soit κ-stable. Alors π est un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible générique à segments Γ-réguliers de H. Si de plus π est unitaire, il en est de même de τ.*

En effet, par la classification des représentations génériques de G [**75**, § 9], π s'écrit comme induite parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t$ où, pour $i = 1, \ldots, t$, π_i est une représentation (lisse irréductible κ-stable) essentiellement κ-discrète de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$, avec $n_1 + \cdots + n_r = n$. D'après le théorème, pour $i = 1, \ldots, t$, π_i est un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable τ_i de $\mathrm{GL}_{m_i}(E)$, $m_i d = n_i$. Si τ est induite parabolique de $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ à H, alors τ est générique et π est un κ-relèvement de τ (cf. 3.4), pourvu du moins que τ soit irréductible. Mais comme π est irréductible, les segments apparaissant dans la paramétrisation de Langlands-Zelevinsky des différents π_i ne peuvent être liés ; traduisant cela, grâce à 3.7 et 3.8, en termes des segments apparaissant dans la paramétrisation de Langlands-Zelevinsky des τ_i, on voit que τ est irréductible et à segments Γ-réguliers, ce qui donne la première assertion du corollaire.

La seconde assertion résulte de la première par la classification du dual unitaire de G et H [**4, 71**]. En effet, supposons de plus que π soit unitaire. D'après loc. cit., il existe des entiers s, $r \geq 0$, $t = s + 2r$, et, pour $i = 1, \ldots, r$, une représentation (lisse irréductible κ-stable) κ-discrète π'_i de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ et un nombre réel α_i strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, tels que:

— pour $j = 1, \ldots, s$, π_j est κ-discrète;

— pour $i = 1, \ldots, r$, $n_{s+2i-1} = n_{s+2i}$ et $\pi_{s+2i-1} \otimes \pi_{s+2i}$ est isomorphe à $\nu^{\alpha_i}\pi'_i \otimes \nu^{-\alpha_i}\pi'_i$, où (rappel) ν désigne le caractère $x \mapsto |x|_F$ de $F^\times$.

Ainsi π s'écrit comme induite parabolique de

$$\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_s \otimes (\nu^{\alpha_1}\pi'_{s+1} \otimes \nu^{-\alpha_1}\pi'_{s+1}) \otimes \cdots \otimes (\nu^{\alpha_r}\pi'_{s+r} \otimes \nu^{-\alpha_r}\pi'_{s+r})$$

à G. Pour $i = 1, \ldots, r$, π'_i est un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible de carré intégrable τ'_i de $\mathrm{GL}_{m'_i}(E)$, $m'_i d = n_{s+2i}$. Si τ est induite parabolique de

$$\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_s \otimes (\nu_E^{\alpha_1}\tau'_1 \otimes \nu_E^{-\alpha_1}\tau'_1) \otimes \cdots \otimes (\nu_E^{\alpha_r}\tau'_r \otimes \nu_E^{-\alpha_r}\tau'_r)$$

à H, alors τ est générique irréductible (cf. ci-dessus) et π est un κ-relèvement de τ. D'après loc. cit., τ est unitaire.

III.3.11. – Le troisième renseignement obtenu par voie globale dans la section 4 est le suivant :

THÉORÈME. – *Soient τ et τ_0 deux représentations lisses irréductibles de H. On suppose τ de la série discrète, et τ_0 générique unitaire et non ramifiée. Soient π un κ-relèvement de τ et π_0 un κ-relèvement τ_0. Alors on a*

$$c(\tau, \pi, A(\pi, \psi)) = c(\tau_0, \pi_0, A(\pi_0, \psi))\,.$$

REMARQUE. – L'existence de π_0 et π découle du théorème de 3.9. Notons qu'on sait alors que $c(\tau_0, \pi_0, A(\pi_0, \psi))$ ne dépend pas du choix de τ_0 : pour $m = 1$ c'est l'argument de [**40**, 3.1, rem. (1)], et pour $m \geq 2$, on se ramène à $m = 1$ par induction parabolique (3.4).

COROLLAIRE. – *Soit τ une représentation lisse irréductible générique de H. Supposons τ unitaire, ou plus généralement à segments Γ-réguliers. Soit π un κ-relèvement de τ. Alors $c(\tau, \pi, A(\pi, \psi))$ ne dépend pas de τ, mais seulement des données auxiliaires fixées au départ.*

Le corollaire découle du théorème si τ est de carré intégrable. Le cas où τ est essentiellement de carré intégrable s'en déduit par torsion par un caractère de $F^\times$ (3.3), et le cas général s'obtient par induction parabolique, grâce à 3.4 et 3.9. En effet, τ est (à isomorphisme près) induite parabolique de $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ à H, où τ_i est une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{m_i}(E)$, $m_1 + \cdots + m_r = m$. Pour $i = 1, \ldots, r$, soit π_i un κ-relèvement de τ_i; c'est une représentation lisse irréductible κ-stable essentiellement κ-discrète de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$, $n_i = m_i d$. Soit aussi $\tau_{i,0}$ une représentation lisse irréductible générique unitaire et non ramifiée de $\mathrm{GL}_{m_i}(E)$, et soit $\pi_{i,0}$ un κ-relèvement de $\tau_{0,i}$. D'après 3.3 et le théorème ci-dessus, on a $c(\tau_i, \pi_i, A(\pi_i, \psi)) = c(\tau_{i,0}, \pi_{i,0}, A(\pi_{i,0}, \psi))$, i.e. $c(\tau_i, \psi) = c(\tau_{i,0}, \psi)$. Choisissons un sous-groupe parabolique P de G de composante de Levi $\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(F)$, et posons $P_H = P \cap H$. Puisque τ est à segments Γ-réguliers, l'induite parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ à G suivant P est irréductible et isomorphe à π (3.9). D'autre part, l'induite parabolique τ_0 de $\tau_{0,1} \otimes \cdots \otimes \tau_{0,r}$ à H suivant P_H est irréductible générique unitaire et non ramifiée. L'induite parabolique de $\pi_{1,0}\otimes\cdots\otimes\pi_{r,0}$ à G suivant P est donc (générique) irréductible, et c'est un κ-relèvement de τ_0. D'après 3.4, on a $c(\tau,\psi)=\zeta\prod_{i=1}^r c(\tau_i,\psi)$ et $c(\tau_0,\psi)=\zeta\prod_{i=1}^r c(\tau_{i,0},\psi)$, d'où l'égalité

$$c(\tau,\psi)=c(\tau_0,\psi).$$

III.3.12. – Revenons au cas général où E est une F-algèbre cyclique de groupe Γ. Par 3.5, une représentation lisse irréductible générique de H qui est unitaire, ou plus généralement à segments Γ-réguliers au sens de [**40**, 3.8, rem. (2)] possède un κ-relèvement générique, et le corollaire ci-dessus est valable. On peut étendre les résultats de 3.7 – 3.10 à ce cadre général, mais nous n'en aurons pas besoin.

Remarque. – On peut aussi composer les κ-relèvements [**38**, 5.7, rem. (2)]. Soit E une extension finie galoisienne de F, obtenue par extensions cycliques successives $E=E_r/E_{r-1},E_{r-1}/E_{r-2},\ldots,E_1/E_0=F$. Si τ est une représentation lisse irréductible générique *unitaire* (ou, plus généralement, qui vérifie une certaine condition de régularité sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$) de $H=\mathrm{GL}_m(E)$, on peut par relèvements successifs, relever τ en une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_{md}(F)$, $d=[E:F]$. La classe d'isomorphisme de π ne dépend pas du choix des extensions $E_1,\ldots,E_{r-1}$: en caractéristique nulle, cela est affirmé sans démonstration dans loc. cit.; en caractéristique $p>0$, cela découle de la compatibilité de l'application induction automorphe (dans le cas d'une extension cyclique) à la correspondance de Langlands locale **IV**.5.3, théo..

III.4. Utilisation de la formule des traces

III.4.1. – Dans cette dernière section, E est une extension cyclique de F. Suivant [**38**, § 7 et § 8] et [**40**, ch. 4], nous mettons en œuvre une comparaison de formules des traces pour prouver les théorèmes de 3.6, 3.10 et 3.11.

On choisit une extension $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ de corps globaux de caractéristique p, cyclique de degré d, et redonnant l'extension E/F en une place. Plus précisément, on se donne une place v_0 de $\mathbf{F}$ inerte dans $\mathbf{E}$, c'est-à-dire n'ayant qu'une extension encore notée v_0 à $\mathbf{E}$, et un isomorphisme ι de corps topologiques de $\mathbf{E}_{v_0}$ sur E, qui induit un isomorphisme, toujours noté ι, de $\mathbf{F}_{v_0}$ sur F (pour chaque place v de $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_v$ désigne le complété de $\mathbf{F}$ en v, et $\mathbf{E}_v=\mathbf{E}\otimes_{\mathbf{F}}\mathbf{F}_v$). L'existence de telles données est bien connue [**32**, lemme 3.6]. Via ι on identifie le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$ à $\Gamma=\mathrm{Gal}(E/F)$; le générateur choisi σ de Γ donne donc un générateur σ de $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{F})$. On note $\mathfrak{K}$ l'unique caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^\times$ de noyau $\mathbf{E}^\times N_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}}^\times)$ dont le composant $\mathfrak{K}_{v_0}$ en la place v_0 correspond via ι au caractère fixé κ de $F^\times$, c'est-à-dire tel que $\mathfrak{K}_{v_0}=\kappa\circ\iota|_{F_{v_0}^\times}$.

On choisit aussi un caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}$, trivial sur $\mathbf{F}$. Pour le théorème de 3.11, on peut supposer (cf. la remarque (1) de 3.3) que le composant Ψ_{v_0} en la place v_0 correspond via ι au caractère additif choisi ψ de F, c'est-à-dire vérifie $\Psi_{v_0} = \psi \circ \iota$.

Les n° suivants, jusqu'à 4.6 inclus, reprennent [**40**, 4.2 – 4.6], les considérations sur les places archimédiennes en moins.

III.4.2. – On note $\underline{H}$ le groupe algébrique GL_m, $\underline{G}$ le groupe algébrique GL_n et $\underline{Z}$ le centre de $\underline{G}$ identifié au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Comme $\underline{H}$, $\underline{G}$, $\underline{Z}$ sont définis sur $\mathbb{Z}$ (i.e. "sont" des schémas en groupes), on peut, pour n'importe quel anneau commutatif A, considérer les groupes $\underline{H}(A)$, $\underline{G}(A)$, $\underline{Z}(A)$ de leurs points à valeurs dans A.

On choisit une $\mathbf{F}$-base de $\mathbf{E}^m$, ce qui donne un plongement de $\mathbf{H} = \underline{H}(\mathbf{E})$ dans $\mathbf{G} = \underline{G}(\mathbf{F})$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, cette base donne aussi une $\mathbf{F}_v$-base de $\mathbf{E}_v^m = \mathbf{E}_v$, d'où un plongement de $\mathbf{H}_v = \underline{H}(\mathbf{E}_v)$ dans $\mathbf{G}_v = \underline{G}(\mathbf{F}_v)$. Pour presque toute place v de $\mathbf{F}$, on obtient en fait une base de $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v}^m$ sur $\mathfrak{o}_{\mathbf{F}_v}$, où $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathbf{F}_v$ et $\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v}$ celui de $\mathbf{E}_v$. En la place v_0, on peut supposer que la $\mathbf{F}_{v_0}$-base de $\mathbf{E}_{v_0}^m$ obtenue correspond via ι à la F-base de E^m fixée en 2.1, qui donne le plongement de $H = \underline{H}(E)$ dans $G = \underline{G}(F)$.

On identifie $\mathbf{F}^\times$ au centre $\mathbf{Z} = \underline{Z}(\mathbf{F})$ de $\mathbf{G}$ et à un sous-groupe du centre de $\mathbf{H}$. De même, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on identifie $\mathbf{F}_v^\times$ au centre $\mathbf{Z}_v = \underline{Z}(\mathbf{F}_v)$ de $\mathbf{G}_v$ et à un sous-groupe du centre de $\mathbf{H}_v$.

On a un facteur de transfert $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}(\gamma)$, défini comme dans [**40**, ch. 2], pour les éléments γ de $\mathbf{H} \cap \mathbf{G}_{\mathrm{reg}}$. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on a aussi un facteur de transfert $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_v(\gamma_v)$ pour les éléments γ_v de $\mathbf{H}_v \cap \mathbf{G}_{v,\mathrm{reg}}$, et $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}$ est la restriction de $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_v$ aux éléments $\mathbf{E}$-rationnels (i.e. dans $\mathbf{H}$) de $\mathbf{H}_v \cap \mathbf{G}_{v,\mathrm{reg}}$. On choisit un élément $\mathbf{e}$ de $\mathbf{E}^\times$ tel que $\sigma\mathbf{e} = (-1)^{m(d-1)}\mathbf{e}$. Rappelons qu'en 2.2 on a choisi un élément e de $E^\times$ tel que $\sigma e = (-1)^{m(d-1)}e$. On peut supposer $\iota(\mathbf{e}) = e$ car changer e ne change pas le résultat à prouver. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on note $\boldsymbol{\Delta}_v$ la fonction sur $\mathbf{H}_v \cap \mathbf{G}_{v,\mathrm{reg}}$ donnée par $\boldsymbol{\Delta}_v(\gamma_v) = \mathfrak{K}_v(\mathbf{e}\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}_v(\gamma_v))$. Puisque $\mathfrak{K}$ est trivial sur $\mathbf{F}^\times$, pour $\gamma \in \mathbf{H} \cap \mathbf{G}_{\mathrm{reg}}$, on a

$$\prod_v \boldsymbol{\Delta}_v(\gamma) = \mathfrak{K}(\mathbf{e}\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}(\gamma)) = 1.$$

De même, par la formule du produit, pour $\gamma \in \mathbf{H} \cap \mathbf{G}_{\mathrm{reg}}$, on a

$$\prod_v |D_{\mathbf{G}_v}(\gamma)|_{\mathbf{F}_v} = 1 \quad \text{et} \quad \prod_v |D_{\mathbf{H}_v}(\gamma)|_{\mathbf{E}_v} = 1$$

III.4.3. – On fixe un caractère unitaire ω de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ trivial sur $\mathbf{F}^{\times}$. On s'intéresse aux représentations automorphes cuspidales de $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dont le caractère central est donné par ω sur $\underline{Z}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$, et aux représentations automorphes cuspidales de $\underline{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ de caractère central $\omega' = \omega\mathfrak{K}^{md(d-1)/2}$ — on se permettra plus loin d'ajuster ω convenablement, pour les applications locales.

L'espace $\mathscr{L}^0_\omega(\underline{H},\mathbf{E})$ des formes automorphes cuspidales sur $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ se transformant suivant ω sous l'action de $\underline{Z}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ est somme directe hilbertienne de représentations automorphes cuspidales de $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, chacune apparaissant avec multiplicité 1. On fixe des mesures de Haar dz sur $\underline{Z}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ et dh sur $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$, chacune décomposée en produit de mesures de Haar locales dz_v et dh_v suivant les places v de $\mathbf{F}$, avec la condition habituelle qu'à presque toute place v, on a $\mathrm{vol}(K_{\mathbf{Z}_v}, dz_v) = 1$ et $\mathrm{vol}(K_{\mathbf{H}_v}, dh_v) = 1$; où l'on a posé $K_{\mathbf{Z}_v} = \underline{Z}(\mathfrak{o}_{\mathbf{F}_v})$ $(= \mathfrak{o}_{\mathbf{F}_v}^{\times})$ et $K_{\mathbf{H}_v} = \underline{H}(\mathfrak{o}_{\mathbf{E}_v})$.

On considère des fonctions f sur $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ décomposées en produit de fonctions locales f_v suivant les places v de $\mathbf{F}$, où f_v est une fonction sur $\mathbf{H}_v$, localement constante et à support compact modulo $\mathbf{Z}_v$, telle que $f_v(zh) = \omega_v(z)^{-1}f_v(h)$ pour $z \in \mathbf{Z}_v$ et $h \in \mathbf{H}_v$; on demande aussi qu'à presque toute place v, f_v soit la fonction particulière f_v^0, à support dans $\mathbf{Z}_v K_{\mathbf{H}_v}$, telle que $f_v^0(zh) = \omega_v(z)^{-1}$ pour $z \in \mathbf{Z}_v$ et $h \in K_{\mathbf{H}_v}$. De telles fonctions f agissent sur l'espace $\mathscr{L}^0_\omega(\underline{H},\mathbf{E})$ par convolution. L'opérateur $\rho^0_\omega(f)$ ainsi obtenu est à trace et l'on a

$$\mathrm{tr}(\rho^0_\omega(f)) = \sum_\tau \mathrm{tr}(\tau(f)) = \sum_\tau \sum_v \mathrm{tr}(\tau_v(f_v))$$

où τ parcourt les représentations automorphes cuspidales de $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}^0_\omega(\underline{H},\mathbf{E})$; pour chaque τ, on a la décomposition en produit tensoriel complété $\tau = \widehat{\otimes}_v \tau_v$ où τ_v est une représentation unitaire irréductible de $\mathbf{H}_v$ — "le" composant local de τ en v, bien défini à isomorphisme près. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on peut remplacer τ_v par la représentation lisse irréductible sous-jacente τ_v^∞ sur les vecteurs lisses de τ_v: on a

$$\mathrm{tr}(\tau_v(f_v)) = \mathrm{tr}(\tau_v^\infty(f_v)).$$

D'ailleurs on se permettra plus loin (à partir de 4.6) d'identifier la représentation unitaire τ_v et sa partie lisse τ_v^∞.

Si la fonction f vérifie certaines conditions particulières, cette trace $\mathrm{tr}(\rho^0_\omega(f))$ se calcule en termes d'intégrales orbitales

$$\Lambda^{\mathbf{H}}(f,\gamma) = \prod_v \Lambda^{\mathbf{H}_v}(f_v,\gamma)$$

en des éléments elliptiques réguliers γ de $\mathbf{H}$. Nous n'utiliserons que des fonctions f qui vérifient la condition $c_{v_1}(f)$ suivante pour une place v_1 de $\mathbf{F}$: f_{v_1} *s'annule en dehors des éléments elliptiques réguliers de* $\mathbf{H}_{v_1}$*, et est combinaison linéaire de coefficients de* *représentations lisses irréductibles cuspidales de* $\mathbf{H}_{v_1}$. Si cette condition est vérifiée, on a

$$\mathrm{tr}(\rho^0_\omega(f)) = \sum_\gamma c_\gamma \mathrm{vol}(\underline{H}_\gamma(\mathbf{E})\underline{Z}(\mathbb{A}_\mathbf{F})\backslash\underline{H}_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{E}))\Lambda^\mathbf{H}(f,\gamma)$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants dans $\mathbf{H}$ des classes de conjugaison d'éléments elliptiques réguliers de $\mathbf{H}$, modulo l'action de $\mathbf{Z}$ par translations. Ici, $\underline{H}_\gamma$ désigne le centralisateur de γ dans $\underline{H}$; le volume et l'intégrale orbitale sont calculés en utilisant les mesures de Haar fixées sur $\underline{Z}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ et sur $\underline{H}(\mathbb{A}_\mathbf{E})$, et une mesure de Haar sur $\underline{H}_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dont le choix n'a pas d'importance; enfin le coefficient c_γ est l'inverse du nombre — fini — d'éléments de $\mathbf{Z}\gamma$ conjugués à γ dans $\mathbf{H}$ [He1, 4.9]. Notons que pour chaque place v de $\mathbf{F}$, γ est régulier dans $\mathbf{H}_v$, par conséquent $\underline{H}_\gamma(\mathbf{E}_v)$ est un tore (maximal) de $\mathbf{H}_v$, et l'on dispose de la mesure de Haar *normalisée* sur $\underline{H}_\gamma(\mathbf{E}_v)$: celle qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal de ce tore. On peut prendre sur $\underline{H}_\gamma(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ la mesure décomposée en produit des mesures locales normalisées sur les $\underline{H}_\gamma(\mathbf{E}_v)$.

III.4.4. – On considère d'autre part l'espace $\mathcal{L}^0_{\omega'}(\underline{G},\mathbf{F})$ des formes automorphes cuspidales sur $\underline{G}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, se transformant suivant ω' sous l'action de $\underline{Z}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$. Cet espace est somme directe hilbertienne de représentations automorphes cuspidales de $\underline{G}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, chacune apparaissant avec multiplicité 1. On dispose sur $\mathcal{L}^0_{\omega'}(\underline{G},\mathbf{F})$ de l'opérateur d'entrelacement $I_\mathfrak{K}$ donné par la multiplication par le caractère $\mathfrak{K}\circ\det$ de $\underline{G}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ — ce caractère est trivial $\underline{Z}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, puisque $\mathfrak{K}$ est d'ordre d divisant n. L'opérateur $I_\mathfrak{K}$ envoie une représentation automorphe cuspidale π dans $\mathcal{L}^0_{\omega'}(\underline{G},\mathbf{F})$ sur une représentation isomorphe à $\mathfrak{K}^{-1}\pi = (\mathfrak{K}^{-1}\circ\det)\otimes\pi$; ou, ce qui revient au même, $I_\mathfrak{K}$ envoie $\mathfrak{K}\pi$ sur une représentation isomorphe à π.

On fixe une mesure de Haar dg sur $\underline{G}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ décomposée en produit de mesures de Haar locales dg_v suivant les places v de $\mathbf{F}$, telle qu'à presque toute place v, on a $\mathrm{vol}(K_{\mathbf{G}_v}, dg_v) = 1$; où l'on a posé $K_{\mathbf{G}_v} = \underline{G}(\mathfrak{o}_{\mathbf{F}_v})$. On considère des fonctions φ sur $\underline{G}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, décomposées en produit de fonctions locales φ_v suivant les places v de $\mathbf{F}$, où φ_v est une fonction sur $\mathbf{G}_v$, localement constante et à support compact modulo $\mathbf{Z}_v$, telle que $\varphi_v(zg) = \omega'_v(z)^{-1}\varphi_v(g)$ pour $z\in\mathbf{Z}_v$ et $g\in\mathbf{G}_v$; comme en 4.3, on demande aussi qu'à presque toute place v, φ_v soit la fonction particulière φ^0_v, à support dans $\mathbf{Z}_v K_{\mathbf{G}_v}$, telle que $\varphi^0_v(zg) = \omega'_v(z)^{-1}$ pour $z\in\mathbf{Z}_v$ et $g\in K_{\mathbf{G}_v}$. De telles fonctions φ agissent sur l'espace $\mathcal{L}^0_{\omega'}(\underline{G},\mathbf{F})$ par convolution. L'opérateur $R^0_{\omega'}(\varphi)$ ainsi obtenu est à trace, de même que l'opérateur $R^0_{\omega'}(\varphi)\circ I_\mathfrak{K}$, et l'on a

$$\mathrm{tr}(R^0_{\omega'}(\varphi)\circ I_\mathfrak{K}) = \sum_\pi \mathrm{tr}(\pi(\varphi)\circ I_\pi)$$

où π parcourt les représentations automorphes cuspidales de $\underline{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\mathbf{G},\mathbf{F})$ qui sont isomorphes — en fait égales — à $\mathfrak{K}\pi$, l'opérateur I_π étant induit par $I_{\mathfrak{K}}$ sur l'espace de π.

Si la fonction φ vérifie certaines conditions particulières, cette trace se calcule en termes de $\mathfrak{K}$-intégrales orbitales

$$\Lambda^{\mathbf{G}}_{\mathfrak{K}}(\varphi,\gamma)=\prod_v \Lambda^{\mathbf{G}_v}_{\mathfrak{K}_v}(\varphi_v,\gamma)$$

en des éléments elliptiques réguliers γ de $\mathbf{G}$. Nous n'utiliserons que des fonctions φ qui vérifient la condition $c_{v_1}(\varphi)$ suivante pour une place v_1 de $\mathbf{F}$: *φ_{v_1} s'annule en dehors des éléments elliptiques réguliers de $\mathbf{G}_{v_1}$, et est combinaison linéaire de coefficients de représentations lisses irréductibles cuspidales de $\mathbf{G}_{v_1}$.* Si cette condition est vérifiée, on a

$$\operatorname{tr}(R^0_{\omega'}(\varphi)\circ I_{\mathfrak{K}})=\sum_\gamma c'_\gamma \operatorname{vol}(\underline{G}_\gamma(\mathbf{F})\underline{Z}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})\backslash \underline{G}_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}}))\Lambda^{\mathbf{G}}_{\mathfrak{K}}(\varphi,\gamma)$$

où la somme porte sur un ensemble de représentants dans $\mathbf{H}$ des classes de conjugaison dans $\mathbf{G}$ d'éléments elliptiques réguliers de $\mathbf{G}$, modulo l'action de $\mathbf{Z}$ par translation. Ici, $\underline{G}_\gamma$ désigne le centralisateur de γ dans $\underline{G}$ — notons que $\underline{G}_\gamma(\mathbf{F})=\underline{H}_\gamma(\mathbf{E})$ et $\underline{G}_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})=\underline{H}_\gamma(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ —, le volume et la $\mathfrak{K}$-intégrale orbitale sont calculés comme pour f en 4.3, et le coefficient c'_γ est l'inverse du nombre — fini — d'éléments de $\mathbf{Z}\gamma$ conjugués à γ dans $\mathbf{G}$; notons que ce coefficient peut être différent de c_γ, mais si l'image de γ dans le groupe $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{F})$ est fortement régulière, on a $c'_\gamma=c_\gamma=1$.

III.4.5. – Pour φ comme en 4.4 et π une représentation automorphe cuspidale de $\underline{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\underline{G},\mathbf{F})$ telle que $\mathfrak{K}\pi=\pi$, on veut obtenir une factorisation de $\operatorname{tr}(\pi(\varphi)\circ I_\pi)$ en produit de traces locales. Pour cela on utilise les fonctionnelles de Whittaker [**70**].

Pour une représentation automorphe cuspidale π de $\underline{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\underline{G},\mathbf{F})$, considérons un isomorphisme u de π avec le produit tensoriel complété $\widehat{\otimes}_v\pi_v$ où π_v est une représentation unitaire irréductible de $\mathbf{G}_v$, le produit tensoriel étant pris suivant le choix, pour presque toute place v de $\mathbf{F}$, d'un vecteur $K_{\mathbf{G}_v}$-invariant unitaire w_v dans l'espace W_v de π_v. Supposons $\mathfrak{K}\pi=\pi$. Alors pour toute place v de $\mathbf{F}$, les représentations $\mathfrak{K}_v\pi_v$ et π_v de $\mathbf{G}_v$ sont isomorphes, leurs parties lisses $\mathfrak{K}_v\pi_v^\infty$ et π_v^∞ sont elles aussi isomorphes, et on a l'opérateur d'entrelacement normalisé $A(\pi_v^\infty,\Psi_v)$ sur l'espace W_v^∞ de π_v^∞: pour n'importe quelle fonctionnelle de Whittaker λ_v pour π_v^∞ relative à Ψ_v, on a $\lambda_v\circ A(\pi_v^\infty,\Psi_v)=\lambda_v$.

L'isomorphisme $I_{\mathfrak{K}}$ de $\mathfrak{K}\pi$ sur π stabilise le sous-espace $W^\infty=u^{-1}(\otimes'_v W_v^\infty)$ de l'espace W de π où $\otimes'_v$ désigne le produit tensoriel restreint, et induit par restriction un automorphisme $I^\infty_{\mathfrak{K}}$ de W^∞. Plus précisément, pour tout ensemble fini S de places de $\mathbf{F}$ contenant les places où le vecteur w_v n'a pas été choisi, $I_{\mathfrak{K}}$ stabilise le sous-espace de W formé des vecteurs fixés par $\prod_{v\notin S} K_{\mathbf{G}_v}$, qui est l'image par u^{-1} de $\otimes_{v\in S} W_v \otimes_{v\notin S} \mathbb{C}w_v$; et $I_{\mathfrak{K}}$ stabilise aussi $u^{-1}(\otimes_{v\in S} W_v^\infty \otimes_{v\notin S} \mathbb{C}w_v)$.

Notons $\underline{U} = \mathrm{U}_n$ le sous-groupe de $\underline{G}$ formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes, et θ_Ψ le caractère de $\underline{U}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ défini comme en 3.2; puisque Ψ est trivial sur $\mathbf{F}$, θ_Ψ est trivial sur $\underline{U}(\mathbf{F})$. Sur W^∞ on dispose de la fonctionnelle de Whittaker Λ relative à Ψ définie par

$$\Lambda(\varphi) = \int_{\underline{U}(\mathbf{F})\backslash \underline{U}(\mathbb{A}_\mathbf{F})} \varphi(u)\theta_\Psi(u)du$$

où du est une mesure de Haar (invariante à droite) sur l'espace homogène $\underline{U}(\mathbf{F})\backslash\underline{U}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$, dont le choix n'a pas d'importance. D'après [**70**, theo. 4.5], cette fonctionnelle est factorisable: $\Lambda \circ u^{-1}$ est de la forme $\otimes_v \Lambda_v$ où, pour chaque place v de $\mathbf{F}$, Λ_v est une fonctionnelle de Whittaker pour π_v^∞ relative à Ψ_v, prenant la valeur 1 en w_v pour presque toute place v. Pour chaque place v de $\mathbf{F}$, on a $\Lambda_v \circ A(\pi_v^\infty, \Psi_v) = \Lambda_v$ donc, en notant A le produit tensoriel des $A(\pi_v^\infty, \Psi_v)$ — bien défini sur $\otimes'_v W_v^\infty$ puisque $A(\pi_v^\infty, \Psi_v)(w_v) = w_v$ pour presque toute place v —, on obtient $\Lambda \circ u^{-1} \circ A = \Lambda \circ u^{-1}$. Cela montre que $u^{-1} \circ A \circ u$ coïncide avec $I_{\mathfrak{K}}^\infty$. On en déduit que dans la formule de 4.4 pour $\mathrm{tr}(R^0_{\omega'}(\varphi) \circ I_{\mathfrak{K}})$, on a

$$\mathrm{tr}(R^0_{\omega'}(\varphi) \circ I_{\mathfrak{K}}) = \prod_v \mathrm{tr}(\pi_v^\infty(\varphi_v) \circ A(\pi_v^\infty, \Psi_v))$$

où d'ailleurs $A(\pi_v^\infty, \Psi_v)$ est l'identité aux places v déployées dans $\mathbf{E}$. Désormais, comme pour les composants locaux τ_v et τ_v^∞ (cf. 4.3), on identifie la représentation unitaire π_v et sa partie lisse π_v^∞.

III.4.6. – On considère maintenant une paire de fonctions (f, φ) avec f comme en 4.3 et φ comme en 4.4, vérifiant $c_{v_1}(f)$ et $c_{v_1}(\varphi)$ pour une même place v_1 de $\mathbf{F}$, et on suppose que φ_v et f_v concordent à toutes les places v de $\mathbf{F}$. De l'égalité entre intégrales orbitales, on déduit l'égalité entre traces [**38**, 7.7, theo., p.168]

$$(T) \qquad \sum_\tau \mathrm{tr}(\tau(f)) = d \sum_\pi \mathrm{tr}(\pi(\varphi) \circ I_{\mathfrak{K}})$$

où τ parcourt les représentations automorphes cuspidales de $\underline{H}(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ dans $\mathscr{L}^0_\omega(\underline{H}, \mathbf{E})$, et π parcourt les représentations automorphes cuspidales de $\underline{G}(\mathbb{A}_\mathbf{F})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\underline{G}, \mathbf{F})$ telles que $\mathfrak{K}\pi = \pi$.

Choisissons une place v_2 de $\mathbf{F}$, distincte de v_1, et déployée dans $\mathbf{E}$. Notons S un ensemble fini de places de $\mathbf{F}$ assez grand, contenant les places v_0, v_1 et v_2, celles où $\mathfrak{K}$ est ramifié, celles où ω l'est, et enfin celles où Ψ_v n'est pas de niveau 0. En prenant $f_v = f_v^0$ et $\varphi_v = \varphi_v^0$ pour toute place v en dehors de S, on déduit comme dans [**38**, 8.8 – 8.13] que si τ comme plus haut a une contribution non nulle au membre de gauche de la formule (T) — ce qui signifie qu'il existe des fonctions concordantes φ_v et f_v pour $v \in S$, telles que posant $f = \otimes_{v\in S} f_v \otimes_{v\notin S} f_v^0$, on a $\mathrm{tr}(\tau(f)) \neq 0$ —, alors on a (loc. cit., p.178)

$$\prod_{v\in S} \mathrm{tr}(\tau_v(f_v)) = \prod_{v\in S} \mathrm{tr}(\pi_v(\varphi_v) \circ A(\pi_v, \Psi_v))$$

où π est l'unique représentation automorphe cuspidale de $\underline{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\underline{G}, \mathbf{F})$ telle que pour $v \notin S$, π_v soit un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de τ_v pour l'*induction automorphe non ramifiée*: la représentation non ramifiée de $W_{\mathbf{F}_v}$ attachée à π_v est induite, au sens de [**40**, 2.5], à partir de celle de $W_{\mathbf{E}_v} = \prod_{j=1}^{r_v} W_{\mathbf{E}_{v,i}}$ attachée à τ_v.

Pour $v \in S$, $v \neq v_1$, π_v est un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de τ_v: il suffit pour cela de faire varier f_v et φ_v parmi les fonctions à support dans les éléments de $\mathbf{H}_v$ et $\mathbf{G}_v$ qui sont réguliers dans $\mathbf{G}_v$. S'il en est de même à la place v_1, on déduit de l'égalité précédente une sorte de formule du produit

$$\prod_{v\in S} c(\tau_v, \Psi_v) = 1.$$

III.4.7. – On veut appliquer maintenant les considérations précédentes pour prouver le théorème de 3.6. Commençons par la première assertion. On se donne une représentation lisse irréductible de H, de carré intégrable, et on veut prouver qu'elle possède un κ-relèvement. Par transport de structure via ι, on obtient une représentation lisse irréductible τ_0 de $\mathbf{H}_{v_0} = \underline{H}(E_{v_0})$, et il s'agit de prouver qu'elle possède un $\mathfrak{K}_{v_0}$-relèvement.

Il suffit pour cela de construire une représentation automorphe τ de $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ comme dans la situation examinée plus haut, dont le composant τ_{v_0} en v_0 soit isomorphe à τ_0, et qui donne une contribution non nulle au membre de gauche de la formule (T) de 4.6.

On commence par choisir une place v_1 de $\mathbf{F}$ inerte et non ramifiée dans $\mathbf{E}/\mathbf{F}$, de sorte que le cardinal du corps résiduel de $\mathbf{F}_{v_1}$ soit assez grand ; de façon précise, on demande que v_1 soit différente de v_0 et qu'on puisse appliquer à l'extension non ramifiée $\mathbf{E}_{v_1}/\mathbf{F}_{v_1}$ les considérations de [**40**, 3.11 – 3.12], considérations qui sont indépendantes de la caractéristique. On supposera aussi que le caractère ψ_{v_1} de $\mathbf{F}_{v_1}$ est de niveau 0, ce qui est loisible.

On choisit alors comme dans [loc. cit., prop. 3.11] des fonctions φ_{v_1} sur $\mathbf{G}_{v_1}$ et f_{v_1} sur $\mathbf{H}_{v_1}$ qui concordent, s'annulent en dehors des éléments fortement réguliers de $\mathbf{G}_{v_1}$ et sont combinaisons linéaires de coefficients de représentations lisses irréductibles cuspidales. Utilisant [loc. cit., lemme 3.12], on peut même prendre f_{v_1} qui se transforme suivant ω_1^{-1} sous l'action de $\mathbf{Z}_{v_1}$ par translations, où ω_1 est un caractère unitaire de $\mathbf{F}_{v_1}^{\times}$, φ_{v_1} se transformant suivant ${\omega'_1}^{-1}$, avec $\omega'_1 = \omega_1 \mathfrak{K}_{v_1}^{md(d-1)/2}$.

III.4.8. – On choisit alors un caractère unitaire ω de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ trivial sur $F^{\times}$, dont le composant ω_{v_0} en v_0 soit la restriction à $\mathbf{Z}_{v_0}$, disons ω_0, du caractère central de τ_0, et dont la restriction à $U_{\mathbf{F}_{v_1}}$ soit celle de ω_1. On modifie si nécessaire les fonctions f_{v_1} et φ_{v_1}, en les tordant par un caractère unitaire non ramifié, pour qu'en fait ω_{v_1} et ω_1 soient égaux. On pose $\omega' = \omega\mathfrak{K}^{md(d-1)/2}$.

On sait que τ_0 possède un pseudo-coefficient f_{v_0} [**41**, 3.3, théo.]. On sait aussi qu'il existe un élément elliptique régulier γ de $\mathbf{H}_{v_0}$ tel que l'intégrale orbitale $\Lambda^{\mathbf{H}_{v_0}}(f_{v_0},\gamma)$ ne soit pas nulle [loc. cit., 3.4, prop.]. Comme l'intégrale orbitale de f_{v_0} est une fonction localement constante sur les éléments réguliers de $\mathbf{H}_{v_0}$, on peut supposer que γ est un élément elliptique régulier de $\mathbf{H}$ et que ni $\Lambda^{\mathbf{H}_{v_0}}(f_{v_0},\gamma)$ ni $\Lambda^{\mathbf{H}_{v_1}}(f_{v_1},\gamma)$ ne sont nuls; en particulier, par construction de f_{v_1}, γ est fortement régulier dans $\mathbf{G}$ donc aussi dans $\mathbf{G}_{v_1}$.

On choisit un ensemble fini S' de places de $\mathbf{F}$, contenant S et tel que γ soit dans $K_{\mathbf{H}_v}$ pour toute place v de $\mathbf{F}$ n'appartenant pas à S'; on exige aussi que S' contienne une place v_2 totalement décomposée dans $\mathbf{E}/\mathbf{F}$.

On choisit, pour chaque place v de $\mathbf{F}$ distincte de v_0, v_1 et v_2, une fonction f_v, se transformant suivant ω_v^{-1} sous $\mathbf{Z}_v$, localement constante et à support compact modulo $\mathbf{Z}_v$. Pour v hors de S', on prend la fonction particulière $f_v = f_v^0$ (voir 4.3); puisque γ appartient à $K_{\mathbf{H}_v}$, on a $\Lambda^{H_v}(f_v,\gamma) \neq 0$. Pour v dans S' distincte de v_0, v_1 et v_2, on choisit f_v à support dans $\mathbf{H}_v \cap \mathbf{G}_{v,\mathrm{reg}}$ et vérifiant :

— $\Lambda^{H_v}(f_v,\gamma) \neq 0$;
— il existe une fonction φ_v, se transformant suivant ${\omega'_v}^{-1}$ sous $\mathbf{Z}_v$, localement constante et à support compact modulo $\mathbf{Z}_v$, ce support étant contenu dans $\mathbf{G}_{v,\mathrm{reg}}$, telle que φ et f concordent.

De tels choix sont possibles par [**38**, 8.6].

En la place v_2, on impose les mêmes conditions qu'en $v \in S' \smallsetminus \{v_0, v_1, v_2\}$, mais on demande en outre que le support de f_{v_2} soit assez petit autour de $\gamma\mathbf{Z}_{v_2}$ pour que la seule contribution de $f = \prod_v f_v$ au côté géométrique de la formule des traces pour $\mathscr{L}^0_\omega(\underline{H},\mathbf{E})$ soit donnée par $\Lambda^{\mathbf{H}}(f,\gamma) = \prod_v \Lambda^{\mathbf{H}_v}(f_v,\gamma)$, qui par construction n'est pas nul (l'existence de f_{v_2} est à nouveau assurée par loc. cit.).

On déduit alors qu'il existe une représentation automorphe cuspidale τ de $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}^0_\omega(\underline{H},\mathbf{E})$ telle que $\mathrm{tr}(\tau(f)) \neq 0$; en particulier le composant τ_{v_0} de τ en v_0 est isomorphe à τ_0, et τ_{v_1} est isomorphe à l'une des représentations lisses irréductibles cuspidales τ_1 de $\mathbf{H}_{v_1}$ telles que $\tau_1(f_1) \neq 0$.

III.4.9. – Mais il faut prouver en outre que τ ainsi choisie a bien une contribution non nulle au membre de gauche de la formule (T) de 4.6, et pour cela il faut modifier f_{v_0}. On suit exactement [**38**, 8.8 – 8.13]. Il est inutile de reproduire ici les arguments ; nous nous contentons de rappeler que grâce à [**3**] on sait que les fonctions caractères des différentes classes d'isomorphisme de représentations de H conjuguées de τ_0 sous Γ, ont des restrictions aux éléments elliptiques réguliers qui sont linéairement indépendantes.

On obtient donc ainsi que τ_0 a bien un κ-relèvement et que ce relèvement est générique et unitaire, car il correspond via ι au composant local d'une représentation automorphe cuspidale de $\underline{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\underline{G},\mathbf{F})$. La preuve des autres assertions du théorème de 3.7 est la même que dans [**38**, 8.14 – 8.17].

III.4.10. – Prouvons maintenant le théorème de 3.10. On se donne une représentation lisse irréductible κ-stable de G, que l'on suppose κ-discrète. Par transport de structure via ι, on obtient une représentation lisse irréductible π_0 de $\mathbf{G}_{v_0}$, qui est $\mathfrak{K}_{v_0}$-stable et $\mathfrak{K}_{v_0}$-discrète. On veut montrer que π_0 est le $\mathfrak{K}_{v_0}$-relèvement d'une représentation lisse irréductible de carré intégrable de $\mathbf{H}_{v_0}$.

Posons $A_0 = A(\pi_{v_0},\Psi_0)$. D'après [**41**, 3.3, théo.], il existe un pseudo-coefficient φ_{v_0} pour (π_0, A_0), et par [loc. cit., 3.4, prop.], un élément elliptique régulier γ_{v_0} de $\mathbf{G}_{v_0}$ tel que la $\mathfrak{K}_{v_0}$-intégrale orbitale $\Lambda^{\mathbf{G}_{v_0}}_{\mathfrak{K}_{v_0}}(\varphi_{v_0},\gamma_{v_0})$ ne soit pas nulle; quitte à conjuguer γ_{v_0} dans $\mathbf{G}_{v_0}$, on peut le prendre dans $\mathbf{H}_{v_0}$.

On procède alors comme précédemment en choisissant la place v_1, les fonctions φ_{v_1} et f_{v_1}, un caractère unitaire ω' de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}}^{\times}$ trivial sur $\mathbf{F}^{\times}$ de composant en v_0 le caractère central ω_{π_0} de π_0, et de composant en v_1 le caractère imposé par φ_{v_1}, et on pose $\omega = \omega'\mathfrak{K}^{md(d-1)/2}$. On choisit un élément global γ de $\mathbf{H}\cap\mathbf{G}_{\mathrm{reg}}$, suffisamment proche de γ_{v_0} en v_0, tel que les intégrales orbitales tordues $\Lambda^{\mathbf{G}_{v_0}}_{\mathfrak{K}_{v_0}}(\varphi_{v_0},\gamma)$ et $\Lambda^{\mathbf{G}_{v_1}}_{\mathfrak{K}_{v_1}}(\varphi_{v_1},\gamma)$ ne soient pas nuls.

Comme en 4.8, on choisit un ensemble fini S' de places de E et une place v_2 de S' décomposée dans $\mathbf{E}/\mathbf{F}$.

En chaque place v de F distincte de v_0 et v_1, on choisit alors comme plus haut une fonction φ_v localement constante et à support compact modulo $\mathbf{Z}_v$, se transformant suivant ${\omega'_v}^{-1}$ sous $\mathbf{Z}_v$. En v n'appartenant pas à S', on prend la fonction particulière $\varphi_v = \varphi_v^0$ (voir 4.4), et on a $\Lambda^{\mathbf{G}_v}_{\mathfrak{K}_v}(\varphi_{v_0},\gamma)\neq 0$. En toute place v de S' distincte de v_0, v_1 et v_2, on choisit une fonction φ_v, à support dans $\mathbf{G}_{v,\mathrm{reg}}$, et qui vérifie $\Lambda^{\mathbf{G}_v}_{\mathfrak{K}_v}(\varphi_v,\gamma)\neq 0$: c'est possible puisque γ est fortement régulier dans $\mathbf{G}_v$. Enfin en la place v_2, on impose les mêmes conditions, mais on demande en outre que le support de φ_{v_2} soit assez petit autour de $\gamma\mathbf{Z}_{v_2}$ pour que la seule contribution de $\varphi = \prod_v \varphi_v$ au côté géométrique de la formule des traces (tordue) pour $\varphi \circ I_{\mathfrak{K}}$ sur $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\underline{G}, \mathbf{F})$ soit donnée par la $\mathfrak{K}$-intégrale orbitale

$$\Lambda^{\mathbf{G}}_{\mathfrak{K}}(\varphi, \gamma) = \prod_v \Lambda^{\mathbf{G}_v}_{\mathfrak{K}_v}(\varphi_v, \gamma),$$

qui n'est pas nulle.

On déduit alors qu'il existe une représentation automorphe cuspidale $\pi = \otimes_v \pi_v$ de $\underline{G}(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega'}(\underline{G}, \mathbf{F})$ telle que $\operatorname{tr}(\pi(\varphi) \circ I_\pi) \neq 0$; en particulier, le composant π_{v_0} en v_0 est isomorphe à π_0 — puisque φ_{v_0} est un pseudo-coefficient pour (π_0, A_0) —, et par construction de φ_{v_1}, le composant π_{v_1} est isomorphe à l'une des représentations lisses irréductibles cuspidales de $\mathbf{G}_{v_1}$ sélectionnées par φ_{v_1}.

III.4.11. – On peut reprendre alors l'analyse de 4.5 – 4.6. On déduit alors qu'il existe une représentation automorphe cuspidale $\tau = \otimes_v \tau_v$ de $\underline{H}(\mathbb{A}_{\mathbf{E}})$ dans $\mathscr{L}^0_{\omega}(\underline{H}, E)$ telle que π_v soit un $\mathfrak{K}_v$-relèvement de τ_v, au moins pour $v \neq v_1$. C'est vrai en particulier à la place v_0. Comme on a (loc. cit.)

$$\Theta^{A(\pi_{v_0}, \Psi_{v_0})}_{\pi_{v_0}}(\gamma) \neq 0,$$

on voit par la formule de la remarque (2) de 2.6 que $\Theta_{\tau_{v_0}}$ prend une valeur non nulle en l'un des conjugués de γ sous $\operatorname{Gal}(E/F)$. Par suite τ_{v_0}, qui est une représentation lisse irréductible générique et unitaire de $\mathbf{H}_{v_0}$, est également elliptique, ce qui par la classification de Zelevinsky implique que τ_v est de carré intégrable. On a donc prouvé le théorème de 3.10.

Remarque. – Cette démonstration est tout aussi valable en caractéristique nulle et peut remplacer, quand F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, les arguments de [**38**, § 6].

III.4.12. – Maintenant que nous savons que toute représentation lisse irréductible de carré intégrable de H a un κ-relèvement, nous pouvons appliquer les raisonnements de [**40**] pour obtenir des renseignements complémentaires.

Tout d'abord, dans les situations globales examinées précédemment, π_{v_1} est un $\mathfrak{K}_{v_1}$-relèvement de τ_{v_1} [loc. cit., 3.10], et on peut décrire explicitement ce relèvement. On trouvera des descriptions explicites dans un cadre plus général dans [**34**] et [**11**, III].

Ensuite, dans ces mêmes situations globales, on a la formule du produit

$$\prod_{v \in S'} c(\tau_v, \pi_v, A(\pi_v, \Psi_v)) = 1\,.$$

On peut alors reprendre le raisonnement de [**40**, 4.8 – 4.11] pour obtenir le théorème de 3.11. Il ne semble pas nécessaire de répéter ici les arguments : pour adapter loc. cit., il suffit de restreindre le support de f_v non en une place infinie mais en la place

v_2. On obtient, en outre, par les mêmes arguments que dans loc. cit., le résultat complémentaire suivant.

PROPOSITION. – *On suppose que l'extension E/F est non ramifiée, que la base de E^m sur F est une base de $\mathfrak{o}_E^m$ sur $\mathfrak{o}_F$, que e est une unité de E et que ψ est de niveau 0. Alors $c(\tau, \pi, A(\pi, \psi)) = 1$ pour toute représentation lisse irréductible générique unitaire τ de H, de κ-relèvement π.*

CHAPITRE IV

SUR LE CHANGEMENT DE BASE ET L'INDUCTION AUTOMORPHE POUR LES CORPS DE FONCTIONS

Soit F un corps de fonctions en une variable sur un corps fini, et soit K une extension séparable finie de F. Toute représentation Σ du groupe de Weil absolu W_F de F se restreint en une représentation Σ_K de son son sous-groupe W_K. Transportant ce processus via la correspondance de Langlands établie par L. Lafforgue, on associe à toute représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ une représentation automorphe Π_K de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K)$. Dans ce chapitre nous supposons que l'extension K/F est *cyclique*, et prouvons que pour chaque place v de F, le composant $\Pi_{K,w}$ de Π_K en une place w de K au-dessus de v est obtenu à partir de Π_v par le processus de changement de base local, pour l'extension cyclique K_w/F_v, construit précédemment par les auteurs. Nous prouvons les résultats analogues pour le processus d'induction automorphe, qui correspond à l'induction à W_F des représentations de W_K. Par la même occasion, nous prouvons que les processus locaux de changement de base et d'induction automorphe sont compatibles à la correspondance de Langlands locale établie par Laumon, Rapoport et Stulher.

IV.1. Introduction

IV.1.1. – Soit F un corps de fonctions en une variable sur un corps fini κ de cardinal q et de caractéristique p, et soit $\overline{F}$ une clôture séparable algébrique de F. On note W_F le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur F. On fixe un nombre premier l *distinct de* p, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$, et un isomorphisme ι de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{C}$.

La correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ redonne, pour $n = 1$, la théorie globale du corps de classes; elle a été établie pour $n = 2$ par Drinfeld [**23**] et pour n quelconque par L. Lafforgue [**55**]. Pour chaque entier $n \geq 1$, cette correspondance de Langlands est une bijection $\Sigma \mapsto \Pi = \Pi(\Sigma)$ de l'ensemble des classes d'isomorphisme Σ de représentations l-adiques irréductibles — voir la section 2 —, de dimension

n, de W_F, sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations (complexes) automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$. Cette bijection, et la bijection réciproque, sont caractérisées par le fait que pour presque toute place v de F, les facteurs L associés aux composants locaux Σ_v et Π_v se correspondent via ι.

REMARQUE. – Lafforgue énonce en fait un résultat légèrement différent. Nous en tirerons le résultat présent dans la section 3. Dans la suite de cette introduction, nous ne tenons pas compte de subtilités de ce type, toutes résolues dans la section 3.

IV.1.2. – Soit K une extension séparable finie de F dans $\overline{F}$. Notons W_K le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur K; c'est un sous-groupe ouvert de W_F, d'indice le degré d de K sur F.

Si Σ est une représentation l-adique de dimension n de W_F, sa restriction Σ_K à W_K est une représentation l-adique de dimension n de W_K. Si Σ est irréductible, correspondant à la représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$, Σ_K n'est pas irréductible en général, mais on construit une représentation automorphe Π_K de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K)$ telle que les facteurs $\mathscr{L}(\Sigma_{K,w}, q^{-s})$ et $L(\Pi_{K,w}, s)$ — voir 3.2 et 3.3 — se correspondent par ι pour presque toute place w de K: on a $\Pi_K = \Pi(\Sigma_K)$ si Σ_K est irréductible et, dans le cas général, en écrivant Σ_K comme somme de représentations irréductibles $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, Π_K est obtenue par induction parabolique à partir de $\Pi(\Sigma_1), \ldots, \Pi(\Sigma_r)$.

IV.1.3. – Supposons désormais que K est une extension cyclique de F. Fixons une place v de F et une place w de K au-dessus de v; l'extension K_w/F_v est alors cyclique. Les auteurs ont construit **II** une théorie du changement de base local qui à toute représentation lisse irréductible *générique* π de $\mathrm{GL}(n, F_v)$ vérifiant une certaine condition de régularité — précisément, qui est *à segments* $\mathfrak{K}(K_w/F_v)$*-réguliers* **II**.3.4, déf., où $\mathfrak{K}(K_w/F_v)$ désigne le groupe des caractères de $F_v^\times$ qui sont triviaux sur le groupe des normes $N_{K_w/F_v}(K_w^\times)$ — associe une représentation lisse irréductible générique π_{K_w} de $\mathrm{GL}(n, K_w)$, qui est bien définie à isomorphisme près, qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme de π, et qui est déterminée par π grâce à des identités de caractères "à la Shintani". Notons que si π est essentiellement tempérée, la condition de régularité est vérifiée et π_{K_w} est essentiellement tempérée.

Si Π est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$, le composant local Π_v de Π en v est une représentation lisse irréductible essentiellement tempérée de $\mathrm{GL}(n, F_v)$, et de même le composant local $\Pi_{K,w}$ de Π_K en w est une représentation lisse irréductible essentiellement tempérée de $\mathrm{GL}(n, K_w)$. Notre premier résultat principal est le suivant.

THÉORÈME. – *Soit* Π *une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$*. Alors* $\Pi_{K,w}$ *est obtenue à partir de* Π_v *par le changement de base local pour l'extension* K_w/F_v*.*

Notre démonstration utilise, non les formules de caractères de la théorie du changement de base local, mais plutôt sa construction par un procédé global.

IV.1.4. – Nous établissons en fait d'abord la compatibilité du changement de base local avec la correspondance de Langlands locale établie par Laumon, Rapoport et Stuhler [**58**]. Cette correspondance relie, pour chaque entier $n \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{G}_{F_v}(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations complexes Φ-semisimples de dimension n du groupe de Weil-Deligne W'_{F_v} de F_v — relatif au choix d'une clôture séparable algébrique $\overline{F}_v$ de F_v — à l'ensemble $\mathcal{A}_{F_v}(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations complexes lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n, F_v)$. Le résultat est le suivant:

THÉORÈME. – *Il existe une unique famille d'applications* $\{\pi_n\}_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{G}_{F_v}(n)$ *dans* $\mathcal{A}_{F_v}(n)$*, telle que:*

(1) π_1 *soit donnée par la théorie du corps de classes;*
(2) $L(\pi_n(\sigma) \times \pi_m(\tau), s) = L(\sigma \otimes \tau, s)$ *et* $\epsilon(\pi_n(\sigma) \times \pi_m(\tau), \psi, s) = \epsilon(\sigma \otimes \tau, \psi, s)$ *pour tout* $\sigma \in \mathcal{G}_{F_v}(n)$*, tout* $\tau \in \mathcal{G}_{F_v}(m)$ *et tout caractère additif non trivial* ψ *de* F_v*.*

Ces applications sont des bijections.

IV.1.5. – Considérons alors l'extension cyclique K_w/F_v, et fixons une clôture séparable algébrique $\overline{K}_w$ de K_w, ce qui donne le groupe de Weil W_{K_w}. Tout F_v-isomorphisme de $\overline{K}_w$ sur $\overline{F}_v$ permet de voir W_{K_w} comme un sous-groupe ouvert de W_{F_v}, et on obtient, pour chaque entier $n \geq 1$, par restriction de W_{F_v} à W_{K_w}, une application bien définie $\sigma \mapsto \sigma_{K_w}$ de $\mathcal{G}_{F_v}(n)$ dans $\mathcal{G}_{K_w}(n)$. D'autre part (cf. 1.3), le processus de changement de base associe à un élément générique π de $\mathcal{A}_n(F_v)$, vérifiant la condition de régularité, un élément générique π_{K_w} de $\mathcal{A}_n(K_w)$. Nous prouvons:

THÉORÈME. – *Soit* $\sigma \in \mathcal{G}_{F_v}(n)$ *et supposons que* $\pi = \pi_n(\sigma)$ *soit générique et vérifie la condition de régularité. Alors* $\pi_n(\sigma_{K_w})$ *est obtenue à partir de* π *par le processus de changement de base pour l'extension* K_w/F_v*.*

Le théorème de 1.3 découle de cela et de la compatibilité des correspondances de Langlands locale et globale, prouvée par L. Lafforgue, et que nous rappelons maintenant.

IV.1.6. – Soit Σ une représentation l-adique de W_F. Tout F-plongement de $\overline{F}$ dans $\overline{F}_v$ donne lieu à un homomorphisme de groupes de W_{F_v} dans W_F, continu et injectif, et Σ donne par restriction à W_{F_v} une représentation l-adique Σ_v de W_{F_v} de dimension celle de Σ, dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix du plongement de $\overline{F}$ dans $\overline{F}_v$: cette représentation est le composant local Σ_v qui est déjà apparu en 1.1. Ce composant local donne naissance à une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation Φ-semisimple de W'_{F_v} qui par ι se transporte en un élément $[\Sigma_v]$ de $\mathcal{G}_{F_v}(n)$ (voir plus de détails au dans la section 3).

Théorème ([**55**, théo. VI.9, p. 158]). – *Soit Σ une représentation l-adique irréductible de W_F, de dimension n, correspondant à la représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$. Alors on a $\Pi_v = \pi_n([\Sigma_v])$.*

IV.1.7. – Pour prouver le théorème de 1.5, on se ramène au cas où π est de carré intégrable (modulo le centre), le cas général s'en déduisant par induction parabolique. Si π est de carré intégrable, il existe une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$, dont le composant Π_v en v soit isomorphe à π. Le théorème de 1.5 découle alors du fait que, d'après **II**, on peut choisir Π de sorte que $\Pi_{K,w}$ soit précisément obtenu à partir de Π_v par le processus de changement de base local.

IV.1.8. – Notre deuxième série de résultats concerne l'induction automorphe, qui correspond au processus d'induction à W_F des représentations l-adiques de W_K: une représentation l-adique Σ, de dimension m, de W_K, donne par induction une représentation l-a dique Σ^F, de dimension md, de W_F. Si Σ est irréductible, correspondant à la représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_K)$, en général Σ^F n'est pas irréductible, mais on définit Π^F comme la représentation automorphe de $\mathrm{GL}(md, \mathbb{A}_F)$ obtenue par induction parabolique à partir de $\Pi(\Sigma_1), \dots, \Pi(\Sigma_r)$, où on a écrit Σ^F comme somme de représentations irréductibles $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$.

IV.1.9. – Pour l'extension locale K_w/F_v, dont nous notons le degré d_v, nous avons construit **III** un processus d'induction automorphe qui à un élément générique π de $\mathcal{A}_{K_w}(m)$, vérifiant une certaine condition de régularité — précisément, qui est *à segments* $\mathrm{Gal}(K_w/F_v)$*-réguliers* [**40**, 3.8, rem. (2)] —, associe un élément générique π^{F_v} de $\mathcal{A}_{F_v}(md_v)$. Comme pour le changement de base, la condition de régularité est satisfaite lorsque π est essentiellement tempéré (en particulier composant local d'une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_K)$), auquel cas π^{F_v} est essentiellement tempéré. Nous prouvons:

Théorème. – *Soit $\sigma \in \mathcal{G}_{K_w}(m)$ et supposons que $\pi = \pi_m(\sigma)$ soit générique et vérifie la condition de régularité. Alors $\pi_{md_v}(\sigma^{F_v})$ est obtenu à partir de π par le processus d'induction automorphe local pour l'extension K_w/F_v.*

COROLLAIRE. – *Soit* Π *une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_K)$. *Alors le composant local* $(\Pi^F)_v$ *de* Π^F *en* v *est obtenu par induction parabolique à partir des induites automorphes* $(\Pi_{w'})^{F_v}$, w' *parcourant les places de* K *au-dessus de* v.

IV.1.10. – Le corollaire de 1.9 découle du théorème par la compatibilité des correspondances de Langlands locale et globale (1.6). Comme pour le changement de base, notre démonstration du théorème de 1.9 n'utilise pas les identités de caractères qui déterminent le processus d'induction automorphe, mais plutôt sa construction par un procédé local global dans le cas, auquel on se ramène aisément, où π est de carré intégrable.

IV.1.11. – Dans ce chapitre, nous utilisons systématiquement les représentations de groupes de Weil et non, comme L. Lafforgue, les représentations de groupes de Galois absolus. Ainsi nos formulations des résultats en 1.1, 1.4 et 1.6 sont différentes de celles de [**55**] et [**58**]. C'est pourquoi, dans la section 2, nous étudions précisément le lien entre représentations de groupes de Galois et représentations de groupes de Weil. Dans la section 3, nous déduisons de [**55**] et [**58**] nos versions de leurs résultats présentés en 1.1, 1.4 et 1.6. Dans la section 4, nous précisons la construction de 1.2 et prouvons ainsi les théorèmes de 1.5 et 1.3. Dans la section 5, nous traitons de l'induction automorphe (théorème de 1.9 et son corollaire).

IV.2. Représentations de groupes de Weil et de groupes de Galois

IV.2.1. – Pour examiner en détail les liens entre représentations de groupes de Weil et représentations de groupes de Galois, nous avons trouvé commode de prendre d'abord un point de vue abstrait.

On considère ainsi un groupe profini I et une extension W de $\mathbb{Z}$ par I:

$$1 \to I \to W \to \mathbb{Z} \to 0.$$

On munit W de la topologie de groupe qui fait de I un sous-groupe ouvert; ainsi W est un groupe localement profini. On note Γ le complété profini de W, qui est une extension du complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$ par I:

$$1 \to I \to \Gamma \to \widehat{\mathbb{Z}} \to 1.$$

On appelle élément de Frobenius de W tout élément de W dont l'image dans le quotient $\mathbb{Z}$ est 1.

On fixe un nombre premier l et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ du corps $\mathbb{Q}_l$ des nombres l-adiques. On note note $\overline{\mathbb{Z}}_l$ son anneau d'entiers.

On appelle *représentation l-adique* de W (ou Γ) un homomorphisme continu dans $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$; on demande en outre que cet homomorphisme soit défini sur une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, autrement dit qu'il se factorise par $\mathrm{Aut}_E(V_E)$, où E est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et V_E est une E-structure sur V, c'est-à-dire un E-espace vectoriel dans V tel que $\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes_E V_E = V$.

Un *caractère l-adique* de W (ou Γ) est un homomorphisme continu dans $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, qui prend ses valeurs dans une extension finie de $\mathbb{Q}_l$.

IV.2.2. – Si ρ est une représentation l-adique de Γ, sa restriction à W est une représentation l-adique de W. En sens inverse, si une représentation l-adique de W s'étend en une représentation l-adique de Γ, cette représentation est unique: cela vient du fait que W est dense dans Γ. On dispose d'un critère d'existence d'une telle extension.

PROPOSITION. – *Soit ρ une représentation l-adique de W, dans un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel V. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *ρ s'étend en une représentation l-adique de Γ;*
(ii) *l'adhérence de $\rho(W)$ dans $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V)$ est compacte.*

Démonstration. – Puisque Γ est compact, son image par une représentation l-adique est également compacte, d'où $(i) \Rightarrow (ii)$.

Supposons que l'adhérence $\mathfrak{A}$ de $\rho(W)$ dans $\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V)$ soit compacte. Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, et soit V_E une E-structure sur V, telles que ρ se factorise par $\mathrm{Aut}_E(V_E)$. Alors $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe compact, donc profini, de $\mathrm{Aut}_E(V_E)$; si $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathfrak{A}$, $\rho^{-1}(\mathfrak{B})$ contient un sous-groupe ouvert de I (parce que la restriction de ρ à I est continue) et il contient également $x^{[\mathfrak{A}:\mathfrak{B}]}$ pour tout élément x de W, où $[\mathfrak{A} : \mathfrak{B}]$ désigne l'indice de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$. Ainsi ρ est continue pour la topologie sur W induite par celle de Γ, et on obtient un prolongement de ρ à Γ par continuité (si $\{x_n\}$ est une suite d'éléments de W convergeant vers un élément x de Γ, la suite $\{\rho(x_n)\}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence dans $\mathfrak{A}$, et si on la note $\rho(x)$, on obtient le prolongement voulu), d'où $(ii) \Rightarrow (i)$. □

IV.2.3. – Dans le cas d'une représentation irréductible, on a un résultat plus précis.

PROPOSITION. – *Soit ρ une représentation l-adique irréductible de W. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *ρ s'étend en une représentation l-adique de Γ;*
(ii) $\det(\rho)$ *ne prend que des valeurs entières:* $\det(\rho) \subset \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$.

COROLLAIRE. – *Soit ρ une représentation l-adique irréductible de W. Il existe un caractère l-adique ω de W trivial sur I tel que $\omega \otimes \rho$ s'étende en une représentation l-adique de Γ.*

IV.2.4. – La proposition de 2.3 et son corollaire sont conséquences de considérations plus générales, sur les représentations l-adiques non nécessairement irréductibles, et qui ont également pour conséquence le résultat intéressant suivant.

PROPOSITION. – *Soit ρ une représentation l-adique de W, et soit g un élément de Γ. Alors les représentations ρ et $\rho^g : x \mapsto \rho(gxg^{-1})$ sont isomorphes.*

Considérons-donc une représentation l-adique ρ de W, dans un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel V. Fixons une extension finie E de $\mathbb{Q}_l$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et une E-structure V_E sur V, telles que ρ se factorise par $\mathrm{Aut}_E(V_E)$.

Soit Φ un élément de Frobenius de W, et soit A son image dans $\mathrm{Aut}_E(V_E)$. Considérons le polynôme caractéristique P de A et ses racines $x_1, \dots, x_n$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, où n est la dimension de V sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Regroupant ces racines selon leur valeur absolue dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on obtient une factorisation canonique de P en produit de polynômes unitaires, $P_1, \dots, P_r$, à coefficients dans E, premiers entre eux deux à deux. Ainsi V_E est somme directe des sous-espaces $V_{E,i} = \ker P_i(A)$, qui sont stables par A. On range les polynômes P_i de façon que, notant α_i la valeur absolue des racines de P_i, on ait $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$. En triangularisant si nécessaire, on voit que $V_{E,i}$ est caractérisé comme l'ensemble des vecteurs v de V_E tels que $\alpha_i^{-k} A^k v$ reste borné quand k parcourt $\mathbb{Z}$; l'ensemble des vecteurs v de V_E tels que $\alpha_i^{-k} A^k v \to 0$ quand $k \to +\infty$ est $\oplus_{j<i} V_{E,j}$ tandis que les vecteurs v tels que $\alpha_i^{-k} A^k v \to 0$ quand $k \to -\infty$ sont ceux de $\oplus_{j>i} V_{E,j}$.

Soit $g \in I$, et posons $B = \rho(g)$. Pour tout entier k, on a $A^k B \in \rho(I) A^k$, où $\rho(I) A^k$ désigne l'ensemble des $\rho(g') A^k \in \mathrm{Aut}_E(V_E)$ pour $g' \in I$. Comme $\rho(I)$ est compact, on en tire, par la caractérisation précédente, qu'on a $BV_{E,i} \subset V_{E,i}$ pour $i = 1, \dots, r$. Ainsi $V_{E,i}$ est stable par W pour $i = 1, \dots, r$. De même on a $(AB)^k \in \rho(I) A^k$ pour tout entier k, ce qui entraîne que les sous-espaces $V_{E,i}$ ne dépendent pas du choix de Φ. On vérifie aussi que les sous-espaces $V_i = V_{E,i} \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_l$ de V ne dépendent pas, eux, des choix de E et V_E; ils sont chacun stable par W, et V est somme directe des V_i.

On note ρ_i la représentation de W dans V_i; elle se factorise par $\mathrm{Aut}_E(V_{E,i})$.

IV.2.5. – Regardons le cas où $\alpha_i = 1$. Alors $\rho_i(W) v$ est borné dans $V_{E,i}$ pour tout vecteur v de $V_{E,i}$, ce qui implique que $\rho_i(W)$ est contenu dans une partie compacte de $\mathrm{Aut}_E(V_{E,i})$. Par le raisonnement de la proposition de 2.2, ρ_i se prolonge en une représentation l-adique de Γ.

Nous pouvons maintenant prouver la proposition de 2.3, son corollaire, et la proposition de 2.4. Si ρ est une représentation l-adique de Γ, $\det \rho(\Gamma)$ est une partie compacte de $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, qui est donc incluse dans $\overline{\mathbb{Z}}_l^\times$, d'où $(i) \Rightarrow (ii)$ dans la proposition de 2.3.

En sens inverse, soit ρ une représentation l-adique de W. Appliquons à ρ l'analyse de 2.4. Comme ρ est supposé irréductible, on a forcément $r = 1$ et $V_E = V_{E,1}$. L'hypothèse $\det(\rho) \subset \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$ force alors $\alpha_1 = 1$, et l'alinéa précédent montre que ρ s'étend en une représentation l-adique de Γ, d'où (ii) $\Rightarrow$ (i) dans la proposition de 2.3.

Sans hypothèse sur $\det \rho$, on peut prendre un caractère l-adique ω de W trivial sur I tel que $\omega(\Phi)$ ait la valeur absolue α_1^{-1}. Alors $\omega \otimes \rho$ s'étend en une représentation l-adique de Γ, d'où le corollaire à la proposition 2.3.

Prouvons maintenant la proposition de 2.4, pour une représentation l-adique ρ de W et un élément g de Γ. En suivant l'analyse de 2.4, il suffit de voir que ρ_i et ρ_i^g sont isomorphes pour $i = 1, \ldots, r$. Fixant i, on prend un caractère l-adique ω_i de W trivial sur I, tel que $\omega_i(\Phi)$ ait α_i^{-1} pour valeur absolue. Alors, comme précédemment $\omega_i \otimes \rho_i$ se prolonge en une représentation l-adique de Γ dans l'espace V_i et par suite $\omega_i \otimes \rho_i$ et $\omega_i^g \otimes \rho_i^g$ sont isomorphes. Mais comme ω_i est trivial sur I, il est clair que $\omega_i^g = \omega_i$, de sorte que ρ_i et ρ_i^g sont bien isomorphes.

IV.2.6. – Toutes les considérations précédentes s'appliquent au cas des groupes de Weil, ou du groupe des classes d'idèles $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$.

Si L est un corps commutatif localement compact non archimédien, $\overline{L}$ une clôture séparable algébrique de L et W le groupe de Weil W_L de $\overline{L}$ sur L, on prend pour I le sous-groupe d'inertie de W_L, et on identifie Γ au groupe de Galois Γ_L de $\overline{L}$ sur L. Remarquons que la proposition de 2.4 entraîne que l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations l-adiques de W_L ne dépend pas, à bijection canonique près, du choix de la clôture séparable algébrique $\overline{L}$ de L.

Les cas qui nous intéressent le plus sont ceux de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ et W_F, où F est notre corps de base. Sur $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ on dispose de l'application degré $\deg : \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{Z}$, définie comme suit: pour $x = \prod_v x_v \in \mathbb{A}_F^\times$, on pose

$$\deg x = \sum_v \deg_v v(a_x),$$

où $\deg_v$ désigne le degré du corps résiduel de F_v sur $\mathbb{F}_q$, et $v(a_x)$ la valuation normalisée de $a_x \in F_v^\times$ (on a donc $|a_x|_{F_v} = q^{-\deg_v v(a_x)}$). On sait que son noyau $\mathbb{A}_F^1/F^\times$ est compact, et même profini. On peut donc prendre $W = \mathbb{A}_F^\times/F^\times$, $I = \mathbb{A}_F^1/F^\times$.

La théorie globale du corps de classes, que nous normalisons de façon que subsitutions de Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes, permet d'identifier l'abélianisé de W_F, c'est-à-dire le quotient de W_F par l'adhérence de son sous-groupe des commutateurs, au groupe des classes d'idèles $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$. Nous notons τ_F l'homomorphisme correspondant de W_F sur $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$. Pour tout groupe topologique abélien A, l'homorphisme τ_F permet d'identifier les homomorphismes continus de W_F dans A et les homomorphismes continus de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ dans A (la propriété d'être d'ordre fini étant évidemment respectée). En particulier, on dispose de l'homomorphisme surjectif $\deg \circ \tau_F : W_F \to \mathbb{Z}$, dont on sait que le noyau est profini. On peut donc prendre $W = W_F$ et $I = \ker(\deg \circ \tau_F)$.

Remarque. – Comme dans le cas local, la proposition de 2.4 implique que l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations l-adiques de W_F ne dépend pas, à bijection canonique près, du choix de la clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F.

IV.2.7. – Cependant, dans le cas du groupe de Weil W_F, comme dans celui du groupe de Galois Γ_F, il est d'usage d'appeler représentation l-adique une représentation l-adique au sens de 2.1, qui est de plus *non ramifiée presque partout.* Dans la suite, nous nous *conformons* à cet usage. De même un caractère l-adique de W_F ou Γ_F ou $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, sera supposé non ramifié presque partout. Toutes les considérations de 2.1 à 2.6 s'appliquent avec cette condition supplémentaire.

Une classe d'isomorphisme de représentations l-adiques de dimension 1 de W_F correspond exactement à un caractère l-adique de W_F, c'est-à-dire à un caractère l-adique de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$. A ce sujet, on peut noter le fait intéressant suivant. On suppose désormais l différent de la caractéristique p de F.

Lemme. – *Soit φ un homomorphisme de $\mathbb{A}_F^\times$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *φ est continu et presque partout non ramifié;*
(ii) *$\ker\varphi$ est ouvert dans $\mathbb{A}_F^\times$.*

Si φ est trivial sur $F^\times$, ces conditions impliquent que φ prend ses valeurs dans une extension finie de $\mathbb{Q}_l$.

En particulier, un caractère l-adique de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ a un noyau ouvert.

Démonstration. – L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est immédiate. Soit φ un homomorphisme continu de $\mathbb{A}_F^\times$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$. Pour chaque place v de F la restriction φ_v de φ à $F_v^\times$ est continue. Mais $F_v^\times$ a un sous-groupe ouvert qui est un pro-p-groupe, tandis que le sous-groupe ouvert $1 + l\overline{\mathbb{Z}}_l$ de $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ a tous ses éléments qui engendrent topologiquement un pro-l-groupe. Comme l et p sont différents, $\ker\varphi_v$ est ouvert dans $\mathbb{A}_F^\times$, d'où $(i) \Rightarrow (ii)$.

Supposons φ trivial sur $F^\times$, et vérifiant (i) et (ii). Comme $\mathbb{A}_F^1/F^\times$ est profini, $\varphi(\mathbb{A}_F^1)$ est alors fini; ainsi $\varphi(\mathbb{A}_F^\times)$ est un sous-groupe abélien de type fini de $\overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, qui est bien contenu dans une extension finie de $\mathbb{Q}_l$. Cela donne la dernière assertion. □

IV.2.8. – Comme nous l'avons dit plus haut, l'application τ_F permet d'identifier les caractères complexes de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ et les caractères complexes de W_F, la propriété d'être d'ordre fini étant préservée; on identifie de même les caractères l-adiques de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ et ceux de W_F, la propriété d'être d'ordre fini étant préservée. Mais la version de la théorie du corps de classes que L. Lafforgue généralise est mixte et relie caractères l-adiques de W_F, ou plus exactement classes d'isomorphisme de représentations l-adiques de dimension 1 de W_F, et caractères complexes de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, vus comme classes d'isomorphisme de représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(1,\mathbb{A}_F)=\mathbb{A}_F^\times$.

Rappelons que l'on a fixé un isomorphisme ι de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{C}$.

Proposition. – *L'application $\chi\mapsto\iota^{-1}\circ\chi\circ\tau_F$ donne une bijection entre les caractères complexes de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ et les caractères l-adiques de W_F, la propriété d'être d'ordre fini étant préservée.*

Démonstration. – Si χ est un caractère complexe de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, son noyau est ouvert et par le lemme de 2.7, $\iota^{-1}\circ\chi\circ\tau_F$ est un caractère l-adique de W_F. Inversement un caractère l-adique de W_F s'écrit de façon unique $\eta\circ\tau_F$ où η est un caractère l-adique de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$. Comme η a un noyau ouvert, il en est de même de $\iota\circ\eta$ qui est donc un caractère complexe de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$; d'où la proposition. □

On notera $\Sigma\mapsto{}^\iota\Pi(\Sigma)$ l'application entre classes d'isomorphisme de représentations l-adiques de dimension 1 de W_F, et classes d'isomorphisme de représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(1,\mathbb{A}_F)$, que l'on déduit de la proposition. L'application considérée par Lafforgue pour $n=1$ est donnée par la restriction aux caractères d'ordre fini de chaque côté.

IV.2.9. – Comme nous le verrons dans la section 3, pour n quelconque, Lafforgue impose également une restriction du même type, alors que nous voulons considérer toutes les représentations l-adiques irréductibles de W_F. Les considérations sur les caractères de ce dernier n° nous permettront dans la section suivante d'élargir ainsi le cadre des résultats de Lafforgue.

Considérons d'abord les caractères complexes de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$. Un tel caractère, s'il est trivial sur $\mathbb{A}_F^1/F^\times$, est de la forme $a\mapsto\lambda^{\deg a}$ pour un nombre complexe $\lambda\neq 0$ unique; notant $|\ |_F$ la valeur absolue adélique sur $\mathbb{A}_F$, il est aussi de la forme $|\ |_F^s$ pour un nombre complexe s, bien défini modulo $\frac{2i\pi}{\log q}$.

Soit φ un caractère complexe de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, et a un élément de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ de degré 1. Alors le caractère complexe $x\mapsto\varphi(a)^{-\deg x}\varphi(x)$ prend la valeur 1 en a, et par suite est d'ordre fini et comme le sous-groupe $\langle a\rangle\mathbb{A}_F^1$ de $\mathbb{A}_F^\times$ est d'indice fini, il est d'ordre fini. On en déduit que pour chaque entier $n\geq 1$ il existe un caractère complexe η de

$\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ trivial sur $\mathbb{A}_F^1/F^\times$ et tel que $\eta^n\varphi$ soit d'ordre fini; un tel caractère η est bien déterminé à multiplication près par un caractère d'ordre fini de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ trivial sur $\mathbb{A}_F^1/F^\times$.

On a des phénomènes analogues pour les caractères l-adiques de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$: on peut utiliser soit un raisonnement direct, soit le lemme de 2.7 et ι. On traduit aussitôt en termes de caractères l-adiques de W_F (cf. la proposition de 2.8).

IV.3. Les résultats de Lafforgue, Laumon, Rapoport et Stuhler

IV.3.1. – L. Lafforgue ne considère en fait que des représentations l-adiques irréductibles du groupe de Galois Γ_F de $\overline{F}$ sur F dont le déterminant est d'ordre fini [**55**]. Par la proposition de 2.3, il revient au même de considérer des représentations l-adiques irréductibles de W_F dont le déterminant est d'ordre fini; plus précisément une représentation l-adique irréductible de W_F dont le déterminant est d'ordre fini s'étend de manière unique en une représentation l-adique de Γ_F, et le déterminant de cette extension est d'ordre fini. On obtient ainsi une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations l-adiques irréductibles de W_F dont le déterminant est d'ordre fini et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de Γ_F dont le déterminant est d'ordre fini.

D'un autre côté, Lafforgue ne considère que certaines représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ [**55**]. Dans la terminologie de [**8**], ce sont les représentations automorphes cuspidales π de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ dont le caractère central est d'ordre fini. Avant d'énoncer le résultat précis de Lafforgue, et d'en tirer la version que nous utiliserons, nous précisons quelques notations et rappelons des résultats connus.

IV.3.2. – Pour chaque place v de F, on choisit une clôture séparable algébrique $\overline{F}_v$ du complété F_v de F en v, et on note Γ_{F_v} le groupe de Galois de $\overline{F}_v$ sur F_v, W_{F_v} le groupe de Weil de $\overline{F}_v$ sur F_v. On choisit également un F-plongement de $\overline{F}$ dans $\overline{F}_v$, qui induit un homomorphisme continu injectif de Γ_{F_v} dans Γ_F, et un autre de W_{F_v} dans W_F.

Si Σ est une représentation l-adique de W_F dans un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel V, on obtient par restriction à W_{F_v} une représentation l-adique Σ_v de W_{F_v} dans l'espace V. Changer le plongement de $\overline{F}$ dans $\overline{F}_v$ revient à conjuguer Σ_v par un élément de Γ_F, et par la proposition de 2.4 cela ne change pas la classe d'isomorphisme de Σ_v. À Σ_v est attaché un facteur $\mathscr{L}$ défini par

$$\mathscr{L}(\Sigma_v, T) = \det(1 - \mathrm{Frob}_v \cdot T^{\deg_v} | V^{I_{F_v}})^{-1};$$

dans cette formule, T est une indéterminée, I_{F_v} est le sous-groupe d'inertie de W_{F_v}, et Frob_v est une substitution de Frobenius géométrique en v. (Tout cela s'applique bien sûr aussi aux représentations l-adiques de Γ_F.)

Une variante du théorème de Čebotarev dit que si Σ et Σ' sont deux représentations l-adiques semisimples de W_F telles que $\mathscr{L}(\Sigma_v, T) = \mathscr{L}(\Sigma'_v, T)$ pour presque toute place v de F (i.e. pour toute place v, sauf un nombre fini), alors Σ et Σ' sont isomorphes, et en particulier Σ_v et Σ'_v sont isomorphes pour toute place v de F.

IV.3.3. – D'un autre côté, une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ possède en chaque place v de F un composant local Π_v, qui est une classe d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n, F_v)$. À Π_v est associé un facteur L, $L(\Pi_v, s)$, où s est un paramètre complexe [**26**]; ce facteur est de la forme $P(q_v^{-s})^{-1}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(0) = 1$, et où q_v est le cardinal $q^{\deg_v}$ du corps résiduel de F_v.

Le théorème de multiplicité 1 "fort" de Jacquet et Shalika [**45**, theo. 4.2] dit que si Π et Π' sont deux représentations automorphes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ isobares au sens de Langlands [**56**] — en particulier si elles sont cuspidales ou induites paraboliques de cuspidales unitaires — qui vérifient $L(\Pi_v, s) = L(\Pi'_v, s)$ pour presque toute place v de F, alors Π et Π' sont isomorphes, et Π_v et Π'_v sont isomorphes pour toute place v de F. (Si Π et Π' sont cuspidales, elles coïncident même alors en tant qu'espaces de formes automorphes cuspidales [**70**]).

IV.3.4. – Le résultat principal de Lafforgue est le suivant (cf. [**55**, théo. VI.9]). Rappelons que nous avons fixé un isomorphisme de corps ι de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{C}$.

THÉORÈME. – *Si Σ est une représentation l-adique irréductible de W_F, de dimension n, dont le déterminant est d'ordre fini, il existe une représentation automorphe cuspidale $\Pi = {}^\iota\Pi(\Sigma)$ de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$, dont le caractère central est d'ordre fini, qui est caractérisée (à isomorphisme près) par la relation*

$$(*)_v \qquad {}_\iota\mathscr{L}(\Sigma_v, q^{-s}) = L(\Pi_v, s)$$

pour presque toute place v de F. Son caractère central vérifie $\omega_\Pi = {}^\iota\Pi(\det \Sigma)$.

Inversement, toute représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$, dont le caractère central est d'ordre fini, est de la forme ${}^\iota\Pi(\Sigma)$ pour une représentation l-adique irréductible Σ de W_F, de dimension n, dont le déterminant est d'ordre fini, et qui est caractérisée à isomorphisme près par la condition $(*)_v$ en presque toute place v de F.

Dans la formule $(*)_v$, ${}_\iota\mathscr{L}(\Sigma_v, T)$ désigne la fraction rationnelle de $\mathbb{C}(T)$ déduite de $\mathscr{L}(\Sigma_v, T)$ par l'ismorphisme ι. La caractérisation de l'application $\Sigma \mapsto {}^\iota\Pi(\Sigma)$ est due au théorème de multiplicité 1 cité en 3.3, celle de l'application réciproque au théorème de Čebotarev. Bien sûr pour $n = 1$, ce résultat n'est autre que la version de la théorie du corps de classes énoncée en 2.8.

IV.3.5. – La correspondance de Langlands prouvée par Lafforgue est compatible à la torsion par les caractères d'ordre fini: si Σ est comme dans le théorème, et que χ est un caractère l-adique d'ordre fini de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, alors $(\chi\circ\tau_F)\otimes\Sigma$ a encore un déterminant d'ordre fini, et on a

$$^\iota\Pi((\chi\circ\tau_F)\otimes\Sigma) = (\iota\circ\chi\circ\det)\otimes{}^\iota\Pi(\Sigma).$$

Si Σ est une représentation l-adique irréductible de W_F, de dimension n, il existe un caractère l-adique χ de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, trivial sur $\mathbb{A}_F^1/F^\times$, tel que le caractère l-adique $(\chi^n\circ\tau_F)\det\Sigma$ de W_F soit d'ordre fini (cf. 2.9). Alors $(\chi\circ\tau_F)\otimes\Sigma$ a un déterminant d'ordre fini, et on pose

$$^\iota\Pi(\Sigma) = (\iota\circ\chi\circ\det)^{-1}\otimes{}^\iota\Pi((\chi\circ\tau_F)\otimes\Sigma).$$

Comme χ est bien déterminé à torsion près par un caractère l-adique d'ordre fini de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, la propriété de l'alinea précédent montre que ${}^\iota\Pi(\Sigma)$ ne dépend pas du choix de χ. Cela nous permet d'obtenir la variante suivante du résultat de Lafforgue, qui est celle que nous utiliserons désormais.

Théorème. – *Si Σ est une représentation l-adique irréductible de W_F, de dimension n, il existe une représentation automorphe cuspidale $\Pi = {}^\iota\Pi(\Sigma)$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$, caractérisée à isomorphisme près par la relation $(*)_v$ pour presque toute place v de F. Son caractère central vérifie $\omega_\Pi = {}^\iota\Pi(\det\Sigma)$.*

Inversement, toute représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$ est de la forme ${}^\iota\Pi(\Sigma)$ pour une représentation l-adique irréductible Σ de W_F, de dimension n, caractérisée à isomorphisme près par la condition $(*)_v$ pour presque toute place v de F.

IV.3.6. – Quelques commentaires sur l'influence du choix de l'isomorphisme ι semblent de rigueur. Notons $\mathfrak{Z}$ le centre de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$. On peut *définir* les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-formes automorphes cuspidales comme les fonctions de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ qui sont $\mathfrak{Z}$-finies, localement constantes, à support compact modulo $\mathrm{GL}(n,F)\mathfrak{Z}$, et qui vérifient les conditions de cuspidalité (il n'y a pas d'obstacle à définir l'intégrale d'une fonction localement constante à support compact à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$). Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$ agit par translations à droite sur cet espace de formes automorphes cuspidales, et l'isomorphisme ι de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{C}$ donne un isomorphisme, compatible à l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$, sur l'espace des formes automorphes cuspidales complexes, qui peuvent être définies de la même façon [**8**, 5.8].

Une $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$ est un composant irréductible de l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$ sur l'espace des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-formes automorphes cuspidales. Une telle représentation Π a, en chaque place v de F, un composant local

Π_v, qui est une classe d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n, F_v)$.

Le choix d'une racine carrée $q^{1/2}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ permet, en suivant [**26**], de définir un facteur local $\mathscr{L}(\Pi_v, T) \in \overline{\mathbb{Q}}_l(T)$, et on peut interpréter le théorème de 3.5, de manière peut-être plus naturelle, comme une bijection canonique entre les classes d'isomorphisme de représentations l-adiques irréductibles de dimension n de W_F, et les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$, cette bijection $\Sigma \leftrightarrow \Pi$ étant caractérisée par l'égalité

$$(*)'_v \qquad \mathscr{L}(\Sigma_v, T) = \mathscr{L}(\Pi_v, T)$$

pour presque toute place v de F. Cela s'obtient simplement en transportant par l'isomorphisme ι^{-1} le côté "automorphe" du théorème de 3.5.

IV.3.7. – Cependant, attention, la bijection purement l-adique de 3.6 dépend encore du choix de la racine carré $q^{1/2}$ de q choisie dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Pour obtenir une correspondance qui n'en dépende pas, il faut demander l'égalité modifiée

$$\mathscr{L}(\Sigma_v, T) = \mathscr{L}(\Pi_v, q^{\frac{n-1}{2}\deg_v} T)$$

(le facteur de droite ne dépend plus alors du choix de $q^{1/2}$). Mais en ce cas bien sûr $\det \Sigma$ et ω_Π ne se correspondent plus par la théorie du corps de classes, sauf pour $n = 1$. En tout cas c'est plutôt une correspondance de ce genre que la méthode géométrique de Lafforgue donne naturellement; il en est de même des méthodes géométriques utilisées dans le cas des corps de nombres (cf. [**31**]). Cette correspondance modifiée se comporte bien sous l'action des automorphismes de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{Q}_l$, et on a même des propriétés de rationalité plus fines, cf. [**55**, ch. VII, §2].

IV.3.8. – Rappelons aussi, parce que cela nous sera utile, que L. Lafforgue prouve également la conjecture de Ramanujan-Petersson.

THÉORÈME ([**55**, théo. VI.10]). – *Soit* Π *une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ *dont le caractère central* ω_Π *est d'ordre fini. En toute place* v *de* F*, le composant local* Π_v *de* Π *est tempéré.*

En tordant par un caractère comme plus haut, on obtient que le même résultat vaut pourvu que ω_Π soit unitaire. Sans hypothèse sur ω_Π, on peut affirmer que Π_v est essentiellement tempéré.

IV.3.9. – Passons maintenant à la compatibilité avec la correspondance de Langlands locale, déjà citée en 1.4.

Soit L un corps commutatif localement compact non archimédien. On fixe une clôture séparable algébrique $\overline{L}$ de L et on note W_L le groupe de Weil de $\overline{L}$ sur L. Une représentation (complexe) du groupe de Weil-Deligne W'_L est un couple (ρ, N) où ρ est une représentation lisse de W_L dans un espace vectoriel complexe, et N un endomorphisme nilpotent de cet espace, qui vérifie

$$\rho(w)N\rho(w)^{-1} = |\tau_L(w)|_L N \qquad (w \in W_L);$$

on a noté $\tau_L : W_L \to L^\times$ l'application de réciprocité et $|\ |_L$ la valeur absolue normalisée sur L.

On dit que (ρ, N) est Φ-*semisimple* si ρ est semisimple, que (ρ, N) est *irréductible* si ρ l'est, auquel cas $N = 0$. On dispose d'un procédé de Φ-semisimplification ([**21**, 8.5], [**72**]) qui a une représentation $\sigma = (\rho, N)$ de W'_L associe une représentation Φ-semisimple σ^{ss}, sa Φ-semisimplifiée, qui est unique à isomorphisme près. Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{G}_L(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations Φ-semisimples, de dimension n, et $\mathscr{G}^\circ_L(n)$ le sous-ensemble formé des représentations irréductibles. Grâce par exemple à la proposition de 2.4, on voit que ces ensembles, à bijection canonique près, ne dépendent pas du choix de la clôture séparable algébrique $\overline{L}$ de L. Pour $n = 1$, $\mathscr{G}_L(1)$ s'identifie à l'ensemble des caractères $\chi : W_L \to \mathbb{C}^\times$ qui sont lisses (i.e. à noyau ouvert).

IV.3.10. – En fait, si C est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, par exemple $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on définit de la même façon que pour $\mathbb{C}$ la notion de C-représentation de W'_L, et de leur Φ-semisimplification. L'isomorphisme de corps ι de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{C}$ donne une bijection $V \mapsto \mathbb{C} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} V$ entre les $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations de W'_L et ses représentations complexes, bijection compatible à la Φ-semisimplification.

L'intérêt des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations de W'_L est qu'elles permettent de faire abstraction de la condition de continuité pour les représentations l-adiques de W_L. Plus précisément ([**21, 72**] et [**13**, ch. 14]), on a une bijection canonique entre les classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations de W'_L et les classes d'isomorphisme de représentations l-adiques de W_L. À l'aide de l'isomorphisme de corps ι de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ sur $\mathbb{C}$, on peut ainsi interprêter les représentations l-adiques de W_L en termes de représentations complexes de W'_L.

IV.3.11. – Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{A}_L(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles (complexes) de $\mathrm{GL}(n, L)$, et $\mathscr{A}^0_L(n)$ le sous-ensemble formé des représentations cuspidales. Pour $n = 1$, $\mathscr{A}_L(1)$ s'identifie à l'ensemble des caractères (complexes) lisses de $L^\times$, et la théorie du corps de classes donne une bijection canonique $\chi \mapsto \chi \circ \tau_L$ de $\mathscr{A}_L(1)$ sur $\mathscr{G}_L(1)$.

THÉORÈME. – *Supposons le corps L de caractéristique p. Il existe une unique famille d'applications $(\pi_n)_{n\geq 1}$, de $\mathcal{G}_L(n)$ dans $\mathcal{A}_L(n)$, telles que:*

(1) *pour $n = 1$, π_1 est donnée par la théorie du corps de classes;*
(2) *pour $\sigma \in \mathcal{G}_L(n)$ et $\tau \in \mathcal{G}_L(m)$, on a*

$$L(\pi_n(\sigma) \times \pi_m(\tau), s) = L(\sigma \otimes \tau, s),$$
$$\epsilon(\pi_n(\sigma) \times \pi_m(\tau), s, \psi) = \epsilon(\sigma \otimes \tau, s, \psi),$$

pour tout caractère non trivial ψ de L.

Pour $\sigma \in \mathcal{G}_L(n)$, on a $\pi_1(\det \sigma) = \omega_{\pi_n(\sigma)}$, et si χ est un caractère lisse de $L^\times$, on a

$$\pi_n((\chi \circ \tau_L) \otimes \sigma) = (\chi \circ \det) \otimes \pi_n(\sigma).$$

On a $\pi_n(\mathcal{G}_L^0(n)) = \mathcal{A}_L^0(n)$.

IV.3.12. – Le point principal de ce résultat est dû à Laumon, Rapoport et Stuhler [**58**, theo. 15.9]. Plus précisément, ils donnent des bijections entre les classes d'isomorphisme de représentations l-adiques irréductibles de W_L, de dimension n, dont le déterminant est d'ordre fini, et les classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}(n, L)$, dont le caractère central est d'ordre fini. Ces bijections dépendent de ι et vérifient un analogue des propriétés (1) et (2) du théorème de 3.11. On peut interprêter aussitôt en termes de $\overline{\mathbb{Q}}_l$-représentations irréductibles de W'_L [**58**, 1.5.6] ou, en utilisant à nouveau ι, en termes de représentations complexes irréductibles de W'_L. Tordant par un caractère comme dans le cas global (cf. 3.5), on obtient une bijection de $\mathcal{G}_L^0(n)$ sur $\mathcal{A}_L^0(n)$ vérifiant les propriétés voulues. Qu'elle soit caractérisée par (1) et (2) est dû à [**35**]. L'extension en des applications de $\mathcal{G}_L(n)$ dans $\mathcal{A}_L(n)$ suit la classification de Langlands et Zelevinski, et la caractérisation découle de [**37**].

IV.3.13. – Dans le cas qui nous intéresse, L est le complété F_v du corps global F en une place v de F. Si Σ est une représentation l-adique de dimension n de W_F, on note $[\Sigma_v]$ l'élément de $\mathcal{G}_{F_v}(n)$ qui est la classe de la Φ-semisimplifiée de la représentation complexe de W'_{F_v} associée à Σ_v via l'isomorphisme ι.

THÉORÈME. – *Soit Σ une représentation l-adique irréductible de dimension n de W_F, et soit $\Pi = {}^\iota\Pi(\Sigma)$ la représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ qui lui est associée. Alors, pour toute place v de F, on a*

$$\Pi_v = \pi_n([\Sigma_v]).$$

C'est une traduction dans notre cadre de [**55**, prop. VII.4]. Lafforgue n'énonce ce résultat que si $\det \Sigma$ est d'ordre fini, mais comme plus haut, le cas général s'en déduit par torsion par un caractère.

IV.4. Le cas du changement de base

IV.4.1. – Dans cette section, nous prouvons les théorèmes de 1.5 et 1.3 (dans l'introduction). On fixe une extension séparable finie K de F, une clôture séparable algébrique $\overline{K}$ de K, et on note W_K le groupe de Weil de $\overline{K}$ sur K; on pose $d = [K : F]$. Pour chaque place v de F, on fixe une clôture séparable algébrique $\overline{K}_w$ du complété K_w de K en w, et on note W_{K_w} le groupe de Weil de $\overline{K}_w$ sur K_w. On choisit également un K-plongement de $\overline{K}$ dans $\overline{K}_w$, ce qui induit un homomorphisme continu et injectif de W_{K_w} dans W_K — ce qui suit ne dépendra pas du choix effectué.

On choisit aussi un F-isomorphisme de $\overline{K}$ sur $\overline{F}$, ce qui permet de voir W_K comme un sous-groupe ouvert de W_F dont l'indice est d — là encore, nos constructions et résultats ne dépendent pas de ce choix.

Si v est une place de F, et que w est une place de K au-dessus de v, on choisit enfin un $\overline{F}_v$-isomorphisme de $\overline{K}_w$ sur $\overline{F}_v$, ce qui induit un homomorphisme continu et injectif de W_{K_w} dans W_{F_v}, qui fait de W_{K_w} un sous-groupe ouvert de W_{F_v} d'indice le degré $d_v = [K_w : F_v]$.

Remarque. – On dispose alors de deux plongements de W_{K_w} dans W_{F_v}, l'un via W_K, l'autre via W_{F_v}; ils sont conjugués sous l'action de Γ_F. Cette conjugaison, par la proposition de 2.4, n'aura pas d'influence sur ce qui suit.

IV.4.2. – Soit Σ une représentation l-adique irréductible de W_F, de dimension $n \geq 1$. Sa restriction Σ_K à W_K est une représentation l-adique de W_K, de dimension n. Écrivons Σ_K comme somme de représentations l-adiques irréductibles $\Sigma_{K,1}, \ldots, \Sigma_{K,r}$.

Proposition. – *Supposons que* $\det \Sigma$ *est d'ordre fini. Alors pour* $i = 1, \ldots, r$, $\det \Sigma_{K,i}$ *est d'ordre fini.*

Démonstration. – Regardons d'abord le cas où K est une extension galoisienne de F, de sorte que W_K est distingué dans W_F. On peut alors utiliser la théorie de Clifford. Les représentations $\Sigma_{K,i}$ sont toutes conjuguées sous W_F (à isomorphisme près), et il suffit de prouver que $\det \Sigma_{K,1}$ est d'ordre fini. Si Ξ_1 est le composant isotypique de type $\Sigma_{K,1}$ dans Σ_K, le stabilisateur W_1 de la classe d'isomorphisme de $\Sigma_{K,1}$ dans W_F agit sur l'espace de Ξ_1, et notant $\widetilde{\Xi}_1$ cette représentation de W_1, Σ est l'induite de $\widetilde{\Xi}_1$ à W_F. On a $\det \Xi_1 = (\det \Sigma_{K,1})^\delta$ si Ξ_1 est somme directe de δ représentations isomorphes à $\Sigma_{K,1}$. De plus, $\det \Xi_1$ est la restriction à W_K de $\det \widetilde{\Xi}_1$. Enfin, $\det \Sigma$ est, à un caractère d'ordre 1 où 2 près, $\det \widetilde{\Xi}_1 \circ \mathrm{Ver}$ où $\mathrm{Ver} : W_F^{\mathrm{ab}} \to W_1^{\mathrm{ab}}$ est l'application transfert. Si F_1 est la sous-extension de K fixée par W_1, le transfert se traduit, par la théorie du corps de classes, en l'inclusion de $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$ dans $\mathbb{A}_{F_1}^\times / F_1^\times$. Si $\det \Sigma$ est d'ordre fini, le caractère l-adique de $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$ correspondant à $\det \Sigma$ prend la valeur 1 sur un élément de degré > 0, et il en est donc de même du caractère l-adique de

$\mathbb{A}_{F_1}^\times/F_1^\times$ correspondant à $\det\widetilde{\Xi}_1$. Par une analyse analogue à celle de 2.9, $\det\widetilde{\Xi}_1$ est d'ordre fini; il s'ensuit que $\det\Xi_1$ puis $\det\Sigma_{K,1}$ sont également d'ordre fini.

Si K n'est pas nécessairement galoisienne sur F, on introduit sa clôture galoisienne $K^\natural$ dans $\overline{K}$. Notons $\Sigma_{K^\natural}$ la restriction de Σ à $W_{K^\natural}$. La restriction de $\Sigma_{K,i}$ à $W_{K^\natural}$ est somme de composants irréductibles de $\Sigma_{K^\natural}$. Par le cas galoisien, si $\det\Sigma$ est d'ordre fini, la restriction de $\det\Sigma_{K,i}$ à $W_{K^\natural}$ l'est aussi, ce qui entraîne que $\det\Sigma_{K,i}$ est d'ordre fini. □

IV.4.3. – Soit $\Pi = {}^\iota\Pi(\Sigma)$; c'est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$. Pour $i=1,\ldots,r$, posons $\Pi_{K,i} = {}^\iota\Pi(\Sigma_{K,i})$; si n_i est le degré de $\Sigma_{K,i}$, alors $\Pi_{K,i}$ est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n_i,\mathbb{A}_K)$ — Notons que $\sum_{i=1}^r n_i = r$.

Si $\det\Sigma$ est d'ordre fini, il en est de même de $\det\Sigma_{K,i}$ (proposition de 4.2), et pour chaque place w de K, le composant local $(\Pi_{K,i})_w$ de $\Pi_{K,i}$ en w est tempéré, de sorte que l'induite parabolique de $(\pi_{K,1})_w \otimes\cdots\otimes(\pi_{K,r})_w$ à $\mathrm{GL}(n,K_w)$, disons $\Pi_{K,w}$, est irréductible et tempérée. Dans le cas général on voit, par torsion par un caractère, que cette induite parabolique est toujours irréductible et essentiellement tempérée. On note Π_K la classe d'isomorphisme de représentations automorphes de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_K)$ dont le composant local en chaque place w de K est cette induite parabolique $\Pi_{K,w}$. Par construction, avec les relations de 3.13, on a $\Pi_{K,w} = \pi_n([\Sigma_{K,w}])$ pour chaque place w de K. On a ainsi défini Π_K pour toute représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$.

Théorème. – *On suppose K/F cyclique. Soit Π une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_F)$. Soit v une place de F et soit w une place de K au-dessus de v. Alors $\Pi_{K,w}$ est obtenue à partir de Π_v par le procédé de changement de base de **II** pour l'extension K_w/F_v.*

Démonstration. – On peut supposer $\Pi = {}^\iota\Pi(\Sigma)$ avec Σ comme plus haut. On vient de voir qu'on a $\Pi_{K,w} = \pi_n([\Sigma_{K,w}])$ par construction. Comme la restriction $\Sigma_{K,w}$ de Σ_K à W_{K_w} et la restriction $(\Sigma_v)_{K_w}$ de Σ_v à W_{K_w} sont isomorphes (cf. la remarque de 4.1), on a aussi $\Pi_{K,w} = \pi_n([(\Sigma_v)_{K_w}])$. On est donc ramené à un problème purement local, qui est celui de la compatibilité entre le changement de base de **II** et la correspondance de Langlands locale. Cette compatibilité (théorème de 1.5) est vraie pour les représentations essentiellement tempérées (et même génériques), comme nous allons le démontrer pour une extension cyclique M/L générale. Comme les composants locaux de représentations automorphes cuspidales sont essentiellement tempérés, on obtient le théorème. □

IV.4.4. – On reprend les notations de 3.9 – 3.11. On fixe une extension séparable finie M de L, une clôture séparable algébrique $\overline{M}$ de M, et on note W_M le groupe de Weil de $\overline{M}$ sur M. On fixe également un L-isomorphisme de $\overline{M}$ sur $\overline{L}$, ce qui fait de W_M un sous-groupe ouvert de W_L d'indice le degré δ de M sur L — là encore, le choix effectué n'a pas d'influence dans la suite.

Une représentation du groupe de Weil-Deligne W'_L se restreint en une représentation de W'_M, et on dispose ainsi d'applications de restriction $\sigma \mapsto \sigma_M$ de $\mathscr{G}_L(n)$ dans $\mathscr{G}_M(n)$ pour chaque entier $n \geq 1$.

THÉORÈME. – *Supposons l'extension M/L cyclique et le corps L de caractéristique p. Soit $\sigma \in \mathscr{G}_L(n)$, et supposons que $\pi = \pi_n(\sigma)$ soit générique et vérifie la condition de régularité. Alors $\pi_n(\sigma_M)$ est obtenue à partir de π par le processus de changement de base de* ***II*** *pour l'extension M/L.*

Démonstration. – On sait que la représentation générique π est une induite parabolique irréductible de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ où, pour $i = 1, \ldots, r$, π_i est une représentation lisse irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}(n_i, L)$, avec $n_1 + \cdots + n_r = n$. Si $\pi_i = \pi_{n_i}(\sigma_i)$, on a $\sigma = \oplus_{i=1}^r \sigma_i$ par la construction de la correspondance de Langlands locale, et par suite $\sigma_M = \oplus_{i=1}^r (\sigma_i)_M$. Notons $\pi_i(M)$ la classe d'isomorphisme de représentations de $\mathrm{GL}(n_i, M)$ obtenue à partir de π_i par le processus de changement de base de **II** pour l'extension M/L. Alors **II**.4.4, le changement de base ρ de π est induite parabolique de $\pi_1(M) \otimes \cdots \otimes \pi_r(M)$ à $\mathrm{GL}(n, M)$, cette induite étant irréductible. Écrivant $\pi_i(M) = \pi_{n_i}(\sigma_i(M))$ pour $i = 1, \ldots, r$, on a $\rho = \pi_n(\sigma_1(M) \oplus \cdots \oplus \sigma_r(M))$. Si l'on sait prouver $\sigma_i(M) = (\sigma_i)_M$ pour $i = 1, \ldots, r$, ce qui sera fait dans le n° suivant, on obtient $\rho = \pi_n(\sigma_M)$, d'où le théorème. □

IV.4.5. – On a donc ramené la démonstration du théorème de 4.4 au cas où π est essentiellement de carré intégrable. Par torsion par un caractère non ramifié (le changement de base de **II** est compatible de manière évidente à cette torsion, cf. [loc. cit., 2.9, rem. (4)]), on se ramène au cas où π est de carré intégrable. Mais en ce cas on dispose en fait d'une construction globale du changement de base ρ de π **II**.6. On peut choisir une extension cyclique K/F de corps globaux de caractéristique p, de même degré que M/L, une place v de F n'ayant qu'une place w de K au-dessus d'elle, telle que l'extension de corps locaux K_w/F_v soit isomorphe à M/L; on peut choisir en outre une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_F)$ telle que Π_v corresponde à π, de sorte que ρ soit obtenue de la façon suivante: il existe une représentation automorphe cuspidale Π' de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K)$ telle que:

(1) Π'_w corresponde à ρ;

(2) les composants locaux $\Pi'_{w'}$ et $\Pi_{K,w'}$ soient égaux pour presque toute place w' de K.

Par la condition (2) et le théorème de multiplicité 1, on obtient que Π' est dans la classe Π_K. Par la compatibilité des correspondances de Langlands locales et globales (théorème de 3.13), si $\Pi_v = \pi_n(\tau)$ pour une représentation Φ-semisimple τ de W'_F, alors $\Pi'_w = \pi_n(\tau_{K_w})$. Transportant le résultat par l'isomorphisme de K_w/F_w sur M/L, on obtient $\rho = \pi_n(\sigma_M)$.

IV.4.6. – Soit M une extension finie galoisienne de L. En transportant via la correspondance de Langlands, on peut définir le changement de base π_M pour toute représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}(n, L)$. Si π est essentiellement tempérée — ou même plus généralement si π est générique et vérifie une condition de régularité que nous n'explicitons pas ici —, et si M est obtenue par extensions cycliques successives $L_1/L, L_2/L_1, \ldots, L_r/L_{r-1}$ avec $L_r = M$, alors π_M est obtenue par changements de base cycliques successifs suivant **II**; en particulier bien entendu, le composé de ces changements de base successifs ne dépend que de l'extension M/L.

IV.5. Le cas de l'induction automorphe

IV.5.1. – Dans cette dernière section, nous traitons le cas de l'induction automorphe, prouvant le théorème de 1.9 et son corollaire.

Reprenons d'abord le contexte de 4.1. Soit Σ une représentation l-adique irréductible de W_K, de dimension $m \geq 1$. L'induite Σ^F de Σ à W_F est une représentation l-adique de W_F, de dimension md. Écrivons-la comme somme de représentations irréductibles $\Sigma_1^F, \ldots, \Sigma_r^F$.

Proposition. – *Supposons que* $\det \Sigma$ *est d'ordre fini. Alors pour* $i = 1, \ldots, r$, $\det \Sigma_i^F$ *est d'ordre fini.*

Démonstration. – Soit $K^\natural/F$ la clôture galoisienne de K/F dans $\overline{K}$. Comme chaque Σ_i^F est aussi composant irréductible de l'induite de $\Sigma_{K^\natural}$ à W_F, on peut, grâce à la proposition de 4.2, supposer que K/F est galoisienne. Il suffit de prouver que les restrictions à W_K de $\Sigma_1^F, \ldots, \Sigma_r^F$ ont des déterminants d'ordre fini, quand $\det \Sigma$ est d'ordre fini. Mais les composants irréductibles de $(\Sigma^F)_K$ sont les différents conjugués de Σ par W_F/W_K. Si $\det \Sigma$ est d'ordre fini, il en est de même de ses conjugués par W_F, d'où le résultat. $\square$

IV.5.2. – Soit $\Pi = {}^{\iota}\Pi(\Sigma)$; c'est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_K)$. Pour $i = 1, \ldots, r$, on pose $\Pi_i = {}^{\iota}\Pi(\Sigma_i)$. Comme en 4.3, on forme la classe d'isomorphisme de représentations automorphes Π^F de $\mathrm{GL}(md, \mathbb{A}_F)$ dont le composant en chaque place v de F est $\Pi_v^F = \pi_n([(\Sigma^F)_v])$; ces composants sont essentiellement tempérés, induites paraboliques irréductibles de représentations essentiellement de carré intégrable. On a aussi $\Pi_v^F = \pi_n(\oplus_{w|v}[\Sigma_w^{F_v}])$ où w parcourt les places de K au-dessus de v, et $\Sigma_w^{F_v}$ désigne l'induite, de W_{K_w} à W_{F_v}, de la représentation l-adique Σ_w; on peut aussi voir $[\Sigma_w^{F_v}]$ comme l'induite, de W'_{K_w} à W'_{F_v}, de la représentation $[\Sigma_w]$ de W'_{F_v}. Rappelons que l'on a noté d_v le degré de l'extension K_w/F_v. Énonçons à nouveau le corollaire du théorème de 1.9.

THÉORÈME. – *Supposons l'extension K/F cyclique. Soit Π une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_F)$. Soit v une place de F. Alors le composant local Π_v^F de Π^F en v est obtenu par induction parabolique de $\otimes_{w|v}\rho_w$ à $\mathrm{GL}(md, F_v)$, où ρ_w est obtenu par induction automorphe, pour l'extension cyclique K_w/F_v, de π_w à $\mathrm{GL}(md_v, F_v)$.*

Démonstration. – On vient de noter l'égalité $\Pi_v^F = \pi_n(\oplus_{w|v}[\Sigma_w^{F_v}])$. On est donc ramené à un problème local, résolu par le théorème du n° suivant (le théorème de 1.9 en fait, que nous énonçons dans le contexte local général d'une extension cyclique M/L), sachant que dans notre situation de composant local d'une représentation automorphe cuspidale, la condition de régularité de [**40**, 3.8, rem. (2)] est bien vérifiée puisqu'on n'a affaire qu'à des représentations essentiellement tempérées (cf. 3.8). □

IV.5.3. – On reprend le contexte de 4.4: M est une extension séparable finie de L, de degré δ.

THÉORÈME. – *Supposons l'extension M/L cyclique. Soit $\sigma \in \mathscr{G}_M(m)$ et supposons que $\pi = \pi_m(\sigma)$ soit générique et vérifie la condition de régularité (pour l'extension M/L). Alors $\pi_{m\delta}(\sigma^L)$ est obtenu à partir de π, par le processus d'induction automorphe local* ***III*** *pour l'extension M/L.*

Démonstration. – Elle est analogue à celle du théorème de 4.4. On écrit l'élément générique π de $\mathscr{A}_M(m)$ comme une induite parabolique irréductible de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ où, pour $i = 1, \ldots, r$, π_i est un élément essentiellement de carré intégrable de $\mathscr{A}_M(m_i)$, avec $m_1 + \cdots + m_r = m$. Si $\pi_i = \pi_{m_i}(\sigma_i)$, on a $\sigma = \oplus_{i=1}^r \sigma_i$ et par suite $\sigma^L = \oplus_{i=1}^r (\sigma_i)^L$. Notons $\pi_i(L)$ la représentation obtenue à partir de π_i par le processus d'induction automorphe **III** pour l'extension M/L. Alors **III**.3.4, prop., en présence de la condition de régularité, l'induite automorphe ρ de π est l'induite parabolique de $\pi_1(L) \otimes \cdots \otimes \pi_r(L)$ à $\mathrm{GL}(m\delta, L)$, cette induite parabolique étant irréductible. Écrivant $\pi_i(L) = \pi_{m_i\delta}(\sigma_i(L))$ pour $i = 1, \ldots, r$, on a $\rho = \pi_{m\delta}(\sigma_1(L) \oplus \cdots \oplus \sigma_r(L))$. Si l'on sait prouver $\sigma_i(L) = \sigma_i(L)$ pour $i = 1, \ldots, r$, ce qui sera fait dans le n° suivant, on en déduit $\rho = \pi_{m\delta}(\sigma^L)$, d'où le résultat. □

IV.5.4. – On est donc ramené la démonstration du théorème de 5.3 au cas où π est essentiellement de carré intégrable, et par torsion par un caractère non ramifié **III**.3.3, au cas où π est de carré intégrable. Là encore, on dispose d'une construction globale de ρ à partir de π **III**.4. On peut choisir une extension cyclique K/F de corps globaux de caractéristique p, de même degré δ que M/L, une place v de F n'ayant qu'une place w de K au-dessus d'elle, telle que l'extension de corps locaux K_w/F_v soit isomorphe à M/L; on peut choisir en outre une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A}_K)$ telle que Π_w corresponde à π, de sorte que ρ soit obtenu de la façon suivante: il existe une représentation automorphe cuspidale Π' de $\mathrm{GL}(m\delta, \mathbb{A}_F)$ telle que:

(1) Π'_v corresponde à ρ;
(2) Π'_v soit l'induite parabolique de $\oplus_{w'|v'}\Pi_{w'}^{F_{v'}}$ à $\mathrm{GL}(m\delta, F_{v'})$ pour presque toute place v' de F.

Par la condition (2) et le théorème de multiplicité 1, Π' est dans la classe Π^F. Si $\Pi_w = \pi_m(\tau)$, on a alors $\Pi'_v = \pi_{m\delta}(\tau^{F_v})$. Transportant le résultat par l'isomorphisme de K_w/F_v sur M/L, on obtient $\rho = \pi_{m\delta}(\sigma^L)$.

IV.5.5. – Comme en 4.6, soit M une extension finie galoisienne de L. En transportant via la correspondance de Langlands, on peut définir l'induite automorphe π^L de toute représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}(m, M)$; c'est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}(m\delta, L)$ où $\delta = [M : L]$, bien définie à isomorphisme près. Supposons que π soit essentiellement tempérée — ou plus généralement générique et vérifie une condition de régularité que (comme pour le changement de base) nous n'explicitons pas ici. Si M est obtenue par extensions cycliques successives L_1/L, L_2/L_1, ..., L_r/L_{r-1} avec $L_r = M$, alors π^L est obtenue par inductions automorphes successives suivant **III**; en particulier, le composé de ces inductions automorphes successives ne dépend que de l'extension M/L.

IV.5.6. – De la même façon, si M/L est une extension finie cyclique de L, la comparaison du changement de base cyclique et de l'induction automorphe cyclique, ou leur composition, s'établissent immédiatement par la correspondance de Langlands. En particulier, on obtient immédiatement les assertions 2.6, (a) – (f) de [**14**], pour un corps local non archimédien L de caractéristique p. De manière plus générale, toutes les propriétés du changement de base et de l'induction automorphe en caractéristique nulle utilisées dans les travaux de C. J. Bushnell et du premier auteur, sont maintenant — grâce à **II**, **III** et au présent chapitre — disponibles en toute caractéristique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Arthur & L. Clozel – *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies, vol. 120, Princeton Univ. Press, 1989.

[2] A. I. Badulescu – “Orthogonalité des caractères pour GL_n sur un corps local de caractéristique non nulle”, *Manuscripta Math.* **101** (2000), p. 49–70.

[3] ———, “Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de caractéristique non nulle”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **35** (2002), p. 695–747.

[4] A. I. Badulescu, G. Henniart, B. Lemaire & V. Sécherre – “Sur le dual unitaire de $\mathrm{GL}_r(D)$”, *Amer. J. Math.* **132** (2010), p. 1365–1396.

[5] J. N. Bernstein – “Le “centre” de Bernstein”, in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, 1984, p. 1–32.

[6] ———, “P-invariant distributions on $\mathrm{GL}(N)$ and the classification of unitary representations of $\mathrm{GL}(N)$ (non-Archimedean case)”, in *Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983)*, Lecture Notes in Math., vol. 1041, Springer, 1984, p. 50–102.

[7] J. N. Bernstein & A. V. Zelevinsky – “Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **10** (1977), p. 441–472.

[8] A. Borel & H. Jacquet – “Automorphic forms and automorphic representations”, in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, p. 189–207.

[9] A. Borel & N. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, second éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 67, Amer. Math. Soc., 2000.

[10] C. J. Bushnell & G. Henniart – “Local tame lifting for $\mathrm{GL}(N)$. I. Simple characters”, *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), p. 105–233.

[11] ———, "The essentially tame local Langlands correspondence. I", *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), p. 685–710, "II: Totally ramified representations", *Compos. Math.* **141** (2005), p. 879–1011, "III: The general case", *Proc. London Math. Soc.* **101** (2010), p. 497–553.

[12] ———, "Local tame lifting for GL(n). III. Explicit base change and Jacquet-Langlands correspondence", *J. reine angew. Math.* **580** (2005), p. 39–100.

[13] ———, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grund. Math. Wiss., vol. 335, Springer, 2006.

[14] C. J. Bushnell, G. Henniart & P. C. Kutzko – "Correspondance de Langlands locale pour GL_n et conducteurs de paires", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1998), p. 537–560.

[15] P. Cartier – "Representations of p-adic groups: a survey", in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, p. 111–155.

[16] W. Casselman – "Characters and Jacquet modules", *Math. Ann.* **230** (1977), p. 101–105.

[17] ———, "The unramified principal series of $\mathfrak{p}$-adic groups. I. The spherical function", *Compositio Math.* **40** (1980), p. 387–406.

[18] L. Clozel – "Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés $\mathfrak{p}$-adiques et caractères des groupes réductifs", *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **15** (1984), p. 39–64.

[19] ———, "The fundamental lemma for stable base change", *Duke Math. J.* **61** (1990), p. 255–302.

[20] ———, "Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group", in *Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989)*, Progr. Math., vol. 101, Birkhäuser, 1991, p. 101–121.

[21] P. Deligne – "Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L", in *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[22] G. van Dijk – "Computation of certain induced characters of $\mathfrak{p}$-adic groups", *Math. Ann.* **199** (1972), p. 229–240.

[23] V. G. Drinfel′d – "Cohomology of compactified moduli varieties of F-sheaves of rank 2", *J. Soviet Math.* **46** (1989), p. 1789–1821.

[24] D. Flath – "A comparison of the automorphic representations of GL(3) and its twisted forms", *Pacific J. Math.* **97** (1981), p. 373–402.

[25] Y. Z. Flicker – "Regular trace formula and base change for GL(n)", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **40** (1990), p. 1–30.

[26] R. Godement & H. Jacquet – *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 260, Springer, 1972.

[27] Harish-Chandra – "Discrete series for semisimple Lie groups. II. Explicit determination of the characters", *Acta Math.* **116** (1966), p. 1–111.

[28] ______, *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lecture Notes in Math., vol. 162, Springer, 1970.

[29] ______, "Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups", in *Lie theories and their applications (Proc. Ann. Sem. Canad. Math. Congr., Queen's Univ., Kingston, Ont., 1977)*, Queen's Univ., 1978, p. 281–347. Queen's Papers in Pure Appl. Math., No. 48.

[30] ______, "A submersion principle and its applications", in *Geometry and analysis*, Indian Acad. Sci., 1980, p. 95–102.

[31] M. Harris & R. Taylor – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[32] G. Henniart – "La conjecture de Langlands locale pour GL(3)", *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **11-12** (1984).

[33] ______, "On the local Langlands conjecture for GL(n): the cyclic case", *Ann. of Math.* **123** (1986), p. 145–203.

[34] ______, "Correspondance de Langlands-Kazhdan explicite dans le cas non ramifié", *Math. Nachr.* **158** (1992), p. 7–26.

[35] ______, "Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ϵ de paires", *Invent. Math.* **113** (1993), p. 339–350.

[36] ______, "Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL(n) sur un corps p-adique", *Invent. Math.* **139** (2000), p. 439–455.

[37] ______, "Une caractérisation de la correspondance de Langlands locale pour GL(n)", *Bull. Soc. Math. France* **130** (2002), p. 587–602.

[38] G. Henniart & R. Herb – "Automorphic induction for GL(n) (over local non-Archimedean fields)", *Duke Math. J.* **78** (1995), p. 131–192.

[39] G. Henniart & B. Lemaire – "Intégrales orbitales tordues sur GL(n, F) et corps locaux proches: applications", *Canad. J. Math.* **58** (2006), p. 1229–1267.

[40] ———, "Formules de caractères pour l'induction automorphe", *J. reine angew. Math.* **645** (2010), p. 41–84.

[41] ———, "Pseudo-coefficients des séries κ-discrètes de $\mathrm{GL}(n, F)$", *Israel J. Math.* **177** (2010), p. 189–227.

[42] K. Hiraga & H. Saito – "On L-packets for inner forms of SL_n", manuscrit, 2007.

[43] H. Jacquet & R. P. Langlands – *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Math., vol. 114, Springer, 1970.

[44] H. Jacquet, I. I. Piatetskii-Shapiro & J. Shalika – "Rankin-Selberg convolutions", *Amer. J. Math.* **105** (1983), p. 367–464.

[45] H. Jacquet & J. Shalika – "On Euler products and the classification of automorphic forms. II", *Amer. J. Math.* **103** (1981), p. 777–815.

[46] ———, "The Whittaker models of induced representations", *Pacific J. Math.* **109** (1983), p. 107–120.

[47] R. E. Kottwitz – "Orbital integrals on GL_3", *Amer. J. Math.* **102** (1980), p. 327–384.

[48] ———, "Rational conjugacy classes in reductive groups", *Duke Math. J.* **49** (1982), p. 785–806.

[49] ———, "Base change for unit elements of Hecke algebras", *Compositio Math.* **60** (1986), p. 237–250.

[50] J.-P. Labesse – "Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable", *Duke Math. J.* **61** (1990), p. 519–530.

[51] ———, "Noninvariant base change identities", *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **61** (1995).

[52] ———, "Stable twisted trace formula: elliptic terms", *J. Inst. Math. Jussieu* **3** (2004), p. 473–530.

[53] J.-P. Labesse & R. P. Langlands – "L-indistinguishability for SL(2)", *Canad. J. Math.* **31** (1979), p. 726–785.

[54] L. Lafforgue – "Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson", *Astérisque* **243** (1997).

[55] ———, "Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands", *Invent. Math.* **147** (2002), p. 1–241.

[56] R. P. LANGLANDS – "On the notion of an automorphic representation", *Proc. Symp. Pure Math.* **33** (1977), p. 203–208.

[57] G. LAUMON – *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 41, Cambridge Univ. Press, 1996.

[58] G. LAUMON, M. RAPOPORT & U. STUHLER – "$\mathscr{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence", *Invent. Math.* **113** (1993), p. 217–338.

[59] B. LEMAIRE – "Intégrabilité locale des caractères-distributions de $\mathrm{GL}_N(F)$ où F est un corps local non-archimédien de caractéristique quelconque", *Compositio Math.* **100** (1996), p. 41–75.

[60] ______, "Intégrabilité locale des caractères tordus de $\mathrm{GL}_n(D)$", *J. reine angew. Math.* **566** (2004), p. 1–39.

[61] ______, "Intégrabilité locale des caractères de $\mathrm{SL}_n(D)$", *Pacific J. Math.* **222** (2005), p. 69–131.

[62] ______, "Caractères tordus des représentations admissibles", prépublication arXiv:1007.3576.

[63] D. MONTGOMERY & L. ZIPPIN – *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[64] B. C. NGÔ – "$\mathscr{D}$-chtoucas de Drinfeld à modifications symétriques et identité de changement de base", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 197–243.

[65] F. RODIER – "Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic split groups", in *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*, Amer. Math. Soc., 1973, p. 425–430.

[66] ______, "Représentations de $\mathrm{GL}(n,\, k)$ où k est un corps p-adique", in *Bourbaki Seminar, Vol. 1981/1982*, Astérisque, vol. 92, Soc. Math. France, 1982, p. 201–218.

[67] J. D. ROGAWSKI – "Trace Paley-Wiener theorem in the twisted case", *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1988), p. 215–229.

[68] F. SHAHIDI – "On certain L-functions", *Amer. J. Math.* **103** (1981), p. 297–355.

[69] ______, "Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $\mathrm{GL}(n)$", *Amer. J. Math.* **106** (1984), p. 67–111.

[70] J. SHALIKA – "The multiplicity one theorem for GL_n", *Ann. of Math.* **100** (1974), p. 171–193.

[71] M. TADIĆ – "Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case)", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19** (1986), p. 335–382.

[72] J. Tate – "Number theoretic background", in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, p. 3–26.

[73] J.-L. Waldspurger – "Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires: un lemme fondamental", *Canad. J. Math.* **43** (1991), p. 852–896.

[74] ———, "Endoscopie et changement de caractéristique", *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), p. 423–525.

[75] A. V. Zelevinsky – "Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of GL(n)", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), p. 165–210.