

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

SÉVERINE RIGOT

Ensembles quasi-minimaux avec contrainte de volume et rectifiabilité uniforme

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 82 (2000)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_2000_2_82__R1_0

© Mémoires de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES QUASI-MINIMAUX AVEC CONTRAINTE DE VOLUME ET RECTIFIABILITÉ UNIFORME

Séverine Rigot

Résumé. — Dans ce mémoire, on s'intéresse à la régularité des sous-ensembles de \mathbb{R}^n qui quasi-minimisent le périmètre avec contrainte de volume, c'est-à-dire des sous-ensembles G de \mathbb{R}^n qui vérifient la condition de quasi-minimalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \Delta G'|),$$

pour tout $G' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $G \Delta G' \in \mathbb{R}^n$ et $|G'| = |G|$. Ici $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|$ désigne le périmètre de G et $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est fixée et vérifie $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$ au voisinage de 0. Le principal résultat de ce mémoire est la rectifiabilité uniforme de la frontière des quasi-minima avec contrainte de volume, avec des paramètres universels. Nous appliquerons ces résultats à l'étude des minima de mesure de Lebesgue fixée de la fonctionnelle E définie par

$$E(G) = H^{n-1}(\partial G) + \iint_{G \times G} K(x - y) dx dy,$$

où $G \subset \mathbb{R}^n$, $H^{n-1}(\partial G)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension $n - 1$ de la frontière de G et $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à support compact. Les estimations uniformes sur les paramètres qui interviennent dans les propriétés de régularité des quasi-minima avec contrainte de volume nous permettront d'obtenir l'existence d'ensembles optimaux ainsi qu'une description de ces minima (régularité de leur frontière, taille et nombre de leurs composantes connexes).

Abstract (Quasi-minimal sets with a volume constraint and uniform rectifiability)

In this memoir, we study the regularity of quasi-minimal sets for the perimeter with a volume constraint, i.e., measurable subsets G of \mathbb{R}^n which satisfy the following quasi-minimality condition :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \Delta G'|),$$

for every $G' \subset \mathbb{R}^n$ such that $G \Delta G' \Subset \mathbb{R}^n$ and $|G'| = |G|$. Here $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|$ denotes the perimeter of G and $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ is fixed such that $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$. The main result of this memoir is the uniform rectifiability of their boundary with universal parameters. We will then apply this result to the study of minimizers with prescribed Lebesgue measure of a functional E defined by

$$E(G) = H^{n-1}(\partial G) + \iint_{G \times G} K(x - y) \, dx \, dy,$$

where $G \subset \mathbb{R}^n$, $H^{n-1}(\partial G)$ denotes the $(n - 1)$ -Hausdorff measure of the boundary of G and $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ with compact support. Using the fact that the parameters in the regularity properties of quasi-minimizers with a volume constraint are universal, we will be able to obtain the existence of optimal sets together with a description of these minimizers (regularity of their boundary, size and number of their connected components).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
1. Introduction	5
1.1. Notations et conventions	5
1.2. Mesure de Hausdorff et rectifiabilité	6
1.3. Fonctions à variation bornée et périmètre	14
1.4. Ensembles quasi-minimaux avec contrainte de volume	21
2. Régularité des quasi-minima	27
2.1. Lemmes préliminaires	27
2.2. Preuve de la régularité des quasi-minima	34
2.3. Comparaison du périmètre et de la mesure H^{n-1}	37
3. Les principales constructions	41
3.1. Troncature	41
3.2. La proposition principale	44
3.3. Couronnes isolées	63
4. Constantes de régularité universelles	75
4.1. Les quasi-minima réguliers sont normalisés	75
4.2. Composantes connexes	83
4.3. Régularité $C^{1,\alpha}$	91
5. Un problème variationnel avec contrainte de volume	93
5.1. Définitions et résultats	93
5.2. Existence et régularité des minima	95
5.3. Suites minimisantes	101
Bibliographie	103

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce mémoire est consacré à l'étude de la régularité de la frontière des sous-ensembles de \mathbb{R}^n qui quasi-minimisent le périmètre avec une contrainte de volume. Ce sont des ensembles dont on contrôle la variation de la surface de la frontière sous l'effet de perturbations compactes à volume constant. Cette variation est, au moins aux petites échelles, négligeable devant la surface initiale.

Les premiers résultats de régularité concernant la frontière réduite ∂^*G des ensembles G qui minimisent localement le périmètre dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n ont été démontrés par E. De Giorgi ([**DG61**]) puis améliorés par M. Miranda ([**Mir65**]) et H. Federer ([**Fed70**]) : en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff au plus $n - 8$, la frontière réduite ∂^*G est une hypersurface régulière (voir aussi [**Sim83**]). Des résultats analogues ont ensuite été étendus aux ensembles à courbure moyenne généralisée prescrite appartenant à $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > n$ ([**Mas74**], [**Mas75**], ...). De manière plus générale, des résultats de régularité partielle concernant la frontière des ensembles qui quasi-minimisent le périmètre sont maintenant classiques ([**Tam82**], [**Tam84**], [**AP99**], [**Rig00**], voir aussi [**Alm76**] et [**DS00**]).

La contrainte imposée aux solutions est en général une condition à la frontière de Ω . En vue de certaines applications, il apparaît cependant souvent pertinent d'imposer plutôt une contrainte de volume aux solutions. Mathématiquement, le problème le plus simple en ce sens est le problème isopérimétrique : minimiser la surface de la frontière à volume constant. Il est maintenant bien connu que, dans ce cas, les solutions sont, à un ensemble de mesure nulle près, des boules, c'est-à-dire des ensembles très réguliers. Par ailleurs, des propriétés de régularité partielle ont été démontrées pour les ensembles qui minimisent localement le périmètre avec une contrainte de volume ([**GMT83**]). Il ne semble pas cependant que les conditions de quasi-minimalité que nous allons étudier ici et qui allient le caractère quasi-minimal et la contrainte de volume aient été étudiées par le passé. Les ensembles auxquels nous allons nous intéresser sont les

sous-ensembles G de \mathbb{R}^n de mesure de Lebesgue finie qui satisfont à la condition de quasi-minimalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \Delta G'|)$$

pour tout $G' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $G \Delta G' = (G \setminus G') \cup (G' \setminus G) \in \mathbb{R}^n$ et $|G'| = |G|$. Ici $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|$ désigne le périmètre de G et $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est fixée telle que $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$ au voisinage de 0. On rencontre ce type de conditions dans certains problèmes variationnels où entrent en compétition des énergies de surface et de volume, par exemple quand on cherche à modéliser l'énergie d'une goutte de fluide incompressible soumise à des forces surfaciques telles que la tension superficielle ainsi qu'à d'autres forces volumiques (gravitation, champ magnétique, bulles de savon...) et que l'on veut décrire ce qui se passe à l'équilibre. C'est un tel modèle qui nous a servi de motivation initiale pour ce travail. Nous allons y revenir dans un instant.

Dans la plupart des contextes évoqués plus haut, les résultats de régularité qui ont été démontrés sont des résultats de régularité partielle, c'est-à-dire des résultats locaux et non uniformes. On s'est quant à nous attaché à obtenir des résultats quantitatifs et uniformes. Le principal résultat de ce mémoire est la rectifiabilité uniforme de la frontière des quasi-minima avec contrainte de volume, avec des paramètres universels. Sans entrer dans le détail pour l'instant, disons juste que la rectifiabilité uniforme est une notion de rectifiabilité donnant une régularité de type Lipschitz pour l'ensemble considéré, avec des informations quantitatives et invariantes par changement d'échelle. De ce point de vue, ce résultat est à rapprocher de celui de [DS98] où les conditions de quasi-minimalité n'ont rien à voir avec celles qui nous intéressent ici mais où certains arguments sont similaires aux nôtres (voir aussi [DS00] où d'autres conditions sont étudiées). Le même type de résultats quantitatifs et uniformes a par ailleurs été obtenu dans le cadre de l'étude des minima de la fonctionnelle de Mumford-Shah où il s'agit d'étudier un problème de discontinuité libre ([DMS92], [DS96a], [DS96b], [Sol97], ...) et bien que ce problème soit différent du nôtre, les résultats sont comparables dans leur esprit.

Comme nous l'avons brièvement mentionné plus haut et bien que ce soit l'aspect purement mathématique du problème qui nous intéresse ici, c'est un modèle physique décrit par F. Otto qui nous a servi de motivation initiale ([Ott98]). Une goutte de fluide visqueux ferromagnétique et incompressible est placée entre deux lamelles horizontales très proches (pour rendre le problème plan), on lui applique un champ magnétique vertical et on cherche à décrire ce qui se passe à l'équilibre, c'est-à-dire quand le minimum d'énergie est atteint. F. Otto s'était quant à lui intéressé au problème dynamique. Mathématiquement, on considère la généralisation en dimension

quelconque de ce problème et il s'agit alors de décrire les minima de mesure de Lebesgue fixée d'une énergie E définie par

$$E(G) = H^{n-1}(\partial G) + \iint_{G \times G} K(x - y) \, dx \, dy$$

pour tout $G \subset \mathbb{R}^n$, où $H^{n-1}(\partial G)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension $n - 1$ de la frontière de G et $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à support compact. Le premier terme correspond à la tension superficielle et est un terme de cohésion. Le second correspond à l'effet du champ magnétique et est un terme de dispersion.

Il se trouve que les résultats classiques de semi-continuité et de compacité ne s'appliquent pas directement et ce problème de minimisation avec contrainte de volume fournit un exemple de problème variationnel pour lequel des informations quantitatives et uniformes se révèlent particulièrement utiles. Nous obtiendrons en effet grâce à elles l'existence d'ensembles optimaux ainsi qu'une description des composantes connexes des minima, notamment une estimation uniforme sur leur mesure de Lebesgue.

La suite de ce mémoire est organisée de la manière suivante. Les parties 1.1, 1.2 et 1.3 du chapitre 1 sont consacrées à des rappels de théorie de la rectifiabilité et de théorie des fonctions à variation bornée et des ensembles à périmètre fini. Dans la partie 1.4 on définit les conditions de quasi-minimalité qui vont nous intéresser et on cite les principaux résultats de ce mémoire. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à leur démonstration. On peut se reporter au paragraphe 1.4.3 pour plus de détails. Le chapitre 5 est consacré à l'étude du problème de minimisation à volume fixé associé à la fonctionnelle E définie plus haut.

C'est un plaisir de remercier Guy David de m'avoir introduite à ces questions ainsi que pour de nombreuses discussions et de précieux conseils sur le sujet. Je tiens aussi à remercier le referee dont les remarques ont largement influencé la version définitive de ce manuscrit.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les parties 1.1, 1.2 et 1.3 de ce chapitre sont consacrées à des préliminaires et rappels sur la mesure de Hausdorff, la notion de rectifiabilité uniforme, sur les fonctions à variation bornée et les ensembles à périmètre fini, ainsi que sur différentes versions de l'inégalité isopérimétrique. On se contentera ici de rappeler les résultats, pour la plupart classiques, dont on se servira dans la suite. On ne prétend donc en aucun cas à l'exhaustivité. Le seul résultat réellement nouveau est un lemme d'approximation des ensembles quasi-isopérimétriques par des boules (lemme 1.3.13). Dans la partie 1.4 on définit les conditions de quasi-minimalité qui vont nous intéresser et on cite les principaux résultats de ce mémoire. On peut se reporter au paragraphe 1.4.3 pour une description des chapitres 2, 3 et 4 où ils seront démontrés.

1.1. Notations et conventions

Dans toute la suite n désignera un entier supérieur ou égal à 2. Nous allons travailler dans \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique. Si x et y sont deux points de \mathbb{R}^n , la distance entre x et y est $\text{dist}(x, y) = |x - y|$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est non vide, le diamètre de A est $\text{diam}(A) = \sup_{x \in A, y \in A} |x - y|$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ est non vide, la distance de x à A est

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|.$$

Les boules ouvertes et fermées de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r , $0 < r < +\infty$, seront notées

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}, \\ \overline{B}(x, r) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}, \end{aligned}$$

et pour $x = 0$, nous noterons $B_r = B(0, r)$. Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $0 < t < +\infty$, nous utiliserons la notation $tA = \{tx : x \in A\}$. Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, ∂A désignera la frontière topologique de A et χ_A la fonction caractéristique de A , égale à 1 sur A et à 0

sur $\mathbb{R}^n \setminus A$. La mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbb{R}^n$ sera notée $|A|$. Nous noterons aussi $\omega_n = |B_1|$. Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \Delta B$ désignera la différence symétrique entre A et B , $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Nous dirons que deux ensembles A et B sont équivalents si $|A \Delta B| = 0$. La lettre C désignera de manière générale une constante strictement positive dont la valeur pourra changer à chaque occurrence.

1.2. Mesure de Hausdorff et rectifiabilité

1.2.1. Mesure de Hausdorff.— Nous allons rappeler ici la définition de la mesure de Hausdorff et quelques unes de ses propriétés qui seront d'utilisation constante dans toute la suite. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [Fed69] ou [Mat95].

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < +\infty$ et $0 \leq \delta < +\infty$, posons

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} (\text{diam}(E_i))^s : A \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i, \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\}.$$

On définit alors la mesure de Hausdorff de dimension s de A :

$$H^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} H_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A).$$

C'est une mesure extérieure Borel régulière sur \mathbb{R}^n et si $A \subset \mathbb{R}^n$ est H^s -mesurable et tel que $H^s(A) < +\infty$, la restriction de H^s à A est une mesure de Radon positive ([Mat95, page 57]). Si $s = 0$, $H^0(A) = \text{card}(A)$ et si $s > n$, $H^s(A) = 0$ pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$. Avant de définir la dimension de Hausdorff, rappelons le théorème classique suivant :

THÉORÈME 1.2.1 ([Mat95, page 58]). — *Pour $0 \leq s < t < +\infty$ et $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$H^s(A) < +\infty \Rightarrow H^t(A) = 0,$$

$$H^t(A) > 0 \Rightarrow H^s(A) = +\infty.$$

Nous pouvons maintenant définir la dimension de Hausdorff :

DÉFINITION 1.2.2 ([Mat95, page 58]). — Si $A \subset \mathbb{R}^n$, la dimension de Hausdorff de A est

$$\begin{aligned} \dim(A) &= \sup\{s : H^s(A) > 0\} \\ &= \inf\{t : H^t(A) < +\infty\}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, la dimension de Hausdorff de A est l'unique réel positif ou nul, $\dim(A)$, tel que

$$H^t(A) = +\infty \quad \text{si} \quad 0 \leq t < \dim(A) \quad \text{et} \quad H^s(A) = 0 \quad \text{si} \quad \dim(A) < s.$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement ici à des sous-ensembles A de \mathbb{R}^n , H^{n-1} -mesurables, tels que $0 < H^{n-1}(A) < +\infty$. Si A est une hypersurface suffisamment régulière, $H^{n-1}(A)$ coïncide avec toute autre définition raisonnable de la mesure de surface.

Rappelons maintenant qu'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est M -lipschitzienne si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. De la définition de la mesure de Hausdorff, on déduit les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.2.3. — Si $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < +\infty$ et $0 < t < +\infty$,

$$H^s(A + a) = H^s(A) \quad \text{avec} \quad A + a = \{x + a : x \in A\},$$

$$H^s(tA) = t^s H^s(A) \quad \text{avec} \quad tA = \{tx : x \in A\}.$$

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est M -lipschitzienne, alors $H^s(f(A)) \leq M^s H^s(A)$.

1.2.2. Ahlfors-régularité et condition B. — Nous allons maintenant définir la notion d'ensemble Ahlfors-régulier et d'ensemble vérifiant la condition B. Ce sont ces propriétés de régularité que nous montrerons pour les quasi-minima avec contrainte de volume.

DÉFINITION 1.2.4 (Ahlfors-régularité). — Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. On dira que S est localement Ahlfors-régulier (de dimension $n-1$) si S est fermé et s'il existe une mesure borélienne μ sur \mathbb{R}^n et une constante $C > 0$ telles que pour tout $x \in S$ et tout $r \in]0, 1]$,

$$(1.2.1) \quad C^{-1}r^{n-1} \leq \mu(S \cap B(x, r)) \leq Cr^{n-1}.$$

Si S est localement Ahlfors-régulier et si μ vérifie (1.2.1), on a les informations plus précises suivantes :

PROPOSITION 1.2.5. — Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ localement Ahlfors-régulier. Si μ est une mesure borélienne sur \mathbb{R}^n qui vérifie (1.2.1) alors il existe $C > 0$ telle que l'on ait l'inégalité suivante entre mesures :

$$(1.2.2) \quad C^{-1}H^{n-1}|_S \leq \mu|_S \leq CH^{n-1}|_S,$$

et (1.2.1) est vérifié avec μ remplacé par H^{n-1} , c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in S$ et tout $r \in]0, 1]$,

$$(1.2.3) \quad C^{-1}r^{n-1} \leq H^{n-1}(S \cap B(x, r)) \leq Cr^{n-1}.$$

Remarquons que les constantes qui apparaissent dans (1.2.2) et (1.2.3) ne dépendent que de la dimension n et de la constante de (1.2.1). Le point essentiel ici est que si S est Ahlfors-régulier, $x \in S$, $0 < t < r \leq 1$, on peut recouvrir $S \cap B(x, r)$ par au plus $C(\frac{r}{t})^{n-1}$ boules de rayon t centrées sur S .

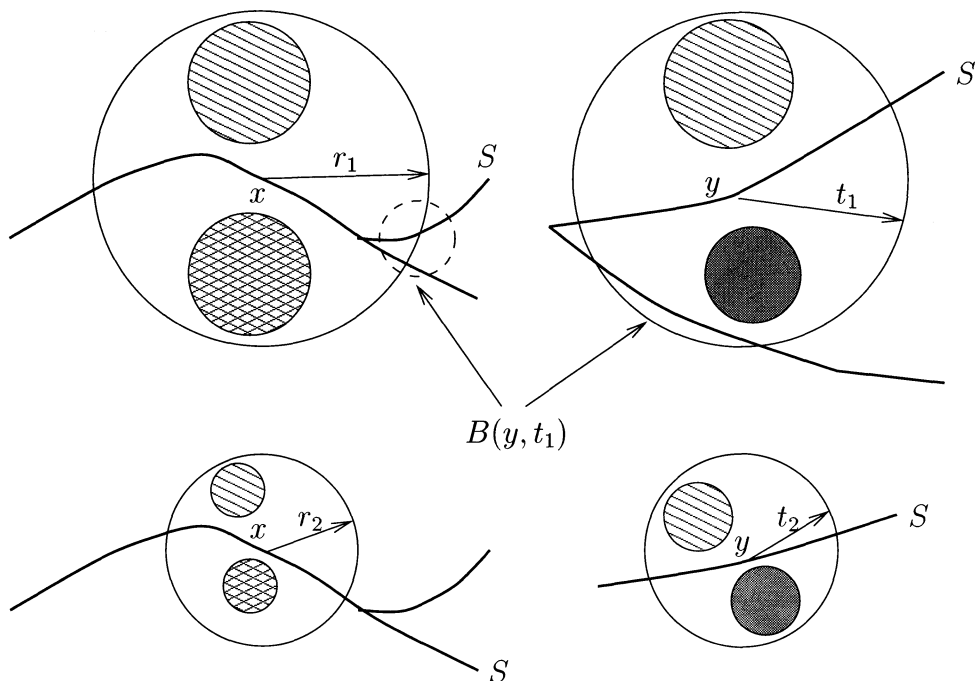


FIGURE 1.1. La condition B ($x \in S$, $r_2 < r_1$, $y \in S$, $t_2 < t_1$).

La définition standard de l'Ahlfors-régularité autorise les rayons r à prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $\text{diam}(S)$. Remarquons que si S est borné et si (1.2.1) est vérifié pour tout $x \in S$ et tout $r \in]0, 1]$, alors cette relation l'est encore pour tout $x \in S$ et tout $r \in]0, \text{diam}(S)]$ en modifiant au besoin légèrement la constante C en fonction de $\text{diam}(S)$. Nous omettrons donc en général le mot « localement » dans la suite, même si seuls les rayons appartenant à $]0, 1]$ seront pris en compte.

L'Ahlfors-régularité est une manière quantitative, uniforme et invariante par changement d'échelle de dire que S est de dimension $n - 1$. Signalons que c'est uniquement une notion de taille. Par exemple le Cantor à quatre coins du plan est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1, mais il ne possède pas de bonnes propriétés de rectifiabilité. Pour l'étude des propriétés géométriques et analytiques des ensembles Ahlfors-réguliers, on pourra se reporter par exemple à [DS91] et [DS93a]. Signalons que pour tout $0 \leq d \leq n$, on peut définir la notion d'ensemble Ahlfors-régulier de dimension d en remplaçant $n - 1$ par d dans la définition 1.2.4.

DÉFINITION 1.2.6 (Condition B). — Soit G un ouvert de \mathbb{R}^n . On dira que G vérifie localement la condition B s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \partial G$

et tout $r \in]0, 1]$, il existe deux boules $B_1 \subset G \cap B(x, r)$ et $B_2 \subset B(x, r) \setminus \overline{G}$, toutes deux de rayon $\geq C^{-1}r$.

Comme précédemment, si G est borné et satisfait localement à la condition B, il satisfait à la condition analogue où les rayons sont autorisés à prendre toutes les valeurs entre 0 et $\text{diam}(\partial G)$ en modifiant au besoin légèrement la constante C en fonction de $\text{diam}(\partial G)$. Par abus de langage nous omettrons donc en général le mot « localement » même si, comme en ce qui concerne l'Ahlfors-régularité, nous ne nous intéresserons qu'à des rayons appartenant à $]0, 1]$.

On peut définir une condition légèrement différente (et un peu moins forte) qui concerne les ensembles Ahlfors-réguliers de codimension 1, et que nous appellerons encore condition B.

DÉFINITION 1.2.7. — Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dira que S vérifie (localement) la condition B si S est (localement) Ahlfors-régulier de codimension 1 et s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in S$ et tout $r \in]0, 1]$, il existe deux boules B_1 et B_2 , de rayon $\geq C^{-1}r$, contenues dans $B(x, r)$, et qui sont contenues dans deux composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus S$.

Voir la figure 1.1. Si G vérifie la condition B comme dans la définition 1.2.6 et si ∂G est Ahlfors-régulière de codimension 1, alors ∂G vérifie la condition de la définition 1.2.7. La réciproque est en général fautive. Si G n'est pas connexe, il se pourrait que les deux boules données par la définition 1.2.7 soient contenues dans deux composantes connexes différentes de G . Comme précédemment, on peut autoriser les rayons à prendre toutes les valeurs entre 0 et $\text{diam}(S)$ quitte à changer la constante C et retirer le mot « localement » dans la définition 1.2.7.

1.2.3. Notions de rectifiabilité uniforme. — Les ensembles Ahlfors-réguliers de codimension 1 qui vérifient la condition B possèdent des propriétés assez fortes de rectifiabilité. C'est de la tension entre l'inégalité de droite de (1.2.3), qui assure que uniformément en tout point et à toute échelle l'ensemble n'est pas trop gros, et la condition topologique de la définition 1.2.7, qui peut être interprétée en disant que uniformément en tout point et à toute échelle l'ensemble sépare bien les différentes composantes du complémentaire, que naît la force de cette conjonction. G. David et S. Semmes ont montré que de tels ensembles sont uniformément rectifiables et même contiennent de « grands morceaux de graphes lipschitziens ». Signalons que dans ce qui suit, nous allons citer des résultats locaux c'est-à-dire nous limiter à des rayons R compris entre 0 et 1. Dans [DS93a] les différents résultats sont établis pour des ensembles de diamètre infini. Ils restent valables dans le cas d'ensembles bornés à condition de se restreindre à des rayons compris entre 0 et 1. Nous allons aussi nous limiter au cas de la codimension 1, le seul qui nous intéressera dans la suite.

DÉFINITION 1.2.8 (Condition BPLG, [DS93a]). — Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n Ahlfors-régulier de codimension 1. On dira que S satisfait à la condition BPLG (Big Pieces of Lipschitz Graphs) s'il existe $C > 0$ et $\theta > 0$ tels que, pour tout $x \in S$ et tout $R \in]0, 1]$, il existe un graphe Γ lipschitzien $(n - 1)$ -dimensionnel de constante $\leq C$ tel que

$$H^{n-1}(S \cap B(x, R) \cap \Gamma) \geq \theta R^{n-1}.$$

Par graphe lipschitzien $(n - 1)$ -dimensionnel dans \mathbb{R}^n , nous entendons un ensemble Γ tel qu'il existe un hyperplan P , une droite D perpendiculaire à P et une application lipschitzienne A de P vers D tels que Γ soit le graphe de A . Par constante de Lipschitz de Γ , nous entendons constante de Lipschitz de l'application A .

Il existe de nombreuses caractérisations de l'uniforme rectifiabilité. Nous ne citerons ici que la condition BPLI (Big Pieces of Lipschitz Images). Pour (beaucoup) plus de détails sur les différentes caractérisations de l'uniforme rectifiabilité et les propriétés des ensembles uniformément rectifiables, on pourra consulter par exemple [DS91] et [DS93a].

DÉFINITION 1.2.9 (Condition BPLI, [DS93a]). — Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n Ahlfors-régulier de codimension 1. On dira que S satisfait à la condition BPLI s'il existe θ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in S$ et tout $R \in]0, 1]$, il existe une application lipschitzienne ρ de constante de Lipschitz $\leq M$ de la boule $B_{n-1}(0, R)$ de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R}^n telle que

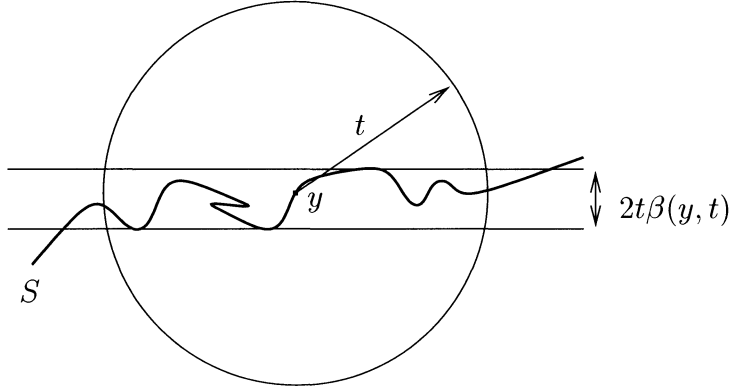
$$H^{n-1}(S \cap B(x, R) \cap \rho(B_{n-1}(0, R))) \geq \theta R^{n-1}.$$

DÉFINITION 1.2.10 (Rectifiabilité Uniforme). — On dira qu'un sous-ensemble Ahlfors-régulier de \mathbb{R}^n est uniformément rectifiable s'il satisfait à la condition BPLI.

THÉORÈME 1.2.11 ([DS93b]). — Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n vérifiant la condition B (définition 1.2.7). Alors S vérifie la condition BPLG.

Clairement la condition BPLG est un peu plus forte que la condition BPLI et S est en particulier uniformément rectifiable. Une manière de montrer que la condition B implique la condition BPLG est de montrer que si S vérifie la condition B, alors S a de grandes projections (voir [DS93b, page 897]) et satisfait le lemme géométrique faible (que nous allons citer dans un instant), puis d'utiliser le théorème 1.14 de [DS93b].

Le lemme géométrique faible est une manière de dire que pour $x \in S$ et $R \in]0, 1]$, $S \cap B(x, R)$ est souvent bien approximé par un hyperplan. Définissons d'abord les

FIGURE 1.2. La fonction β .

nombres β de P. Jones qui permettent de mesurer à quel point S est proche d'un hyperplan dans une boule donnée. Pour $y \in S$ et $t > 0$, posons

$$(1.2.4) \quad \beta(y, t) = \inf_P \left\{ t^{-1} \sup_{z \in S \cap B(y, t)} \text{dist}(z, P) \right\},$$

l'infimum étant pris sur tous les hyperplans affines (voir la figure 1.2).

DÉFINITION 1.2.12 (Lemme géométrique faible). — Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n Ahlfors-régulier de codimension 1. On dira que S vérifie le lemme géométrique faible si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in S$ et tout $R \in]0, 1]$,

$$(1.2.5) \quad \int_0^R \int_{S \cap B(x, R)} \chi_{D_\varepsilon}(y, t) dH^{n-1}(y) \frac{dt}{t} \leq CR^{n-1},$$

où $D_\varepsilon = \{(y, t) \in S \times \mathbb{R}_+ : \beta(y, t) > \varepsilon\}$.

En d'autres termes, le lemme géométrique faible dit que $\chi_{D_\varepsilon}(y, t) dH^{n-1}(y) dt/t$ est une mesure de Carleson sur $S \times \mathbb{R}_+$. Donnons maintenant quelques propriétés des ensembles qui vérifient le lemme géométrique faible.

PROPOSITION 1.2.13. — Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n Ahlfors-régulier de codimension 1. On suppose que S vérifie le lemme géométrique faible. Alors pour H^{n-1} -presque tout $x \in S$,

$$(1.2.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta(x, t) = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $H^{n-1}(A_\varepsilon) = 0$ où

$$A_\varepsilon = \{x \in S : \limsup_{t \rightarrow 0} \beta(x, t) > \varepsilon\}.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ fixé et $R \in]0, 1]$ fixé. De (1.2.5), on déduit que pour H^{n-1} -presque tout $x \in S$,

$$(1.2.7) \quad \int_0^R \chi_{I_{\frac{\varepsilon}{2}}}(t) \frac{dt}{t} < +\infty,$$

avec $I_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{t > 0 : \beta(x, t) > \frac{\varepsilon}{2}\}$. Si $x \in A_\varepsilon$, on peut trouver une suite (t_j) telle que $2t_{j+1} < t_j < R$ et telle que $\beta(x, t_j) > \varepsilon$. Alors $\beta(x, u) > \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $t_j \leq u \leq 2t_j$, donc

$$\int_{t_j}^{2t_j} \chi_{I_{\frac{\varepsilon}{2}}}(t) \frac{dt}{t} = \ln 2,$$

pour tout $j \geq 0$, ce qui contredit (1.2.7). \square

PROPOSITION 1.2.14. — *Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n Ahlfors-régulier de codimension 1. On suppose que S vérifie le lemme géométrique faible. Alors pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in S$ et tout $R \in]0, 1]$, il existe $y \in S$ et $r > \delta R$ tels que $B(y, r) \subset B(x, R)$ et*

$$(1.2.8) \quad \beta(y, r) \leq \eta.$$

Démonstration. — Soit $\eta > 0$ fixé. Par l'absurde, pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, on pourrait trouver $x \in S$ et $R \in]0, 1]$ tel que $\beta(y, t) > \eta$ dès que $(y, t) \in B(x, \frac{R}{2}) \times]\delta R, \frac{R}{2}[$. On aurait alors

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_{S \cap B(x, R)} \chi_{D_\eta}(y, t) dH^{n-1}(y) \frac{dt}{t} &\geq H^{n-1} \left(S \cap B \left(x, \frac{R}{2} \right) \right) \ln \left(\frac{1}{2\delta} \right) \\ &\geq C' \ln \left(\frac{1}{2\delta} \right) R^{n-1}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'Ahlfors-régularité de S pour obtenir la dernière inégalité. On choisit alors δ assez petit de manière à contredire (1.2.5). \square

Dans la pratique, la proposition 1.2.14 est souvent aussi utile que le lemme géométrique faible. Signalons que si S vérifie la condition B, alors la constante C de (1.2.5) ne dépend que de la dimension, de ε et des constantes qui apparaissent dans (1.2.3) et dans la définition 1.2.7. De même, dans la proposition 1.2.14, δ ne dépend que de la dimension, de η et des constantes qui apparaissent dans (1.2.3) et dans la définition 1.2.7.

Revenons maintenant aux ouverts de \mathbb{R}^n qui vérifient la condition B (définition 1.2.6). Considérons $G \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, à frontière Ahlfors-régulière et vérifiant la condition B. Soient $x \in \partial G$ et $t > 0$. Si, à l'intérieur de $B(x, t)$, la frontière ∂G est incluse

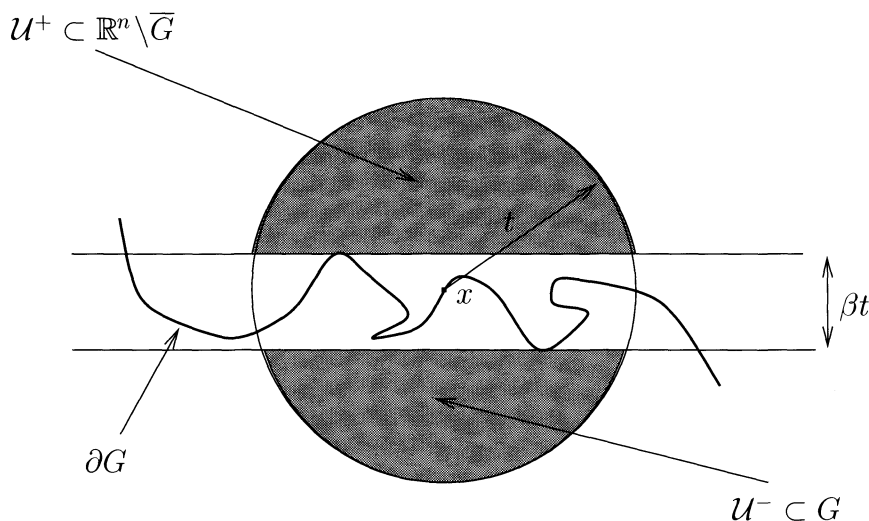


FIGURE 1.3. La situation standard.

dans une bande de largeur suffisamment petite, on a une bonne description géométrique de ce qui se passe. En effet, supposons que

$$\partial G \cap B(x, t) \subset \{y \in B(x, t) : \text{dist}(y, P) \leq \beta t\}$$

où P est un hyperplan et β une petite constante. Notons U^- et U^+ les deux composantes connexes de $\{y \in B(x, t) : \text{dist}(y, P) > \beta t\}$. Comme G vérifie la condition B, nous pouvons trouver deux boules $B_1 \subset G \cap B(x, t)$ et $B_2 \subset B(x, t) \setminus \overline{G}$ de rayon $\geq C^{-1}t$. Alors, si β est assez petit, en fonction de la dimension et de la constante de la condition B, B_1 et B_2 rencontrent nécessairement U^- ou U^+ . Par hypothèse ∂G ne rencontre pas $U^- \cup U^+$. Donc B_1 rencontre U^- et B_2 rencontre U^+ ou l'inverse et on en déduit que $U^- \subset G$ et $U^+ \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ ou l'inverse. Voir la figure 1.3 qui illustre cette situation que nous qualifierons de « standard » et qui sera une des clés de l'étude des quasi-minima avec contrainte de volume. En particulier comme ∂G vérifie le lemme géométrique faible, ceci se produit pour H^{n-1} -presque tout $x \in \partial G$ et pour tout t assez petit d'après (1.2.6). Il suffit en effet de considérer t assez petit de telle sorte que $\beta(x, t)$ soit assez petit et de prendre pour hyperplan P un hyperplan réalisant $\beta(x, t)$. D'autre part, en utilisant la proposition 1.2.14, on peut obtenir une version uniforme de ce même résultat. Plus précisément, pour tout $x \in \partial G$ et tout $0 < R < 1$, on peut trouver une boule $B(y, r) \subset B(x, R)$ avec $y \in \partial G$ et $r > \delta R$ dans laquelle la situation est la situation standard que nous venons de décrire.

1.3. Fonctions à variation bornée et périmètre

Nous allons rappeler la définition de l'ensemble des fonctions à variation bornée et donner les résultats que nous utiliserons par la suite. Nous mettrons plus particulièrement l'accent sur les sous-ensembles de \mathbb{R}^n dont la fonction caractéristique est à variation bornée, c'est-à-dire les ensembles à périmètre fini, et sur la comparaison du périmètre au sens BV avec la restriction de la mesure de Hausdorff de dimension $(n - 1)$ à la frontière de l'ensemble.

En ce qui concerne les fonctions à variation bornée et les résultats standards sur la frontière réduite des ensembles à périmètre fini, la présentation qui suit est fortement inspirée de [Giu84] auquel on pourra se reporter pour plus de détails. On pourra également consulter [Zie89].

1.3.1. Fonctions à variation bornée. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in L^1(\Omega)$. On pose

$$(1.3.1) \quad \int_{\Omega} |\nabla f| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|g\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

DÉFINITION 1.3.1. — Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in L^1(\Omega)$. On dit que f est à variation bornée dans Ω si $\int_{\Omega} |\nabla f| < +\infty$ et on définit $BV(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions de $L^1(\Omega)$ à variation bornée,

$$BV(\Omega) = \left\{ f \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} |\nabla f| < +\infty \right\}.$$

De manière équivalente, $BV(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur Ω dont le gradient au sens des distributions est représentable par une mesure de Radon (à valeur vectorielle). Sa variation totale sera notée $|\nabla f|$; c'est une mesure de Radon positive et finie. Ceci permet d'étendre la définition de $\int_A |\nabla f|$ à tout $A \subset \Omega$ mesurable.

Muni de la norme $\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla f|$, $BV(\Omega)$ est un espace de Banach. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous noterons $BV = BV(\mathbb{R}^n)$.

THÉORÈME 1.3.2 (Semi-continuité, [Giu84, page 7]). — Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $BV(\Omega)$ qui converge dans $L^1_{loc}(\Omega)$ vers une fonction f . Alors

$$\int_{\Omega} |\nabla f| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla f_j|.$$

THÉORÈME 1.3.3 (Compacité, [Giu84, page 17]). — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne. La boule unité de $BV(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^1(\Omega)$.

De ces deux théorèmes, on déduit le résultat plus spécifique suivant que nous aurons à utiliser :

THÉORÈME 1.3.4. — Soient B une boule de \mathbb{R}^n et $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de BV identiquement nulles en dehors de B et telles que $\sup_j \|f_j\|_{BV} < +\infty$. Alors il existe une sous-suite qui converge dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et presque partout vers une fonction f . De plus $f \in BV$ et

$$(1.3.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_j|.$$

1.3.2. Ensembles à périmètre fini. — Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $G \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. Dans toute la suite les sous-ensembles de \mathbb{R}^n envisagés seront toujours supposés mesurables et nous omettrons en général de le repréciser. On dira que G est à périmètre fini dans Ω si $\int_{\Omega} |\nabla \chi_G| < +\infty$. Par définition, le périmètre de G dans Ω est alors $\int_{\Omega} |\nabla \chi_G|$. On dira que G est à périmètre fini si G est à périmètre fini dans \mathbb{R}^n et par définition le périmètre de G sera le périmètre de G dans \mathbb{R}^n . Remarquons qu'il se pourrait que χ_G n'appartienne pas à $L^1(\Omega)$ auquel cas χ_G n'appartient pas à $BV(\Omega)$. Si G est à périmètre fini, on dispose cependant d'une mesure de Radon positive finie $|\nabla \chi_G|$, qui est la variation totale de la mesure de Radon (à valeur vectorielle) $\nabla \chi_G$. Remarquons aussi que si G est à périmètre fini et si G' est équivalent à G , alors G' est aussi à périmètre fini et on a l'égalité entre mesures : $\nabla \chi_G = \nabla \chi_{G'}$. Définissons maintenant la frontière réduite d'un ensemble à périmètre fini.

DÉFINITION 1.3.5 ([Giu84, page 43]). — Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ à périmètre fini. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ appartient à la frontière réduite ∂^*G de G si

$$(1.3.3) \quad \int_{B(x,\rho)} |\nabla \chi_G| > 0 \quad \forall \rho > 0,$$

$$(1.3.4) \quad \text{la limite } \nu(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B(x,\rho)} \nabla \chi_G}{\int_{B(x,\rho)} |\nabla \chi_G|} \text{ existe et } |\nu(x)| = 1.$$

Il est clair d'après (1.3.3) que $\partial^*G \subset \partial G$, où ∂G désigne comme d'habitude la frontière topologique de G . D'après le théorème de différentiation des mesures de Besicovitch ([Fed69, chapitre 2]), on sait que $|\nabla \chi_G|$ -presque tout point du support de $|\nabla \chi_G|$ appartient à ∂^*G . De plus,

THÉORÈME 1.3.6 ([Giu84, page 52]). — Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble à périmètre fini. On a l'égalité suivante entre mesures

$$(1.3.5) \quad |\nabla \chi_G| = H^{n-1} |\partial^* G.$$

Des remarques précédentes et de ce théorème, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3.7. — Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ à périmètre fini. On a l'inégalité suivante entre mesures

$$(1.3.6) \quad |\nabla \chi_G| \leq H^{n-1} |\partial G.$$

Notons que l'on peut trouver des ensembles G à périmètre fini tels que $H^{n-1}(\partial G) = +\infty$ (voir [Giu84, page 7]). Cependant si $H^{n-1}(\partial G) < +\infty$, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3.8. — Si G est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n tel que $H^{n-1}(\partial G) < +\infty$, alors G est un ensemble à périmètre fini et l'inégalité (1.3.6) a lieu.

On pourra consulter par exemple [DS98, lemme 4.7] pour une démonstration directe de cette proposition n'utilisant pas la notion de frontière réduite. Si la frontière de G est suffisamment régulière, alors $|\nabla \chi_G| = H^{n-1} |\partial G$ (voir par exemple [Giu84, page 4]).

Nous allons utiliser ces résultats pour obtenir une estimation assez grossière mais qui nous sera utile. Soit G un ensemble à périmètre fini et B une boule ouverte de \mathbb{R}^n . On a $\partial^*(G \setminus B) \subset ((\partial^* G) \setminus \bar{B}) \cup \partial B$, d'où

$$(1.3.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \setminus B}| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}(\partial B).$$

En utilisant la notion de trace d'une fonction de BV , on a la proposition plus précise suivante :

PROPOSITION 1.3.9 ([Giu84, page 39]). — Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ à périmètre fini. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et presque tout $0 < t < +\infty$, on a

$$(1.3.8) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \cup \bar{B}(x,t)}| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x,t)} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}(\partial B(x,t) \setminus G),$$

$$(1.3.9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \setminus \bar{B}(x,t)}| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x,t)} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}(G \cap \partial B(x,t)),$$

$$(1.3.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \cap B(x,t)}| = \int_{B(x,t)} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}(G \cap \partial B(x,t)).$$

Remarquons que si $H^{n-1}(\partial G) < +\infty$, alors \bar{G} et G sont équivalents et pour presque tout $t > 0$, $H^{n-1}(\partial B(x,t) \cap \partial G) = 0$. D'autre part, comme G est alors à périmètre fini, $\int_{\partial B(x,t)} |\nabla \chi_G| = 0$ pour presque tout $t > 0$. Dans ce cas on peut donc remplacer

indifféremment G par \overline{G} dans les égalités précédentes. De même, on peut remplacer $B(x, t)$ par $\overline{B}(x, t)$ et inversement.

1.3.3. Inégalité isopérimétrique. — Commençons par une première inégalité, conséquence de l'inégalité de Sobolev-Poincaré dans BV .

THÉORÈME 1.3.10 ([Giu84, page 25]). — Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ à périmètre localement fini. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $0 < t < +\infty$,

$$(1.3.11) \quad \min \{|G \cap B(x, t)|, |B(x, t) \setminus G|\}^{(n-1)/n} \leq C(n) \int_{B(x, t)} |\nabla \chi_G|,$$

où $C(n)$ ne dépend que de n .

De ce théorème, on déduit une version BV de l'inégalité isopérimétrique classique.

THÉORÈME 1.3.11 (Inégalité isopérimétrique). — Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ tel que $|G| < +\infty$. Alors

$$(1.3.12) \quad C_n |G|^{(n-1)/n} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|,$$

où C_n ne dépend que de n .

Démonstration. — Si $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Si $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| < +\infty$, on utilise l'inégalité de Sobolev-Poincaré (1.3.11) en remarquant que comme $|G| < +\infty$, pour t assez grand,

$$\min \{|G \cap B(x, t)|, |B(x, t) \setminus G|\} = |G \cap B(x, t)|,$$

et que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |G \cap B(x, t)| &= |G|, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{B(x, t)} |\nabla \chi_G| &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|. \end{aligned}$$

□

En utilisant la proposition 1.3.8, on en déduit une version H^{n-1} de la même inégalité.

PROPOSITION 1.3.12 (Inégalité isopérimétrique). — Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ tel que $|G| < +\infty$. Alors

$$(1.3.13) \quad C_n |G|^{(n-1)/n} \leq H^{n-1}(\partial G).$$

Démonstration. — Si $H^{n-1}(\partial G) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Si $H^{n-1}(\partial G) < +\infty$, d'après la proposition 1.3.8, G est à périmètre fini, et en combinant (1.3.12) et (1.3.6), on obtient

$$C_n |G|^{(n-1)/n} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq H^{n-1}(\partial G). \quad \square$$

On peut montrer que l'on peut prendre

$$C_n = \omega_n^{(1-n)/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{B_1}|,$$

ce que nous ferons dans toute la suite (voir par exemple [MM84]). Dans ce cas il y a égalité dans (1.3.12) ou (1.3.13) si et seulement si G est, à un ensemble de mesure nulle près, une boule. Nous allons utiliser cette remarque pour approximer en moyenne les ensembles quasi-isopérimétriques par des boules. Cette approximation interviendra à plusieurs reprises dans la suite.

LEMME 1.3.13 (Ensembles quasi-isopérimétriques). — *Pour tout $0 < \delta < 1$, il existe $\varepsilon > 0$, ne dépendant que de n et de δ , tel que pour tout $G \subset \mathbb{R}^n$ ε -quasi-isopérimétrique, c'est-à-dire tel que*

$$|G| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq C_n (1 + \varepsilon) |G|^{(n-1)/n},$$

il existe une boule B centrée sur G telle que $|B| = |G|$ et telle que

$$(1.3.14) \quad |G \Delta B| \leq \delta |G|.$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord qu'il suffit d'obtenir l'existence d'une boule B non nécessairement centrée sur l'ensemble G considéré. En effet, si G est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et B une boule telle que $|B| = |G| < +\infty$ et $|G \Delta B| \leq \delta |G|$, alors $\delta^{1/n} B \cap G \neq \emptyset$. Soit alors B' une boule centrée sur $\delta^{1/n} B \cap G$ de même rayon que B . On a

$$\begin{aligned} |G \Delta B'| &\leq |G \Delta B| + |B \Delta B'| \\ &\leq \delta |G| + |B \setminus (1 - \delta^{1/n})B| + |B' \setminus (1 - \delta^{1/n})B'| \\ &\leq (\delta + 2(1 - (1 - \delta^{1/n})^n)) |G|. \end{aligned}$$

Soit $0 < \delta < 1$. Par l'absurde, supposons avoir trouvé une suite d'ensembles \tilde{G}_k , $k \geq 1$, $1/k$ -quasi-isopérimétriques tels que $|\tilde{G}_k \Delta B| > \delta |\tilde{G}_k|$ pour toute boule B telle que $|B| = |\tilde{G}_k|$. Posons $G_k = |\tilde{G}_k|^{-1/n} \tilde{G}_k$. On a alors, pour tout $k \geq 1$,

$$(1.3.15) \quad |G_k| = 1,$$

$$(1.3.16) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_k}| \leq C_n \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

et

$$(1.3.17) \quad |G_k \Delta B| > \delta,$$

pour toute boule B telle que $|B| = 1$. On va montrer, en utilisant des arguments de type concentration-compacité, que, quitte à translater les G_k et à extraire une sous-suite, χ_{G_k} converge dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction caractéristique χ_G . En utilisant (1.3.15), on en déduira que $|G| = 1$. D'autre part, d'après l'inégalité isopérimétrique (1.3.12) et d'après le théorème 1.3.2 et (1.3.16), on saura que

$$C_n \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_k}| \leq C_n,$$

c'est-à-dire qu'il y a égalité dans l'inégalité isopérimétrique et que G est donc, à un ensemble de mesure nulle près, une boule. Ceci contredit (1.3.17) et achèvera la démonstration du lemme.

Montrons dans un premier temps qu'il existe $\nu > 0$, ne dépendant que de la dimension, tel que

$$(1.3.18) \quad |G_k \cap B_k| > \nu$$

pour tout $k \geq 1$, où B_k est une boule de rayon 1. Soient donc $0 < \nu < |B_1|/2$, que l'on fixera petit plus tard, $k \geq 1$ et \mathcal{A} un ensemble maximal de points de G_k à distance mutuelle ≥ 1 . Posons $B_x = B(x, 1)$ et supposons que $|G_k \cap B_x| \leq \nu$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. On a alors en utilisant l'inégalité de Sobolev-Poincaré (1.3.11),

$$\nu^{-1/n} |G_k \cap B_x| \leq |G_k \cap B_x|^{(n-1)/n} \leq C \int_{B_x} |\nabla \chi_{G_k}|$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$, et donc

$$\nu^{-1/n} = \nu^{-1/n} |G_k| \leq \nu^{-1/n} \sum_{x \in \mathcal{A}} |G_k \cap B_x| \leq C \sum_{x \in \mathcal{A}} \int_{B_x} |\nabla \chi_{G_k}|.$$

Les boules $B(x, \frac{1}{2})$ étant deux à deux disjointes, tout point de \mathbb{R}^n appartient à au plus N boules B_x , $x \in \mathcal{A}$, où N ne dépend que de la dimension, et en utilisant (1.3.16), on en déduit

$$\nu^{-1/n} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_k}| \leq C',$$

pour une constante C' ne dépendant que de la dimension. On choisit alors ν assez petit pour obtenir une contradiction et on en déduit (1.3.18) avec $B_k = B_x$ pour un certain $x \in \mathcal{A}$. Quitte à translater G_k , on peut donc supposer que

$$|G_k \cap B_1| > \nu,$$

pour tout $k \geq 1$. Rappelons que $B_1 = B(0, 1)$.

D'après (1.3.15) et (1.3.16), on a $\sup_k \|\chi_{G_k}\|_{BV} < +\infty$. D'après le théorème 1.3.3, on peut donc supposer que, quitte à extraire une sous-suite, χ_{G_k} converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et presque partout vers une fonction caractéristique χ_G . Comme on l'a déjà dit, il suffit de montrer que la convergence a lieu dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour conclure.

Soit $\eta > 0$. Comme

$$|G| \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} |G_k| < +\infty,$$

on peut trouver $R > 1$ tel que $|G \setminus B_R| < \eta$. Par convergence de χ_{G_k} vers χ_G dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|G_k \cap (B_{R+1} \setminus B_R)| \leq 2\eta,$$

pour k assez grand. Alors, par Fubini et Tchebychev, on peut trouver $t \in]R, R+1[$ tel que

$$H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t) \leq M\eta,$$

pour une certaine constante M ne dépendant que de la dimension. En effet, si $|\cdot|_1$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , on a

$$|\{t \in]R, R+1[: H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t) > M\eta\}|_1 \leq \frac{1}{M\eta} \int_R^{R+1} H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t) dt.$$

Par ailleurs,

$$\int_R^{R+1} H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t) dt = C|G_k \cap (B_{R+1} \setminus B_R)|,$$

où C ne dépend que de la dimension (voir [EG92], proposition 1, page 118) et on conclut en choisissant M assez grand. D'après la proposition 1.3.9, on peut de plus supposer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_k \cap B_t}| = \int_{B_t} |\nabla \chi_{G_k}| + H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_k \setminus B_t}| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_t} |\nabla \chi_{G_k}| + H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t).$$

Notons $\nu_k = |G_k \cap B_t|$. En appliquant l'inégalité isopérimétrique à $G_k \cap B_t$ et $G_k \setminus B_t$, on a alors

$$C_n \nu_k^{(n-1)/n} \leq \int_{B_t} |\nabla \chi_{G_k}| + H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t),$$

et

$$C_n (1 - \nu_k)^{(n-1)/n} \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_t} |\nabla \chi_{G_k}| + H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t),$$

donc

$$\begin{aligned} C_n \left(\nu_k^{(n-1)/n} + (1 - \nu_k)^{(n-1)/n} \right) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_k}| + 2H^{n-1}(G_k \cap \partial B_t) \\ &\leq C_n \left(1 + \frac{1}{k} \right) + 2M\eta, \end{aligned}$$

d'après (1.3.16) et par choix de t . D'où, pour k assez grand,

$$\nu_k^{(n-1)/n} + (1 - \nu_k)^{(n-1)/n} \leq 1 + C\eta.$$

Comme $\nu_k \geq |G_k \cap B_1| > \nu$, de l'étude de $u \mapsto u^{(n-1)/n} + (1-u)^{(n-1)/n}$ pour $u \in [\nu, 1]$ et de l'inégalité précédente, on déduit que, pour k assez grand, $\nu_k \geq f(\eta)$, où $f(\eta)$ tend vers 1 quand η tend vers 0. Donc $|G_k \setminus B_{R+1}| \leq 1 - \nu_k \leq 1 - f(\eta)$ et, comme par choix de R , $|G \setminus B_{R+1}| < \eta$, on en déduit

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{G_k} - \chi_G| &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{B_{R+1}} |\chi_{G_k} - \chi_G| + 1 - f(\eta) + \eta \\ &= 1 - f(\eta) + \eta, \end{aligned}$$

pour tout $\eta > 0$. On conclut alors en faisant tendre η vers 0. \square

REMARQUE 1.3.14. — En combinant la proposition 1.3.8 et le lemme 1.3.13, on obtient la même approximation pour les ensembles quasi-isopérimétriques au sens H^{n-1} , c'est-à-dire les sous-ensembles G de \mathbb{R}^n de mesure de Lebesgue finie tels que

$$H^{n-1}(\partial G) \leq C_n(1 + \varepsilon)|G|^{(n-1)/n}.$$

C'est en fait cette version H^{n-1} du lemme 1.3.13 que nous serons amenés à utiliser dans la suite.

1.4. Ensembles quasi-minimaux avec contrainte de volume

Nous allons maintenant définir les conditions de quasi-minimalité qui vont nous intéresser et citer nos principaux résultats.

1.4.1. Définitions. — On se fixe une fois pour toutes un réel $m_0 > 0$ et une fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$ au voisinage de 0. On pose

$$\mathcal{G}_{BV} = \{G \subset \mathbb{R}^n : |G| = m_0, \chi_G \in BV\},$$

et on définit les quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} de la manière suivante :

DÉFINITION 1.4.1. — On dira que G est un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} si $G \in \mathcal{G}_{BV}$ et si

$$(1.4.1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \Delta G'|)$$

pour tout $G' \in \mathcal{G}_{BV}$ tel que $G \Delta G' \Subset \mathbb{R}^n$.

Insistons sur le fait que l'on ne considère dans (1.4.1) que des candidats de même mesure de Lebesgue que G . D'autre part, comme $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$, la variation du périmètre d'un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} après toute petite perturbation admissible sera toujours négligeable par rapport à la surface initiale.

Il est parfois utile dans certains problèmes variationnels de se restreindre, au moins dans un premier temps, à des candidats uniformément bornés, notamment quand il s'agit d'obtenir l'existence de minima. Nous en verrons un exemple dans le chapitre 5.

On définit donc les quasi-minima avec contrainte de volume dans B_R de la manière suivante. On pose

$$(1.4.2) \quad R_0 = (\omega_n^{-1} m_0)^{1/n},$$

c'est-à-dire que R_0 est choisi de telle sorte que $|B_{R_0}| = m_0$, et, pour $R > R_0$,

$$\mathcal{G}_{BV}(R) = \{G \subset B_R : |G| = m_0, \chi_G \in BV\}.$$

DÉFINITION 1.4.2. — On dira que G est un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ si $G \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ et si (1.4.1) est vérifié pour tout $G' \in \mathcal{G}_{BV}(R)$.

Nous allons démontrer ici des propriétés de régularité identiques pour les quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} et de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. En particulier, les paramètres qui interviendront dans la quantification de ces propriétés ne dépendront que de la dimension, de m_0 et de la fonction g et donc ni du quasi-minimum considéré ni de R dans le cas des quasi-minima de $\mathcal{G}_{BV}(R)$.

1.4.2. Principaux résultats. — Remarquons tout d'abord que si G est un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} (respectivement de $\mathcal{G}_{BV}(R)$) et si \tilde{G} est équivalent à G , alors \tilde{G} est encore un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} (respectivement de $\mathcal{G}_{BV}(R)$). Avant de parler de bonnes propriétés de régularité de G , il faudra donc en retirer la partie inutile. Le résultat principal dit que, une fois nettoyés, les quasi-minima sont ouverts, ont une frontière Ahlfors-régulière (définition 1.2.4) et vérifient la condition B (définition 1.2.6), *avec des constantes qui ne dépendent que des données du problème*. Précisément :

THÉORÈME 1.4.3. — *Soit $G \in \mathcal{G}_{BV}$ un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} . Il existe un unique ouvert $G_0 \in \mathcal{G}_{BV}$ équivalent à G tel que*

$$(1.4.3) \quad \partial G_0 \text{ est Ahlfors-régulière,}$$

$$(1.4.4) \quad G_0 \text{ vérifie la condition B,}$$

les constantes intervenant dans (1.4.3) et (1.4.4) pouvant de plus être choisies en fonction uniquement de la dimension n , de m_0 et de la fonction g .

THÉORÈME 1.4.4. — *Soient $R \geq 2R_0$ et G un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Il existe un unique ouvert $G_0 \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ équivalent à G qui vérifie (1.4.3) et (1.4.4) avec des constantes qui peuvent être choisies en fonction uniquement de la dimension n , de m_0 et de la fonction g .*

On appellera constantes de régularité les constantes qui interviennent dans (1.4.3) et (1.4.4). On appellera constante universelle une constante qui ne dépend que de la dimension n , de m_0 et de g .

DÉFINITION 1.4.5 (Ensemble normalisé). — On dira qu'un sous-ensemble G de \mathbb{R}^n est normalisé si G est ouvert, à frontière Ahlfors-régulière et vérifie la condition B, avec des constantes universelles.

En d'autres termes, les théorèmes 1.4.3 et 1.4.4 nous disent que l'on peut toujours se ramener à des quasi-minima avec contrainte de volume normalisés. De manière générale, rien ne dit que les composantes connexes d'un ensemble normalisé sont aussi des sous-ensembles normalisés. De même, ce n'est pas parce que chacune des composantes connexes d'un ouvert de \mathbb{R}^n est normalisée que l'ouvert lui-même l'est encore. Pour nos quasi-minima normalisés, c'est cependant le cas.

THÉORÈME 1.4.6. — *Soient G un quasi-minimum normalisé de \mathcal{G}_{BV} ou $\mathcal{G}_{BV}(R)$ avec $R \geq 2R_0$ et W une composante connexe de G ou $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. Alors W est un sous-ensemble normalisé de \mathbb{R}^n .*

Couplé aux hypothèses à caractère global que l'on a faites sur les quasi-minima, à savoir qu'ils sont à périmètre fini et ont une mesure de Lebesgue finie, ce résultat permet d'obtenir des informations sur la taille et le nombre des composantes connexes des quasi-minima normalisés de \mathcal{G}_{BV} et $\mathcal{G}_{BV}(R)$ et de l'intérieur de leur complémentaire.

THÉORÈME 1.4.7. — *Il existe $\delta_0 > 0$ universel tel que, si G est un quasi-minimum normalisé de \mathcal{G}_{BV} ou $\mathcal{G}_{BV}(R)$ avec $R \geq 2R_0$ et si W est une composante connexe de G ou $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, alors $|W| \geq \delta_0$.*

D'autre part, il existe $N_0 > 0$ universel tel que G et $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ aient au plus N_0 composantes connexes.

Le point essentiel dans la démonstration de ces résultats est de réussir à s'affranchir de manière adéquate de la contrainte de volume. Nous aurons largement l'occasion de revenir sur ce point, mais signalons tout de suite une conséquence notable des constructions géométriques que nous allons mettre en oeuvre. Nous montrerons que les quasi-minima avec contrainte de volume normalisés vérifient le même genre de condition de quasi-minimalité que (1.4.1) pour n'importe quelle petite perturbation, *y compris celles qui ne préservent pas le volume*. En effet, si G est un quasi-minimum normalisé de \mathcal{G}_{BV} , alors

$$(1.4.5) \quad \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_G| \leq (1 + \omega(r)) \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_{G'}|,$$

pour tout $x \in \partial G$, tout $r \leq r_0$ où r_0 est une constante universelle et tout G' tel que $G \Delta G' \Subset B(x, r)$, avec $\omega(r) = Cr(1 + r^{-n}g(C'r^n))$ où C est une constante universelle et C' , qui dépend a priori de G et G' , est majoré par une constante universelle (voir la proposition 4.3.1).

En ce qui concerne les quasi-minima pour le périmètre (c'est-à-dire les ensembles qui vérifient (1.4.5) avec une fonction ω croissante et qui tend vers 0 en 0), des propriétés de régularité partielle sont connues, le degré de régularité de la frontière d'un quasi-minimum dépendant de la taille de la fonction ω au voisinage de 0. On pourra consulter par exemple [AP99], [Tam84] et [Rig00]. Pour en revenir à nos quasi-minima avec contrainte de volume, nous allons nous limiter pour plus de simplicité au cas où $g(t) = Ct^p$ avec $C > 0$ et $p > \frac{n-1}{n}$. Dans ce cas, la fonction ω associée est croissante et on aura le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4.8. — *Si $g(t) = Ct^p$ avec $C > 0$ et $p > (n-1)/n$ et si G est un quasi-minimum normalisé de \mathcal{G}_{BV} , alors il existe une constante universelle $C_0 > 0$ telle que, pour toute boule B centrée sur ∂G et de rayon $r \leq 1$, il existe une boule $\tilde{B} \subset B$ centrée sur ∂G , de rayon $\geq C_0 r$ telle que $\partial G \cap \tilde{B}$ soit un graphe $(n-1)$ -dimensionnel de classe $C^{1,\alpha}$ avec des constantes de régularité $C^{1,\alpha}$ universelles et où $\alpha = \min(\frac{np-(n-1)}{2}, \frac{1}{2})$.*

Ce théorème ne dit pas que ∂G est un graphe de classe $C^{1,\alpha}$ au voisinage de chacun de ses points, et en général elle ne l'est pas. On sait cependant d'après [AP99] ou [Tam84] que l'ensemble des singularités de la frontière d'un quasi-minimum au sens de (1.4.5) est de dimension de Hausdorff au plus $n-8$. En particulier, il est vide si $n \leq 7$ et on dispose alors d'un résultat de régularité complète (voir [Rig00]).

THÉORÈME 1.4.9. — *Si $n \leq 7$ et si $g(t) = Ct^p$ avec $C > 0$ et $p > (n-1)/n$ et si G est un quasi-minimum normalisé de \mathcal{G}_{BV} , alors il existe un rayon $r_0 > 0$ universel tel que, pour tout $x \in \partial G$, il existe $r \geq r_0$ tel que $\partial G \cap B(x, r)$ soit un graphe $(n-1)$ -dimensionnel de classe $C^{1,\alpha}$ avec des constantes de régularité $C^{1,\alpha}$ universelles et où $\alpha = \min(\frac{np-(n-1)}{2}, \frac{1}{2})$.*

1.4.3. Stratégie. — La démonstration des théorèmes 1.4.3 et 1.4.4 se fera en deux grandes étapes. La première, qui occupera le chapitre 2, consiste à obtenir les propriétés (1.4.3) et (1.4.4) mais avec des constantes de régularité qui dépendent a priori du quasi-minimum considéré. On montrera dans un deuxième temps que les constantes de régularité peuvent être choisies universelles. C'est la partie la plus délicate de ce travail. Les outils nécessaires à cette deuxième étape seront développés dans le chapitre 3 (nous allons y revenir dans un instant). La partie 4.1 du chapitre 4 reprend les

arguments du chapitre 2 mais utilise les constructions du chapitre 3 qui permettront d'exhiber des constantes de régularité universelles. Les propriétés des composantes connexes des quasi-minima avec contrainte de volume normalisés (théorèmes 1.4.6 et 1.4.7) seront démontrées dans la partie 4.2. Les propriétés de régularité $C^{1,\alpha}$ (théorèmes 1.4.8 et 1.4.9) le seront dans la partie 4.3.

Disons maintenant quelques mots sur les techniques que nous allons employer. De manière générale, on fait subir à un quasi-minimum avec contrainte de volume G de petites perturbations et on essaie de déduire de la condition de quasi-minimalité (1.4.1) les informations qui nous intéressent. La difficulté principale ici provient de la contrainte de volume imposée aux bons candidats à la comparaison. Dans la mesure où nous avons à travailler à volume constant, il faudra s'assurer que les différents candidats construits ont exactement le volume fixé. Aux petites échelles, le terme de périmètre est prépondérant par rapport au terme de volume et le point essentiel est de réussir à modifier le quasi-minimum G à volume constant tout en contrôlant de manière adéquate la variation du périmètre. Si l'on ne se préoccupe pas d'obtenir des constantes dans l'Ahlfors-régularité et dans la condition B ne dépendant que des données du problème, ceci ne sera pas trop compliqué. Mais comme nous cherchons à obtenir en fin de compte des constantes de régularité universelles, il faudra aussi contrôler de manière uniforme la variation du périmètre. Dans le cas où les modifications ont légèrement augmenté la masse, il sera assez facile de conclure (grâce au lemme 3.1.1). Le cas contraire est un peu plus délicat. Le point clé sera la construction de la proposition 3.2.1. Grossièrement parlant, on se ramènera, grâce notamment au lemme d'approximation des ensembles quasi-isopérimétriques 1.3.13, au cas où l'on a une portion de cylindre de taille adaptée à la masse à rajouter et un ensemble dont la frontière à l'intérieur du cylindre est proche d'une portion de sphère. On pourra alors rajouter des points du type $(w, t + \tilde{f}(w))$ pour une fonction \tilde{f} bien choisie et où $(w, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sont les points de l'ensemble qui sont à l'intérieur de la portion de cylindre. L'idée est que si la frontière était un graphe, ce genre de transformations serait bien adapté à notre problème. Evidemment la situation ne sera pas aussi simple, mais on pourra toujours se ramener au cas où l'on est relativement proche de cette situation idéale. Ceci est une description assez vague mais nous y reviendrons en détail le moment venu.

Signalons enfin que les démonstrations des théorèmes 1.4.3 et 1.4.4 sont essentiellement les mêmes. Techniquement, celle du théorème 1.4.4 est un peu plus délicate (parce qu'il faut s'assurer que les candidats à la comparaison restent inclus dans B_R). L'essentiel des démonstrations est rédigé dans le cas des quasi-minima de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Il sera facile de voir que les mêmes arguments s'appliquent dans le cas des quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} .

CHAPITRE 2

RÉGULARITÉ DES QUASI-MINIMA

Le but de ce chapitre est d'obtenir une version faible du théorème 1.4.4 dans laquelle nous n'aurons pas de contrôle universel sur les constantes de régularité. Il s'agit donc pour l'instant d'associer à tout quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ un ouvert équivalent dont la frontière est Ahlfors-régulière (définition 1.2.4) et qui vérifie la condition B (définition 1.2.6), avec des constantes dans ces deux propriétés qui dépendent a priori de R et du quasi-minimum considéré (voir la proposition 2.2.1).

2.1. Lemmes préliminaires

Nous allons tout d'abord donner quelques lemmes techniques. Le premier d'entre eux va nous permettre de modifier à de petites échelles un ensemble de périmètre fini tout en gardant un bon contrôle sur la variation du périmètre et sur la différence symétrique entre l'ensemble de départ et le nouvel ensemble.

LEMME 2.1.1 ([Giu81], Lemme 2.1). — *Soit $L \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\chi_L \in BV$ et D un ouvert connexe. On suppose que*

$$\int_D |\nabla \chi_L| > 0.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $Q > 0$, ne dépendant que de $L \cap D$ et D , tels que, pour tout réel v , $|v| < \varepsilon$, il existe F , $F = L$ sur un voisinage du complémentaire de D , tel que

$$(2.1.1) \quad |F| = |L| + v,$$

$$(2.1.2) \quad \int_D |\nabla \chi_F| \leq \int_D |\nabla \chi_L| + Q|v|,$$

$$(2.1.3) \quad \int_D |\chi_F - \chi_L| \leq Q|v|.$$

Nous en redonnons ici la démonstration. Nous la reprendrons dans le paragraphe 4.1.2 pour obtenir une version uniforme de ce lemme.

Démonstration. — D'après la définition du périmètre, on peut trouver $w \in C_0^1(D, \mathbb{R}^n)$, $\|w\|_\infty \leq 1$, tel que

$$\int_D \chi_L \operatorname{div} w \, dx \geq \frac{1}{2} \int_D |\nabla \chi_L| > 0.$$

Pour $0 < t < 1$, on pose $\eta_t(x) = x + tw(x)$. Alors $\eta_t(x) = x$ sur un voisinage du complémentaire de D , et pour $|t|$ assez petit, η_t est un difféomorphisme de D . Posons $L_t = \eta_t(L) = \{z \in \mathbb{R}^n : \eta_t^{-1}(z) \in L\}$. On a

$$\begin{aligned} |L_t| &= \int_L |\det D\eta_t| \, dx, \\ \int_D |\nabla \chi_{L_t}| &\leq \int_D |\det D\eta_t| |(D\eta_t)^{-1}| |\nabla \chi_L|. \end{aligned}$$

D'autre part, $\det D\eta_t = 1 + t \operatorname{div} w + t^2 A(x, t)$ et $(D\eta_t)^{-1} = I - tH(x, t)$, avec $|A|$ et $|H|$ bornés par une constante ne dépendant que de $\sup |Dw|$, et donc que de $L \cap D$ et D . On obtient alors pour t assez petit,

$$\begin{aligned} |L_t| &= |L| + t \int_D \chi_L \operatorname{div} w \, dx + t^2 \int_D \chi_L A(x, t) \, dx, \\ \int_D |\nabla \chi_{L_t}| &\leq \int_D |\nabla \chi_L| + C|t|. \end{aligned}$$

Et donc, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et $C' > 0$, ne dépendant que de L et $L \cap D$, tels que pour tout réel v , $|v| < \varepsilon$, il existe θ , $|\theta| \leq C'|v|$, tel que $|L_\theta| = |L| + v$. On pose $F = L_\theta$. Alors F vérifie (2.1.1) et (2.1.2). Pour montrer (2.1.3), on considère $f \in C^1(D)$ et on pose $f_t = f(\eta_t^{-1})$. On a

$$f_t(z) - f(z) = f_t(z) - f_t(\eta_t(z)) = - \int_0^1 \langle tw(z), Df_t(z + tsw(z)) \rangle \, ds$$

et donc

$$\int_D |f_t(z) - f(z)| \, dz \leq |t| \int_0^1 \, ds \int_D |\nabla f_t \circ \eta_{ts}| \, dz \leq C|t| \int_D |\nabla f| \, dx.$$

Par approximation, on obtient cette inégalité pour tout $f \in BV$ et donc en particulier pour $f = \chi_L$, ce qui est exactement (2.1.3). \square

Fixons-nous maintenant $R > R_0$ et un quasi-minimum G de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ comme dans la définition 1.4.2. L'inégalité de Sobolev-Poincaré (1.3.11) nous dit que

$$0 < \min \{|G \cap B_R|, |B_R \setminus G|\} \leq C \left(\int_{B_R} |\nabla \chi_G| \right)^{n/(n-1)},$$

et d'autre part, d'après (1.3.5) on sait que $|\nabla\chi_G| = H^{n-1}|\partial^*G$. On peut donc trouver $0 < t_0 < 1$ et deux boules B_1 et B_2 de rayon t_0 , incluses dans B_R , telles que

$$(2.1.4) \quad 3B_1 \cap B_2 = \emptyset,$$

$$(2.1.5) \quad \int_{B_i} |\nabla\chi_G| > 0 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Les deux boules B_1 et B_2 sont les endroits où nous utiliserons le lemme 2.1.1. Nous nous arrangerons toujours pour ne pas modifier G en même temps dans B_1 et B_2 et celle des deux boules où rien n'a été modifié servira, via le lemme 2.1.1, à ajuster la masse des divers candidats envisagés.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, posons

$$(2.1.6) \quad h(x, r) = r^{-n} \min \{|G \cap B(x, r)|, |B(x, r) \setminus G|\}.$$

C'est une manière d'estimer la proportion de G et de son complémentaire dans une boule $B(x, r)$. Nous reprenons ici une idée de [DS98] : on cherche à construire un ensemble G_0 , équivalent à G , pour lequel on a une borne inférieure sur la fonction $h(x, r)$ pour les couples (x, r) avec $x \in \partial G_0$ et r suffisamment petit. L'Ahlfors-régularité et la condition B seront des conséquences automatiques de cette estimation. Dans un premier temps, le lemme qui suit va nous permettre de contrôler $h(x, \frac{r}{2})$ en fonction de $h(x, r)$.

LEMME 2.1.2. — *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $0 < r \leq t_0$, si $h(x, r) < \varepsilon$ alors*

$$(2.1.7) \quad h\left(x, \frac{r}{2}\right) \leq \frac{1}{2}h(x, r).$$

Démonstration. — Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < r \leq t_0$. L'idée est la suivante. Si $h(x, r) = r^{-n}|G \cap B(x, r)|$ est petit, on a tout intérêt à effacer ce qui se trouve à l'intérieur de $B(x, t)$ pour un t bien choisi. De manière similaire, si $h(x, r) = r^{-n}|B(x, r) \setminus G|$ est petit, on ajoutera à G toute la partie de la boule $B(x, t)$ qui se trouve dans B_R (on veut garder des candidats inclus dans B_R). Dans les deux cas, on gagne toute la frontière à l'intérieur de $B(x, t)$. Comme $h(x, r)$ est supposé petit, on perd dans le terme de volume de (1.4.1) nettement moins que ce que l'on a gagné en frontière. Reste à faire attention à ce qui passe à la frontière de la boule $B(x, t)$. Nous choisirons t de manière à contrôler la perte $H^{n-1}(G \cap \partial B(x, t))$ dans le premier cas et $H^{n-1}(\partial B(x, t) \setminus G)$ dans le second en fonction de $r^{n-1}h(x, r)$. Nous allons en fait distinguer quatre cas.

Premier cas : $h(x, r) = r^{-n}|G \cap B(x, r)|$ et $B(x, r) \cap B_1 = \emptyset$. Par Fubini et Tchebychev on peut trouver $t \in [\frac{r}{2}, r[$ tel que

$$(2.1.8) \quad H^{n-1}(G \cap \partial B(x, t)) \leq C \frac{|G \cap B(x, r)|}{r},$$

où C ne dépend ni de x ni de r (voir la démonstration du lemme 1.3.13). En utilisant (1.3.9), on peut de plus supposer que

$$(2.1.9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \setminus B(x,t)}| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}(G \cap \partial B(x,t)).$$

Posons $G' = G \setminus B(x,t)$. Soient ε et Q associés à $L = G$ et $D = B_1$ par le lemme 2.1.1. Notons qu'ils ne dépendent que de $G \cap B_1$ et de B_1 , donc en particulier ni de x ni de r ou t . Comme par ailleurs $G' \cap B_1 = G \cap B_1$, les deux constantes ε et Q conviennent encore si l'on veut appliquer le lemme 2.1.1 à $L = G'$ et $D = B_1$. Si $h(x,r) < \varepsilon$, comme $r \leq 1$, on a

$$(2.1.10) \quad |G \cap B(x,t)| \leq |G \cap B(x,r)| = r^n h(x,r) \leq r^{n-1} h(x,r) < \varepsilon,$$

et on peut donc appliquer le lemme 2.1.1 à $L = G'$, $D = B_1$ et $v = |G \cap B(x,t)|$ ce qui nous donne $F \subset B_R$ tel que $F = G'$ sur un voisinage du complémentaire de B_1 , $|F| = |G'| + |G \cap B(x,t)| = m_0$ et tel que

$$(2.1.11) \quad \int_{B_1} |\nabla \chi_F| \leq \int_{B_1} |\nabla \chi_{G'}| + Q |G \cap B(x,t)|,$$

$$(2.1.12) \quad |F \Delta G'| \leq Q |G \cap B(x,t)|.$$

Comme $F = G'$ sur un voisinage du complémentaire de B_1 , on a

$$(2.1.13) \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |\nabla \chi_F| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |\nabla \chi_{G'}|.$$

En combinant (2.1.11) et (2.1.13), on obtient

$$(2.1.14) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + Q |G \cap B(x,t)|.$$

En utilisant maintenant (2.1.10) on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + Cr^{n-1} h(x,r).$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}(G \cap \partial B(x,t)) && \text{(d'après (2.1.9))} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + C \frac{|G \cap B(x,r)|}{r} && \text{(d'après (2.1.8))} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + Cr^{n-1} h(x,r), \end{aligned}$$

d'où

$$(2.1.15) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + Cr^{n-1} h(x,r).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 |F\Delta G| &\leq |F\Delta G'| + |G'\Delta G| \\
 &\leq C|G \cap B(x, t)| && \text{(d'après (2.1.12) et par définition de } G') \\
 &\leq Cr^n h(x, r) && \text{(d'après (2.1.10))} \\
 &\leq C\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Comme $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$, on en déduit que, quitte à diminuer ε ,

$$g(|F\Delta G|) \leq \eta r^{n-1} h(x, r)^{(n-1)/n},$$

où η sera fixé petit dans un instant (indépendamment de ε). Comme $F \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ et comme G est un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$, on obtient, en utilisant (2.1.15) et (1.4.1),

$$\int_{B(x,t)} |\nabla \chi_G| \leq \left(Ch(x, r) + \eta h(x, r)^{(n-1)/n} \right) r^{n-1}.$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Sobolev-Poincaré (1.3.11), on a d'autre part

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{r}{2}\right)^n h\left(x, \frac{r}{2}\right) &= \min \left\{ \left| G \cap B\left(x, \frac{r}{2}\right) \right|, \left| B\left(x, \frac{r}{2}\right) \setminus G \right| \right\} \\
 &\leq C \left(\int_{B(x, \frac{r}{2})} |\nabla \chi_G| \right)^{n/(n-1)} \\
 &\leq C \left(\int_{B(x,t)} |\nabla \chi_G| \right)^{n/(n-1)}.
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 h\left(x, \frac{r}{2}\right) &\leq C \left(h(x, r) + \eta h(x, r)^{(n-1)/n} \right)^{n/(n-1)} \\
 &\leq \frac{1}{2} h(x, r),
 \end{aligned}$$

si η est choisi suffisamment petit, en fonction uniquement de la dimension, et quitte à diminuer ε . Ce qui est exactement (2.1.7).

Deuxième cas : $h(x, r) = r^{-n}|G \cap B(x, r)|$ et $B(x, r) \cap B_1 \neq \emptyset$. On a $B(x, r) \subset 3B_1$ et (2.1.4) assure que $B(x, r) \cap B_2 = \emptyset$. On effectue alors la même construction que précédemment en remplaçant B_1 par B_2 .

Troisième cas : $h(x, r) = r^{-n}|B(x, r) \setminus G|$ et $B(x, r) \cap B_1 = \emptyset$. Nous allons effectuer une construction analogue à la précédente avec $G' = (G \cup B(x, t)) \cap B_R$ pour un certain t que nous allons choisir tout de suite. Par Fubini et Tchebychev, on peut trouver $t \in]\frac{r}{2}, r[$ tel que

$$(2.1.16) \quad H^{n-1}(\partial B(x, t) \setminus G) \leq C \frac{|B(x, r) \setminus G|}{r}.$$

En utilisant (1.3.8), on peut de plus supposer que

$$(2.1.17) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \cup B(x,t)}| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}((\partial B(x,t)) \setminus G).$$

Dans la mesure où $B(x,t)$ n'est pas nécessairement incluse dans B_R et où l'on veut cependant obtenir un candidat de $\mathcal{G}_{BV}(R)$, on ne peut ajouter à G toute la boule $B(x,t)$, mais seulement la partie qui se trouve dans B_R . Posons donc

$$G' = (G \cup B(x,t)) \cap B_R.$$

Si $h(x,r) < \varepsilon$ (où ε est maintenant fixé comme dans les deux cas précédents), comme $r \leq 1$, on a

$$|G' \setminus G| \leq |B(x,t) \setminus G| \leq |B(x,r) \setminus G| = r^n h(x,r) \leq r^{n-1} h(x,r) < \varepsilon,$$

et par choix de ε (voir ce qui suit (2.1.9)), on peut encore appliquer ici le lemme 2.1.1 à $L = G'$, $D = B_1$ et $v = -|G' \setminus G|$ ce qui nous donne $F \subset B_R$, coïncidant avec G' sur un voisinage du complémentaire de B_1 , $|F| = |G'| - |G' \setminus G| = m_0$, tel que

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\nabla \chi_F| &\leq \int_{B_1} |\nabla \chi_{G'}| + Q|G' \setminus G| \\ &\leq \int_{B_1} |\nabla \chi_{G'}| + Cr^{n-1} h(x,r), \end{aligned}$$

et tel que

$$|F \Delta G'| \leq Q|G' \setminus G| \leq Cr^n h(x,r).$$

Alors, comme dans le premier cas, on a

$$(2.1.18) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + Cr^{n-1} h(x,r).$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \cup B(x,t)}| + H^{n-1}(\partial B_R \cap \overline{B}(x,t)).$$

Si $\rho : \mathbb{R}^n \setminus B_R \mapsto \partial B_R$ est définie par $\rho(x) = Rx/|x|$, alors ρ est 1-lipschitzienne et

$$\partial B_R \cap \overline{B}(x,t) \subset \rho((\partial B(x,t)) \setminus B_R) \subset \rho((\partial B(x,t)) \setminus G)$$

car $G \subset B_R$, donc

$$(2.1.19) \quad H^{n-1}(\partial B_R \cap \overline{B}(x,t)) \leq H^{n-1}((\partial B(x,t)) \setminus G).$$

On en déduit

(2.1.20)

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \cup B(x,t)}| + H^{n-1}((\partial B(x,t)) \setminus G) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + 2H^{n-1}((\partial B(x,t)) \setminus G) \quad (\text{d'après (2.1.17)}) \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + C \frac{|B(x,r) \setminus G|}{r} \quad (\text{d'après (2.1.16)}) \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + Cr^{n-1}h(x,r).
 \end{aligned}$$

En combinant (2.1.18) et (2.1.20), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,t)} |\nabla \chi_G| + Cr^{n-1}h(x,r).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 |F \Delta G| &\leq |F \Delta G'| + |G' \Delta G| \\
 &\leq Cr^n h(x,r) \leq C\varepsilon.
 \end{aligned}$$

On conclut alors comme dans le premier cas en utilisant la quasi-minimalité de G et l'inégalité de Sobolev-Poincaré.

Quatrième cas : $h(x,r) = r^{-n}|B(x,r) \setminus G|$ et $B(x,r) \cap B_1 \neq \emptyset$. On effectue la construction précédente en remplaçant B_1 par B_2 pour conclure. \square

Une conséquence automatique du lemme 2.1.2 est le lemme suivant :

LEMME 2.1.3. — *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $0 < r \leq t_0$, si $h(x,r) < \varepsilon$ alors*

$$(2.1.21) \quad \left| G \cap B\left(x, \frac{r}{2}\right) \right| = 0 \quad \text{ou} \quad \left| B\left(x, \frac{r}{2}\right) \setminus G \right| = 0.$$

Démonstration. — Notons ε' la constante donnée par le lemme 2.1.2 et posons

$$\varepsilon = \min\{2^{-2n-1}\omega_n, 2^{-n}\varepsilon'\}.$$

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < r \leq t_0$ tels que $h(x,r) < \varepsilon$. Pour $y \in B(x, \frac{r}{2})$, notons $d_k = h(y, 2^{-k}r)$.

Si $h(x,r) = r^{-n}|G \cap B(x,r)|$, on a

$$\left(\frac{r}{2}\right)^{-n} \left| G \cap B\left(y, \frac{r}{2}\right) \right| \leq 2^n h(x,r) < 2^n \varepsilon < \min\left(\varepsilon', \frac{\omega_n}{2}\right),$$

donc en particulier,

$$d_1 = \left(\frac{r}{2}\right)^{-n} \left| G \cap B\left(y, \frac{r}{2}\right) \right| \quad \text{et} \quad d_1 < \varepsilon'.$$

D'après le lemme 2.1.2, on en déduit que

$$d_2 \leq \frac{d_1}{2}.$$

En raisonnant par récurrence et en utilisant le lemme 2.1.2, on montre alors que

$$d_k = (2^{-k}r)^n |G \cap B(y, 2^{-k}r)| < 2^n \varepsilon \quad \text{et} \quad d_{k+1} \leq \frac{d_k}{2},$$

pour tout $k \geq 1$. D'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (2^{-k}r)^n |G \cap B(y, 2^{-k}r)| = 0.$$

Donc y n'est pas un point de densité de G , et comme ceci est vrai pour tout y de $B(x, \frac{r}{2})$, on en déduit que $|G \cap B(x, \frac{r}{2})| = 0$.

Si $h(x, r) = r^{-n} |B(x, r) \setminus G|$, on montre de même que, pour tout $k \geq 1$,

$$d_k = (2^{-k}r)^{-n} |B(y, 2^{-k}r) \setminus G| < 2^n \varepsilon \quad \text{et} \quad d_{k+1} \leq \frac{d_k}{2}.$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (2^{-k}r)^{-n} |B(y, 2^{-k}r) \setminus G| = 0,$$

et y n'est pas un point de densité de $\mathbb{R}^n \setminus G$. Comme ceci est vrai pour tout y de $B(x, \frac{r}{2})$, on en déduit que $|B(x, \frac{r}{2}) \setminus G| = 0$. \square

2.2. Preuve de la régularité des quasi-minima

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la version suivante du théorème 1.4.4 dans laquelle on ne dispose pas pour l'instant de constantes de régularité universelles.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soient $R > R_0$ et G un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Il existe un unique ouvert $G_0 \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ équivalent à G tel que*

$$(2.2.1) \quad \partial G_0 \text{ est Ahlfors-régulière,}$$

$$(2.2.2) \quad G_0 \text{ vérifie la condition B.}$$

De plus $|\nabla \chi_{G_0}|$ est une mesure qui vérifie (1.2.1) c'est-à-dire

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in \partial G_0 \quad \forall r \in]0, 1], \quad C^{-1} r^{n-1} \leq \int_{B(x, r)} |\nabla \chi_{G_0}| \leq C r^{n-1}.$$

D'autre part $\partial G_0 \subset \partial G$ et si $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}$, alors $\partial G_1 = \partial G_0$.

Voir la remarque 2.2.2 pour ce qui concerne les quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} .

Démonstration. — Posons

$$(2.2.3) \quad G_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \quad |B(x, r) \setminus G| = 0\},$$

$$(2.2.4) \quad G_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \quad |B(x, r) \cap G| = 0\},$$

$$(2.2.5) \quad S = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x, r) \geq \varepsilon \quad \forall r \in]0, t_0]\},$$

où ε est donné par le lemme 2.1.3 et t_0 a été fixé dans la partie précédente (voir ce qui précède le lemme 2.1.2).

Une conséquence immédiate du lemme 2.1.3 est que G_0 , G_1 et S forment une partition de \mathbb{R}^n . Remarquons aussi que G_0 et G_1 sont ouverts et que $G_0 \subset B_R$.

D'autre part, G_0 est l'ensemble des points de densité de G et G_1 est l'ensemble des points de densité de $\mathbb{R}^n \setminus G$. En effet, par définition de G_0 et de G_1 , il est clair que G_0 et G_1 sont inclus dans l'ensemble des points de densité de respectivement G et $\mathbb{R}^n \setminus G$. Réciproquement, si x est un point de densité de G , pour r assez petit, $h(x, r) = r^{-n}|B(x, r) \setminus G|$ et $h(x, r)$ tend vers zéro. Donc $x \notin G_1 \cup S$ et $x \in G_0$. On raisonne de même avec les points de densité de $\mathbb{R}^n \setminus G$. On en déduit

$$|G \setminus G_0| = |G_0 \setminus G| = |(\mathbb{R}^n \setminus G) \setminus G_1| = |G_1 \setminus (\mathbb{R}^n \setminus G)| = 0.$$

En particulier,

$$|G_0 \Delta G| = 0 \quad \text{et} \quad G_0 \in \mathcal{G}_{BV}(R)$$

et si \tilde{h} est l'analogie de la fonction h définie comme dans (2.1.6) avec G remplacé par G_0 , alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $\tilde{h}(x, r) = h(x, r)$.

Par définition de S , il est clair que $S \subset \partial G$. Vérifions que $S = \partial G_0 = \partial G_1$. Si $x \in S$, pour r assez petit, $|G_0 \cap B(x, r)| = |B(x, r) \setminus G_1| > 0$ et $|G_1 \cap B(x, r)| = |B(x, r) \setminus G_0| > 0$, donc $x \in \partial G_0 \cap \partial G_1$. Réciproquement si $x \in \partial G_0 \cup \partial G_1$, $x \notin G_0 \cup G_1$ (ils sont tous les deux ouverts et disjoints), donc $x \in S$. On a donc

$$S = \partial G_0 = \partial G_1 \subset \partial G \quad \text{et} \quad G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}.$$

Montrons maintenant que S est Ahlfors-régulière. D'après l'inégalité de Sobolev-Poincaré (1.3.11), on a

$$r^n h(x, r) = r^n \tilde{h}(x, r) \leq C \left(\int_{B(x, r)} |\nabla \chi_{G_0}| \right)^{n/(n-1)}.$$

Donc si $x \in S$ et $r \leq t_0$, on en déduit en utilisant la définition de S (voir (2.2.5)),

$$(2.2.6) \quad \int_{B(x, r)} |\nabla \chi_{G_0}| \geq Cr^{n-1}.$$

Quitte à modifier, en fonction de t_0 , la constante C qui intervient dans (2.2.6), on obtient la même inégalité pour tous les rayons de $]t_0, 1]$. Et donc (2.2.6) est valide pour tout $x \in S$ et tout $r \in]0, 1]$.

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < r < +\infty$, on a d'après (1.3.7)

$$(2.2.7) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G \setminus B(x,r)}| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x,r)} |\nabla \chi_G| + H^{n-1}(\partial B(x,r)) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x,r)} |\nabla \chi_G| + Cr^{n-1}. \end{aligned}$$

Posons $G' = G \setminus B(x,r)$. Soient $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et $Q = \max\{Q_1, Q_2\}$ où ε_1 et Q_1 sont associés à $L = G$ et $D = B_1$ par le lemme 2.1.1 et ε_2 et Q_2 sont associés à $L = G$ et $D = B_2$ toujours par le lemme 2.1.1 (voir ce qui précède le lemme 2.1.2 pour le choix de B_1 et B_2). Si $r < t_1$ avec $t_1 = \min\{t_0, (\omega_n^{-1}\varepsilon')^{1/n}\}$, on a

$$|G \setminus G'| = |G \cap B(x,r)| \leq \omega_n r^n < \varepsilon',$$

et on peut appliquer le lemme 2.1.1 à $L = G'$ et $D = B_1$ si $B(x,r) \cap B_1 = \emptyset$, $L = G'$ et $D = B_2$ sinon, et $v = |G \setminus G'|$, ce qui nous donne un candidat $F \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ tel que

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + Q|G \cap B(x,r)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + Cr^{n-1} \quad (\text{car } r \leq 1), \end{aligned}$$

et tel que

$$|F \Delta G'| \leq Q|G \cap B(x,r)|.$$

En combinant (2.2.8) et (2.2.7), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x,r)} |\nabla \chi_G| + Cr^{n-1}.$$

D'autre part, $|F \Delta G| \leq C|G \cap B(x,r)| \leq Cr^n$, donc, quitte à diminuer t_1 , on a $g(|F \Delta G|) \leq r^{n-1}$ et on obtient en utilisant la quasi-minimalité de G ,

$$(2.2.9) \quad \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_{G_0}| = \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_G| \leq Cr^{n-1},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in]0, t_1[$. Quitte à modifier la constante C qui intervient dans (2.2.9), en fonction de t_1 , on en déduit finalement que (2.2.9) est valide pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in]0, 1]$ et en particulier pour tout $x \in S$. Les inégalités (2.2.6) et (2.2.9) démontrent donc que $S = \partial G_0$ est Ahlfors-régulière et que $|\nabla \chi_{G_0}|$ est une mesure qui vérifie (1.2.1).

Montrons maintenant que G_0 vérifie la condition B. Soient $x \in S$ et $0 < r \leq \min\{\frac{1}{2}, 2t_0\}$. Comme $h(x, \frac{r}{2}) \geq \varepsilon$, $|G_0 \cap B(x, \frac{r}{2})| \geq 2^{-n}\varepsilon r^n$ et $|B(x, \frac{r}{2}) \setminus G_0| \geq 2^{-n}\varepsilon r^n$. D'autre part, pour tout $0 < t < 1$, $|\{y \in B(x, \frac{r}{2}) : d(y, S) \leq tr/2\}| \leq Ctr^n$. En effet, choisissons un ensemble maximal \mathcal{A} de points de $S \cap B(x, r)$ à distance mutuelle $\geq tr/2$.

Les $B(z, tr/4)$, $z \in \mathcal{A}$, sont deux à deux disjointes, et grâce à l'Ahlfors-régularité de S , on a

$$\begin{aligned} \#\mathcal{A} &\leq C \sum_{z \in \mathcal{A}} (tr)^{-n+1} H^{n-1} \left(S \cap B \left(z, \frac{tr}{4} \right) \right) \\ &\leq C (tr)^{-n+1} H^{n-1} (S \cap B(x, 2r)) \\ &\leq Ct^{-n+1}. \end{aligned}$$

Comme $\{y \in B(x, r/2) : d(y, S) \leq tr/2\} \subset \bigcup_{z \in \mathcal{A}} B(z, tr)$, on peut conclure. En choisissant t assez petit (en fonction de ε), on peut alors trouver $y_0 \in G_0 \cap B(x, r/2)$ tel que $d(y_0, S) > tr/2$, et $y_1 \in G_1 \cap B(x, r/2)$ tel que $d(y_1, S) > tr/2$, c'est-à-dire $B(y_0, tr/2) \subset B(x, r) \cap G_0$ et $B(y_1, tr/2) \subset B(x, r) \setminus \overline{G_0}$, ce qui démontre que G_0 vérifie la condition B pour des rayons inférieurs à $\min\{1/2, 2t_0\}$. Alors, par l'argument habituel, quitte à modifier la constante qui intervient dans la définition de la condition B, on en déduit la même propriété pour tout $x \in S$ et tout $r \in]0, 1]$.

Reste à montrer l'unicité d'un ouvert équivalent à G et vérifiant (2.2.1) et (2.2.2). Ceci découle du fait que si G_0 et G'_0 sont équivalents et s'ils vérifient tous deux la condition B, alors ils sont égaux. En effet, comme $|G_0 \Delta G'_0| = 0$ et comme ils sont tous les deux ouverts, on a $G_0 \subset \overline{G'_0}$ et $G'_0 \subset \overline{G_0}$. D'autre part, si $x \in G_0 \cap \partial G'_0$, on peut trouver un rayon r suffisamment petit tel que $B(x, r) \subset G_0$ et tel que $|B(x, r) \setminus \overline{G'_0}| > 0$ (parce que G'_0 vérifie la condition B), ce qui contredit le fait que G_0 et G'_0 sont équivalents. Donc $G_0 \subset G'_0$ et de manière similaire $G'_0 \subset G_0$. Ceci achève donc la démonstration de la proposition 2.2.1. \square

REMARQUE 2.2.2. — Dans le cas des quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} , les démonstrations sont les mêmes et on obtient l'analogue de la proposition 2.2.1 pour les quasi-minima avec contrainte de volume dans \mathbb{R}^n . On peut même légèrement simplifier certains arguments (par exemple dans le troisième cas de la démonstration du lemme 2.1.2) puisque les perturbations admissibles d'un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} ne sont plus astreintes à rester dans une boule fixe.

2.3. Comparaison du périmètre et de la mesure H^{n-1}

Comme nous l'avons déjà signalé, la démonstration précédente ne permet pas d'obtenir un contrôle universel sur les constantes qui interviennent dans la quantification de l'Ahlfors-régularité et de la condition B. Les constantes de régularité que nous avons exhibées plus haut dépendent a priori du quasi-minimum considéré et de R d'une part parce que le rayon t_0 des deux boules B_1 et B_2 en dépend et d'autre part parce que l'on ne dispose pas de contrôle universel sur les paramètres ε et Q du lemme 2.1.1. Pour alléger les notations, donnons un nom aux quasi-minima dont la frontière est Ahlfors-régulière et qui vérifient la condition B.

DÉFINITION 2.3.1. — On appellera quasi-minimum régulier de \mathcal{G}_{BV} ou $\mathcal{G}_{BV}(R)$ un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} ou $\mathcal{G}_{BV}(R)$ qui est ouvert, dont la frontière est Ahlfors-régulière et qui vérifie la condition B.

Pour obtenir les théorèmes 1.4.3 et 1.4.4, il nous reste donc à montrer que l'on peut en fait choisir les constantes de régularité des quasi-minima réguliers en fonction uniquement de la dimension n , de m_0 et de la fonction g . Nous aurons en particulier besoin pour cela d'utiliser la conséquence suivante de la proposition 2.2.1 :

PROPOSITION 2.3.2. — Soit G un quasi-minimum régulier pour le périmètre dans $\mathcal{G}_{BV}(R)$ ou \mathcal{G}_{BV} . On a l'égalité suivante entre mesures :

$$|\nabla\chi_G| = H^{n-1}|\partial G.$$

Démonstration. — Soit G un quasi-minimum régulier de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ ou \mathcal{G}_{BV} . Par unicité dans la proposition 2.2.1, G vérifie les conclusions de cette proposition et en particulier $|\nabla\chi_G|$ est une mesure qui vérifie (1.2.1) avec $S = \partial G$. On en déduit que $\partial G \subset \text{spt } |\nabla\chi_G|$. On sait d'autre part d'après la proposition 1.2.5 que $|\nabla\chi_G|$ et $H^{n-1}|\partial G$ sont équivalentes (voir (1.2.2)). Alors, comme $|\nabla\chi_G|$ -presque tout point de $\text{spt } |\nabla\chi_G|$ est dans ∂^*G , H^{n-1} -presque tout point de ∂G est dans ∂^*G . Donc $H^{n-1}(\partial G \setminus \partial^*G) = 0$ et on en déduit l'égalité entre mesures $|\nabla\chi_G| = H^{n-1}|\partial^*G = H^{n-1}|\partial G$. \square

Pour démontrer la proposition précédente, nous avons utilisé le fait que $|\nabla\chi_G|$ est une mesure qui vérifie (1.2.1) et que dans ce cas $H^{n-1}|\partial G$ et $|\nabla\chi_G|$ sont de taille comparable. Signalons que l'on a la propriété plus générale suivante :

PROPOSITION 2.3.3 ([DS98]). — Soit G un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que sa frontière ∂G est Ahlfors-régulière, qu'il vérifie la condition B et que $H^{n-1}(\partial G) < +\infty$. Alors on a l'égalité entre mesures suivante :

$$|\nabla\chi_G| = H^{n-1}|\partial G.$$

Dans [DS98], lemmes 4.7 et 4.16, G. David et S. Semmes montrent que si G vérifie les hypothèses de la proposition 2.3.3, alors

$$C^{-1}H^{n-1}|\partial G| \leq |\nabla\chi_G| \leq CH^{n-1}|\partial G$$

pour une constante C ne dépendant que de la dimension. On conclut alors grâce au même raisonnement que dans la proposition 2.3.2.

Une des raisons pour lesquelles nous aurons besoin de la proposition 2.3.2 est que nous allons éviter l'emploi du lemme 2.1.1 en effectuant des constructions « à la main » dans lesquelles il sera plus simple d'estimer la mesure H^{n-1} de la frontière que le périmètre, et que tout quasi-minimum régulier G de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ vérifie une version

H^{n-1} de la condition de quasi-minimalité (1.4.1). Pour fixer les notations, on pose, pour $R > R_0$,

$$\mathcal{G}(R) = \{G \subset B_R : |G| = m_0, H^{n-1}(\partial G) < +\infty\},$$

et

$$\mathcal{G} = \{G \subset \mathbb{R}^n : |G| = m_0, H^{n-1}(\partial G) < +\infty\}.$$

D'après la proposition 1.3.8, $\mathcal{G}(R) \subset \mathcal{G}_{BV}(R)$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_{BV}$. Si G est un quasi-minimum régulier de $\mathcal{G}_{BV}(R)$, alors $G \in \mathcal{G}(R)$ d'après la proposition 2.3.2, et, pour tout $G' \in \mathcal{G}(R)$, on a

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \Delta G'|) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G') + g(|G \Delta G'|) \end{aligned}$$

d'après (1.4.1) pour la première inégalité et (1.3.6) pour la seconde. C'est-à-dire que G vérifie la version H^{n-1} suivante de la condition de quasi-minimalité :

$$(2.3.1) \quad H^{n-1}(\partial G) \leq H^{n-1}(\partial G') + g(|G \Delta G'|)$$

pour tout $G' \in \mathcal{G}(R)$.

De même, si $G \in \mathcal{G}_{BV}$ est un quasi-minimum régulier de \mathcal{G}_{BV} , il vérifie (2.3.1) pour tout $G' \in \mathcal{G}$ tel que $G \Delta G' \Subset \mathbb{R}^n$.

Dans la suite, nous utiliserons librement l'une ou l'autre des conditions de quasi-minimalité (1.4.1) et (2.3.1) selon nos besoins.

CHAPITRE 3

LES PRINCIPALES CONSTRUCTIONS

Ce chapitre est principalement consacré à des constructions géométriques qui nous permettront d'éviter l'emploi du lemme 2.1.1 dans lequel on n'a pas de contrôle universel sur les constantes ε et Q . Le paragraphe 3.1 traite du cas où il s'agit d'ajuster la masse d'un candidat de mesure de Lebesgue légèrement trop grande. Les paragraphes 3.2 et 3.3 nous permettront de traiter le cas un peu plus délicat des ajustements de masse concernant des candidats de mesure de Lebesgue légèrement trop petite. Nous allons travailler dans ce chapitre avec la version H^{n-1} de la condition de quasi-minimalité (voir (2.3.1) pour la définition et ce qui précède pour les notations).

3.1. Troncature

On considère ici des sous-ensembles de \mathbb{R}^n de mesure de Lebesgue strictement supérieure à m_0 .

LEMME 3.1.1. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné tel que $m_0 < |\Omega| < +\infty$ et $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$. Il existe $G \subset \Omega$, $G \in \mathcal{G}$, tel que*

$$(3.1.1) \quad H^{n-1}(\partial G) \leq H^{n-1}(\partial\Omega).$$

Démonstration. — Pour tout $a > 0$, on pose $H_a = \{(w, t) \in \mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : t < a\}$. L'application $a \mapsto |H_a \cap \Omega|$ est continue et

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} |H_a \cap \Omega| &= |\Omega|, \\ \lim_{a \rightarrow -\infty} |H_a \cap \Omega| &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc trouver a_0 tel que $|H_{a_0} \cap \Omega| = m_0$. D'autre part

$$(3.1.2) \quad \partial(\Omega \cap H_{a_0}) \subset (\partial\Omega \cap \overline{H_{a_0}}) \cup (\partial H_{a_0} \cap (\Omega \setminus \partial\Omega)).$$

Montrons que

$$(3.1.3) \quad H^{n-1}(\partial H_{a_0} \cap (\Omega \setminus \partial\Omega)) \leq H^{n-1}(\partial\Omega \setminus \overline{H}_{a_0}).$$

Soit $(w, a_0) \in \partial H_{a_0} \cap (\Omega \setminus \partial\Omega)$. Comme Ω est borné, on peut trouver $t > a_0$ tel que $(w, t) \notin \Omega$. Comme $(w, a_0) \in \Omega \setminus \partial\Omega$, on peut alors trouver $t', a_0 < t' \leq t$, tel que $(w, t') \in \partial\Omega$. Si on note p la projection orthogonale sur ∂H_{a_0} , on en déduit que

$$\partial H_{a_0} \cap (\Omega \setminus \partial\Omega) \subset p(\partial\Omega \setminus \overline{H}_{a_0}),$$

et donc

$$H^{n-1}(\partial H_{a_0} \cap (\Omega \setminus \partial\Omega)) \leq H^{n-1}(p(\partial\Omega \setminus \overline{H}_{a_0})) \leq H^{n-1}(\partial\Omega \setminus \overline{H}_{a_0}).$$

En combinant (3.1.2) et (3.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial(\Omega \cap H_{a_0})) &\leq H^{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{H}_{a_0}) + H^{n-1}(\partial H_{a_0} \cap (\Omega \setminus \partial\Omega)) \\ &\leq H^{n-1}(\partial\Omega \cap \overline{H}_{a_0}) + H^{n-1}(\partial\Omega \setminus \overline{H}_{a_0}) \\ &= H^{n-1}(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Posons $G = \Omega \cap H_{a_0}$. Alors $|G| = m_0$ et G vérifie (3.1.1). \square

Fixons-nous pour toute la suite de ce chapitre un rayon $R > R_0$ et G un quasi-minimum régulier de $\mathcal{G}_{BV}(R)$, c'est-à-dire que G est ouvert, à frontière Ahlfors-régulière, et qu'il vérifie la condition B. En particulier $G \in \mathcal{G}(R)$ et G vérifie la condition de quasi-minimalité (2.3.1). Posons comme dans (2.1.6)

$$h(x, r) = r^{-n} \min \{|G \cap B(x, r)|, |B(x, r) \setminus G|\}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$. Une première conséquence du lemme 3.1.1 est cette nouvelle version du lemme 2.1.3 dans le cas où $h(x, r) = r^{-n}|B(x, r) \setminus G|$:

LEMME 3.1.2. — *Pour tout $\eta \in]0, 1[$, il existe $\varepsilon > 0$, ne dépendant que de η , n , et g , tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $0 < r \leq 1$, si $r^{-n}|B(x, r) \setminus G| < \varepsilon$ alors*

$$(3.1.4) \quad \overline{B}(x, \eta r) \subset G.$$

Démonstration. — Montrons dans un premier temps que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $0 < r \leq 1$, si $h(x, r) = r^{-n}|B(x, r) \setminus G| < \varepsilon$, où ε sera fixé petit dans un instant en fonction uniquement de n et g , alors

$$(3.1.5) \quad h\left(x, \frac{r}{2}\right) \leq \frac{1}{2}h(x, r).$$

La différence entre (3.1.5) et (2.1.7) est d'une part que ε ne dépendra plus ici que des données du problème et d'autre part que (3.1.5) est vérifié pour tous les rayons $r \leq 1$.

Grâce à Fubini et Tchebychev (voir la démonstration du lemme 1.3.13), on peut trouver $t \in]\frac{r}{2}, r[$ tel que

$$H^{n-1}(\partial B(x, t) \setminus G) \leq C \frac{|B(x, r) \setminus G|}{r} \leq Cr^{n-1}h(x, r).$$

Posons $\Omega = (G \cup B(x, t)) \cap B_R$. On a

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial\Omega) &\leq H^{n-1}(\partial(G \cup B(x, t))) + H^{n-1}(\partial B_R \cap \overline{B}(x, t)) \\ &\leq H^{n-1}(\partial(G \cup B(x, t))) + H^{n-1}(\partial B(x, t) \setminus G) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap B(x, t)) + 2H^{n-1}(\partial B(x, t) \setminus G) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap B(x, t)) + C \frac{|B(x, r) \setminus G|}{r} \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap B(x, t)) + Cr^{n-1}h(x, r). \end{aligned}$$

Voir (2.1.19) pour la deuxième inégalité. Appliquons le lemme 3.1.1 à Ω pour obtenir un candidat $G' \in \mathcal{G}(R)$ tel que $G' \subset \Omega$ et tel que

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G') &\leq H^{n-1}(\partial\Omega) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap B(x, t)) + Cr^{n-1}h(x, r). \end{aligned}$$

On a d'autre part $|G' \Delta G| \leq |G' \Delta \Omega| + |\Omega \Delta G| \leq 2|B(x, t) \setminus G| \leq Cr^n h(x, r) \leq C\varepsilon$. Soit alors $\theta > 0$ que nous allons choisir petit dans un instant (indépendamment de ε). Si ε est assez petit, on a

$$g(|G' \Delta G|) \leq \theta r^{n-1} h(x, r)^{(n-1)/n},$$

et on déduit de la condition de quasi-minimalité (2.3.1) et de ce qui précède que

$$H^{n-1}(\partial G \cap B(x, t)) \leq \left(Ch(x, r) + \theta h(x, r)^{(n-1)/n} \right) r^{n-1},$$

pour une constante C universelle. Comme dans la démonstration du lemme 2.1.2, on utilise l'inégalité de Sobolev-Poincaré et on en déduit (3.1.5) si θ est choisi assez petit puis quitte à diminuer ε .

Soient maintenant $\eta \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ (que l'on va choisir assez petit en fonction de η de n et de g). Posons $\eta' = \frac{1+\eta}{2}$. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < r \leq 1$ tels que $r^{-n}|B(x, r) \setminus G| < \varepsilon$. Soit $y \in B(x, \eta'r)$. Comme dans la démonstration du lemme 2.1.3, on montre en utilisant (3.1.5) que si ε est choisi assez petit, en fonction uniquement de η , de n et de g , alors pour tout $k \geq 1$,

$$h(y, 2^{-k}(1 - \eta')r) = (2^{-k}(1 - \eta')r)^{-n} |B(y, 2^{-k}(1 - \eta')r) \setminus G|$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h(y, 2^{-k}(1 - \eta')r) = 0.$$

On en déduit que y n'est pas un point de densité de $\mathbb{R}^n \setminus G$, ceci pour tout $y \in B(x, \eta'r)$ et donc $|B(x, \eta'r) \setminus G| = 0$. Or comme G vérifie la condition B, pour tout $z \in \mathbb{R}^n \setminus G$ et pour tout $t > 0$, on a $|B(z, t) \setminus G| > 0$. On en déduit finalement que

$$\overline{B}(x, \eta'r) \subset B(x, \eta'r) \subset G.$$

□

Reste à traiter le cas où $h(x, r) = r^{-n}|G \cap B(x, r)|$. Il est plus délicat dans la mesure où, en reprenant le même type d'arguments que dans le premier cas de la démonstration du lemme 2.1.2, il faut trouver un endroit et un moyen pour rajouter de la masse à un ensemble de mesure de Lebesgue légèrement inférieure à m_0 et obtenir des estimations uniformes sur la variation de la surface de la frontière. La proposition 3.2.1 est le point essentiel qui nous permettra de conclure. D'une part il nous permettra de trouver des endroits où ajouter de la masse (les couronnes isolées, lemme 3.3.3). Nous réutiliserons d'autre part la construction principale de cette proposition pour ajouter de la masse dans ces couronnes.

3.2. La proposition principale

Introduisons quelques notations. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé et $0 \leq s < t < +\infty$, notons $B(s) = B(x, s)$ et $(s, t) = B(x, t) \setminus \overline{B}(x, s)$ si $s > 0$ et $(s, t) = B(x, t)$ si $s = 0$. Le point x considéré sera toujours clair dans le contexte. Rappelons que B_R désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon R , que R a été fixé strictement supérieur à R_0 et que G est un quasi-minimum régulier de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Signalons aussi que nous utiliserons encore ici la condition de quasi-minimalité (2.3.1) de préférence à (1.4.1).

PROPOSITION 3.2.1. — Soient $x \in B_R$ et $0 \leq s_1 < s_2 < s_3 \leq 1$ tels que $B(x, s_3) \subset B_R$. Notons

$$\begin{aligned} \nu_1 &= |G \cap (s_1, s_2)|, \\ \nu_2 &= |G \cap (s_2, s_3)|, \\ \nu &= |G \cap (s_1, s_3)| = \nu_1 + \nu_2, \\ \rho &= \max_{i=1,2,3} (H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(s_i))). \end{aligned}$$

Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\gamma_0 \in]1, 2[$ et $C_0 > 1$, ne dépendant que de la dimension et de g , tels que, si

$$(3.2.1) \quad \nu \leq \begin{cases} \varepsilon_0 \min\{s_1^n, (s_3 - s_2)^n, (s_2 - s_1)^n\} & \text{si } s_1 > 0 \\ \varepsilon_0 \min\{s_2^n, (s_3 - s_2)^n\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si

$$(3.2.2) \quad 1 \leq \frac{s_3}{s_2} \leq \gamma_0,$$

alors

$$(3.2.3) \quad \min \{\nu_1, \nu_2\} \leq C_0 \rho^{n/(n-1)}.$$

L'énoncé de cette proposition s'inspire du lemme 2 de [GMT83]. Dans cet article, E. Gonzalez, U. Massari et I. Tamanini s'intéressent à la régularité des hypersurfaces minimales avec contrainte de volume. Ici la situation est légèrement différente et un peu plus délicate : la frontière ∂G n'est pas minimale et nos motivations et l'application que nous ferons de la proposition 3.2.1 sont assez différentes de celles de [GMT83]. Néanmoins les philosophies générales de la proposition 3.2.1 et du lemme 3.3.1 sont similaires à certains résultats de [GMT83]. Remarquons tout de suite que, par convention, si $s_1 = 0$, alors $\partial B(s_1) = \emptyset$ et $\rho = \max_{i=2,3}(H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(s_i)))$.

Démonstration. — Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 \leq s_1 < s_2 < s_3 \leq 1$ comme dans l'énoncé du lemme. Soient $\varepsilon_0 > 0$ et $\gamma_0 \in]1, 2[$ que nous choisirons plus tard. Supposons que (3.2.1) et (3.2.2) sont vérifiés. Posons $W_1 = G \cap (s_1, s_2)$ et $W_2 = G \cap (s_2, s_3)$. Nous allons d'abord régler quelques cas faciles. Si W_1 (respectivement W_2) n'est pas quasi-isopérimétrique au sens du lemme 1.3.13, on a tout intérêt à remplacer W_1 (respectivement W_2) par une boule de volume ν_1 (respectivement ν_2). C'est ce que nous allons faire dans le lemme suivant.

LEMME 3.2.2. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$, ne dépendant que de ε , de la dimension et de g , tel que si (3.2.1) est vérifié avec cet ε_0 et si*

$$H^{n-1}(\partial W_i) > C_n(1 + \varepsilon)\nu_i^{(n-1)/n},$$

pour $i = 1$ ou $i = 2$, alors (3.2.3) est vérifié avec une constante C_0 ne dépendant que de ε et de la dimension.

En particulier, si l'on applique ce lemme avec un ε fixé universel, on obtient bien le résultat voulu avec des constantes ε_0 et C_0 universelles.

Preuve du lemme 3.2.2. — Soit $\varepsilon > 0$ fixé et supposons que l'on ait $H^{n-1}(\partial W_i) > C_n(1 + \varepsilon)\nu_i^{(n-1)/n}$ (où $i = 1$ ou $i = 2$). Soit $\varepsilon_0 > 0$ que l'on fixera petit plus tard et que l'on suppose dans un premier temps assez petit de telle sorte que

$$(3.2.4) \quad \varepsilon_0 \leq 2^{-n}\omega_n.$$

Alors d'après (3.2.1), on a

$$\nu_i \leq \nu \leq \omega_n \min \left\{ \left(\frac{s_2 - s_1}{2} \right)^n, \left(\frac{s_3 - s_2}{2} \right)^n \right\}.$$

On peut donc trouver une boule $B_i \subset (s_i, s_{i+1})$ telle que $|B_i| = \nu_i$. Posons $G_i = (G \setminus (s_i, s_{i+1})) \cup B_i$. Alors G_i est un bon candidat de $\mathcal{G}(R)$. On a

$$\partial G_i \subset (\partial G \setminus (s_i, s_{i+1})) \cup \partial B_i \cup \left(\bigcup_{j=i, i+1} (\overline{G} \cap \partial B(s_j)) \right)$$

donc

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G_i) &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap (s_i, s_{i+1})) + H^{n-1}(\partial B_i) + 2\rho \\ &= H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap (s_i, s_{i+1})) + C_n \nu_i^{(n-1)/n} + 2\rho. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\partial W_i \subset (\partial G \cap (s_i, s_{i+1})) \cup \left(\bigcup_{j=i, i+1} (\overline{G} \cap \partial B(s_j)) \right)$$

donc

$$H^{n-1}(\partial W_i) \leq H^{n-1}(\partial G \cap (s_i, s_{i+1})) + 2\rho.$$

En utilisant l'hypothèse sur W_i , on obtient

$$C_n(1 + \varepsilon)\nu_i^{(n-1)/n} < H^{n-1}(\partial G \cap (s_i, s_{i+1})) + 2\rho,$$

et en revenant à G_i , on en déduit

$$H^{n-1}(\partial G_i) \leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \varepsilon \nu_i^{(n-1)/n} + 4\rho.$$

D'autre part $|G \Delta G_i| \leq C\nu_i \leq C\varepsilon_0$, donc, si ε_0 est choisi assez petit en fonction uniquement de ε , n et g , on peut supposer que

$$g(|G \Delta G_i|) \leq \frac{C_n}{2} \varepsilon \nu_i^{(n-1)/n}.$$

En utilisant la quasi-minimalité de G et ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G) &\leq H^{n-1}(\partial G_i) + g(|G \Delta G_i|) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - \frac{C_n}{2} \varepsilon \nu_i^{(n-1)/n} + 4\rho. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\nu_i^{(n-1)/n} \leq C\rho,$$

où C ne dépend que de ε et de n , ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Le deuxième cas facile est celui où ν_1 et ν_2 sont de taille comparable. L'idée est de remplacer $G \cap (s_1, s_3)$ par une boule de taille ν . Donnons-nous donc $\tau \in]0, 1[$ que nous choisirons petit plus tard ne dépendant que de n et de g et supposons que

$$(3.2.5) \quad \tau\nu_2 \leq \nu_1 \leq \tau^{-1}\nu_2.$$

Alors si ε_0 vérifie (3.2.4), on a d'après (3.2.1)

$$\nu \leq \varepsilon_0(s_3 - s_1)^n < \omega_n \left(\frac{s_3 - s_1}{2} \right)^n.$$

On peut donc trouver une boule $B \subset (s_1, s_3)$ telle que $|B| = \nu$. Posons $G' = (G \setminus (s_1, s_3)) \cup B$. Alors G' est un bon candidat de $\mathcal{G}(R)$. Comme dans la démonstration du lemme 3.2.2, on a

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial G') &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap (s_1, s_3)) + H^{n-1}(\partial B) + 2\rho \\ &= H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap (s_1, s_3)) + C_n \nu^{(n-1)/n} + 2\rho, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial W_1) &\leq H^{n-1}(\partial G \cap (s_1, s_2)) + 2\rho, \\ H^{n-1}(\partial W_2) &\leq H^{n-1}(\partial G \cap (s_2, s_3)) + 2\rho. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité isopérimétrique (1.3.13) à W_1 et W_2 , on en déduit

$$C_n \left(\nu_1^{(n-1)/n} + \nu_2^{(n-1)/n} \right) \leq H^{n-1}(\partial W_1) + H^{n-1}(\partial W_2) \leq H^{n-1}(\partial G \cap (s_1, s_3)) + 4\rho.$$

Or, en posant $s = \frac{\nu_1}{\nu_2} \in [\tau, \tau^{-1}]$, on a

$$\begin{aligned} \left(\nu_1^{(n-1)/n} + \nu_2^{(n-1)/n} \right) - (\nu_1 + \nu_2)^{(n-1)/n} \\ &= \nu_2^{(n-1)/n} \left\{ \left(1 + s^{(n-1)/n} \right) - \left(1 + s \right)^{(n-1)/n} \right\} \\ &\geq \varepsilon(\tau) (\nu_1 + \nu_2)^{(n-1)/n} = \varepsilon(\tau) \nu^{(n-1)/n}. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\min_{s \in [\tau, \tau^{-1}]} \left\{ \left(1 + s^{(n-1)/n} \right) - \left(1 + s \right)^{(n-1)/n} \right\} = \left(1 + \tau^{(n-1)/n} \right) - \left(1 + \tau \right)^{(n-1)/n} > 0,$$

et $\nu_2^{(n-1)/n} \geq (1 + \tau^{-1})^{(1-n)/n} (\nu_1 + \nu_2)^{(n-1)/n}$. Donc

$$C_n (1 + \varepsilon(\tau)) \nu^{(n-1)/n} \leq H^{n-1}(\partial G \cap (s_1, s_3)) + 4\rho.$$

Au terme supplémentaire en 4ρ près, c'est dire que $G \cap (s_1, s_3)$ n'est pas quasi-isopérimétrique. En revenant au candidat G' et en combinant (3.2.6) et l'inégalité précédente, on obtient

$$H^{n-1}(\partial G') \leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \varepsilon(\tau) \nu^{(n-1)/n} + 6\rho.$$

D'autre part, on a $|G \Delta G'| \leq C\nu \leq C\varepsilon_0$ et, quitte à diminuer ε_0 , on peut supposer que

$$g(|G \Delta G'|) \leq \frac{C_n}{2} \varepsilon(\tau) \nu^{(n-1)/n},$$

et en utilisant (2.3.1), on obtient

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G) &\leq H^{n-1}(\partial G') + g(|G' \Delta G|) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - \frac{C_n}{2} \varepsilon(\tau) \nu^{(n-1)/n} + 6\rho, \end{aligned}$$

et on en déduit (3.2.3)

Reste donc à traiter le cas où (3.2.5) n'a pas lieu. Nous allons d'abord traiter le cas où

$$(3.2.7) \quad \min \{ \nu_1, \nu_2 \} = \nu_1 < \tau \nu_2,$$

le cas où $\min \{ \nu_1, \nu_2 \} = \nu_2 < \tau \nu_1$ se traitera de manière similaire. La manipulation brutale du cas précédent ne permet plus de conclure. L'idée est d'éliminer W_1 . Le gain dans le terme de frontière est d'au moins $C_n \nu_1^{(n-1)/n}$ modulo la perte qui concerne ce qui se passe à la frontière de (s_1, s_2) qui est de l'ordre de $C\rho$ et que l'on retrouvera dans le membre de droite de (3.2.3). On dispose alors de $(s_1, s_3) \setminus W_2$ pour rajouter la masse ν_1 . Plus précisément, on veut trouver une portion de cylindre du type $B_{n-1}(0, u) \times \mathbb{R}$ (où $B_{n-1}(0, u)$ désigne une boule de dimension $n - 1$ et de rayon u) incluse dans (s_1, s_3) , de taille adaptée à ν_1 , c'est-à-dire avec u de l'ordre de $\nu_1^{1/n}$, dans laquelle ∂W_2 est proche d'une sphère. Pour rajouter la masse ν_1 , on poussera à l'aide d'une fonction \tilde{f} bien choisie l'ensemble W_2 à l'intérieur de la portion de cylindre (c'est-à-dire que l'on rajoutera des points du type $(w, t + \tilde{f}(w))$ où $(w, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sont les points de W_2 qui sont à l'intérieur de la portion de cylindre). Bien sûr rien ne dit qu'à l'intérieur de cette portion de cylindre, ∂W_2 est exactement une portion de sphère ni même un graphe au-dessus de $B_{n-1}(0, u)$. Cependant, en se ramenant au cas où W_2 est proche d'une boule au sens du lemme 1.3.13 (ce que nous pourrons faire grâce au lemme 3.2.2), nous disposerons d'assez d'informations pour affirmer que l'ensemble des points de $B_{n-1}(0, u)$ au dessus desquels ∂W_2 n'est pas un graphe, n'est pas trop gros en mesure et ne vient pas trop perturber le bilan final. On arrivera en fin de compte à effectuer cette construction en ne perdant en terme de surface de frontière qu'un terme au plus égal à $C\nu_1^{(n-1)/n}$ avec $C \ll C_n$ ce qui nous permettra de conclure. Avant de commencer la construction proprement dite, donnons deux lemmes qui nous serviront à estimer la masse rajoutée et la variation de la surface de ∂W_2 .

LEMME 3.2.3. — Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n et Q un hyperplan. On identifie Q avec \mathbb{R}^{n-1} et \mathbb{R}^n avec $Q \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, et on notera p l'application de $Q \times \mathbb{R}$ dans Q définie par $p((w, t)) = w$. Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ tel que $H^{n-1}(\partial W \cap \mathcal{O}) < +\infty$. Pour $w \in Q$, on note $\tilde{N}(w) = \text{card}(\partial W \cap \mathcal{O} \cap p^{-1}(w))$. On a

$$\int_{p(\mathcal{O})} \tilde{N}(w) \, dw \leq CH^{n-1}(\partial W \cap \mathcal{O}),$$

où C ne dépend que de la dimension.

Preuve du lemme 3.2.3. — Soient $\kappa > 0$ et (E_l) un recouvrement de $\partial W \cap \mathcal{O}$ tel que $\text{diam}(E_l) \leq \kappa$ pour tout $l \geq 0$ et tel que

$$\sum_{l \geq 0} (\text{diam}(E_l))^{n-1} \leq H^{n-1}(\partial W \cap \mathcal{O}) + \kappa.$$

Posons $F_l = p(E_l)$ et notons, pour tout $w \in Q$, $\tilde{N}_\kappa(w)$ le plus grand des entiers $m \geq 0$ tel qu'il existe m points x_1, \dots, x_m dans $\partial W \cap \mathcal{O} \cap p^{-1}(w)$ tels que $|x_i - x_j| > 2\kappa$

pour $i \neq j$. Alors $\tilde{N}_\kappa(w) \leq \sum_l \chi_{F_l}(w)$ et on a

$$\begin{aligned} \int_Q \tilde{N}_\kappa(w) \, dw &\leq C \sum_{l \geq 0} (\text{diam}(E_l))^{n-1} \\ &\leq C(H^{n-1}(\partial W \cap \mathcal{O}) + \kappa). \end{aligned}$$

Or $\liminf_{\kappa \rightarrow 0} \tilde{N}_\kappa(w) \geq \tilde{N}(w)$ et on conclut en faisant tendre κ vers 0 et en utilisant le lemme de Fatou. \square

LEMME 3.2.4. — Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ tel que $H^{n-1}(S) < +\infty$ et $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$. On identifie ici \mathbb{R}^n et $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Si

$$S(\tilde{f}) = \{(w, t + \tilde{f}(w)) : (w, t) \in S\},$$

on a

$$H^{n-1}(S(\tilde{f})) \leq (1 + \|\nabla \tilde{f}\|_\infty)^{n-1} H^{n-1}(S).$$

Preuve du lemme 3.2.4. — Soient $\kappa > 0$ et (E_l) un recouvrement de S tel que l'on ait $\text{diam}(E_l) \leq \kappa$ pour tout $l \geq 0$ et tel que

$$\sum_{l \geq 0} (\text{diam}(E_l))^{n-1} \leq H^{n-1}(S) + \kappa.$$

Posons $F_l = \{(w, t + \tilde{f}(w)) : (w, t) \in E_l\}$. On a $\text{diam}(F_l) \leq (1 + \|\nabla \tilde{f}\|_\infty) \text{diam}(E_l)$ et $S(\tilde{f}) \subset \cup_l F_l$ donc

$$\begin{aligned} H_{(1+\|\nabla \tilde{f}\|_\infty)\kappa}^{n-1}(S(\tilde{f})) &\leq \sum_l (\text{diam}(F_l))^{n-1} \\ &\leq (1 + \|\nabla \tilde{f}\|_\infty)^{n-1} \sum_l (\text{diam}(E_l))^{n-1} \\ &\leq (1 + \|\nabla \tilde{f}\|_\infty)^{n-1} (H^{n-1}(S) + \kappa). \end{aligned}$$

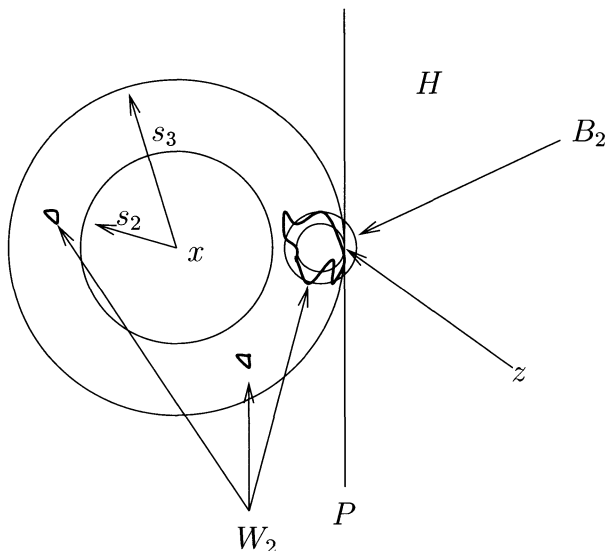
On conclut en faisant tendre κ vers 0. \square

Revenons maintenant à la construction esquissée plus haut. Dans un premier temps, nous allons montrer que l'on peut se ramener au cas où W_2 est relativement proche d'une boule. Pour cela, donnons-nous d'abord $\delta \in]0, 1[$, que nous choisirons petit plus tard. Soit $\varepsilon(\delta)$ associé à δ par lemme 1.3.13 et considérons $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$, que nous choisirons aussi petit plus tard. D'après le lemme 3.2.2 nous pouvons supposer que

$$(3.2.8) \quad H^{n-1}(\partial W_2) \leq C_n(1 + \varepsilon)\nu_2^{(n-1)/n}.$$

En appliquant le lemme 1.3.13 à W_2 (voir aussi la remarque 1.3.14), nous pouvons trouver une boule $B_2 = B(y_2, r_2)$, $y_2 \in W_2$, telle que $|B_2| = \nu_2$ et telle que

$$(3.2.9) \quad |W_2 \Delta B_2| \leq \delta \nu_2.$$

FIGURE 3.1. Cas où $z \in \partial B(s_3)$.

Notre but est de montrer tout d'abord que $\overline{B}(y_2, \eta r_2) \subset W_2$ pour η aussi proche que l'on veut de 1. Pour cela, nous allons montrer que si

$$\xi_2 = \sup \{ \zeta \in]0, 1] : B(y_2, \zeta r_2) \subset (s_2, s_3) \},$$

alors

$$(3.2.10) \quad \xi_2 \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Il suffira ensuite de combiner ce résultat avec le lemme 3.1.2 (que nous pourrons appliquer grâce à (3.2.9)).

Montrons donc (3.2.10). Soit $z \in \partial B(y_2, \xi_2 r_2) \cap \partial(s_2, s_3)$. Si $z \in \partial B(s_3)$, on note P l'hyperplan affine tangent à $\partial B(s_3)$ en z et H le demi-espace de frontière P ne contenant pas $B(s_3)$. On a $|H \cap B_2| \geq l(\xi_2) \nu_2$ où l est une fonction décroissante telle que $l(0) = \frac{1}{2}$ et $l(1) = 0$. Comme $H \cap B_2 \subset W_2 \Delta B_2$, en utilisant (3.2.9) on obtient

$$l(\xi_2) \nu_2 \leq |H \cap B_2| \leq |W_2 \Delta B_2| \leq \delta \nu_2,$$

ce qui permet de conclure (voir la figure 3.1). Si $z \in \partial B(s_2)$, comme d'après (3.2.1) $\nu_2 \leq \nu \leq \varepsilon_0 s_2^n$, si ε_0 est choisi assez petit, en fonction uniquement de la dimension, on a $|B_2 \cap B(s_2)| \geq \frac{l(\xi_2)}{2} \nu_2$ où l est la même fonction que précédemment. D'autre part comme $B_2 \cap B(s_2) \subset W_2 \Delta B_2$, on peut conclure comme ci-dessus (voir la figure 3.2).

Soit maintenant $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$, que nous fixerons proche de 1 plus tard, et $\varepsilon(\eta)$ associé par le lemme 3.1.2. On a

$$r_2^{-n} |B_2 \setminus G| \leq r_2^{-n} |W_2 \Delta B_2| \leq C \delta,$$

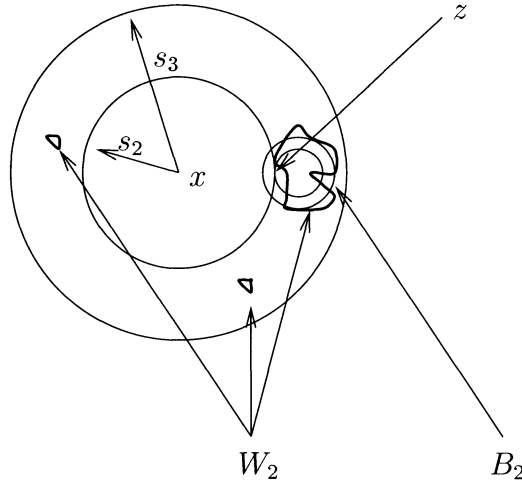


FIGURE 3.2. Cas où $z \in \partial B(s_2)$.

où C ne dépend que de la dimension. A η fixé, on peut donc trouver δ assez petit, ne dépendant que de la dimension et de η , de telle sorte que $r_2^{-n}|B_2 \setminus G| < \varepsilon(\eta)$ et $\xi_2 > \eta$. Alors, d'après le lemme 3.1.2 et par définition de ξ_2 , on a

$$(3.2.11) \quad \overline{B}(y_2, \eta r_2) \subset G \cap (s_2, s_3) = W_2,$$

qui est exactement ce que nous cherchions à obtenir.

Nous allons maintenant déterminer l'endroit où ajouter de la masse à W_2 . Ce qui suit vise à assurer que les modifications que nous allons effectuer resteront intérieures à $B(s_3) \subset B_R$. Remarquons tout de suite que dans le cas où $\nu_2 < \tau\nu_1$, nous chercherons à ajouter de la masse à W_1 et la construction du cône D conduisant à (3.2.13) sera inutile. Nous pourrions en fait obtenir directement (3.2.14). Ce sera la seule différence entre ces deux cas.

Soit D le demi-cône ouvert de sommet y_2 s'appuyant sur $B(s_2)$ et contenant $B(s_2)$,

$$D = \{z \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(z - y_2, L) < \sin \alpha |z - y_2|, \langle z - y_2, x - y_2 \rangle > 0\},$$

où L désigne la droite (x, y_2) et

$$(3.2.12) \quad \sin \alpha = \frac{s_2}{|y_2 - x|} \geq \frac{s_2}{s_3} \geq \gamma_0^{-1}$$

(voir la figure 3.3).

Posons

$$l(\alpha) = \frac{H^{n-1}(\partial B_2 \cap D)}{H^{n-1}(\partial B_2)}.$$

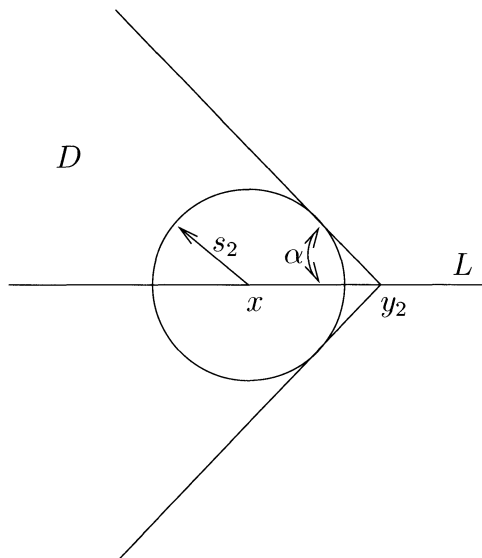


FIGURE 3.3. Le cône D.

C'est une fonction croissante de α qui tend vers $1/2$ quand α tend vers $\pi/2$. Par hypothèse sur W_2 (voir (3.2.8)), $H^{n-1}(\partial W_2)$ et $H^{n-1}(\partial B_2)$ sont proches. Montrons que si α est assez proche de $\pi/2$, ceci est encore vrai pour $H^{n-1}(\partial W_2 \cap D)$ et $H^{n-1}(\partial B_2 \cap D)$. On a

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial B_2) &= l(\alpha)^{-1} H^{n-1}(\partial B_2 \cap D), \\ H^{n-1}(\partial B_2 \setminus D) &= H^{n-1}(\partial B_2) - H^{n-1}(\partial B_2 \cap D) \\ &= \frac{1 - l(\alpha)}{l(\alpha)} H^{n-1}(\partial B_2 \cap D). \end{aligned}$$

Comme, d'après (3.2.11), $\eta B_2 = B(y_2, \eta r_2) \subset W_2$, on a aussi

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial W_2 \setminus D) &\geq H^{n-1}(\partial(\eta B_2) \setminus D) \\ &= \eta^{n-1} \left(\frac{1 - l(\alpha)}{l(\alpha)} \right) H^{n-1}(\partial B_2 \cap D). \end{aligned}$$

D'après (3.2.8),

$$H^{n-1}(\partial W_2) - H^{n-1}(\partial B_2) \leq \varepsilon H^{n-1}(\partial B_2)$$

donc

$$\begin{aligned}
 H^{n-1}(\partial W_2 \cap D) - H^{n-1}(\partial B_2 \cap D) & \\
 & \leq \varepsilon H^{n-1}(\partial B_2) - H^{n-1}(\partial W_2 \setminus D) + H^{n-1}(\partial B_2 \setminus D) \\
 & \leq \left\{ \frac{\varepsilon + (1 - l(\alpha))(1 - \eta^{n-1})}{l(\alpha)} \right\} H^{n-1}(\partial B_2 \cap D) \\
 & = C_\eta(\varepsilon, \alpha) H^{n-1}(\partial B_2 \cap D),
 \end{aligned}$$

avec $C_\eta(\varepsilon, \alpha)$ qui, à η fixé, tend vers $1 - \eta^{n-1}$ quand ε tend vers 0 et α tend vers $\pi/2$. Donc, à η fixé, si ε est choisi assez petit et si γ_0 est choisi assez proche de 1 (voir (3.2.12)), on a

$$(3.2.13) \quad H^{n-1}(\partial W_2 \cap D) - H^{n-1}(\partial B_2 \cap D) \leq (1 - \eta^n) H^{n-1}(\partial B_2 \cap D).$$

Remarquons que la construction de D est le seul endroit où intervient l'hypothèse (3.2.2). Elle est en particulier inutile dans le cas où l'on sait déjà que $\min\{\nu_1, \nu_2\} = \nu_2$ et où l'on cherchera à ajouter de la masse à W_1 . Nous utiliserons cette remarque dans la démonstration du lemme 3.3.3.

Soit $C_1 > 1$ que nous fixerons grand plus tard ne dépendant que de n et de g . Grâce à (3.2.13) et à (3.2.7), en supposant τ assez petit ne dépendant que de la dimension et de C_1 , on peut trouver $y \in \partial B_2 \cap D$ tel que $\overline{B}(y, C_1 \nu_1^{1/n}) \subset D$ et tel que, si \tilde{C} est le demi-cône ouvert de sommet y_2 s'appuyant sur $B(y, C_1 \nu_1^{1/n})$ et contenant y alors

$$(3.2.14) \quad H^{n-1}(\partial W_2 \cap \tilde{C}) - H^{n-1}(\partial B_2 \cap \tilde{C}) \leq C(1 - \eta^n) H^{n-1}(\partial B_2 \cap \tilde{C}),$$

où C ne dépend que de la dimension. Il sera plus pratique pour nous de ne pas chercher à utiliser tout le cône \tilde{C} pour ajouter de la masse à W_2 et de se limiter à une portion de cylindre. Avant de la définir, tirons quelques conséquences faciles de la définition de \tilde{C} dont nous aurons besoin dans la suite. On a

$$\begin{aligned}
 \partial \tilde{C} \cap \partial B(y_2, \eta r_2) &= Q \cap \partial B \left(z, \eta r_2 h \left(\frac{C_1 \nu_1^{1/n}}{r_2} \right) \right), \\
 \tilde{C} \cap Q &= B \left(z, \eta r_2 h \left(\frac{C_1 \nu_1^{1/n}}{r_2} \right) \right) \cap Q,
 \end{aligned}$$

où Q est un hyperplan parallèle à l'hyperplan tangent à ∂B_2 en y , $z \in [y_2, y] \cap Q \cap B(y_2, \eta r_2)$, et $h(s) \sim s$ quand s tend vers 0. Soit $\theta_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$ que nous fixerons plus tard proche de 1. On peut trouver $\tau_0 = \tau_0(\theta_0) > 0$ tel que, si

$$(3.2.15) \quad \frac{C_1 \nu_1^{1/n}}{r_2} \leq \tau_0,$$

alors

$$(3.2.16) \quad \theta_0 \eta C_1 \nu_1^{1/n} \leq u \leq \theta_0^{-1} \eta C_1 \nu_1^{1/n},$$

avec $u = \eta r_2 h \left(\frac{C_1 \nu_1^{1/n}}{r_2} \right)$. La boule $(n-1)$ -dimensionnelle $\tilde{\mathcal{C}} \cap Q$ sera la base de notre cylindre.

D'autre part, on a

$$\tilde{\mathcal{C}} \cap \partial B_2 = B \left(y, C_1 \nu_1^{1/n} \right) \cap \partial B_2.$$

Soit alors $\theta_1 \in]1, \frac{3}{2}[$ que nous fixerons plus tard proche de 1. On peut trouver $\tau_1 = \tau_1(\theta_1) > 0$ tel que si

$$(3.2.17) \quad \frac{C_1 \nu_1^{1/n}}{r_2} \leq \tau_1,$$

alors

$$(3.2.18) \quad H^{n-1}(\tilde{\mathcal{C}} \cap \partial B_2) = H^{n-1} \left(B \left(y, C_1 \nu_1^{1/n} \right) \cap \partial B_2 \right) \leq \alpha_n \theta_1 C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n},$$

avec $\alpha_n = H^{n-1}(Q \cap B(z, 1))$.

Supposons pour simplifier les notations que $z = 0$. Dans toute la suite nous identifierons \mathbb{R}^n et $Q \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Supposons aussi sans perte de généralité que $y \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. Notons

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} & \text{et} & & q : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (w, t) &\mapsto w & & & (w, t) &\mapsto t. \end{aligned}$$

On a $y_2 = (0, -t_2)$ avec

$$t_2^2 = (\eta r_2)^2 - u^2 \geq \frac{9}{16} \left(r_2^2 - 4C_1^2 \nu_1^{2/n} \right)$$

en utilisant (3.2.16) et le fait que $\eta > \frac{3}{4}$ et $\theta_0 > \frac{1}{2}$. On peut en particulier trouver $\tau_2 > 0$ tel que si

$$(3.2.19) \quad \frac{C_1 \nu_1^{1/n}}{r_2} \leq \tau_2,$$

alors

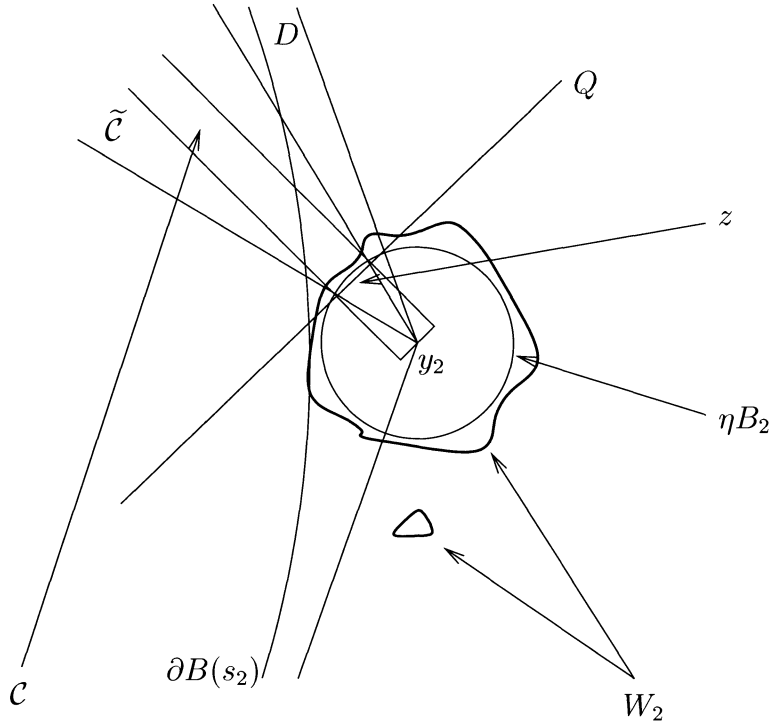
$$(3.2.20) \quad t_2 > \frac{r_2}{2}.$$

Définissons maintenant l'endroit que nous allons utiliser pour ajouter la masse. Notons $B_{n-1}(0, u) = p(B(0, u))$. Pour tout $w \in \overline{B}_{n-1}(0, u)$, si $p^{-1}(w)$ rencontre $\partial B(s_1)$, on note $t(w) = \min\{t > 0 : (w, t) \in \partial B(s_1)\}$. Sinon, $p^{-1}(w)$ rencontre $\partial B(s_2)$ en deux points $(w, t'(w))$ et $(w, t(w))$, $0 < t'(w) < t(w)$. On a $](w, t'(w)), (w, t(w))[\subset (s_1, s_2)$. Posons

$$(3.2.21) \quad \mathcal{C} = \bigcup_{w \in \overline{B}_{n-1}(0, u)} [(w, -t_2), (w, t(w))]$$

(voir la figure 3.4). Remarquons que par construction,

$$\overline{B}_{n-1}(0, u) \times [-t_2, 0] \subset W_2 \quad \text{et} \quad \overline{B}_{n-1}(0, u) \times]0, +\infty[\subset \tilde{\mathcal{C}},$$

FIGURE 3.4. La portion de cylindre \mathcal{C} .

donc

$$(3.2.22) \quad \partial W_2 \cap \mathcal{C} \subset \partial W_2 \cap \tilde{\mathcal{C}}$$

et

$$(3.2.23) \quad p(\partial W_2 \cap \mathcal{C}) = \overline{B}_{n-1}(0, u).$$

Maintenant que nous savons où ajouter la masse, disons comment nous allons le faire. Fixons-nous une fois pour toutes $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\text{spt } f = \overline{B}_{n-1}(0, 1)$, $\|f\|_\infty \leq 1$ et $\int_{B_{n-1}(0,1)} f = C_f > 0$. Pour $w \in \mathbb{R}^{n-1}$, posons

$$\tilde{f}(w) = \lambda f\left(\frac{w}{u}\right),$$

avec λ choisi de telle sorte que

$$(3.2.24) \quad \int_{B_{n-1}(0,u)} \tilde{f} = 2\nu_1,$$

c'est-à-dire

$$(3.2.25) \quad \lambda = 2C_f^{-1}u^{1-n}\nu_1.$$

Posons $A = \{(w, t + \tilde{f}(w)) : (w, t) \in W_2 \cap \mathcal{C}\}$. Vérifions tout de suite que $A \subset (s_1, s_3)$. Par construction, il suffit de vérifier que

$$\|\tilde{f}\|_\infty < s_2 - s_1.$$

Or $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \lambda$, et comme $\theta_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$ et $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$, d'après (3.2.16), on a $u^{n-1} \geq CC_1^{n-1}\nu_1^{(n-1)/n}$. D'où, par choix de λ ,

$$(3.2.26) \quad \|\tilde{f}\|_\infty \leq \frac{C}{C_1^{n-1}}\nu_1^{1/n},$$

pour une constante C ne dépendant que de la dimension. Il suffit donc de montrer que nous pouvons nous ramener au cas où

$$(3.2.27) \quad \frac{C}{C_1^{n-1}}\nu_1^{1/n} < s_2 - s_1,$$

où C est la même constante que dans (3.2.26). Pour cela nous allons appliquer le lemme 3.2.2 à W_1 .

Soit $\delta' \in]0, 1[$ que nous allons choisir dans un instant et $\varepsilon(\delta')$ associé à δ' par le lemme 1.3.13. Si $H^{n-1}(\partial W_1) > C_n(1 + \varepsilon(\delta'))\nu_1^{(n-1)/n}$, quitte à diminuer ε_0 , on peut conclure en utilisant le lemme 3.2.2. Si $H^{n-1}(\partial W_1) \leq C_n(1 + \varepsilon(\delta'))\nu_1^{(n-1)/n}$, on peut appliquer le lemme 1.3.13 à W_1 . On obtient alors une boule $B_1 = B(y_1, r_1)$, $y_1 \in W_1$, $|B_1| = \nu_1$, telle que $|B_1 \Delta W_1| \leq \delta'\nu_1$. De manière similaire à ce qui se passe pour W_2 , si

$$\xi_1 = \sup\{\zeta \in]0, 1[: B(y_1, \zeta r_1) \subset (s_1, s_2)\},$$

alors ξ_1 tend vers 1 quand δ' tend vers 0 (voir la démonstration de (3.2.10)). Fixons donc δ' assez petit de telle sorte que $\xi_1 \geq \frac{1}{2}$. On a alors $r_1 \leq 2\xi_1 r_1 \leq s_2 - s_1$, c'est-à-dire $\nu_1^{1/n} \leq C(s_2 - s_1)$ où C ne dépend que de la dimension. Il suffit alors de choisir C_1 assez grand (ne dépendant que de la dimension) pour obtenir (3.2.27).

Posons $G' = (G \setminus W_1) \cup A$. Alors $G' \subset B_R$. L'ensemble G' n'est pas encore tout à fait notre nouveau candidat. Nous allons voir que par choix de λ , nous nous sommes donné assez de marge pour être sûr de rajouter à W_2 au moins la masse ν_1 , mais pas trop non plus pour ne pas ajouter plus de $C\nu_1$ (pour une constante universelle C). Grâce au lemme 3.1.1, nous pourrons alors construire à partir de G' un bon candidat G'' . Les estimations qui suivent nous serviront aussi à évaluer $|G' \Delta G|$.

Une première estimation facile est celle de $|G \setminus G'|$. Comme $G \setminus W_1 \subset G \cap G'$, on a

$$(3.2.28) \quad |G \setminus G'| \leq \nu_1.$$

Pour $w \in \overline{B}_{n-1}(0, u)$, notons

$$t^- = \min\{t > 0 : (w, t) \in \partial W_2 \cap \mathcal{C}\},$$

$$t^+ = \max\{t > 0 : (w, t) \in \partial W_2 \cap \mathcal{C}\}.$$

On a $0 < t^- \leq t^+ < +\infty$. Posons

$$\partial_1 = \{(w, t^-) \in \partial W_2 \cap \mathcal{C} : t^- = t^+\},$$

$$\partial_2 = \{(w, t) \in \partial W_2 \cap \mathcal{C} : t^- < t^+\} = (\partial W_2 \cap \mathcal{C}) \setminus \partial_1.$$

On a $p(\partial_1) \cap p(\partial_2) = \emptyset$ et d'après (3.2.23), $p(\partial_1) \cup p(\partial_2) = \overline{B}_{n-1}(0, u)$. Grossièrement parlant $p(\partial_1)$ est l'ensemble des points au-dessus desquels tout va bien se passer (c'est-à-dire comme si $\partial W_2 \cap \mathcal{C}$ était un graphe au-dessus de $\overline{B}_{n-1}(0, u)$). Au-dessus de $p(\partial_2)$, les choses sont a priori un peu plus compliquées, mais nous avons tout fait pour que $H^{n-1}(\partial_2)$ soit négligeable par rapport au gain de frontière dû à l'élimination de W_1 . Posons aussi

$$\partial_1^* = \{(w, t^-) \in \partial W_2 \cap \mathcal{C}\},$$

$$\partial_2^* = \{(w, t) \in \partial W_2 \cap \mathcal{C} : t > t^-\} = (\partial W_2 \cap \mathcal{C}) \setminus \partial_1^*.$$

On a $p(\partial_1^*) = \overline{B}_{n-1}(0, u)$ et $p(\partial_2^*) = p(\partial_2)$.

Montrons que

$$(3.2.29) \quad \bigcup_{w \in p(\partial_1)}](w, t^-), (w, t^- + \tilde{f}(w)) [\subset G' \setminus (G \setminus W_1).$$

Ceci signifie juste qu'au-dessus de $p(\partial_1)$, on a effectivement ajouté tout le segment que l'on cherchait à ajouter. Pour tout $w \in p(\partial_1)$ et tout $0 < s < \tilde{f}(w)$, par construction et par définition de ∂_1 , $(w, t^- + s) \notin G \setminus W_1$. Montrons que $(w, t^- + s) \in A$. Si

$$(3.2.30) \quad 2C\nu_1^{1/n} \leq r_2,$$

où C est la constante qui intervient dans (3.2.26), on a d'après (3.2.26) et (3.2.20),

$$\tilde{f}(w) \leq \frac{C}{C_1^{n-1}} \nu_1^{1/n} \leq C\nu_1^{1/n} \leq \frac{r_2}{2} < t_2,$$

donc $-t_2 < -\tilde{f}(w) \leq t^- + s - \tilde{f}(w) < t^-$. Or par construction et par définition de t^- , $[(w, -t_2), (w, t^-)] \subset W_2 \cap \mathcal{C}$. Donc $(w, t^- + s - \tilde{f}(w)) \in W_2 \cap \mathcal{C}$ et $(w, t^- + s) \in A$. Ceci démontre donc (3.2.29) et on en déduit

$$(3.2.31) \quad \begin{aligned} |G' \setminus (G \setminus W_1)| &\geq \int_{p(\partial_1)} \tilde{f}(w) \, dw \\ &= \int_{\overline{B}_{n-1}(0, u)} \tilde{f}(w) \, dw - \int_{p(\partial_2)} \tilde{f}(w) \, dw \\ &\geq 2\nu_1 - C\|\tilde{f}\|_\infty H^{n-1}(p(\partial_2)) \quad (\text{d'après (3.2.24)}), \end{aligned}$$

où C ne dépend que de la dimension.

Evaluons $H^{n-1}(p(\partial_2))$ et dans le même temps $H^{n-1}(\partial_2^*)$. Nous en aurons besoin plus tard. On a

$$\begin{aligned}
 (3.2.32) \quad H^{n-1}(p(\partial_2)) &= H^{n-1}(p(\partial_2^*)) \\
 &\leq H^{n-1}(\partial_2^*) \\
 &= H^{n-1}(\partial W_2 \cap \mathcal{C}) - H^{n-1}(\partial_1^*) \\
 &\leq H^{n-1}(\partial W_2 \cap \mathcal{C}) - H^{n-1}(p(\partial_1^*)) \\
 &= H^{n-1}(\partial W_2 \cap \mathcal{C}) - H^{n-1}(\overline{B}_{n-1}(0, u)).
 \end{aligned}$$

Or

(3.2.33)

$$\begin{aligned}
 H^{n-1}(\partial W_2 \cap \mathcal{C}) &\leq H^{n-1}(\partial W_2 \cap \tilde{\mathcal{C}}) && \text{(d'après (3.2.22))} \\
 &\leq (1 + C(1 - \eta^n))H^{n-1}(\partial B_2 \cap \tilde{\mathcal{C}}) && \text{(d'après (3.2.14))} \\
 &\leq \alpha_n(1 + C(1 - \eta^n))\theta_1 C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n} && \text{(d'après (3.2.18))} \\
 &\leq C C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n},
 \end{aligned}$$

où la constante C qui intervient dans la dernière inégalité ne dépend que de la dimension. On a utilisé ici le fait que $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$ et que $\theta_1 \in]1, \frac{3}{2}[$. D'autre part, d'après (3.2.16), on a

$$(3.2.34) \quad H^{n-1}(\overline{B}_{n-1}(0, u)) = \alpha_n u^{n-1} \geq \alpha_n \theta_0^{n-1} \eta^{n-1} C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n}.$$

Alors en reprenant (3.2.32) et en utilisant l'avant-dernière inégalité de (3.2.33) et (3.2.34), on obtient

$$\begin{aligned}
 (3.2.35) \quad H^{n-1}(p(\partial_2)) &\leq H^{n-1}(\partial_2^*) \\
 &\leq \alpha_n \{(1 + C(1 - \eta^n))\theta_1 - \theta_0^{n-1} \eta^{n-1}\} C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n}.
 \end{aligned}$$

Alors en combinant (3.2.31), l'estimation (3.2.26) sur $\|\tilde{f}\|_\infty$ et (3.2.35), on obtient

$$|G' \setminus (G \setminus W_1)| \geq (2 - C(\eta, \theta_0, \theta_1)) \nu_1,$$

avec $C(\eta, \theta_0, \theta_1)$ qui tend vers 0 quand $(\eta, \theta_0, \theta_1)$ tend vers $(1, 1, 1)$. Donc si η, θ_0 et θ_1 sont choisis assez proches de 1, on a $|G' \setminus (G \setminus W_1)| \geq \nu_1$ et

$$(3.2.36) \quad |G'| = |G \setminus W_1| + |G' \setminus (G \setminus W_1)| \geq m_0.$$

Montrons maintenant que

$$(3.2.37) \quad |G' \setminus (G \setminus W_1)| \leq C \nu_1,$$

pour une constante universelle C .

Pour $w \in \overline{B}_{n-1}(0, u)$, notons I_k les images par q des composantes connexes de $W_2 \cap \mathcal{C} \cap p^{-1}(w)$. On a $I_0 = [-t_2, t_0^+]$ avec $t_0^+ = t^-$ et notons $I_k =]t_k^-, t_k^+[$ pour $k \geq 1$. Notons $N(w)$ leur nombre. On a $\text{card}(\partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C}) \cap p^{-1}(w)) = 1 + 2(N(w) - 1) \geq N(w) \geq 1$ pour tout $w \in B_{n-1}(0, u)$. Ici $\text{int}(\mathcal{C})$ désigne l'intérieur de \mathcal{C} . Donc d'après le lemme 3.2.3, on a

$$(3.2.38) \quad \int_{B_{n-1}(0, u)} N(w) \, dw \leq CH^{n-1}(\partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})),$$

pour une constante C ne dépendant que de la dimension.

Montrons que

$$G' \setminus (G \setminus W_1) \subset \bigcup_{w \in B_{n-1}(0, u)} \bigcup_{k \geq 0} \left[(w, t_k^+), (w, t_k^+ + \tilde{f}(w)) \right],$$

ce qui signifie juste qu'au-dessus de n'importe quel point de $B_{n-1}(0, u)$, on a ajouté à chaque composante connexe de $W_2 \cap \mathcal{C} \cap p^{-1}(w)$ un segment de longueur au plus $\tilde{f}(w)$. Soit donc $(w, s) \in G' \setminus (G \setminus W_1)$. Par construction $w \in B_{n-1}(0, u)$ et on peut trouver $k \geq 0$ et $t \in I_k$ tels que $s = t + \tilde{f}(w)$. En particulier $t_k^- < s < t_k^+ + \tilde{f}(w)$. D'autre part, comme $(w, s) \notin G \setminus W_1$, nécessairement $s \geq t_k^+$. D'où l'inclusion recherchée. On a alors

$$\begin{aligned} |G' \setminus (G \setminus W_1)| &\leq \int_{B_{n-1}(0, u)} N(w) \tilde{f}(w) \, dw \\ &\leq C \|\tilde{f}\|_\infty H^{n-1}(\partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})) \quad (\text{d'après (3.2.38)}) \\ &\leq C\nu_1, \end{aligned}$$

d'après (3.2.26) et d'après la dernière inégalité de (3.2.33). Ce qui démontre bien (3.2.37).

Reste à évaluer $H^{n-1}(\partial G')$. En dehors de \mathcal{C} , on a simplement éliminé W_1 . En effet par définition de G' et de \mathcal{C} (voir (3.2.21)) et parce que $\|\tilde{f}\|_\infty < s_2 - s_1$, on a

$$\partial G' \setminus \mathcal{C} \subset \partial G \setminus ((s_1, s_2) \cup \mathcal{C}) \cup \left(\bigcup_{i=1,2} (\overline{G} \cap \partial B(s_i)) \right),$$

donc

$$(3.2.39) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial G' \setminus \mathcal{C}) &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap (s_1, s_2)) - H^{n-1}(\partial G \cap (\mathcal{C} \setminus (s_1, s_2))) + 2\rho \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial W_1) - H^{n-1}(\partial W_2 \cap \mathcal{C}) + 5\rho \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \nu_1^{(n-1)/n} - H^{n-1}(\partial W_2 \cap \mathcal{C}) + 5\rho. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ici le fait que

$$\partial W_2 \cap \mathcal{C} \subset (\partial G \cap (\mathcal{C} \setminus (s_1, s_2))) \cup (\overline{G} \cap \partial B(s_2)).$$

Si $\partial W_2 \cap \mathcal{C}$ était un graphe au-dessus de $\overline{B}_{n-1}(0, u)$, pour tout $w \in B_{n-1}(0, u)$, on aurait $\partial G' \cap \mathcal{C} \cap p^{-1}(w) = \{(w, t + \tilde{f}(w))\}$, où $\{(w, t)\} = \partial W_2 \cap \mathcal{C} \cap p^{-1}(w)$. Ici ∂_2 n'est a priori pas vide, et il faut non seulement tenir compte de ces points-là, mais aussi d'une certaine partie résiduelle de ∂W_2 , c'est-à-dire de $\partial_* = \partial G' \cap \mathcal{C} \cap \partial W_2$. Comme $H^{n-1}(\partial_2^*)$ est négligeable par rapport au gain dû à l'élimination de W_1 , la contribution de ∂_* restera aussi négligeable. En effet, montrons que

$$(3.2.40) \quad \partial_* \subset (\partial_2^* \cap \text{int}(\mathcal{C})) \cup (\partial W_2 \cap \partial' \mathcal{C}),$$

avec $\partial' \mathcal{C} = \partial \mathcal{C} \cap p^{-1}(\partial B_{n-1}(0, u))$.

On a par construction $\partial W_2 \cap \mathcal{C} \subset \text{int}(\mathcal{C}) \cup \partial' \mathcal{C}$, donc $\partial_* \cap \partial \mathcal{C} \subset \partial W_2 \cap \partial' \mathcal{C}$. Il suffit donc de montrer que $\partial_* \cap \text{int}(\mathcal{C}) \subset \partial_2^* \cap \text{int}(\mathcal{C})$. Par l'absurde, supposons que $(w, t^-) \in \partial_* \cap \partial_1^*$ avec $w \in B_{n-1}(0, u)$. Par définition de t^- et comme $0 < \tilde{f}(w) < t_2$, on a $(w, t^- - \tilde{f}(w)) \in W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})$. Alors comme $W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})$ est ouvert et par continuité de \tilde{f} , on peut trouver $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} B_{n-1}(w, \alpha_1) \times]t^- - \tilde{f}(w) - \alpha_2, t^- - \tilde{f}(w) + \alpha_2[&\subset W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C}), \\ \tilde{f}(w) - \frac{\alpha_2}{2} \leq \tilde{f}(w') \leq \tilde{f}(w) + \frac{\alpha_2}{2} &\quad \forall w' \in B_{n-1}(w, \alpha_1). \end{aligned}$$

Soit alors $(w', t) \in B_{n-1}(w, \alpha_1) \times]t^- - \frac{\alpha_2}{2}, t^- + \frac{\alpha_2}{2}[$. On a $t^- - \tilde{f}(w) - \alpha_2 < t - \tilde{f}(w') < t^- - \tilde{f}(w) + \alpha_2$, donc par construction de A , on a $(w', t) \in G'$. Nous avons donc trouvé un voisinage de (w, t^-) inclu dans G' ce qui contredit le fait que $(w, t^-) \in \partial G'$ et démontre (3.2.40). On en déduit

$$(3.2.41) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(\partial_*) &\leq H^{n-1}(\partial_2^* \cap \text{int}(\mathcal{C})) + H^{n-1}(\partial W_2 \cap \partial' \mathcal{C}) \\ &\leq C'(\eta, \theta_0, \theta_1) C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n} + H^{n-1}(\partial W_2 \cap \partial' \mathcal{C}), \end{aligned}$$

avec, d'après (3.2.35), $C'(\eta, \theta_0, \theta_1)$ qui tend vers 0 quand $(\eta, \theta_0, \theta_1)$ tend vers $(1, 1, 1)$.

Reste à évaluer $\partial^* = (\partial G' \cap \mathcal{C}) \setminus \partial W_2$. Comme nous l'avons annoncé plus haut, montrons que

$$(3.2.42) \quad \partial^* \subset \partial = \{(w, t + \tilde{f}(w)) : (w, t) \in \partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})\}.$$

Comme $G' = (G \setminus W_1) \cup A$, on a $\partial G' \subset \partial(G \setminus W_1) \cup \partial A$. D'autre part

$$\partial(G \setminus W_1) \cap \mathcal{C} \subset \partial W_2.$$

Donc $\partial^* \subset \partial A$. Donc tout élément de ∂^* est de la forme $(w, t + \tilde{f}(w))$ avec $(w, t) \in \overline{W}_2 \cap \overline{\mathcal{C}}$. Or $\partial^* \cap \partial \mathcal{C} \subset \partial' \mathcal{C}$. Donc si $z = (w, t + \tilde{f}(w)) \in \partial^* \cap \partial \mathcal{C}$, alors $w \in \partial B_{n-1}(0, u)$ et $\tilde{f}(w) = 0$. Donc $z \in \overline{W}_2$ ce qui est impossible (en effet $W_2 \cap \partial G' = \emptyset$ et $\partial W_2 \cap \partial^* = \emptyset$). Si $z = (w, t + \tilde{f}(w)) \in \partial^*$ avec $(w, t) \in W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})$, alors comme pour la démonstration de (3.2.40), on peut trouver tout un voisinage de z inclu dans A , ce qui est impossible si $z \in \partial G'$. Ceci démontre bien (3.2.42).

D'après le lemme 3.2.4, on a

$$(3.2.43) \quad H^{n-1}(\partial) \leq (1 + \|\nabla \tilde{f}\|_\infty)^{n-1} H^{n-1}(\partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})).$$

Or $\|\nabla\tilde{f}\|_\infty = \frac{\lambda}{u}\|\nabla f\|_\infty$, et en utilisant (3.2.16), (3.2.25) et le fait que $\eta \in]\frac{3}{4}, 1[$ et $\theta_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$, on obtient $\|\nabla\tilde{f}\|_\infty \leq \frac{C}{C_1^n}$ pour une constante C ne dépendant que de la dimension. Donc si C_1 est assez grand, en fonction uniquement de la dimension, on a

$$(3.2.44) \quad (1 + \|\nabla\tilde{f}\|_\infty)^{n-1} \leq 1 + \frac{C}{C_1^n},$$

pour une constante C ne dépendant que de la dimension, et en utilisant (3.2.42), (3.2.43) et (3.2.44), on obtient finalement

$$H^{n-1}(\partial^*) \leq H^{n-1}(\partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})) + \frac{C}{C_1^n} H^{n-1}(\partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})).$$

En utilisant maintenant la dernière inégalité de (3.2.33), on en déduit

$$(3.2.45) \quad H^{n-1}(\partial^*) \leq H^{n-1}(\partial W_2 \cap \text{int}(\mathcal{C})) + \frac{C}{C_1} \nu_1^{(n-1)/n}.$$

Finalement en combinant (3.2.39), (3.2.41) et (3.2.45), on obtient

$$H^{n-1}(\partial G') \leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \nu_1^{(n-1)/n} + \frac{C}{C_1} \nu_1^{(n-1)/n} + C'(\eta, \theta_0, \theta_1) C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n} + 5\rho.$$

Appliquons maintenant le lemme 3.1.1 à G' pour obtenir un candidat $G'' \in \mathcal{G}(R)$ tel que $G'' \subset G'$ et

$$H^{n-1}(\partial G'') \leq H^{n-1}(\partial G').$$

On a

$$\begin{aligned} |G'' \Delta G| &\leq |G' \setminus G''| + |G' \Delta G| \\ &\leq (|G'| - m_0) + |G' \Delta G| \\ &\leq C \nu_1 \\ &\leq C \varepsilon_0, \end{aligned}$$

d'après (3.2.37) et (3.2.28). Quitte à diminuer ε_0 , on peut supposer que

$$(3.2.46) \quad g(|G'' \Delta G|) \leq \frac{C_n}{4} \nu_1^{(n-1)/n}.$$

On en déduit alors en utilisant la quasi-minimalité de G et ce qui précède que

$$(3.2.47) \quad C_n \nu_1^{(n-1)/n} \leq \frac{C}{C_1} \nu_1^{(n-1)/n} + C'(\eta, \theta_0, \theta_1) C_1^{n-1} \nu_1^{(n-1)/n} + \frac{C_n}{4} \nu_1^{(n-1)/n} + 5\rho.$$

Fixons maintenant les différentes constantes. Choisissons ε_0 assez petit pour que, dans un premier temps, (3.2.4), (3.2.10), l'analogie pour W_1 (page 56) et (3.2.46) soient vérifiés et de tel que de plus le lemme 3.2.2 permette de conclure dans le cas où W_1 n'est pas $\varepsilon(\delta')$ -quasi-isopérimétrique, où δ' a été fixé page 56. Fixons

maintenant C_1 assez grand de telle sorte que (3.2.27) soit valide si $H^{n-1}(\partial W_1) \leq C_n(1 + \varepsilon(\delta'))\nu_1^{(n-1)/n}$, de telle sorte que (3.2.44) soit vérifié et enfin de telle sorte que

$$\frac{C}{C_1} \leq \frac{C_n}{4},$$

où C est la constante qui intervient dans (3.2.47). La constante C_1 étant maintenant fixée, choisissons η , θ_0 et θ_1 assez proches de 1 pour que (3.2.36) soit valide et pour que

$$C'(\eta, \theta_0, \theta_1)C_1^{n-1} \leq \frac{C_n}{4},$$

où $C'(\eta, \theta_0, \theta_1)$ intervient dans (3.2.47). La constante η ainsi fixée, on peut trouver δ assez petit tel que (3.2.11) soit valide, puis ε dans (3.2.8) assez petit de telle sorte que $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta)$. On peut aussi trouver γ_0 assez proche de 1 tel que, quitte à diminuer ε , (3.2.13) soit valide. Quitte à diminuer ε_0 , en fonction de ε ainsi fixé, on peut le supposer assez petit de telle sorte que le lemme 3.2.2 permette de conclure dans le cas où W_2 n'est pas ε -quasi-isopérimétrique. Les constantes C_1 , θ_0 et θ_1 étant fixées, choisissons τ assez petit de telle sorte que l'on puisse bien construire \tilde{C} (c'est-à-dire tel que (3.2.14) soit vérifié) et tel que (3.2.15), (3.2.17), (3.2.19) et (3.2.30) soient valides. La constante τ maintenant fixée, quitte à diminuer ε_0 , on peut le supposer assez petit pour pouvoir conclure dans le cas où (3.2.5) est vérifié (c'est-à-dire le cas où ν_1 et ν_2 sont de taille comparable). Avec les différentes constantes ainsi fixées, on déduit de (3.2.47)

$$C_n\nu_1^{(n-1)/n} \leq \frac{3}{4}C_n\nu_1^{(n-1)/n} + 5\rho,$$

c'est-à-dire

$$\nu_1^{(n-1)/n} \leq C\rho,$$

où C est une constante absolue, ce qui exactement ce que nous voulions.

Reste à traiter le cas où $\nu_2 < \tau\nu_1$. Il suffit d'échanger les rôles de W_1 et W_2 et il se traite exactement de la même manière que précédemment à ceci près que, comme nous l'avons déjà remarqué, l'introduction du cône D , qui visait juste à assurer que les transformations effectuées resteraient intérieures à $B(s_3)$ n'est plus nécessaire. En effet, comme $W_1 \subset (s_1, s_2) \subset (s_1, s_3)$, peu importe la direction du cône \tilde{C} où l'on cherche à rajouter la masse ν_2 . Les différentes estimations et les différentes constantes qui interviennent dans le cas précédent ne dépendant jamais de W_2 ou W_1 , on peut alors conclure en utilisant la même construction avec les mêmes constantes. Et ceci achève la démonstration de la proposition 3.2.1. \square

Anticipons un peu sur la suite et donnons une autre application de la construction précédente. Nous l'utiliserons dans le paragraphe 4.1.1. Supposons que nous disposons de $\tilde{G} \subset G$, de $x \in \mathbb{R}^n$ et de r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < r_2$, $B(x, r_2) \subset B_R$, $\tilde{G} \cap B(x, r_2) =$

$G \cap B(x, r_2)$ et tels que $\overline{B}(x, r_2) \setminus B(x, r_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. Posons $W_1 = G \cap B(x, r_1)$, $\nu_1 = |W_1|$ et $\nu_2 = |G \setminus \tilde{G}|$. Supposons de plus que

$$(3.2.48) \quad C\nu_2^{1/n} < r_2 - r_1,$$

où C est la même constante que dans (3.2.26). Si W_1 n'est pas ε -quasi-isopérimétrique pour la constante ε fixée précédemment, en utilisant le même argument que dans le lemme 3.2.2 (c'est-à-dire en remplaçant W_1 par une boule) et le fait que $\overline{G} \cap \partial B(x, r_1) = \emptyset$, on a

$$\nu_1^{(n-1)/n} \leq C'g(C\nu_1),$$

et si ν_1 est assez petit, on en déduit que $\nu_1 = 0$.

Si W_1 est ε -quasi-isopérimétrique et si $\nu_2 < \tau\nu_1$ où τ est la même constante que précédemment, on peut utiliser la construction précédente pour rajouter à W_1 un ensemble du type de A de mesure de Lebesgue comparable à ν_2 . Sous réserve de vérifier que $A \subset B(x, r_2)$, cette construction nous permet d'obtenir un candidat $G'' \in \mathcal{G}(R)$ tel que

$$(3.2.49) \quad H^{n-1}(\partial G'') \leq H^{n-1}(\partial \tilde{G}) + \frac{C_n}{2} \nu_2^{(n-1)/n},$$

et

$$(3.2.50) \quad |G'' \Delta \tilde{G}| \leq C\nu_2,$$

pour une certaine constante universelle C .

Pour vérifier que $A \subset B(x, r_2)$, il suffit de s'assurer que $\|\tilde{f}\|_\infty < r_2 - r_1$ où \tilde{f} est la fonction qui intervient dans la définition de A . Or (3.2.26), le fait que $C_1 > 1$ et (3.2.48) nous l'assurent.

3.3. Couronnes isolées

Nous allons tirer quelques conséquences de la proposition 3.2.1. Le but est de trouver, là où on ne contrôle pas $h(x, r)$ en fonction de $h(x, 4r)$, des couronnes isolées, c'est-à-dire des couronnes $\overline{B}(x, r_2) \setminus B(x, r_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, dans lesquelles nous pourrions appliquer la remarque précédente. Dans un premier temps, on va trouver grâce à une application répétée de la proposition 3.2.1 deux rayons t_1 et t_2 tels que

$$H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, t_1)) = H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, t_2)) = 0.$$

Une nouvelle application de la proposition 3.2.1 avec maintenant $\rho = 0$ donnera alors la conclusion voulue.

LEMME 3.3.1. — *Il existe $\varepsilon_1 > 0$ universel tel que pour tout $x \in B_R$ et tout $0 < r \leq 1/4$ tels que $B(x, 4r) \subset B_R$, si $r^{-n}|G \cap B(x, 4r)| \leq \varepsilon_1$ alors il existe $t_1 \in]r, 2r[$ et $t_2 \in]3r, 4r[$ tels que*

$$H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, t_1)) = H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, t_2)) = 0.$$

Démonstration. — Soient $x \in B_R$ et $0 < r \leq \frac{1}{4}$ tels que $B(x, 4r) \subset B_R$. Nous allons dans un premier temps construire deux suites de $[r, 2r]$, $(a_j)_{j \geq 0}$ strictement croissante et $(b_j)_{j \geq 0}$ strictement décroissante, toutes deux convergeant vers un certain $t_1 \in]r, 2r[$ et telles que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, a_j)) &= 0, \\ \lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, b_j)) &= 0. \end{aligned}$$

Posons $a_0 = r$ et $b_0 = \gamma_0 r \in]r, 2r[$, où γ_0 est la constante de la proposition 3.2.1. Supposons avoir construit $r \leq a_j < b_j \leq \gamma_0 r$. Posons

$$\begin{aligned} l_j &= b_j - a_j, \\ \nu_j &= |G \cap (a_j, b_j)|. \end{aligned}$$

Par Fubini, on peut trouver

$$s_1^j \in \left] a_j, a_j + \frac{l_j}{4} \right[, \quad s_2^j \in \left] a_j + \frac{3l_j}{8}, a_j + \frac{5l_j}{8} \right[, \quad s_3^j \in \left] b_j - \frac{l_j}{4}, b_j \right[,$$

tels que

$$(3.3.1) \quad \rho_j \leq 4 \frac{\nu_j}{l_j},$$

avec

$$\rho_j = \max_{i=1,2,3} \left\{ H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, s_i^j)) \right\}.$$

Posons

$$\begin{cases} a_{j+1} = s_1^j \\ b_{j+1} = s_2^j \end{cases} \quad \text{si } |G \cap (s_1^j, s_2^j)| \leq |G \cap (s_2^j, s_3^j)|, \\ \begin{cases} a_{j+1} = s_2^j \\ b_{j+1} = s_3^j \end{cases} \quad \text{si } |G \cap (s_1^j, s_2^j)| > |G \cap (s_2^j, s_3^j)|.$$

On dispose donc d'une suite $(a_j)_{j \geq 0}$ strictement croissante et d'une suite $(b_j)_{j \geq 0}$ strictement décroissante. Pour tout $j \geq 0$, on a

$$(3.3.2) \quad \frac{l_j}{8} \leq l_{j+1} \leq \frac{5l_j}{8}.$$

En particulier l_j tend vers 0 et il existe $t_1 \in]r, 2r[$ tel que $a_j \uparrow t_1$ et $b_j \downarrow t_1$. Montrons maintenant que ρ_j tend vers 0. Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ que nous choisirons petit plus tard et posons

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\gamma_0 - 1}{8} \right)^n \varepsilon.$$

Ici ε_0 est la constante de la proposition 3.2.1. Supposons que

$$r^{-n} |G \cap B(x, 4r)| \leq \varepsilon_1.$$

Pour tout $j \geq 0$, on a

$$(3.3.3) \quad |G \cap (s_1^j, s_3^j)| \leq \nu_j \leq |G \cap B(x, 4r)| \leq \varepsilon_1 r^n \leq \varepsilon_0 (s_1^j)^n,$$

$$(3.3.4) \quad 1 \leq \frac{s_3^j}{s_2^j} \leq \gamma_0,$$

$$(3.3.5) \quad \left(\frac{l_j}{8}\right)^n \leq \min \left\{ (s_2^j - s_1^j)^n, (s_3^j - s_2^j)^n \right\}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $j \geq 0$,

$$(3.3.6) \quad \nu_j \leq \varepsilon \left(\frac{l_j}{8}\right)^n,$$

et

$$(3.3.7) \quad \rho_j \prod_{i=0}^j l_i^{N^{j-i}} \leq (4C_0)^{\sum_{i=0}^j N^i} \nu_0^{N^j},$$

où C_0 est la constante de la proposition 3.2.1 et $N = \frac{n}{n-1}$. On a

$$\nu_0 = |G \cap (r, \gamma_0 r)| \leq \varepsilon_1 r^n = \varepsilon_1 \left(\frac{8}{\gamma_0 - 1}\right)^n \left(\frac{l_0}{8}\right)^n = \varepsilon \left(\frac{l_0}{8}\right)^n,$$

et d'après (3.3.1), comme $C_0 > 1$,

$$\rho_0 l_0 \leq 4\nu_0 \leq (4C_0)\nu_0.$$

Supposons avoir montré (3.3.6) et (3.3.7) pour un certain $j \geq 0$. Alors, en utilisant (3.3.6) et (3.3.5), on a

$$|G \cap (s_1^j, s_3^j)| \leq \nu_j \leq \varepsilon \left(\frac{l_j}{8}\right)^n \leq \varepsilon_0 \min \left\{ (s_2^j - s_1^j)^n, (s_3^j - s_2^j)^n \right\}.$$

En tenant compte de (3.3.3) et (3.3.4), on peut appliquer la proposition 3.2.1 et on obtient

$$(3.3.8) \quad \nu_{j+1} \leq C_0 \rho_j^N.$$

En utilisant (3.3.1) et (3.3.6) on en déduit

$$\nu_{j+1} \leq C_0 \left(4\frac{\nu_j}{l_j}\right)^N \leq C\varepsilon^N l_j^n,$$

pour une certaine constante C . Comme d'après (3.3.2), $l_j \leq 8l_{j+1}$, on obtient

$$\nu_{j+1} \leq C\varepsilon^N \left(\frac{l_{j+1}}{8}\right)^n,$$

pour une constante C universelle. Comme $N > 1$, on peut trouver ε assez petit de telle sorte que

$$\nu_{j+1} \leq \varepsilon \left(\frac{l_{j+1}}{8}\right)^n.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \rho_{j+1} \prod_{i=0}^{j+1} l_i^{N^{j+1-i}} &= \rho_{j+1} l_{j+1} \left(\prod_{i=0}^j l_i^{N^{j-i}} \right)^N \\ &\leq 4\nu_{j+1} \left(\prod_{i=0}^j l_i^{N^{j-i}} \right)^N && \text{(d'après (3.3.1))} \\ &\leq 4C_0 \left(\rho_j \prod_{i=0}^j l_i^{N^{j-i}} \right)^N && \text{(d'après (3.3.8))} \\ &\leq (4C_0)^{\sum_{i=0}^{j+1} N^i} \nu_0^{N^{j+1}} && \text{(d'après (3.3.7)),} \end{aligned}$$

et ceci achève la démonstration par récurrence de (3.3.6) et (3.3.7). On a donc, pour tout $j \geq 0$,

$$\rho_j \leq \left((4C_0)^{\sum_{i=0}^j N^{-i}} \frac{\nu_0}{\prod_{i=0}^j l_i^{N^{-i}}} \right)^{N^j}.$$

Or comme $4C_0 > 1$, on a

$$(4C_0)^{\sum_{i=0}^j N^{-i}} \leq (4C_0)^n,$$

et comme $l_0 = (\gamma_0 - 1)r < 1$, on a en utilisant (3.3.2),

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^j l_i^{N^{-i}} &\geq 8^{-\sum_{i=0}^j iN^{-i}} l_0^{\sum_{i=0}^j N^{-i}} \\ &\geq \left(8^{-\sum_{i=0}^{\infty} iN^{-i}} \right) l_0^n, \end{aligned}$$

et on obtient

$$\rho_j \leq \left(C \frac{\nu_0}{l_0^n} \right)^{N^j},$$

pour une constante universelle C . Or $\nu_0/l_0^n \leq \varepsilon/8^n$. Quitte à diminuer ε , on peut donc supposer que $C\nu_0/l_0^n < 1$ et on en déduit

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \rho_j = 0,$$

et en particulier

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, a_j)) &= 0, \\ \lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, b_j)) &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière, quitte à diminuer ε_1 , on peut construire deux suites de $]3r, 4r[$, $(c_j)_{j \geq 0}$ strictement croissante et $(d_j)_{j \geq 0}$ strictement décroissante, toutes deux

convergeant vers un certain $t_2 \in]3r, 4r[$ et telles que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, c_j)) = 0,$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, d_j)) = 0.$$

En général, ceci ne suffit pas pour conclure. Mais on sait que G est un quasi-minimum régulier de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ et le lemme suivant va nous permettre de conclure.

LEMME 3.3.2. — *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que $\partial\Omega$ est Ahlfors-régulière, que Ω vérifie la condition B et que $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$. On suppose qu'il existe deux suites $a_j \uparrow t$ et $b_j \downarrow t$ avec $t > 0$, telles que*

$$(3.3.9) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{\Omega} \cap \partial B(a_j)) = 0$$

$$(3.3.10) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} H^{n-1}(\overline{\Omega} \cap \partial B(b_j)) = 0.$$

Alors $H^{n-1}(\overline{\Omega} \cap \partial B(t)) = 0$.

Démonstration. — Comme Ω est ouvert, on a $\Omega \cap \partial B(t) = \emptyset$. Par l'absurde supposons que $H^{n-1}(\partial\Omega \cap \partial B(t)) > 0$. On va extraire deux sous-suites $(a_{j(k)})_{k \geq 0}$ et $(b_{j(k)})_{k \geq 0}$ telles que

$$(3.3.11) \quad H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(a_{j(0)})) + H^{n-1}(\partial\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(b_{j(0)}))) \geq C,$$

$$(3.3.12)$$

$$H^{n-1}(\partial\Omega \cap (B(a_{j(k+1)}) \setminus B(a_{j(k)}))) + H^{n-1}(\partial\Omega \cap (B(b_{j(k)}) \setminus B(b_{j(k+1)}))) \geq C,$$

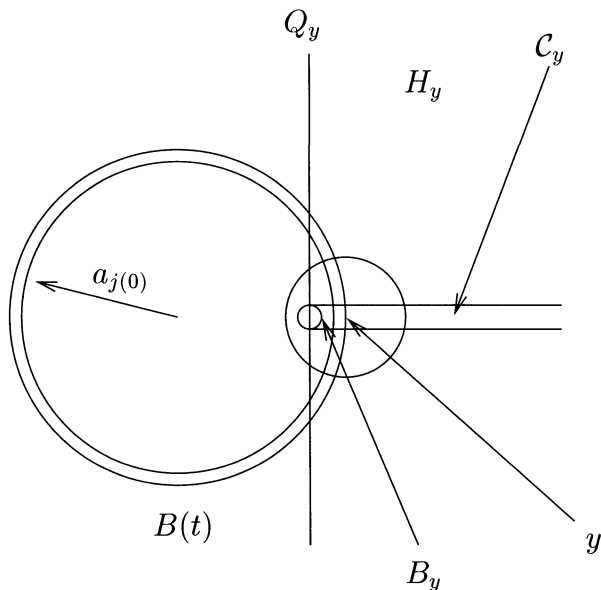
pour tout $k \geq 0$ avec une constante C ne dépendant pas de k . Une conséquence immédiate de (3.3.11) et (3.3.12) est que $H^{n-1}(\partial\Omega) = +\infty$, ce qui donnera la contradiction souhaitée.

Pour construire $a_{j(0)}$ et $b_{j(0)}$, on se donne un $r_0 \in]0, 1[$ petit, et on considère un recouvrement de type Vitali de $\partial\Omega \cap \partial B(t)$ par des boules $B(y, 5r_0)$, $y \in \mathcal{A} \subset \partial\Omega \cap \partial B(t)$, tel que les boules $B(y, r_0)$ soient deux à deux disjointes. Notons que comme $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ et comme $\partial\Omega$ est Ahlfors-régulière, $\#\mathcal{A} < +\infty$. En effet,

$$\begin{aligned} Cr_0^{n-1} \#\mathcal{A} &\leq \sum_{y \in \mathcal{A}} H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(y, r_0)) \\ &\leq H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 0 < H^{n-1}(\partial\Omega \cap \partial B(t)) &\leq \sum_{y \in \mathcal{A}} H^{n-1}(\partial\Omega \cap \partial B(t) \cap B(y, 5r_0)) \\ &\leq \sum_{y \in \mathcal{A}} H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(y, 5r_0)) \\ &\leq Cr_0^{n-1} \#\mathcal{A}, \end{aligned}$$

FIGURE 3.5. $B_y \subset B(t)$.

donc

$$\#\mathcal{A} \geq \frac{C_1}{r_0^{n-1}},$$

pour une certaine constante C_1 .

A tout $y \in \mathcal{A}$, on peut associer d'après la condition B, une boule $B_y \subset B(y, r_0) \cap \Omega$, de rayon $\geq C_2^{-1}r_0$ pour une certaine constante C_2 . Comme $\Omega \cap \partial B(t) = \emptyset$, de deux choses l'une, ou bien $B_y \subset B(t)$, ou bien $B_y \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(t)$. On distingue deux cas.

Si

$$(3.3.13) \quad \#\mathcal{A}_1 = \#\{y \in \mathcal{A} : B_y \subset B(t)\} \geq \frac{\#\mathcal{A}}{2} \geq \frac{C_1}{2r_0^{n-1}} = \frac{C_3}{r_0^{n-1}},$$

posons

$$\delta = \text{dist} \left(\left(\bigcup_{y \in \mathcal{A}_1} B_y \right), \partial B(t) \right) \leq r_0,$$

$$j(0) = \min\{j \geq 0 : t - a_j < \delta\}.$$

Pour tout $y \in \mathcal{A}_1$, on a $\overline{B}_y \subset B(a_{j(0)})$. On note Q_y l'hyperplan passant par le centre de B_y et parallèle à l'hyperplan tangent à $\partial B(t)$ en y , Π_y la projection orthogonale sur Q_y et H_y le demi-espace de frontière Q_y contenant y . On définit

$\mathcal{C}_y = \Pi_y^{-1}(B_y \cap Q_y) \cap H_y$ (voir la figure 3.5). On a

$$(3.3.14) \quad \partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y \subset B(y, r_0),$$

$$(3.3.15) \quad \Pi_y(\partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y) = Q_y \cap B_y.$$

Remarquons tout de suite que comme le rayon de B_y est supérieur à $C_2^{-1}r_0$,

$$(3.3.16) \quad H^{n-1}(Q_y \cap B_y) \geq C_4 r_0^{n-1},$$

pour une constante C_4 ne dépendant que de la dimension et de C_2 . Notons

$$\mathcal{B}_1 = \{y \in \mathcal{A}_1 : H^{n-1}(\bar{\Omega} \cap \partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y) \geq C_5 r_0^{n-1}\}$$

où C_5 sera choisi plus tard. Les boules $B(y, r_0)$, $y \in \mathcal{B}_1$, étant deux à deux disjointes, on a en utilisant (3.3.14),

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\bar{\Omega} \cap \partial B(a_{j(0)})) &\geq \sum_{y \in \mathcal{B}_1} H^{n-1}(\bar{\Omega} \cap \partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y) \\ &\geq C_5 r_0^{n-1} \#\mathcal{B}_1. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, que nous choisirons petit plus tard. Si r_0 est assez petit, comme on a $t - a_{j(0)} < \delta \leq r_0$, d'après (3.3.9), on peut supposer que pour tout $j \geq j(0)$,

$$H^{n-1}(\bar{\Omega} \cap \partial B(a_j)) \leq \varepsilon,$$

et donc

$$(3.3.17) \quad \#\mathcal{B}_1 \leq C_5^{-1} \frac{\varepsilon}{r_0^{n-1}}.$$

Notons $\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{B}_1$. D'après (3.3.13) et (3.3.17), on a

$$(3.3.18) \quad \#\mathcal{B}_2 \geq (C_3 - C_5^{-1}\varepsilon)r_0^{-(n-1)}.$$

Comme tout segment joignant $\partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$ à $B_y \cap Q_y \subset \Omega$ rencontre $\partial\Omega$ dans $B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y$, on a pour tout $y \in \mathcal{B}_2$,

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y) &\geq H^{n-1}(\Pi_y(\partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}))) \\ &= H^{n-1}(\Pi_y(\partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y)) - H^{n-1}(\Pi_y(\bar{\Omega} \cap \partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y)) \\ &\geq H^{n-1}(Q_y \cap B_y) - H^{n-1}(\bar{\Omega} \cap \partial B(a_{j(0)}) \cap \mathcal{C}_y) \\ &\geq (C_4 - C_5)r_0^{n-1}, \end{aligned}$$

d'après (3.3.15) pour l'avant-dernière inégalité et (3.3.16) et la définition de \mathcal{B}_2 pour la dernière inégalité. On choisit alors $C_5 = \frac{C_4}{2}$ et on obtient pour tout $y \in \mathcal{B}_2$,

$$H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(a_{j(0)}) \cap B(y, r_0)) \geq \frac{C_4}{2} r_0^{n-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(a_{j(0)})) &\geq \sum_{y \in \mathcal{B}_2} H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(a_{j(0)}) \cap B(y, r_0)) \\ &\geq \frac{C_4}{2} r_0^{n-1} \#\mathcal{B}_2 \\ &\geq \frac{C_4}{2} (C_3 - C_5^{-1} \varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{d'après (3.3.18)}).$$

On choisit alors ε assez petit de telle sorte que

$$C_3 - C_5^{-1} \varepsilon \geq \frac{C_3}{2},$$

et on obtient

$$H^{n-1}(\partial\Omega \cap B(a_{j(0)})) \geq \frac{C_3 C_4}{4}.$$

Reste à traiter le cas où

$$\#\mathcal{A}_1 < \frac{\#\mathcal{A}}{2}.$$

Notons alors

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1 = \{y \in \mathcal{A} : B_y \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(t)\}.$$

On a

$$\#\mathcal{A}_2 \geq \frac{\#\mathcal{A}}{2} \geq \frac{C_3}{r_0^{n-1}}.$$

Comme dans le cas précédent, posons

$$\begin{aligned} \delta &= \text{dist} \left(\left(\bigcup_{y \in \mathcal{A}_2} B_y \right), \partial B(t) \right) \leq r_0, \\ j(0) &= \min \{j \geq 0 : b_j - t < \delta\}, \end{aligned}$$

et quitte à diminuer r_0 , on peut supposer que

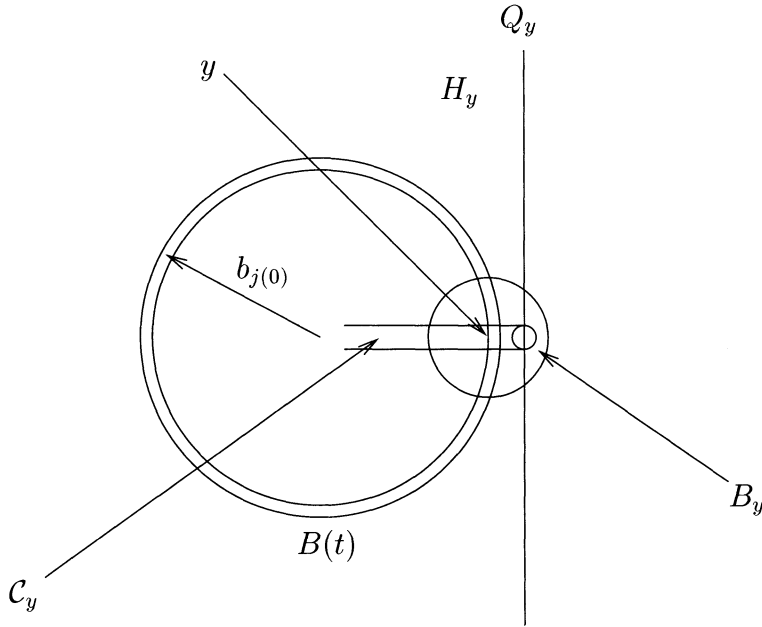
$$H^{n-1}(\overline{\Omega} \cap \partial B(b_j)) \leq \varepsilon$$

pour tout $j \geq j(0)$, où ε est maintenant fixé. Pour $y \in \mathcal{A}_2$, on définit Q_y , Π_y et \mathcal{C}_y comme dans le premier cas (voir la figure 3.6), et le même raisonnement avec les mêmes constantes donne

$$H^{n-1}(\partial\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(b_{j(0)}))) \geq \frac{C_3 C_4}{4},$$

et on en déduit bien (3.3.11).

Supposons maintenant avoir construit $a_{j(k)}$ et $b_{j(k)}$. On effectue la même construction à partir d'un rayon $r_{k+1} < \min\{(t - a_{j(k)}), (b_{j(k)} - t)\}$, et les mêmes estimées avec les différentes constantes maintenant fixées donnent (3.3.12). Ceci achève donc la démonstration du lemme 3.3.2. \square

FIGURE 3.6. $B_y \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(t)$.

Revenons maintenant au lemme 3.3.1. On peut appliquer le lemme 3.3.2 à G et aux suites (a_j) et (b_j) d'une part et aux suites (c_j) et (d_j) d'autre part et on en déduit finalement

$$H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, t_1)) = H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(x, t_2)) = 0,$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme. \square

Une conséquence facile de la proposition 3.2.1 et du lemme 3.3.1 est le lemme suivant :

LEMME 3.3.3 (Couronnes isolées). — *Il existe $\varepsilon_2 > 0$ universel tel que pour tout $x \in B_R$ et tout $0 < r \leq 1/4$ tels que $B(x, 4r) \subset B_R$, si*

$$(3.3.19) \quad h(x, 4r) = (4r)^{-n} |G \cap B(x, 4r)| \leq \varepsilon_2$$

et

$$(3.3.20) \quad h(x, r) > \frac{1}{2} h(x, 4r),$$

alors il existe $r_1 \in]r, 2r[$ et $r_2 \in]3r, 4r[$ tels que

$$(3.3.21) \quad \overline{B}(x, r_2) \setminus B(x, r_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}.$$

Rappelons que $h(x, r)$ est défini comme dans (2.1.6), c'est-à-dire

$$h(x, r) = r^{-n} \min \{|G \cap B(x, r)|, |B(x, r) \setminus G|\}.$$

Démonstration. — Soient $x \in B_R$ et $0 < r \leq \frac{1}{4}$ vérifiant (3.3.19) pour un certain ε_2 que nous fixerons petit plus tard ne dépendant que de la dimension et de g , et vérifiant (3.3.20). On a

$$r^{-n}|G \cap B(x, r)| \leq 4^n h(x, 4r) \leq 4^n \varepsilon_2,$$

donc, si ε_2 est choisi assez petit, en fonction uniquement de la dimension,

$$(3.3.22) \quad h(x, r) = r^{-n}|G \cap B(x, r)|.$$

D'autre part, quitte à diminuer ε_2 , on peut supposer que

$$r^{-n}|G \cap B(x, 4r)| \leq \varepsilon_1,$$

où ε_1 est la constante du lemme 3.3.1. Ce lemme nous donne alors $t_1 \in]r, 2r[$ et $t_2 \in]3r, 4r[$ tels que

$$(3.3.23) \quad H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(t_1)) = H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(t_2)) = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} W_1 &= G \cap B(x, t_1), & \nu_1 &= |W_1|, \\ W_2 &= G \cap (t_1, t_2), & \nu_2 &= |W_2|, \end{aligned}$$

et $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

Montrons que si ε_2 est assez petit, alors $\min\{\nu_1, \nu_2\} = \nu_2$. Par l'absurde, supposons que $\nu_1 < \nu_2$. On a

$$\nu_2 \leq (4r)^n h(x, 4r) < 2(4r)^n h(x, r) = 2(4^n)|G \cap B(x, r)| \leq 2(4^n)\nu_1.$$

Soit $B \subset B(x, t_2)$ une boule telle que $|B| = \nu$. Posons $G' = (G \setminus B(x, t_2)) \cup B$ et $s = \nu_1/\nu_2$, $s \in]2^{-1}4^{-n}, 1[$. Alors $G' \in \mathcal{G}(R)$ et, en utilisant (3.3.23), on a

$$\begin{aligned} (3.3.24) \quad H^{n-1}(\partial G') &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial W_1) - H^{n-1}(\partial W_2) + H^{n-1}(\partial B) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \left\{ \nu_1^{(n-1)/n} + \nu_2^{(n-1)/n} - (\nu_1 + \nu_2)^{(n-1)/n} \right\} \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \left\{ (1 + s)^{(n-1)/n} - (1 + s)^{(n-1)/n} \right\} \nu_2^{(n-1)/n} \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - C \nu_2^{(n-1)/n}, \end{aligned}$$

pour une constante C absolue. Les estimations sont les mêmes que celles de la démonstration de la proposition 3.2.1 avec $\rho = 0$. D'autre part, $|G' \Delta G| \leq C(\nu_1 + \nu_2) \leq 2C\nu_2$, donc, quitte à diminuer ε_2 , on peut supposer que

$$g(|G' \Delta G|) \leq \frac{C}{2} \nu_2^{(n-1)/n},$$

où C est la même constante que celle qui intervient dans la dernière inégalité de (3.3.24). Par quasi-minimalité de G , on en déduit que

$$\nu_2^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{2} \nu_2^{(n-1)/n},$$

et donc que $\nu_2 = 0$, ce qui contredit le fait que $\nu_2 > \nu_1$. On a donc

$$\min\{\nu_1, \nu_2\} = \nu_2.$$

D'autre part, quitte à diminuer ε_2 , on a

$$\nu \leq (4r)^n \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0 \min\{t_1^n, (t_2 - t_1)^n\},$$

où ε_0 est la constante de la proposition 3.2.1. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la démonstration de cette proposition, l'hypothèse (3.2.2) n'intervient que dans le cas où $\min\{\nu_1, \nu_2\} = \nu_1$. On peut donc l'appliquer ici à x , $s_1 = 0$, $s_2 = t_1$ et $s_3 = t_2$ avec, d'après (3.3.23),

$$\rho = \max_{i=1,2} \{H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B(t_i))\} = 0.$$

On déduit alors de (3.2.3) que $\nu_2 = |G \cap (t_1, t_2)| = 0$.

Comme G est ouvert, pour tout $z \in \overline{G}$ et tout $t > 0$, on a $|B(z, t) \cap G| > 0$, donc comme (t_1, t_2) est ouvert, $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. Alors, pour tout $r_1 \in]t_1, 2r[$ et tout $r_2 \in]3r, t_2[$, on a

$$\overline{B}(x, r_2) \setminus B(x, r_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G},$$

ce qui achève la démonstration du lemme. \square

REMARQUE 3.3.4. — On a les analogues des différents résultats de ce chapitre pour les quasi-minima réguliers de \mathcal{G}_{BV} . Le seul point auquel il faut faire un peu attention est le lemme 3.1.1 qui n'est valide que pour des ensembles bornés. Or, si G est un quasi-minimum régulier de \mathcal{G}_{BV} , par définition, le périmètre de G est fini, et donc $H^{n-1}(\partial G)$ aussi, et ∂G est Ahlfors-régulière. On en déduit facilement que G est borné. En effet, si \mathcal{A} est un ensemble maximal de points de ∂G à distance mutuelle ≥ 2 , on a

$$\begin{aligned} \#\mathcal{A} &\leq C \sum_{x \in \mathcal{A}} H^{n-1}(\partial G \cap B(x, 1)) \\ &\leq C H^{n-1}(\partial G) < +\infty, \end{aligned}$$

et, comme $\partial G \subset \cup_{x \in \mathcal{A}} B(x, 2)$ et $|G| < +\infty$, on en déduit que $\text{diam}(G) = \text{diam}(\partial G) < +\infty$.

CHAPITRE 4

CONSTANTES DE RÉGULARITÉ UNIVERSELLES

Nous avons maintenant à notre disposition tous les outils techniques pour montrer que les quasi-minima réguliers de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ sont normalisés, c'est-à-dire que l'on peut trouver des constantes dans l'Ahlfors-régularité et dans la condition B ne dépendant que des données du problème. Le but est d'obtenir une description de ∂G en termes de la fonction h comme dans (2.2.5) avec les constantes ε et t_0 remplacées par des constantes universelles. Nous en déduirons alors la conclusion souhaitée en utilisant les mêmes arguments que dans la partie 2.2.

Dans la partie 4.2, nous nous intéresserons aux composantes connexes des quasi-minima normalisés. Nous y démontrerons en particulier les théorèmes 1.4.6 et 1.4.7. Dans la partie 4.3, nous montrerons que l'on peut définitivement s'affranchir de la contrainte de volume et nous en déduirons les théorèmes 1.4.8 et 1.4.9.

4.1. Les quasi-minima réguliers sont normalisés

Le but de cette partie est d'achever la démonstration du théorème 1.4.4 (voir ce qui précède la remarque 4.1.4 pour le théorème 1.4.3). Fixons-nous donc $G \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ un quasi-minimum régulier de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ (voir la définition 2.3.1), où $R \geq 2R_0$ est fixé. Rappelons que G vérifie aussi la condition de quasi-minimalité (2.3.1) que nous utiliserons encore de préférence à (1.4.1) dans certaines situations. Le point essentiel est cette version uniforme du lemme 2.1.2 :

LEMME 4.1.1. — *Il existe deux constantes universelles $\varepsilon_3 > 0$ et $r_0 > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \in]0, r_0]$, si $h(x, 4r) \leq \varepsilon_3$ alors*

$$h(x, r) \leq \frac{1}{2}h(x, 4r).$$

En tenant compte du lemme 3.1.2, il nous reste à traiter le cas où $h(x, 4r) = (4r)^{-n}|G \cap B(x, 4r)|$. Nous allons d'abord nous intéresser aux couples $(x, r) \in B_R \times \mathbb{R}_+$

tels que $B(x, 4r) \subset B_R$. Par l'absurde nous allons montrer que si l'on peut trouver un mauvais couple (x, r) dans $B_{R-4r_0} \times]0, r_0]$ qui contredit le lemme 4.1.1, alors tous les couples de $(B_{R-4r_0} \setminus B(x, 8r_0)) \times]0, r_0]$ sont des bons couples c'est-à-dire vérifient les conclusions du lemme 4.1.1. Nous en déduisons que sur $\partial G \cap (B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0))$ nous disposons de constantes de régularité universelles. Ce sera l'objet du paragraphe 4.1.1. Nous obtiendrons dans le paragraphe 4.1.2 une contradiction en utilisant une version uniforme du lemme 2.1.1 donnée par le lemme 4.1.3 là où l'on dispose de constantes de régularité universelles. Dans le dernier paragraphe de cette partie, nous achèverons la démonstration du lemme 4.1.1 et nous en déduisons le théorème 1.4.4.

Expliquons d'abord comment nous allons choisir r_0 . Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \leq r_0$, nous voulons être capable de trouver loin de $B(x, r)$ des points de ∂G pour pouvoir y appliquer la version uniforme du lemme 2.1.1 qui sera donnée par lemme 4.1.3. En fait on peut trouver $r_0 \in]0, 1[$ universel tel que, pour tout $x \in B_R$ et tout $r \leq r_0$,

$$(4.1.1) \quad \partial G \cap (B_{R-10r} \setminus B(x, 10r)) \neq \emptyset.$$

En effet, il suffit de vérifier que

$$(4.1.2) \quad (\mathbb{R}^n \setminus G) \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0)) \neq \emptyset$$

et

$$(4.1.3) \quad G \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0)) \neq \emptyset.$$

On a

$$\begin{aligned} |B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0)| &\geq \omega_n((R-10r_0)^n - (10r_0)^n) \\ &> \omega_n R_0^n = m_0, \end{aligned}$$

pour r_0 assez petit ne dépendant que de n et de m_0 . (Rappelons que R a été fixé supérieur à $2R_0$.) On en déduit (4.1.2).

D'autre part, quitte à diminuer r_0 , nous pouvons supposer que $|B(x, 10r_0)| \leq \frac{m_0}{2}$. Si $G \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0)) = \emptyset$, alors

$$\frac{m_0}{2} \leq |G \setminus B(x, 10r_0)| \leq |G \setminus B_{R-10r_0}|,$$

et en utilisant des coordonnées polaires, on obtient

$$\frac{m_0}{2} \leq \int_{t=R-10r_0}^R \left(\int_{\omega \in S^{n-1}} \chi_G(t\omega) d\omega \right) t^{n-1} dt.$$

Or, pour tout $t \in]R-10r_0, R[$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega \in S^{n-1}} \chi_G(t\omega) d\omega &= CH^{n-1}(\rho_1(G \cap \partial B_t)) \\ &\leq CH^{n-1}(\rho_1((\partial G) \setminus B_{R-10r_0})), \end{aligned}$$

où $\rho_1 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$, $\rho_1(z) = z/|z|$ et où C est une constante qui ne dépend que de la dimension. Pour obtenir la dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que $G \subset B_R$ et que donc $\rho_1(G \cap \partial B_t) \subset \rho_1((\partial G) \setminus B_{R-10r_0})$ pour tout $t \in]R - 10r_0, R[$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{2} &\leq CR^n \left(1 - \left(1 - \frac{10r_0}{R}\right)^n\right) H^{n-1}(\rho_1((\partial G) \setminus B_{R-10r_0})) \\ &\leq CR^{n-1}r_0 H^{n-1}(\rho_1((\partial G) \setminus B_{R-10r_0})) \end{aligned}$$

si $\frac{r_0}{R} \leq \frac{r_0}{2R_0}$ est assez petit. D'autre part

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G) &\geq H^{n-1}((\partial G) \setminus B_{R-10r_0}) \\ &\geq (R - 10r_0)^{n-1} H^{n-1}(\rho_1((\partial G) \setminus B_{R-10r_0})) \\ &\geq CR^{n-1} H^{n-1}(\rho_1((\partial G) \setminus B_{R-10r_0})), \end{aligned}$$

quitte à diminuer r_0 . Donc $Cr_0^{-1} \leq H^{n-1}(\partial G)$ pour une certaine constante universelle C . D'autre part, en utilisant (2.3.1) pour comparer G et B_{R_0} , on a

$$(4.1.4) \quad H^{n-1}(\partial G) \leq H^{n-1}(\partial B_{R_0}) + g(|G \Delta B_{R_0}|) \leq C',$$

où C' est une constante universelle. On en déduit alors que $r_0 \geq C$ pour une constante C universelle, ce qui nous donne la contradiction souhaitée quitte à diminuer r_0 . Et (4.1.1) est bien vérifié pour tout $x \in B_R$ et tout $r \leq r_0$.

4.1.1. Mauvais couples. — Donnons-nous $\varepsilon_3 > 0$ que nous fixerons petit plus tard en fonction uniquement de n , m_0 et g , et imposons lui simplement pour l'instant d'être inférieur à la constante ε_2 du lemme 3.3.3. Supposons avoir trouvé $x \in B_R$ et $r \leq r_0$ tels que $B(x, 4r) \subset B_R$,

$$(4.1.5) \quad h(x, 4r) = (4r)^{-n} |G \cap B(x, 4r)| \leq \varepsilon_3$$

et

$$(4.1.6) \quad h(x, r) > \frac{1}{2} h(x, 4r).$$

Soient $y \in B_R$ et $t \leq r_0$ tels que $B(y, 4t) \subset B_R$, $B(x, 4r) \cap B(y, 4t) = \emptyset$ et tels que

$$(4.1.7) \quad h(y, 4t) = (4t)^{-n} |G \cap B(y, 4t)| \leq \varepsilon_3.$$

Montrons que (y, t) est un « bon » couple, c'est-à-dire que

$$(4.1.8) \quad h(y, t) \leq \frac{1}{2} h(y, 4t).$$

Sinon, grâce au lemme 3.3.3, on pourrait trouver $r_1 \in]r, 2r[$ et $r_2 \in]3r, 4r[$ tels que

$$\overline{B}(x, r_2) \setminus B(x, r_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G},$$

et $t_1 \in]t, 2t[$ et $t_2 \in]3t, 4t[$ tels que

$$\overline{B}(y, t_2) \setminus B(y, t_1) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}.$$

Posons $W_1 = G \cap B(x, r_1)$, $\nu_1 = |W_1|$, $W_2 = G \cap B(y, t_1)$, $\nu_2 = |W_2|$. Soit $\tau \in]0, 1[$ que nous fixerons petit plus tard. Il ne dépendra que des données du problème. Traitons tout d'abord le cas où $\tau\nu_2 \leq \nu_1 \leq \tau^{-1}\nu_2$. D'après (4.1.5) et (4.1.7), on a

$$\nu_1 + \nu_2 \leq C\varepsilon_3(r_2^n + t_2^n) \leq C\varepsilon_3 \max\{|B(x, r_2)|, |B(y, t_2)|\},$$

donc, quitte à diminuer ε_3 , on peut trouver une boule B telle que $|B| = \nu_1 + \nu_2$, incluse dans $B(x, r_2)$ si $\max\{|B(x, r_2)|, |B(y, t_2)|\} = |B(x, r_2)|$, et incluse dans $B(y, t_2)$ sinon. Posons $G' = (G \setminus (W_1 \cup W_2)) \cup B$. Alors $G' \in \mathcal{G}(R)$ et

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G') &\leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial W_1) - H^{n-1}(\partial W_2) + H^{n-1}(\partial B) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \left\{ \nu_1^{(n-1)/n} + \nu_2^{(n-1)/n} - (\nu_1 + \nu_2)^{(n-1)/n} \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la quasi-minimalité de G dans $\mathcal{G}(R)$ et le fait que $\frac{\nu_2}{\nu_1} \in [\tau, \tau^{-1}]$, on en déduit (comme dans les chapitres précédents, voir par exemple les démonstrations de la proposition 3.2.1 et du lemme 3.3.3) que, quitte à diminuer ε_3 , on a $\nu_1 = 0$, ce qui contredit (4.1.6).

Supposons maintenant que $\nu_2 < \tau\nu_1$. Nous allons appliquer la remarque qui suit la proposition 3.2.1 (voir la page 63) à $\tilde{G} = G \setminus W_2$. On se fixe donc τ comme dans cette remarque. Si W_1 n'est pas quasi-isopérimétrique, d'après cette remarque et quitte à diminuer ε_3 , on a $\nu_1 = 0$ ce qui contredit (4.1.6). D'autre part, on a

$$\nu_2 < \tau\nu_1 < \nu_1 \leq C\varepsilon_3 r^n \leq C\varepsilon_3 (r_2 - r_1)^n,$$

c'est-à-dire que si ε_3 est assez petit, (3.2.48) est vérifié. Alors, si W_1 est quasi-isopérimétrique, on peut construire $G'' \in \mathcal{G}(R)$ vérifiant (3.2.49) et (3.2.50). Comme

$$H^{n-1}(\partial \tilde{G}) = H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial W_2) \leq H^{n-1}(\partial G) - C_n \nu_2^{(n-1)/n}$$

et $|G \Delta \tilde{G}| = \nu_2$, on déduit de (3.2.49) et (3.2.50) et de la condition de quasi-minimalité (2.3.1) que l'on a

$$\begin{aligned} H^{n-1}(\partial G) &\leq H^{n-1}(\partial G'') + g(|G \Delta G''|) \\ &\leq H^{n-1}(\partial \tilde{G}) + \frac{C_n}{2} \nu_2^{(n-1)/n} + g(|G \Delta G''|) \\ &\leq H^{n-1}(\partial G) - \frac{C_n}{4} \nu_2^{(n-1)/n}, \end{aligned}$$

quitte à diminuer ε_3 . D'où $\nu_2 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $2h(y, t) > h(y, 4t)$.

De même, si $\nu_1 < \tau\nu_2$, il suffit d'inverser les rôles de W_1 et W_2 dans le raisonnement précédent.

Maintenant que nous avons obtenu (4.1.8), comme dans la démonstration du lemme 2.1.3, nous pouvons en déduire, quitte à diminuer ε_3 , que pour tout $y \in B_R$ et tout $t \leq r_0$ tels que $B(y, 5t) \subset B_R$ et $B(y, 5t) \cap B(x, 4r) = \emptyset$, si

$$h(y, 5t) = (5t)^{-n} |G \cap B(y, 5t)| \leq \varepsilon_3, \quad \text{alors} \quad |G \cap B(y, t)| = 0.$$

Comme de plus G est ouvert, on obtient $B(y, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. En combinant ce résultat et le lemme 3.1.2 appliqué à $\eta = 1/5$, on obtient que, quitte à diminuer ε_3 , pour tout $y \in B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0)$ et tout $t \leq r_0$, si $h(y, 5t) \leq \varepsilon_3$ alors $B(y, t) \subset G$ ou $B(y, t) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. Donc

$$(4.1.9) \quad \partial G \cap (B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0)) \\ = \{y \in B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0) : h(y, t) > \varepsilon_3 \quad \forall t \in]0, 5r_0]\}.$$

Montrons maintenant que grâce à cette caractérisation uniforme de ∂G loin de x , nous disposons de constantes de régularité universelles sur $\partial G \cap (B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0))$. Les arguments sont similaires à ceux de la partie 2.2. En utilisant l'inégalité de Sobolev-Poincaré (1.3.11) et (1.3.6), on déduit de (4.1.9) que pour tout $y \in \partial G \cap (B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0))$ et tout $t \leq 5r_0$,

$$(4.1.10) \quad \varepsilon_3^{(n-1)/n} t^{n-1} \leq (t^n h(y, t))^{(n-1)/n} \leq CH^{n-1}(\partial G \cap B(y, t)).$$

D'autre part, posons $G' = (G \setminus B(y, t)) \cup B$ où B est une boule incluse dans $B(y, t)$ telle que $|B| = |G \cap B(y, t)|$. Alors $G' \in \mathcal{G}(R)$ et

$$H^{n-1}(\partial G') \leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap B(y, t)) + H^{n-1}(\partial B(y, t)) + H^{n-1}(\partial B) \\ \leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap B(y, t)) + Ct^{n-1}.$$

Comme $|G' \Delta G| \leq 2|G \cap B(y, t)| \leq Ct^n$, quitte à diminuer r_0 , on peut supposer que

$$g(|G' \Delta G|) \leq t^{n-1}.$$

On en déduit en utilisant la quasi-minimalité de G que

$$H^{n-1}(\partial G) \leq H^{n-1}(\partial G') + t^{n-1} \\ \leq H^{n-1}(\partial G) - H^{n-1}(\partial G \cap B(y, t)) + Ct^{n-1}.$$

D'où

$$(4.1.11) \quad H^{n-1}(\partial G \cap B(y, t)) \leq Ct^{n-1},$$

pour une certaine constante universelle C . En combinant (4.1.10) et (4.1.11), on obtient alors une constante universelle dans l'Ahlfors-régularité.

En utilisant le même argument que dans la partie 2.2, page 36, et le fait que maintenant nous disposons d'une constante universelle dans l'Ahlfors-régularité pour les points de $B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0)$, on obtient pour ces mêmes points une constante universelle dans la condition B.

4.1.2. Un contrôle uniforme sur la variation du périmètre après de petites modifications. — Nous allons utiliser le fait que nous disposons maintenant de bonnes constantes de régularité sur $\partial G \cap (B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0))$, les propriétés des ensembles Ahlfors-réguliers qui vérifient la condition B, en particulier la situation standard décrite par la figure 1.3, et la proposition 1.2.14, pour donner une version

uniforme du lemme 2.1.1 au voisinage des points de $\partial G \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0))$. Rappelons que par choix de r_0 , on a $\partial G \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0)) \neq \emptyset$.

Dans la démonstration du lemme 2.1.1, pour trouver deux constantes ε et Q ne dépendant pas de la géométrie particulière de D et de $L \cap D$, il suffit de trouver une fonction $w \in C_0^1(D, \mathbb{R}^n)$, $\|w\|_\infty \leq 1$, telle que $\int_D \chi_L \operatorname{div} w$ et $\sup |Dw|$ n'en dépendent pas. C'est l'objet du lemme suivant.

LEMME 4.1.2. — *Pour tout $y \in \partial G$ et tout $t \in]0, 1]$, il existe $\beta > 0$, ne dépendant que de la dimension et de la constante de la condition B en y , et $C > 0$ ne dépendant que de la dimension, tels que si $\beta(y, t) \leq \beta$, alors il existe $w \in C_0^1(B(y, t), \mathbb{R}^n)$, $\|w\|_\infty \leq 1$, tel que*

$$(4.1.12) \quad \int_{B(y,t)} \chi_G \operatorname{div} w \, dx = Ct^{n-1},$$

et tel que $t^{-1} \sup |Dw|$ ne dépende que de n .

Voir (1.2.4) pour la définition des nombres $\beta(y, t)$ (avec ici $S = \partial G$). Parler de constante de la condition B en y peut paraître un peu étrange. Il s'agit juste d'un abus de langage pour désigner une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \leq 1$, il existe deux boules $B_1 \subset G \cap B(y, t)$ et $B_2 \subset B(y, t) \setminus \overline{G}$ de rayon $\geq Ct$. D'après ce qui précède, on peut trouver une telle constante qui soit universelle et qui convienne pour tous les points $y \in \partial G \cap (B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0))$. C'est en ces points-là que nous appliquerons dans un premier temps le lemme 4.1.2. Le β correspondant sera alors universel et nous le noterons β_0 .

Démonstration. — Soient y et t comme dans l'énoncé du lemme. D'après ce qui suit la proposition 1.2.14, nous savons que si $\beta(y, t)$ est assez petit, en fonction uniquement de la dimension et de la constante de la condition B en y , nous sommes dans la situation standard de la figure 1.3. Supposons, sans perte de généralité, que $y = 0$, que P est un hyperplan qui réalise $\beta(y, t)$ et que P est parallèle à l'hyperplan $\{z_n = 0\}$. Soit $\varphi \in C_0^1(B(0, t), \mathbb{R})$ une fonction cloche, $\varphi(z) = \psi(z_1/t, \dots, z_{n-1}/t)\varphi_n(z_n/t)$, où ψ est une fonction cloche d'intégrale 1, de support petit autour de 0, et φ_n est paire, de support inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, égale à 1 sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ et décroissante sur $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$. Posons $w = (w_1, \dots, w_n)$, $w_1 = \dots = w_{n-1} = 0$, $w_n = \varphi/\|\varphi\|_\infty$. Alors $w \in C_0^1(B(0, t), \mathbb{R}^n)$, $\|w\|_\infty \leq 1$, et si $\beta(y, t)$ est assez petit,

$$\int_{B(0,t)} \chi_G \operatorname{div} w = \frac{1}{\|\varphi\|_\infty} \int_{B(0,t)} \chi_G \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} = Ct^{n-1},$$

pour une constante C ne dépendant que de la dimension. D'autre part, il est clair que par définition de w , $t^{-1} \sup |Dw|$ ne dépend que de n . \square

Soit maintenant $y \in \partial G \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0))$. Grâce à la proposition 1.2.14, nous pouvons trouver $\delta_0 > 0$, $z \in \partial G$ et $t > \delta_0 r_0$ tels que $B(z, t) \subset B(y, r_0)$ et

$\beta(z, t) \leq \beta_0$, où β_0 a été défini juste après l'énoncé du lemme 4.1.2. Comme sur $\partial G \cap (B_{R-5r_0} \setminus B(x, 9r_0))$, nous disposons de constantes de régularité universelles, on peut trouver un tel δ_0 universel (voir les remarques qui suivent la proposition 1.2.14). Nous pouvons alors appliquer le lemme 4.1.2 à z et t pour obtenir $w \in C_0^1(B(z, t), \mathbb{R}^n)$, $\|w\|_\infty \leq 1$, tel que

$$\int_{B(z,t)} \chi_G \operatorname{div} w \, dx = Ct^{n-1} \geq C',$$

pour une certaine constante universelle C' , et tel que $t^{-1} \sup |Dw|$ ne dépende que de n . Comme de plus $\delta_0 r_0 < t \leq r_0$, on a $\tilde{C}^{-1} \leq \sup |Dw| \leq \tilde{C}$ pour une certaine constante universelle $\tilde{C} > 1$. En utilisant l'argument de la démonstration du lemme 2.1.1, nous pouvons en déduire qu'il existe deux constantes universelles $\varepsilon_4 > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout G' coïncidant avec G sur $B(z, t)$ et tout réel v , $|v| < \varepsilon_4$, il existe F coïncidant avec G' sur un voisinage du complémentaire de $B(z, t)$ tel que $|F| = |G'| + v$, $|F \Delta G'| \leq C|v|$, et tel que

$$\int_{B(z,t)} |\nabla \chi_F| \leq \int_{B(z,t)} |\nabla \chi_{G'}| + C|v|.$$

Et donc

$$\int_{B(y,r_0)} |\nabla \chi_F| \leq \int_{B(y,r_0)} |\nabla \chi_{G'}| + C|v|.$$

Résumons tout cela dans le lemme suivant :

LEMME 4.1.3. — *Il existe deux constantes universelles $\varepsilon_4 > 0$ et $C > 0$ telles que, pour tout $y \in \partial G \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0))$, tout G' coïncidant avec G sur $B(y, r_0)$ et tout réel v , $|v| < \varepsilon_4$, il existe F coïncidant avec G' sur un voisinage du complémentaire de $B(y, r_0)$ tel que*

$$(4.1.13) \quad |F| = |G'| + v,$$

$$(4.1.14) \quad \int_{B(y,r_0)} |\nabla \chi_F| \leq \int_{B(y,r_0)} |\nabla \chi_{G'}| + C|v|,$$

$$(4.1.15) \quad |F \Delta G'| \leq C|v|.$$

Revenons maintenant au mauvais point (x, r) du paragraphe précédent et montrons que l'hypothèse (4.1.6) était absurde. On sait en utilisant (4.1.5) que

$$|W_1| = |G \cap B(x, r_1)| \leq (4r)^n h(x, 4r) \leq C\varepsilon_3 r^n \leq C\varepsilon_3,$$

donc, quitte à diminuer ε_3 , on peut supposer que $|W_1| \leq \varepsilon_4$. Posons $G' = G \setminus W_1$ et fixons-nous $y \in \partial G \cap (B_{R-10r_0} \setminus B(x, 10r_0))$. Les deux ensembles G et G' coïncident sur $B(y, r_0)$ et nous pouvons appliquer le lemme 4.1.3 qui nous donne un bon candidat

F de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ qui vérifie (4.1.13), (4.1.14) et (4.1.15). On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(y, r_0)} |\nabla \chi_{G'}| + \int_{B(y, r_0)} |\nabla \chi_F| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + C\nu_1. \end{aligned}$$

Comme $\partial B(x, r_1) \cap \bar{G} = \emptyset$, on a $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{B(x, r_1)} |\nabla \chi_G|$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{B(x, r_1)} |\nabla \chi_G| + C\nu_1.$$

D'autre part, d'après (1.4.1),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| + g(|F\Delta G|) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{B(x, r_1)} |\nabla \chi_G| + C\nu_1 + g(|F\Delta G|). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{B(x, r_1)} |\nabla \chi_G| \leq C\nu_1 + g(|F\Delta G|).$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev-Poincaré, on en déduit

$$(\min\{|G \cap B(x, r_1)|, |B(x, r_1) \setminus G|\})^{(n-1)/n} \leq C'(\nu_1 + g(|F\Delta G|)).$$

Or, si ε_3 est assez petit,

$$|G \cap B(x, r_1)| \leq (4r)^n h(x, 4r) \leq C\varepsilon_3 r^n \leq C\varepsilon_3 r_1^n \leq \frac{|B(x, r_1)|}{2},$$

donc

$$(4.1.16) \quad \nu_1^{(n-1)/n} \leq C'(\nu_1 + g(|F\Delta G|)).$$

Or $|F\Delta G| \leq |F\Delta G'| + |G'\Delta G| \leq C\nu_1$ et combiné à (4.1.16) ceci contredit le fait que $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$ sauf si $\nu_1 = 0$ ce qui contredit alors (4.1.6).

4.1.3. Fin de la preuve. — Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas des points de $\mathbb{R}^n \setminus B_{R-4r_0}$ pour achever la démonstration du lemme 4.1.1. Nous savons maintenant que le lemme 4.1.3 est valide pour tous les points de $\partial G \cap B_{R-10r_0}$ parce que les constantes de régularité sur $\partial G \cap B_{R-10r_0}$ sont universelles. Fixons-nous un tel $y \in \partial G \cap B_{R-10r_0}$. Considérons $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R-4r_0}$ et $r \in]0, r_0]$ tels que $h(x, 4r) = (4r)^n |G \cap B(x, 4r)| \leq \varepsilon_3$. Il suffit de reprendre le raisonnement du premier cas de la démonstration du lemme 2.1.2 (page 29 et suivantes) en faisant jouer à $B(y, r_0)$ le rôle de B_1 et en lui appliquant la version uniforme du lemme 2.1.1 donnée par le lemme 4.1.3. Et on obtient $h(x, r) \leq \frac{1}{2}h(x, 4r)$.

Maintenant que le lemme 4.1.1 est acquis, on en déduit une version uniforme du lemme 2.1.3 et comme dans la partie 2.2, on obtient

$$\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x, r) \geq \varepsilon_5 \quad \forall r \in]0, 5r_0]\},$$

où ε_5 est une constante universelle.

En reprenant maintenant le raisonnement de la partie 2.2 avec cette description uniforme de ∂G , on montre que G est en fait un quasi-minimum normalisé de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Le seul argument de la partie 2.2 qu'il faut légèrement modifier est la démonstration de l'inégalité de droite dans l'Ahlfors-régularité. En fait on peut trouver deux boules \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 centrées sur $\partial G \cap B_{R-10r_0}$, de rayon r_0 , telles que $3\tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2 = \emptyset$ (quitte à diminuer r_0). On fait alors jouer à \tilde{B}_1 et \tilde{B}_2 le rôle des deux boules B_1 et B_2 du chapitre 2 et on remplace l'emploi du lemme 2.1.1 par sa version uniforme c'est-à-dire par le lemme 4.1.3. Et ceci achève la démonstration du théorème 1.4.4.

Tout ce qui précède est bien sûr aussi vrai pour les quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} (avec certaines simplifications techniques dans les démonstrations). On en déduit le théorème 1.4.3.

REMARQUE 4.1.4. — Maintenant que l'on dispose de constantes de régularité universelles, le lemme 4.1.3 est valide pour tous les points de ∂G et l'on a par conséquent une version uniforme et universelle du lemme 2.1.1 :

LEMME 4.1.5. — *Pour tout $r_0 \in]0, 1]$ il existe deux constantes $\varepsilon > 0$ et $C > 0$, ne dépendant que de r_0 , n , m_0 , et g , telles que, pour toute boule B centrée sur ∂G et de rayon r_0 , pour tout $G' \subset \mathbb{R}^n$ coïncidant avec G sur B et tout réel v , $|v| < \varepsilon$, il existe F coïncidant avec G' sur un voisinage du complémentaire de B tel que*

$$(4.1.17) \quad |F| = |G'| + v,$$

$$(4.1.18) \quad \int_B |\nabla \chi_F| \leq \int_B |\nabla \chi_{G'}| + C|v|,$$

$$(4.1.19) \quad |F \Delta G'| \leq C|v|.$$

4.2. Composantes connexes

On va maintenant s'intéresser aux composantes connexes des quasi-minima normalisés et démontrer les théorèmes 1.4.6 et 1.4.7. Rappelons que le théorème 1.4.6 nous dit que les composantes connexes d'un quasi-minimum normalisé ainsi que celles de l'intérieur de son complémentaire sont des sous-ensembles normalisés de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire qu'elles ont une frontière Ahlfors-régulière et qu'elles vérifient la condition B avec des constantes universelles. Le théorème 1.4.7 donne une estimation sur la taille et le nombre de ces composantes connexes. Le paragraphe 4.2.1 est consacré à la démonstration du théorème 1.4.6 et le paragraphe 4.2.2 à celle du théorème 1.4.7.

Avant de donner ces démonstrations, signalons une conséquence du théorème 1.4.6 (autre que le théorème 1.4.7). Si W et W' sont deux composantes connexes distinctes d'un quasi-minimum normalisé ou deux composantes connexes distinctes de l'intérieur de son complémentaire, alors W et W' sont relativement bien séparées au sens où

$$(4.2.1) \quad H^{n-1}(\partial W \cap \partial W') = 0.$$

On reprend ici les mêmes notations qu'à la page 13. Considérons donc $x \in \partial G$ tel que $\beta(x, t)$ tende vers 0 quand t tend vers 0. Ici $\beta(x, t)$ est associé à $S = \partial G$ par (1.2.4). Soit $\beta > 0$ que l'on fixera petit plus tard et $t > 0$ suffisamment petit tel que $\beta(x, t) < \beta$. Supposons que β soit assez petit pour que l'on se trouve dans la situation standard de la figure 1.3 à l'intérieur de $B(x, t)$. On peut alors trouver un hyperplan P tel que

$$(4.2.2) \quad \partial G \cap B(x, t) \subset \{y \in B(x, t) : \text{dist}(y, P) \leq \beta t\},$$

et tel que $U^+ \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ et $U^- \subset G$, où U^+ et U^- sont les deux composantes connexes de $\{y \in B(x, t) : \text{dist}(y, P) > \beta t\}$. Par l'absurde, montrons que $x \notin \partial W \cap \partial W'$, où W et W' sont deux composantes connexes distinctes de G . Sinon, d'après la condition B, on pourrait trouver deux boules $B \subset W \cap B(x, t)$ et $B' \subset W' \cap B(x, t)$ de rayon $\geq Ct$ pour une certaine constante universelle C . Alors, si β est assez petit, B et B' rencontrent nécessairement $U^+ \cup U^-$, et comme $U^+ \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, elles rencontrent toutes deux U^- . Et donc $\partial G \cap U^- \neq \emptyset$, ce qui contredit (4.2.2). Comme $\partial W \cap \partial W' \subset \partial G$ et comme $\beta(x, t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 pour H^{n-1} -presque tout $x \in \partial G$ (voir la proposition 1.2.13), on en déduit (4.2.1). On raisonne de même avec les composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. Voir aussi la remarque 4.3.4 pour une amélioration de (4.2.1) dans certains cas.

4.2.1. Les composantes connexes sont normalisées. — La démonstration du théorème 1.4.6 est essentiellement la même que celle des théorèmes 1.4.3 et 1.4.4. Maintenant que l'on dispose du lemme 4.1.5, les ajustements de masse ne poseront plus de problèmes. Il faut simplement faire attention à quelques points techniques. Donnons tout de suite un lemme qui nous dit comment se comporte le périmètre quand on élimine d'un ensemble normalisé un sous-ensemble ouvert. Grossièrement parlant, il nous dit que l'on a un bon découpage de frontière.

LEMME 4.2.1 ([DS98]). — *Soit O un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $H^{n-1}(\partial O) < +\infty$. On suppose que ∂O est Ahlfors-régulière et que O vérifie la condition B. Soit Ω un ouvert de O tel que $H^{n-1}(\partial \Omega) < +\infty$. Alors*

$$(4.2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{O \setminus \Omega}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_O| - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_\Omega| + 2H^{n-1}(\partial \Omega \cap O).$$

Dans [DS98] (voir le lemme 5.41 et les relations (5.49), (5.50) et (5.51)), G. David et S. Semmes démontrent que si O et Ω sont comme dans l'énoncé du lemme, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{O \setminus \Omega}| = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_O| - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_\Omega| + 2 \int_O |\nabla \chi_\Omega|.$$

En utilisant l'égalité entre mesures $|\nabla \chi_\Omega| = H^{n-1} \llcorner \partial^* \Omega$ et l'inclusion $\partial^* \Omega \subset \partial \Omega$, on obtient le lemme 4.2.1.

On se fixe un quasi-minimum normalisé G de \mathcal{G}_{BV} ou $\mathcal{G}_{BV}(R)$ avec $R \geq 2R_0$, W une composante connexe de G ou $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ et on va montrer que W est un ensemble normalisé.

Pour montrer l'inégalité de droite dans l'Ahlfors-régularité, remarquons que $\partial W \subset \partial G$ donc

$$(4.2.4) \quad H^{n-1}(\partial W \cap B(x, r)) \leq H^{n-1}(\partial G \cap B(x, r)) \leq Cr^{n-1},$$

pour tout $x \in \partial W$ et tout $r \leq 1$, où C est une constante universelle.

Pour obtenir l'inégalité de gauche de l'Ahlfors-régularité et la condition B, nous allons montrer que

$$(4.2.5) \quad W = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \quad |B(x, r) \setminus W| = 0\},$$

$$(4.2.6) \quad \mathbb{R}^n \setminus \overline{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \quad |W \cap B(x, r)| = 0\},$$

$$(4.2.7) \quad \partial W = \partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{W}) = \{x \in \mathbb{R}^n : h_W(x, r) \geq \varepsilon_0 \quad \forall r \in]0, r_0]\},$$

où $\varepsilon_0 > 0$ et $r_0 \leq 1$ sont deux constantes universelles (elles n'ont a priori rien à voir avec celles qui portent le même nom dans ce qui précède), et avec

$$h_W(x, r) = r^{-n} \min\{|B(x, r) \cap W|, |B(x, r) \setminus W|\}.$$

L'inégalité de gauche de l'Ahlfors-régularité et la condition B découlent de la description donnée par (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7) et de (4.2.4) comme dans la partie 2.2. Et comme ε_0 et r_0 sont universels, on obtient des constantes de régularité universelles.

Montrons d'abord (4.2.7). Posons

$$S_W = \{x \in \mathbb{R}^n : h_W(x, r) \geq \varepsilon_0 \quad \forall r \in]0, r_0]\}$$

où $\varepsilon_0 > 0$ et $r_0 \leq 1$ seront choisis plus tard, en fonction uniquement de la dimension, de m_0 et de g . Il est clair que $S_W \subset \partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{W}) \subset \partial W$.

Rappelons que

$$\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n : h_G(x, r) \geq \varepsilon'_0 \quad \forall r \in]0, r'_0]\}$$

pour deux constantes ε'_0 et r'_0 universelles. Imposons pour l'instant $\varepsilon_0 \leq \varepsilon'_0$ et $r_0 \leq r'_0$. D'autre part, si r_0 est choisi assez petit, on peut toujours trouver pour $x \in \mathbb{R}^n$ une boule B_x de rayon r_0 , centrée sur ∂G , et telle que $B(x, r_0) \cap B_x = \emptyset$ et $B_x \subset B_R$ si G est un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Dans le cas des quasi-minima de $\mathcal{G}_{BV}(R)$,

on peut raisonner comme pour le choix du rayon r_0 de la partie 4.1 (voir la page 76). Dans le cas des quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} , on remarque que, si r_0 est assez petit, $\partial G \setminus B(x, 2r_0) \neq \emptyset$. Sinon, comme $m_0 = |G| < +\infty$, on aurait $G \subset B(x, 2r_0)$, et il suffit de choisir r_0 tel que $|B(x, 2r_0)| < m_0$ pour obtenir une contradiction. Alors si $y \in \partial G \setminus B(x, 2r_0)$, $B_x = B(y, r_0)$ convient.

Soient maintenant $x \in \partial W$ et $r \leq r_0$.

Traisons d'abord le cas où W est une composante connexe de G . Le cas facile est celui où $h_W(x, r) = r^{-n}|B(x, r) \setminus W|$. Comme $\partial W \subset \partial G$, on a alors

$$h_W(x, r) \geq r^{-n}|B(x, r) \setminus G| \geq \varepsilon'_0 \geq \varepsilon_0.$$

Pour traiter le cas où $h_W(x, r) = r^{-n}|W \cap B(x, r)|$, on montre le lemme suivant :

LEMME 4.2.2. — *Il existe $\varepsilon' > 0$ universel tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \leq r_0$, si $t^{-n}|W \cap B(y, t)| < \varepsilon'$, alors*

$$\left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \left| W \cap B\left(y, \frac{t}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} t^{-n} |W \cap B(y, t)|.$$

Au point où nous en sommes, ce lemme ne devrait pas être une surprise et on n'utilisera pas d'arguments nouveaux dans sa démonstration. On se sent quand même obligé d'en donner les grandes lignes à cause de certains détails techniques pour lesquels il faut être un peu soigneux.

Démonstration. — Soit $\varepsilon' > 0$ que l'on fixera petit universel plus tard et que l'on suppose dans un premier temps assez petit de telle sorte que $\varepsilon' < \varepsilon$ où ε est associé par le lemme 4.1.5 à r_0 . Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in]0, r_0]$ tels que $h_W(y, t) = t^{-n}|W \cap B(y, t)| < \varepsilon'$.

Grâce à Fubini et Tchebychev et en utilisant (1.3.10), on peut trouver $t' \in]\frac{t}{2}, t[$ tel que

$$\begin{aligned} H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')) &\leq C \frac{|W \cap B(y, t)|}{t} \\ &\leq C t^{n-1} h_W(y, t), \end{aligned}$$

et tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{W \cap B(y, t')}| = \int_{B(y, t')} |\nabla \chi_W| + H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')).$$

Comme $\partial W \cap G = \emptyset$, on a $G \cap \partial(W \cap B(y, t')) \subset W \cap \partial B(y, t')$ et d'après (4.2.3) et par choix de t' , si on pose $G' = G \setminus (W \cap B(y, t'))$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{W \cap B(y, t')}| + 2H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{B(y, t')} |\nabla \chi_W| + H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{B(y, t')} |\nabla \chi_W| + Ct^{n-1}h_W(y, t). \end{aligned}$$

Comme G' et G coïncident sur B_y (où B_y est associé à y par l'argument qui suit la définition de S_W) et comme $|G \setminus G'| \leq t^n h_W(y, t) < \varepsilon$ (on a $t \leq r_0 \leq 1$), nous pouvons appliquer le lemme 4.1.5 à $B = B_y$ et $v = |G \setminus G'|$ pour obtenir un candidat $F \in \mathcal{G}_{BV}$ (respectivement $\mathcal{G}_{BV}(R)$ si G est un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$) vérifiant (4.1.17), (4.1.18) et (4.1.19) et coïncidant avec G' sur un voisinage du complémentaire de B_y . On a alors en comparant F et G et en utilisant la quasi-minimalité de G et les estimations habituelles,

$$\int_{B(y, t')} |\nabla \chi_W| \leq Ct^{n-1}h_W(y, t) + g(|F \Delta G|),$$

avec $|F \Delta G| \leq C't^n h_W(y, t)$ et où C et C' sont des constantes universelles. Et on conclut comme dans la démonstration du lemme 2.1.2 quitte à diminuer ε' en fonction uniquement de n , m_0 et g , puisque maintenant les constantes intervenant dans les différentes estimations sont toutes universelles. Ce qui achève la démonstration du lemme 4.2.2. \square

Revenons maintenant au point x de ∂W . Comme dans le lemme 2.1.3, une conséquence du lemme 4.2.2 est que si $r^{-n}|W \cap B(x, r)|$ est assez petit, en fonction du ε' du lemme 4.2.2 et de la dimension, alors $|W \cap B(x, \frac{r}{2})| = 0$. Or, comme W est ouvert et comme $x \in \partial W$, pour tout $t > 0$, on a $|W \cap B(x, t)| > 0$. Donc, en choisissant ε_0 assez petit, on en déduit que $r^{-n}|W \cap B(x, r)| \geq \varepsilon_0$. Donc $x \in S_W$.

Si W est une composante connexe de $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, le cas facile est encore celui où $h_W(x, r) = r^{-n}|B(x, r) \setminus W|$. On a en effet $B(x, r) \cap G \subset B(x, r) \setminus W$ donc

$$h_W(x, r) \geq r^{-n}|B(x, r) \cap G| \geq \varepsilon'_0 \geq \varepsilon_0.$$

Pour traiter le cas où $h_W(x, r) = r^{-n}|W \cap B(x, r)|$, nous allons montrer que le lemme 4.2.2 est encore valide pour les composantes connexes de G_1 . Si G est un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$, il faut être un peu plus prudent que dans le cas des composantes connexes de G pour être sûr de ne considérer que des candidats qui restent inclus dans B_R .

On se fixe donc $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \leq r_0$ tels que $t^{-n}|W \cap B(y, t)| < \varepsilon'$ où ε' sera fixé universel et petit plus tard. Comme précédemment, on peut trouver $t' \in]\frac{t}{2}, t[$ tel que

$$\begin{aligned} H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')) &\leq C \frac{|W \cap B(y, t)|}{t} \\ &\leq Ct^{n-1}h_W(y, t), \end{aligned}$$

et tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{W \cap B(y, t')}| = \int_{B(y, t')} |\nabla \chi_W| + H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')).$$

Si G est un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} ou si G est un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ et $W \subset B_R$, on pose $G' = G \cup (W \cap B(y, t'))$. On a $G_1 \cap \partial(W \cap B(y, t')) \subset W \cap \partial B(y, t')$ car $\partial W \cap G_1 = \emptyset$. Donc, par choix de t' et d'après (4.2.3),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_1 \setminus (W \cap B(y, t'))}| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_1}| - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{W \cap B(y, t')}| + 2H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{B(y, t')} |\nabla \chi_W| + H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| - \int_{B(y, t')} |\nabla \chi_W| + Ct^{n-1}h_W(y, t), \end{aligned}$$

et on conclut comme dans le cas où W est une composante connexe de G .

Si G est un quasi-minimum de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ et si $W \setminus B_R \neq \emptyset$, on pose

$$\tilde{G} = G \cup (W \cap B(y, t'))$$

et

$$G' = \tilde{G} \cap B_R.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{\tilde{G}}| + H^{n-1}(\partial B_R \cap B(y, t')) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{\tilde{G}}| + H^{n-1}(\partial B(y, t') \setminus \bar{B}_R) \end{aligned}$$

(voir ce qui précède (2.1.19)). Or, comme $\bar{G} \subset \bar{B}_R$, on a $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_R \subset W$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{\tilde{G}}| + H^{n-1}(W \cap \partial B(y, t')).$$

On évalue ensuite le périmètre de \tilde{G} comme précédemment et on conclut de la même manière. Ce qui achève la démonstration du lemme 4.2.2 dans le cas où W est une composante connexe de G_1 . Et on raisonne comme dans le cas des composantes connexes de G pour en déduire (4.2.7).

Maintenant que (4.2.7) est acquis, remarquons que comme W est ouvert et $\partial W = \partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{W})$, on a

$$S_W = \partial W = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |W \cap B(x, r)| < |B(x, r)| \quad \forall r > 0\}.$$

On en déduit que S_W et les deux ensembles qui interviennent à droite dans (4.2.5) et (4.2.6) forment une partition de \mathbb{R}^n . Comme S_W , W et $\mathbb{R}^n \setminus \overline{W}$ forment aussi une partition de \mathbb{R}^n et comme

$$W \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \quad |B(x, r) \setminus W| = 0\}$$

et

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{W} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \quad |W \cap B(x, r)| = 0\},$$

on en déduit les égalités (4.2.5) et (4.2.6). Ce qui achève la démonstration du théorème 1.4.6.

4.2.2. Taille des composantes connexes. — On va démontrer ici le théorème 1.4.7. On garde les mêmes notations que dans l'énoncé de ce théorème : G est un quasi-minimum normalisé de \mathcal{G}_{BV} ou $\mathcal{G}_{BV}(R)$ avec $R \geq 2R_0$ et W est une composante connexe de G ou de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. L'existence de δ_0 est une conséquence immédiate de la condition B. En effet on peut trouver une boule de rayon $\geq C$ pour une certaine constante universelle $C > 0$ qui est incluse dans $B(x, 1) \cap W$ où x est un point quelconque de ∂W . On en déduit que $|W| \geq \delta_0$ pour un certain δ_0 universel.

Comme G est l'union disjointe de ses composantes connexes et comme $|G| = m_0$, on en déduit aussitôt que G a au plus N_0 composantes connexes pour un certain N_0 universel.

On ne peut pas être aussi brutal pour estimer le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, parce que, si l'on sait que G est borné (voir la remarque 3.3.4 dans le cas des quasi-minima de \mathcal{G}_{BV}), on ne peut espérer aucune estimation universelle sur son diamètre. Nous allons cependant en obtenir une sur le diamètre de ses composantes connexes. Donnons d'abord quelques lemmes topologiques.

LEMME 4.2.3. — *Soient K un compact connexe de \mathbb{R}^n et F un fermé connexe de \mathbb{R}^n tels que $K \cup F = \mathbb{R}^n$. Alors $K \cap F$ est connexe.*

Démonstration. — Par des arguments standards, on montre que si O_1 et O_2 sont deux ouverts connexes de \mathbb{R}^n tels que $O_1 \cup O_2 = \mathbb{R}^n$, alors $O_1 \cap O_2$ est connexe. Donc si $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) < \frac{1}{n}\}$ et $F_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, F) < \frac{1}{n}\}$, alors $K_n \cap F_n$ est connexe et $(K_n \cap F_n)$ aussi. Or $K \cap F = \bigcap_{n \geq 1} (K_n \cap F_n)$. Comme dans un espace métrique, une intersection décroissante de compacts connexes est connexe, $K \cap F$ est connexe. \square

LEMME 4.2.4. — Soit K un compact connexe de \mathbb{R}^n et soit ∂ la frontière de la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n \setminus K$. Alors ∂ est connexe.

Démonstration. — Soit E la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n \setminus K$ et E_j , $j = 0, 1, \dots$, les composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^n \setminus K$. Alors $\mathbb{R}^n \setminus E$ est compact et

$$\mathbb{R}^n \setminus E = \bigcup_j (K \cup E_j) = \bigcup_j (K \cup \overline{E}_j)$$

car $\partial E_j \subset \partial K \subset K$. Comme $K \cap \overline{E}_j \neq \emptyset$ et comme K et \overline{E}_j sont connexes, $K \cup \overline{E}_j$ est connexe. Et comme $\bigcap_j (K \cup \overline{E}_j) \neq \emptyset$, on en déduit que $\bigcup_j (K \cup \overline{E}_j) = \mathbb{R}^n \setminus E$ est connexe. D'autre part, $\partial = \overline{E} \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)$ et $\overline{E} \cup (\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathbb{R}^n$. Donc d'après le lemme 4.2.3, ∂ est connexe. \square

Revenons au quasi-minimum normalisé G . Nous savons que G est borné. Son adhérence \overline{G} a au plus N_0 composantes connexes pour un certain N_0 universel d'après ce qui précède. Notons p , $1 \leq p \leq N_0$, leur nombre et K_j chacune d'entre elles. Notons aussi E_j la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n \setminus K_j$.

Soit W une composante connexe bornée de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$. Montrons que l'on peut trouver $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $W \subset \mathbb{R}^n \setminus E_j$. Soit ∂ la frontière de la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{W}$. D'après le lemme 4.2.4, ∂ est connexe. D'autre part $\partial \subset \partial W \subset \partial \overline{G}$, et $\partial \overline{G} = \bigcup_{j=1}^p \partial K_j$. Comme les K_j sont fermés et deux à deux disjoints, on a $\text{dist}(\partial K_j, \partial K_i) > 0$ pour tous $i \neq j$. En particulier, tout sous-ensemble connexe de $\partial \overline{G}$ est inclus dans un certain ∂K_j pour un unique j . Donc il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\partial \subset \partial K_j$. Pour fixer les idées, supposons que $\overline{G} \subset B$ pour une certaine boule B et fixons $X \notin B$. Soit $x \in W$. Si x appartenait à E_j , qui est ouvert et connexe, on pourrait trouver un chemin joignant x à X dans E_j . Si Γ désigne l'image de ce chemin, on a par ailleurs $\Gamma \cap \partial \neq \emptyset$ car $W \subset B$, donc $\Gamma \cap \partial K_j \neq \emptyset$. Or $E_j \cap \partial K_j = \emptyset$. Donc $x \notin E_j$ et $W \subset \mathbb{R}^n \setminus E_j$.

Comme $\mathbb{R}^n \setminus E_j$ est borné, on a $\text{diam}(\mathbb{R}^n \setminus E_j) = \text{diam}(\partial_j)$ avec $\partial_j = \partial E_j = \partial(\mathbb{R}^n \setminus E_j)$. Montrons que l'on contrôle $\text{diam}(\partial_j)$ par une constante universelle. Soit \mathcal{A} une famille maximale de points de ∂_j à distance mutuelle ≥ 1 . Les $B(x, \frac{1}{2})$, $x \in \mathcal{A}$, sont deux à deux disjointes, et grâce à l'Ahlfors-régularité de ∂G , on a

$$(4.2.8) \quad \begin{aligned} \#\mathcal{A} &\leq C \sum_{x \in \mathcal{A}} H^{n-1} \left(\partial G \cap B \left(x, \frac{1}{2} \right) \right) \\ &\leq C H^{n-1}(\partial G) \leq C', \end{aligned}$$

où C et C' sont deux constantes universelles (voir (4.1.4)). D'après le lemme 4.2.4, ∂_j est connexe. On peut alors ordonner \mathcal{A} de telle sorte que $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_m\}$, avec pour tout $k \geq 2$,

$$(4.2.9) \quad B(x_k, 1) \cap \left(\bigcup_{l < k} B(x_l, 1) \right) \neq \emptyset.$$

Soit $y \in \partial_j$ et $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que $y \in B(x_k, 1)$. D'après (4.2.9), on peut trouver $l < k$ tel que $y \in B(x_l, 3)$. En réitérant l'argument et en utilisant (4.2.8), on en déduit que $y \in B(x_1, M)$ pour une certaine constante universelle M . Donc $\text{diam}(\partial_j) \leq 2M$.

D'autre part, nous savons déjà que, pour toute composante connexe W de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, on a $|W| \geq \delta_0$. Donc, si on note N le nombre de composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, on a

$$\begin{aligned} N\delta_0 &\leq \sum_{j=1}^p \sum_{W \subset \mathbb{R}^n \setminus E_j} |W| \leq \sum_{j=1}^p |\mathbb{R}^n \setminus E_j| \\ &\leq C \sum_{j=1}^p (\text{diam}(\partial_j))^n \leq C'(2M)^n p. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure en remarquant que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ a $N + 1$ composantes connexes et achève la démonstration du théorème 1.4.7.

4.3. Régularité $C^{1,\alpha}$

Nous allons montrer que l'on peut totalement s'affranchir de la contrainte de volume dans la condition de quasi-minimalité. Ceci nous permettra d'obtenir un peu plus de régularité dans certains cas, notamment celui où $g(t) = Ct^p$ avec $C > 0$ et $p > (n - 1)/n$ qui est le seul que nous détaillerons ici (voir la remarque 4.3.3 pour d'autres cas). On se fixe G un quasi-minimum normalisé de \mathcal{G}_{BV} .

PROPOSITION 4.3.1. — *Il existe $r_1 > 0$ universel tel que*

$$(4.3.1) \quad \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_G| \leq (1 + \omega(r)) \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_{G'}|,$$

pour tout $x \in \partial G$, tout $r \leq r_1$, et tout $G' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $G' \Delta G \Subset B(x, r)$, avec

$$(4.3.2) \quad \omega(r) = C (1 + r^{-n} g(C'r^n)) r,$$

où C est une constante universelle et $C' = C'(G, G') \leq \tilde{C}$ pour une constante universelle $\tilde{C} > 0$.

Démonstration. — Fixons-nous tout d'abord un rayon $r_0 < 1$ universel tel que, pour tout $x \in \partial G$, on puisse trouver une boule B centrée sur ∂G , de rayon r_0 et telle que $B \cap B(x, r_0) = \emptyset$ (voir la démonstration du théorème 1.4.6, page 85).

Soient maintenant ε associé à r_0 par le lemme 4.1.5 et $r_1 < 1$ que l'on fixera petit plus tard, tel que, pour l'instant, $r_1 < r_0$ et $|B_{r_1}| < \varepsilon$. Soient $x \in \partial G$ et B une boule de rayon r_0 , centrée sur ∂G et telle que $B \cap B(x, r_0) = \emptyset$. Pour tout $r \leq r_1$ et $G' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $G' \Delta G \Subset B(x, r)$, on a $G' \cap B = G \cap B$ et $|m_0 - |G''|| < \varepsilon$. On peut alors appliquer le lemme 4.1.5 qui nous donne F coïncidant avec G' sur un voisinage du

complémentaire de B et vérifiant (4.1.17), (4.1.18) et (4.1.19) avec $v = m_0 - |G'|$. On a alors $F \in \mathcal{G}_{BV}$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_F| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} |\nabla \chi_G| + \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_{G'}| + Cr^n,$$

d'où, par quasi-minimalité de G ,

$$\int_{B(x,r)} |\nabla \chi_G| \leq \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_{G'}| + Cr^n + g(|G\Delta F|).$$

D'autre part, $|G\Delta F| = C'r^n \leq \tilde{C}r^n$ pour une constante universelle \tilde{C} , par définition de G' et d'après (4.1.19).

Comme ∂G est Ahlfors-régulière et comme $H^{n-1}|\partial G = |\nabla \chi_G|$, on a

$$Cr^n + g(C'r^n) \leq C''(1 + r^{-n}g(C'r^n))r \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_G|,$$

où C'' est une constante universelle. Donc

$$(1 - C''(1 + r^{-n}g(C'r^n))r) \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_G| \leq \int_{B(x,r)} |\nabla \chi_{G'}|.$$

Alors, si r_1 est choisi assez petit de telle sorte que

$$0 < (1 - C''(1 + r^{-n}g(C'r^n))r)^{-1} \leq 1 + 2C''(1 + r^{-n}g(C'r^n))r$$

pour tout $r \leq r_1$, on en déduit (4.3.1), ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $g(t) = Ct^p$ avec $C > 0$ et $p > \frac{n-1}{n}$. Posons $\alpha = \min(\frac{np-(n-1)}{2}, \frac{1}{2})$. On a alors

$$(1 + r^{-n}g(C'r^n))r \leq C''r^{2\alpha}$$

si r est assez petit (en fonction de n et g) et avec une constante C'' universelle. Les théorèmes 1.4.8 et 1.4.9 sont alors une simple reformulation des théorèmes 2.6 et 6.4 de [Rig00].

REMARQUE 4.3.2. — On a la même conclusion pour les quasi-minima normalisés de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ en se limitant aux points intérieurs à B_R .

REMARQUE 4.3.3. — On se reportera à [AP99], [Tam84] et [Rig00] pour d'autres cas de décroissance de la fonction ω au voisinage de 0.

REMARQUE 4.3.4. — Dans le cas où la fonction ω donnée par (4.3.2) est majorée par une fonction croissante et où on peut appliquer les résultats des articles cités dans la remarque précédente, on peut améliorer (4.2.1) en remarquant que $\partial W \cap \partial W'$ est inclus dans l'ensemble des singularités de ∂G et est donc de dimension au plus $n - 8$. En dimension $n \leq 7$, on peut même montrer que $\text{dist}(W, W') \geq d_0$ pour un d_0 universel (voir les théorèmes 6.2, 6.3 et 6.4 de [Rig00]).

CHAPITRE 5

UN PROBLÈME VARIATIONNEL AVEC CONTRAINTE DE VOLUME

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'étude des minima de mesure de Lebesgue fixée d'une fonctionnelle E . Cette fonctionnelle est définie comme la somme d'un terme de surface et d'un terme homogène à un volume. Il s'agit d'un problème variationnel avec contrainte de volume pour lequel les résultats classiques de semi-continuité et de compacité ne s'appliquent pas directement et pour lequel des informations quantitatives et uniformes représentent un bon moyen de contourner cette difficulté.

5.1. Définitions et résultats

Pour $G \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, de mesure de Lebesgue finie, on définit

$$E(G) = H^{n-1}(\partial G) + \iint_{G \times G} K(x - y) \, dx \, dy,$$

où $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à support compact. On se fixe une fois pour toutes un réel $m_0 > 0$ et on s'intéresse au problème de la minimisation de E à volume m_0 fixé. Posons donc

$$I = \inf(E(G) : |G| = m_0).$$

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction générale, ce problème provient d'un modèle physique décrit dans [Ott98]. Une goutte de fluide visqueux, ferromagnétique et incompressible est placée entre deux lamelles horizontales très proches, ce qui rend le problème plan, et on lui applique un champ magnétique vertical. F. Otto s'était intéressé à l'aspect dynamique du problème. On s'intéresse ici à ce qui se passe à l'équilibre, c'est-à-dire quand le minimum d'énergie est atteint. Cette énergie est la somme de deux termes. Le premier est un terme de surface qui correspond à la tension superficielle (ici, il s'agit de $H^{n-1}(\partial G)$). C'est un terme de cohésion : si $K \equiv 0$, il s'agit en effet simplement du problème isopérimétrique, et on sait que les solutions sont des

boules, c'est-à-dire des ensembles connexes très réguliers. Le second terme correspond à l'effet du champ magnétique qui est modélisé ici par la double intégrale du noyau K . C'est, au contraire du terme de surface, un terme de dispersion. Si K n'est pas supposé à support compact, l'infimum d'énergie n'est d'ailleurs pas atteint en général. En effet, sinon tout minimum G serait un quasi-minimum avec contrainte de volume (voir (5.2.4)). On sait qu'alors il a un nombre fini de composantes connexes qui sont bien séparées les unes des autres (voir le théorème 1.4.7 et (4.2.1) ou la remarque 4.3.4). Si K est radial, strictement positif et strictement décroissant à l'infini, éloigner les différentes composantes les unes par rapport aux autres diminue alors toujours strictement la valeur de E et contredit donc le caractère minimal de G . Signalons que c'est le cas dans le modèle originel de [Ott98]. Nous serons cependant en mesure de construire dans ce cas des suites minimisantes normalisées (voir la partie 5.3).

Mathématiquement, nous allons donc nous restreindre au cas d'un noyau K à support compact pour lequel nous obtiendrons l'existence de minima. On considérera pour cela une formulation faible du problème dont les solutions seront des quasi-minima de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Les informations quantitatives et uniformes dont nous disposons grâce aux résultats des parties précédentes nous permettront de revenir à la formulation originelle du problème. D'autre part, comme le terme de cohésion est prépondérant, du moins aux petites échelles, par rapport au terme de dispersion, on s'attend certes à ce que la goutte ait éclaté en un certain nombre de gouttelettes, mais on s'attend aussi à ce qu'elles ne soient jamais trop petites. Cette description découlera directement de celle des quasi-minima avec contrainte de volume. Plus précisément, nous allons démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 5.1.1. — *L'infimum I est atteint.*

Une fois l'existence des minima acquise, il sera facile de voir qu'ils sont des quasi-minima avec contrainte de volume avec, dans (1.4.1), $g(t) = 2\|K\|_{L^1}t$ et sont donc, à un ensemble de mesure nulle près, des sous-ensembles normalisés de \mathbb{R}^n (définition 1.4.5).

THÉORÈME 5.1.2. — *Soit $G \subset \mathbb{R}^n$ tel que $|G| = m_0$ et $E(G) = I$. Il existe un unique ouvert G_0 équivalent à G tel que ∂G_0 soit Ahlfors-régulière et tel que G_0 vérifie la condition B , avec des constantes qui peuvent être choisies en fonction uniquement de n , m_0 et $\|K\|_{L^1}$. De plus $\partial G_0 \subset \partial G$ et $E(G_0) = I$.*

THÉORÈME 5.1.3. — *Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que, si G est un minimum normalisé pour I , alors, pour toute boule B centrée sur ∂G et de rayon $r \leq 1$, il existe une boule $\tilde{B} \subset B$ centrée sur ∂G , de rayon $\geq Cr$ telle que $\partial G \cap \tilde{B}$ soit un graphe $(n-1)$ -dimensionnel de classe $C^{1, \frac{1}{2}}$ avec des constantes de régularité $C^{1, \frac{1}{2}}$ qui ne dépendent que de n , m_0 et $\|K\|_{L^1}$.*

On disposera aussi de la description suivante des minima :

THÉORÈME 5.1.4 (Description des minima). — *Si G est un minimum normalisé pour I , alors $\partial G = \partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G})$. D'autre part, si W est une composante connexe de G ou de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, alors W est un sous-ensemble normalisé de \mathbb{R}^n et*

$$|W| \geq \delta_0,$$

de plus, G et $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ ont au plus N_0 composantes connexes, où δ_0 et N_0 ne dépendent que de n , m_0 et $\|K\|_{L^1}$. D'autre part, si W et W' sont deux composantes connexes distinctes de G ou deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, alors

$$H^s(\partial W \cap \partial W') = 0,$$

pour tout $s > n - 8$.

En dimension inférieure ou égale à 7, et en particulier quand $n = 2$ qui correspond au modèle physique, on aura les informations plus précises suivantes :

THÉORÈME 5.1.5. — *Si $n \leq 7$, il existe $r_0 > 0$ ne dépendant que de n , m_0 et $\|K\|_{L^1}$ tels que, si G est un minimum normalisé pour I et $x \in \partial G$, il existe $r \geq r_0$ tel que $\partial G \cap B(x, r)$ soit un graphe $(n-1)$ -dimensionnel de classe $C^{1, \frac{1}{2}}$ avec des constantes de régularité $C^{1, \frac{1}{2}}$ qui ne dépendent que de n , m_0 et $\|K\|_{L^1}$. D'autre part, si W et W' sont deux composantes connexes distinctes de G ou deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$, alors $\text{dist}(W, W') \geq d_0$, où d_0 ne dépend que de n , m_0 et $\|K\|_{L^1}$.*

5.2. Existence et régularité des minima

En tenant compte des remarques précédentes et des résultats concernant les quasi-minima avec contrainte de volume, la seule difficulté consiste ici à obtenir l'existence de minima pour I . On ne dispose pas en général de résultats de compacité et de semi-continuité pour la mesure H^{n-1} . On considère alors une formulation faible du problème dans laquelle on remplace $H^{n-1}(\partial G)$ par le périmètre de G . Les résultats de compacité dans BV ne nous donne cependant qu'une convergence dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. On n'est donc pas assuré d'obtenir à la limite un ensemble de mesure de Lebesgue m_0 . Pour surmonter ce problème technique, nous allons nous restreindre dans un premier temps à des candidats uniformément bornés.

On considère donc la version BV suivante de E :

$$E_{BV}(G) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| + \iint_{G \times G} K(x - y) \, dx \, dy,$$

et on pose, pour $R \geq 2R_0$,

$$I_{BV}(R) = \inf_{G \in \mathcal{G}_{BV}(R)} E_{BV}(G).$$

Les notations sont ici les mêmes que dans la partie 1.4.

Donnons d'abord une estimation sur la variation du second terme de la fonctionnelle.

LEMME 5.2.1. — *Pour tous $G, G' \subset \mathbb{R}^n$, on a*

$$(5.2.1) \quad \left| \iint_{G' \times G'} K(x - y) \, dx \, dy - \iint_{G \times G} K(x - y) \, dx \, dy \right| \leq 2 \|K\|_{L^1} |G \Delta G'|.$$

Démonstration. — Notons Δ le membre de gauche de (5.2.1). On a

$$\Delta \leq \iint_{(G \times G) \Delta (G' \times G')} |K(x - y)| \, dx \, dy,$$

et

$$(G \times G) \Delta (G' \times G') \\ \subset ((G \setminus G') \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^n \times (G \setminus G')) \cup ((G' \setminus G) \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^n \times (G' \setminus G)).$$

Or

$$\iint_{(G \setminus G') \times \mathbb{R}^n} |K(x - y)| \, dx \, dy \leq \|K\|_{L^1} |G \setminus G'|.$$

On évalue de la même manière les trois autres termes qui interviennent dans la majoration de Δ et on en déduit (5.2.1). \square

LEMME 5.2.2. — *L'infimum $I_{BV}(R)$ est atteint.*

Démonstration. — Considérons une suite minimisante $(G_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $j \geq 1$, $G_j \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ et

$$E_{BV}(G_j) \leq I_{BV}(R) + \frac{1}{j}.$$

Pour tout $j \geq 1$, $\chi_{G_j} \in BV$ et

$$\begin{aligned} \|\chi_{G_j}\|_{BV} &= m_0 + E_{BV}(G_j) - \iint_{G_j \times G_j} K(x - y) \, dx \, dy \\ &\leq m_0 + I_{BV}(R) + 1 + \|K\|_{L^1} m_0. \end{aligned}$$

On est donc en mesure d'appliquer le théorème 1.3.4 et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que χ_{G_j} converge dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et presque partout vers une

fonction caractéristique χ_G , $G \subset B_R$. Comme il y a convergence dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, $|G| = m_0$ et G est un bon candidat de $\mathcal{G}_{BV}(R)$. D'après (1.3.2) on a

$$(5.2.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G_j}|.$$

D'autre part, d'après (5.2.1), on a

$$\left| \iint_{G_j \times G_j} K(x-y) dx dy - \iint_{G \times G} K(x-y) dx dy \right| \leq 2\|K\|_{L^1} \|\chi_{G_j} - \chi_G\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

donc

$$(5.2.3) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \iint_{G_j \times G_j} K(x-y) dx dy = \iint_{G \times G} K(x-y) dx dy.$$

Alors, en combinant (5.2.2) et (5.2.3), on obtient

$$I_{BV}(R) \leq E_{BV}(G) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} E_{BV}(G_j) \leq I_{BV}(R)$$

et donc $E_{BV}(G) = I_{BV}(R)$. \square

Montrons maintenant que les minima de E_{BV} sur $\mathcal{G}_{BV}(R)$ sont des quasi-minima de $\mathcal{G}_{BV}(R)$ avec, dans (1.4.1), $g(t) = 2\|K\|_{L^1}t$. C'est en fait une conséquence quasiment immédiate de (5.2.1). Soit donc $G \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ tel que $E_{BV}(G) = I_{BV}(R)$ et $G' \in \mathcal{G}_{BV}(R)$. Par minimalité de G , on a

$$(5.2.4) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + \iint_{G' \times G'} K(x-y) dx dy - \iint_{G \times G} K(x-y) dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + 2\|K\|_{L^1} |G \Delta G'|, \end{aligned}$$

ce qui est exactement ce que l'on voulait. A un ensemble de mesure nulle près, ces minima faibles sont donc normalisés (théorème 1.4.4). Remarquons que si deux ensembles G et G' sont équivalents, alors $E_{BV}(G) = E_{BV}(G')$. On est donc assuré de l'existence de minima normalisés pour E_{BV} sur $\mathcal{G}_{BV}(R)$ pour tout $R \geq 2R_0$. Les estimations uniformes sur leurs constantes de régularité vont nous permettre de montrer que $I_{BV}(R)$ reste constant pour R assez grand.

LEMME 5.2.3. — *Il existe $R_1 \geq 2R_0$, qui ne dépend que de n , m_0 , $\|K\|_{L^1}$ et $R_K = \text{diam}(\text{supp } K)$, tel que $I_{BV}(R) = I_{BV}(R_1)$ pour tout $R \geq R_1$.*

Démonstration. — Fixons-nous $R \geq 2R_0$ et considérons $G \in \mathcal{G}_{BV}(R)$ un minimum normalisé de E_{BV} sur $\mathcal{G}_{BV}(R)$. Soit \mathcal{A}_1 un ensemble maximal de points de ∂G à distance mutuelle ≥ 1 . Par minimalité de G , on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq E_{BV}(B_{R_0}) + Cm_0,$$

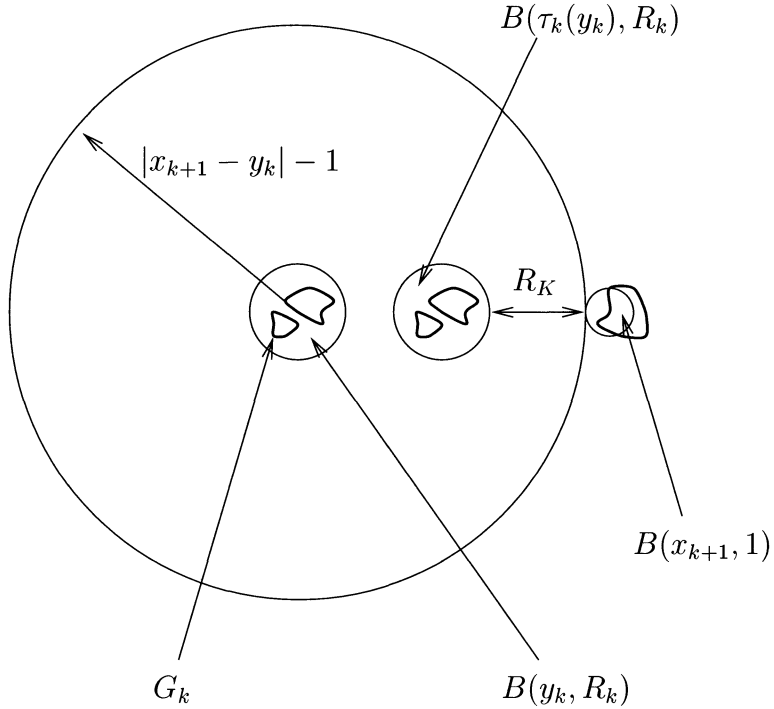


FIGURE 5.1. Construction de G_{k+1} .

où C est une constante universelle. Les boules $B(x, \frac{1}{2})$, $x \in \mathcal{A}_1$, étant deux à deux disjointes, on en déduit en utilisant l’Ahlfors-régularité de G ,

$$\begin{aligned} p_0 = \#\mathcal{A}_1 &\leq C \sum_{x \in \mathcal{A}_1} \int_{B(x, \frac{1}{2})} |\nabla \chi_G| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq C', \end{aligned}$$

les différentes constantes intervenant ici étant des constantes universelles.

Nous allons construire par récurrence sur $k \in \{1, \dots, p_0\}$ un candidat G_k borné tel que $|G_k| = m_0$, $E_{BV}(G_k) = E_{BV}(G)$, et un ensemble maximal \mathcal{A}_k de points de ∂G_k à distance mutuelle ≥ 1 tel que $\#\mathcal{A}_k = p_0$, $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}'_k \cup \mathcal{A}''_k$ avec $\mathcal{A}'_k = \{x_1^k, \dots, x_k^k\}$, $\mathcal{A}''_k \subset \mathcal{A}_1$ et $\text{diam } \mathcal{A}'_k = R(k)$ avec $R(1) = 0$ et, pour $k \geq 2$, $R(k) \leq C \times R(k-1) + C'$ où C et C' sont des constantes ne dépendant que de n , m_0 , $\|K\|_{L^1}$ et R_K .

Pour $k = 1$, on pose $G_1 = G$, $\mathcal{A}'_1 = \{x_1\}$ où x_1 est un point quelconque de \mathcal{A}_1 et $\mathcal{A}''_1 = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}'_1$.

Soit $k \in \{1, \dots, p_0 - 1\}$ et supposons avoir construit G_k . Posons

$$y_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^k$$

et $R_k = R(k) + 1$. Soit $x_{k+1} \in \mathcal{A}_k''$ tel que $|y_k - x_{k+1}| = \min_{x \in \mathcal{A}_k''} |y_k - x|$. Soit $r_k > 1$ tel que $|B(y_k, r_k - 1) \setminus B(y_k, R_k)| > m_0$. Par hypothèse de récurrence sur $R(k)$, on peut trouver un tel r_k ne dépendant que de $n, \|K\|_{L^1}, m_0$ et R_K . Si $|y_k - x_{k+1}| \leq \max(r_k, R_K + R_k + 1)$, on pose $G_{k+1} = G_k$ et $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k, \mathcal{A}'_{k+1} = \mathcal{A}'_k \cup \{x_{k+1}\}, \mathcal{A}''_{k+1} = \mathcal{A}''_k \setminus \{x_{k+1}\}$. Si $|y_k - x_{k+1}| > \max(r_k, R_K + R_k + 1)$ alors

$$\partial G_k \cap (B(y_k, |y_k - x_{k+1}| - 1) \setminus B(y_k, R_k)) = \emptyset.$$

En effet sinon on pourrait trouver $z \in \partial G_k \cap (B(y_k, |y_k - x_{k+1}| - 1) \setminus B(y_k, R_k))$ et, par définition de \mathcal{A}_k, y_k et $R_k, y \in \mathcal{A}_k''$ tel que $|y - z| < 1$. On aurait alors

$$\begin{aligned} |y_k - x_{k+1}| &\leq |y_k - y| \\ &\leq |y_k - z| + |z - y| \\ &< |y_k - x_{k+1}|, \end{aligned}$$

d'où la contradiction. Comme de plus $|B(y_k, |y_k - x_{k+1}| - 1) \setminus B(y_k, R_k)| > m_0$, on en déduit que $B(y_k, |y_k - x_{k+1}| - 1) \setminus B(y_k, R_k) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_k$. Notons τ_k la translation de vecteur

$$(|y_k - x_{k+1}| - (R_K + R_k + 1)) \frac{x_{k+1} - y_k}{|x_{k+1} - y_k|}.$$

On a $|\tau_k(y_k) - y_k| = |y_k - x_{k+1}| - (R_K + R_k + 1)$, donc

$$\tau_k(B(y_k, R_k)) \subset B(y_k, |y_k - x_{k+1}| - (R_K + 1))$$

et

$$\inf |z - z'| \geq R_K,$$

l'infimum étant pris sur les $z \in \tau_k(G_k \cap B(y_k, R_k))$ et les $z' \in G_k \setminus B(y_k, R_k)$. Voir la figure 5.1. Donc si $G_{k+1} = (G_k \setminus B(y_k, R_k)) \cup \tau_k(G_k \cap B(y_k, R_k))$, on a $|G_{k+1}| = m_0$ et par construction de G_k , on a aussi $E_{BV}(G_{k+1}) = E_{BV}(G_k)$. Posons $\mathcal{A}'_{k+1} = \tau_k(\mathcal{A}'_k) \cup \{x_{k+1}\}, \mathcal{A}''_{k+1} = \mathcal{A}''_k \setminus \{x_{k+1}\}$ et $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}'_{k+1} \cup \mathcal{A}''_{k+1}$. On a $|\tau_k(y_k) - x_{k+1}| = R_K + R_k + 1$ donc $\text{diam } \mathcal{A}'_{k+1} \leq \text{diam } \mathcal{A}'_k + R_K + R_k + 1$. Et G_{k+1} et \mathcal{A}_{k+1} répondent bien à la question.

A l'étape p_0 , on dispose alors d'un candidat G_{p_0} et d'un ensemble maximal $\mathcal{A}_{p_0} = \mathcal{A}'_{p_0}$ de points de ∂G_{p_0} à distance mutuelle ≥ 1 et de diamètre contrôlé par une constante ne dépendant que de $n, m_0, \|K\|_{L^1}$ et R_K . Alors comme on a $\partial G_{p_0} \subset \cup_{x \in \mathcal{A}_{p_0}} B(x, 1)$ et comme G_{p_0} est borné, on a $\text{diam } G_{p_0} = \text{diam } \partial G_{p_0} \leq R_1$, où R_1 est une constante ne dépendant que de $n, m_0, \|K\|_{L^1}$ et R_K . Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que $0 \in G_{p_0}$, et donc $G_{p_0} \in \mathcal{G}(R_1)$.

Alors si $R \geq R_1$, on a $\mathcal{G}(R_1) \subset \mathcal{G}(R)$ et $I_{BV}(R) \leq I_{BV}(R_1) \leq E_{BV}(G_{p_0}) = E_{BV}(G) = I_{BV}(R)$. Ce qui achève la démonstration du lemme. \square

L'étape suivante consiste à utiliser le fait que $I_{BV}(R)$ stationne si R est assez grand pour montrer que E_{BV} atteint son infimum sur \mathcal{G}_{BV} , ce qui nous permettra de nous affranchir de la restriction sur le diamètre des candidats admissibles. On pose donc

$$I_{BV} = \inf_{G \in \mathcal{G}_{BV}} E_{BV}(G).$$

On a bien sûr $I_{BV} \leq I_{BV}(R_1)$. Réciproquement, on considère $G \in \mathcal{G}_{BV}$ tel que $E_{BV}(G) \leq I_{BV} + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est fixé. Comme $|G| < +\infty$, on peut trouver $R > 0$ tel que $|G \setminus B_R| \leq \varepsilon$. Puis, par Fubini et Tchebychev, on choisit $R' \in]R, R + 1[$ tel que $H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B_{R'}) \leq C\varepsilon$, où C ne dépend que de la dimension. On pose $G' = (G \cap B_{R'}) \cup B$ où $B \subset \mathbb{R}^n \setminus B_{R'}$ est une boule de mesure de Lebesgue $|G \setminus B_{R'}| \leq \varepsilon$. Alors $G' \in \mathcal{G}_{BV}(R'')$ pour un certain R'' que l'on peut toujours supposer supérieur à R_1 . On a

$$\begin{aligned} I_{BV}(R_1) = I_{BV}(R'') &\leq E_{BV}(G') \\ &\leq E_{BV}(G) + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_B| + H^{n-1}(\overline{G} \cap \partial B_{R'}) + 2\|K\|_{L^1} |G \Delta G'| \\ &\leq I_{BV} + C(\varepsilon^{(n-1)/n} + \varepsilon). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut en faisant tendre ε vers 0 et on obtient que $I_{BV}(R_1) \leq I_{BV}$. Et finalement $I_{BV} = I_{BV}(R_1)$.

On en déduit que I_{BV} est atteint. De plus, comme pour les minima de E_{BV} sur $\mathcal{G}_{BV}(R)$, on montre que les minima de E_{BV} sur \mathcal{G}_{BV} sont des quasi-minima de \mathcal{G}_{BV} avec, dans (1.4.1), $g(t) = 2\|K\|_{L^1}t$. Grâce au théorème 1.4.3, on sait alors que l'on peut toujours se ramener à des minima normalisés. Ces propriétés de régularité vont nous permettre de passer de la formulation faible dans BV à la formulation originelle de la fonctionnelle E et d'achever la démonstration des résultats annoncés dans la partie 5.1.

Remarquons d'abord que d'après (1.3.6), on a toujours $E_{BV}(G) \leq E(G)$ et donc $I_{BV} \leq I$. Si G est maintenant un minimum normalisé de E_{BV} sur \mathcal{G}_{BV} , on sait que $H^{n-1}(\partial G)$ est égal au périmètre de G (proposition 2.3.2), donc $E_{BV}(G) = E(G)$ et on en déduit que $I = I_{BV}$ et que I est atteint. Ce qui achève la démonstration du théorème 5.1.1.

Si G est un minimum pour E , alors G minimise aussi E_{BV} sur \mathcal{G}_{BV} . Cela vient simplement de (1.3.6) et de l'égalité $I = I_{BV}$. Il est alors un quasi-minimum de \mathcal{G}_{BV} . Les théorèmes 5.1.2 et 5.1.3 sont alors une simple reformulation des théorèmes 1.4.3 et 1.4.8 (voir aussi la proposition 2.2.1 pour l'inclusion $\partial G_0 \subset \partial G$). Le théorème 5.1.4 découle de la proposition 2.2.1 pour l'égalité $\partial G = \partial(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G})$, des théorèmes 1.4.6

et 1.4.7 et de la remarque 4.3.4. Enfin, le théorème 5.1.5 est une reformulation du théorème 1.4.9 et de la remarque 4.3.4.

5.3. Suites minimisantes

Comme on l'a signalé dans la partie 5.1, dans l'exemple qui a servi de motivation initiale pour l'étude de la fonctionnelle E , le noyau K n'est pas à support compact et l'infimum correspondant n'est pas atteint. En tronquant le noyau K , on peut cependant obtenir l'existence de suites minimisantes normalisées.

Plus précisément, on considère $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On pose $K_M = \chi_{B_M} K$, où χ_{B_M} désigne la fonction caractéristique de la boule de centre 0 et de rayon M . Alors si G_M est un minimum normalisé pour le problème de minimisation associé, on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} E(G_M) = I,$$

où E est la fonctionnelle associée au noyau K et I l'infimum correspondant. Et la suite minimisante ainsi obtenue vérifie toutes les conclusions précédentes. On peut de plus facilement se convaincre que, comme $\|K_M\|_{L^1} \leq \|K\|_{L^1}$, les constantes de régularité de G_M et la taille de ses composantes connexes ne dépendent pas de M , mais uniquement de la dimension, la masse m_0 et la norme L^1 de K .

BIBLIOGRAPHIE

- [Alm76] F. J. ALMGREN – « Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints », *Mem. Amer. Math. Soc.* **4** (1976), no. 165.
- [AP99] L. AMBROSIO & E. PAOLINI – « Partial regularity for quasi minimizers of perimeter », *Ricerche Mat.* **48** (1999), p. 167–186.
- [DG61] E. DE GIORGI – « Frontiere orientate di misura minima », Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1960-1961.
- [DMS92] G. DAL MASO, J.-M. MOREL & S. SOLIMINI – « A variational method in image segmentation : existence and approximation results », *Acta Math.* **168** (1992), no. 1-2, p. 89–151.
- [DS91] G. DAVID & S. SEMMES – « Singular integrals and rectifiable sets in \mathbb{R}^n : Beyond Lipschitz Graphs », *Astérisque* (1991), no. 193.
- [DS93a] ———, *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Math. Surveys Monogr., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.
- [DS93b] ———, « Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), no. 2, p. 855–889.
- [DS96a] ———, « On the singular sets of minimizers of the Mumford-Shah functional », *J. Math. Pures Appl. (9)* **75** (1996), no. 4, p. 299–342.
- [DS96b] ———, « Uniform rectifiability and singular sets », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **13** (1996), no. 4, p. 383–443.
- [DS98] ———, « Quasiminimal surfaces of codimension 1 and John domains », *Pacific J. Math.* **183** (1998), no. 2, p. 213–277.
- [DS00] ———, « Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension », *Mem. Amer. Math. Soc.* **144** (2000), no. 687.
- [EG92] L. EVANS & R. GARIEPY – *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.

- [Fed69] H. FEDERER – *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [Fed70] ———, « The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension », *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), p. 767–771.
- [Giu81] E. GIUSTI – « The equilibrium configuration of liquid drops », *J. Reine Angew. Math.* **321** (1981), p. 53–63.
- [Giu84] ———, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser, Basel-Boston, 1984.
- [GMT83] E. GONZALEZ, U. MASSARI & I. TAMANINI – « On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint », *Indiana Univ. Math. J.* **32** (1983), no. 1, p. 25–37.
- [Mas74] U. MASSARI – « Esistenza e regolarità delle ipersuperficie di curvatura media assegnata in \mathbb{R}^n », *Arch. Rational Mech. Anal.* **55** (1974), p. 357–382.
- [Mas75] ———, « Frontiere orientate di curvatura media assegnata in L^p », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **53** (1975), p. 37–52.
- [Mat95] P. MATTILA – *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Mir65] M. MIRANDA – « Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **19** (1965), p. 626–665.
- [MM84] U. MASSARI & M. MIRANDA – *Minimal surfaces of codimension 1*, North Holland, Amsterdam-New York, 1984.
- [Ott98] F. OTTO – « Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids : a mean-field theory », *Arch. Rational Mech. Anal.* **141** (1998), no. 1, p. 63–103.
- [Rig00] S. RIGOT – « Uniform partial regularity of quasi minimizers for the perimeter », *Cal. Var. Partial Differential Equations* **10** (2000), no. 4, p. 389–406.
- [Sim83] L. SIMON – *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proc. C.M.A., 1983.
- [Sol97] S. SOLIMINI – « Simplified excision techniques for free discontinuity problems in several variables », *J. Funct. Anal.* **151** (1997), no. 1, p. 1–34.
- [Tam82] I. TAMANINI – « Boundaries of Caccioppoli sets with Hölder continuous normal vector », *J. Reine Angew. Math.* **334** (1982), p. 27–39.
- [Tam84] ———, *Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in \mathbb{R}^n* , Quaderni Del Dipartimento Di Matematica Dell' Università Di Lecce, 1984.
- [Zie89] W. P. ZIEMER – *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.