

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CHRISTOPHE CHEVERRY

Systèmes de lois de conservation et stabilité BV

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 75 (1998)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1998_2_75__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES DE LOIS DE CONSERVATION ET STABILITÉ BV

Christophe Cheverry

Résumé. — On considère un problème de Cauchy strictement hyperbolique, en dimension un d'espace. Les résultats classiques assurent l'existence pour tout temps, du moins lorsque les valeurs prises par l'amplitude et la variation totale de la donnée initiale sont proches de zéro. L'hypothèse de petitesse en norme L^∞ est en règle générale incontournable. La question est de savoir s'il est possible d'assouplir la restriction imposée à la variation. L'objectif de ce travail est de mettre à jour un critère qui permet de réaliser ce programme. La contrainte dont il s'agit porte sur le comportement quadratique du flux : les coefficients de vraie non linéarité doivent dominer les termes d'interaction. Dans ce contexte, on constate que la variation calculée sur des intervalles de longueur (convenablement) fixée décroît avec le temps. La mise à jour de cette nouvelle notion de décroissance est motivée par les applications suivantes : (1) Existence globale lorsque la condition initiale est périodique, avec une petite variation par période ; (2) Propriétés de compacité de l'opérateur solution ; (3) Temps de vie amélioré dans le cas de données petites en norme L^∞ mais grandes en variation.

Abstract (Systems of conservation laws and BV stability). — We consider the Cauchy problem for strictly hyperbolic systems of conservation laws. Classical results give the existence for all times if the total variation and the sup-norm of the initial data are small enough. In general, we need the requirement that the sup-norm is small. The question is whether the restriction on the variation may be relaxed. A criterion under which this program can be achieved is produced. This constraint concerns the quadratic behaviour of the flux function near the basic state : the amount of genuine non linearty must dominate the interaction coefficients. In this context, the variation computed on intervals of fixed (appropriate) length is decreasing. The different applications of this new notion of decrease are related to : (1) Existence in the large for periodic initial data with small BV-norm by period ; (2) Compactness properties of the solution operator ; (3) Better life span in the case of a small amplitude but a large variation.

Table des matières

Introduction	1
1. Mise en place	9
1.1. Normalisation des vecteurs propres	9
1.2. Invariants de Riemann approchés	10
1.3. Estimations d'interaction	12
1.4. Paramètres caractéristiques	13
2. Décroissance au sens large	17
2.1. Variation locale uniformément répartie	17
2.2. Décroissance au sens large	27
2.3. Étude sur des exemples	28
2.4. Données de Cauchy γ -acceptables	30
3. Temps d'existence	33
3.1. Énoncé du résultat	33
3.2. Préliminaires	35
3.3. Preuve de la proposition 3.1.1	39
4. Stabilité BV	57
4.1. Estimations en variation précisées	58
4.2. Analyse géométrique	62
4.3. Décroissance BV	79
5. Applications	83
5.1. Temps de vie minimal	83
5.2. Conditions initiales périodiques	90
5.3. Existence globale et compacité	93
Bibliographie	105

INTRODUCTION

Soit (\mathcal{H}) le problème de Cauchy hyperbolique monodimensionnel :

$$(\mathcal{H}) := \begin{cases} (\partial_t u)(t, x) + \partial_x [F(u(t, x))] = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = h(x) = (h_i(x))_{1 \leq i \leq N}. \end{cases}$$

Le flux :

$$(0.1) \quad \begin{aligned} F : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ u := (u_1, \dots, u_N) &\longmapsto F(u) := (F_1(u), \dots, F_N(u)), \end{aligned}$$

est une application qui est supposée régulière (de classe au moins C^3) sur tout un voisinage ouvert Ω_1 d'un point \bar{u} choisi comme état de référence. Chacune des composantes u_i est changée en $u_i - \bar{u}_i$. Ces translations ont pour effet de placer l'état \bar{u} à l'origine :

$$(0.2) \quad \bar{u} := (0, \dots, 0).$$

Le système de N lois de conservation (\mathcal{H}) est supposé strictement hyperbolique en \bar{u} . Cette hypothèse signifie que la matrice $DF(\bar{u})$ admet des valeurs propres qui sont deux à deux distinctes. Quitte à changer une nouvelle fois d'état u , on peut toujours supposer que la matrice $DF(\bar{u})$ est mise sous forme diagonale. Ses valeurs propres sont alors notées λ_i et sont rangées par ordre croissant :

$$(0.3) \quad \lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots < \lambda_N.$$

La condition d'hyperbolicité écrite en (0.3) permet de construire sur un voisinage ouvert $\Omega_2 \subset \Omega_1$ du point \bar{u} un système bi-orthogonal. Un tel système consiste en la donnée d'une base vectorielle $\{r^1(u), \dots, r^N(u)\}$, formée de vecteurs propres à droite :

$$(0.4) \quad DF(u) \cdot r^i(u) = \lambda_i(u) r^i(u), \quad u \in \Omega_2, \quad i = 1, \dots, N,$$

ainsi que d'une base vectorielle $\{l_1(u), \dots, l_N(u)\}$ duale de la précédente et formée de vecteurs propres à gauche :

$$(0.5) \quad l_i(u) \cdot DF(u) = \lambda_i(u) l_i(u), \quad u \in \Omega_2, \quad i = 1, \dots, N.$$

Les vecteurs propres à droite et à gauche sont déterminés de manière à vérifier des relations de normalisation :

$$(0.6) \quad r^j(\bar{u}) = (\delta_{jk})_{1 \leq k \leq N}, \quad l_j(\bar{u}) = {}^t(\delta_{jk})_{1 \leq k \leq N}, \quad l_j(u) \cdot r^k(u) = \delta_{jk}$$

avec $u \in \Omega_2$, $j, k = 1, \dots, N$, où la lettre δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker : le nombre δ_{jk} prend pour valeur 1 si l'indice j coïncide avec k et 0 sinon.

Comme indiqué dans le résumé, la vraie non linéarité est imposée au point base \bar{u} . En d'autres termes, la discussion porte sur des flux qui satisfont :

$$(0.7) \quad \Gamma_{ii}^i := \nabla_u \lambda_i(\bar{u}) \cdot r^i(\bar{u}) > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Un changement linéaire sur les variables d'état :

$$(0.8) \quad u_i \longmapsto \Gamma_{ii}^i u_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

a pour effet d'aligner l'ensemble des coefficients Γ_{ii}^i sur la valeur 1 :

$$(0.9) \quad \Gamma_{ii}^i = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Les N^3 coefficients d'interaction Λ_i^{pq} désignent alors les composantes calculées dans la base $\{r^1(u), \dots, r^N(u)\}$ du crochet de Lie associé aux champs de vecteurs $r^p(u)$ et $r^q(u)$:

$$(0.10) \quad \begin{aligned} \{r^p; r^q\}(\bar{u}) &:= (r^p \cdot \nabla) r^q(\bar{u}) - (r^q \cdot \nabla) r^p(\bar{u}) \\ &:= \sum_{i=1}^N \Lambda_i^{pq} r^i(\bar{u}), \quad p, q = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Ces conventions ayant été adoptées, le *rapport d'influence* \mathcal{R} est une expression numérique qui compte la contribution apportée en valeur absolue par tous les coefficients d'interaction correspondant à des indices i , p et q deux à deux distincts :

$$(0.11) \quad \mathcal{R} := \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{i \neq p < q \neq i} |\Lambda_i^{pq}|.$$

La *taille* d'un état u est mesurée en calculant :

$$(0.12) \quad \|u\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |u_i|.$$

L'*amplitude* d'une fonction $h(\cdot)$ est contrôlée par :

$$(0.13) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \sup_{x \in \mathbb{R}} \|h(x)\|_\infty.$$

La *variation totale* de la fonction $h(\cdot)$ désigne la quantité :

$$(0.14) \quad V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) := \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{x_1 < \dots < x_n} \sum_{j=1}^{n-1} |h_i(x_{j+1}) - h_i(x_j)|.$$

Lorsque l'application $h(\cdot)$ est choisie périodique avec pour période le nombre P , on aura de préférence recours à la variation de $h(\cdot)$ évaluée sur une période, c'est-à-dire :

$$(0.15) \quad V_{\text{ar}}^{\text{per}}(h(\cdot)) := \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{0 \leq x_1 < \dots < x_n < P} \sum_{j=1}^{n-1} |h_i(x_{j+1}) - h_i(x_j)|.$$

Cet article met en œuvre des outils et des concepts dont l'efficacité et l'à propos sont illustrés par les deux résultats **(1)** et **(2)** suivants :

(1) Existence globale lorsque la donnée initiale est choisie périodique, avec une petite variation par période :

THÉORÈME A. — *Soit \mathcal{R}_0 et η_0 deux constantes strictement positives. On considère un flux $F(u)$ dont le rapport d'influence \mathcal{R} se trouve majoré par le paramètre \mathcal{R}_0 :*

$$(0.16) \quad 0 \leq \mathcal{R} \leq \mathcal{R}_0.$$

On se donne aussi une condition initiale $h(x)$, périodique de période P , dont la moyenne sur une période est nulle et dont la variation par période ne dépasse pas le seuil η_0 :

$$(0.17) \quad 0 \leq V_{\text{ar}}^{\text{per}}(h(\cdot)) \leq \eta_0.$$

Alors, pour \mathcal{R}_0 et η_0 suffisamment petits, le problème de Cauchy (\mathcal{H}) admet une solution faible entropique $u(t, x)$ qui est définie pour tout temps. De plus, le comportement asymptotique en temps de la fonction $u(t, x)$ se trouve contrôlé par les lois de décroissance :

$$(0.18) \quad \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C_0}{t}, \quad t \in]0, \infty[.$$

$$(0.19) \quad V_{\text{ar}}^{\text{per}}(u(t, \cdot)) \leq \frac{C_0}{t}, \quad t \in]0, \infty[.$$

La restriction à un intervalle $]a, b[$ d'une fonction $v(\cdot)$ définie sur \mathbb{R} tout entier sera désormais notée $v_{|]a, b[}(\cdot)$:

$$(0.20) \quad \begin{array}{ccc} v_{|]a, b[} :]a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ x & \longmapsto & v_{|]a, b[}(x) := v(x). \end{array}$$

(2) Propriétés de compacité de l'opérateur solution :

THÉORÈME B. — *Soit \mathcal{R}_0 et η_0 deux constantes strictement positives. On considère un flux $F(u)$ qui admet un (petit) domaine d'invariance pour le problème de Riemann (cette hypothèse est introduite uniquement pour pouvoir disposer d'une estimation L^∞ a priori) et dont le rapport d'influence \mathcal{R} se trouve majoré par le paramètre \mathcal{R}_0 :*

$$(0.21) \quad 0 \leq \mathcal{R} \leq \mathcal{R}_0.$$

On se donne aussi une condition initiale $h(x)$ dont l'amplitude est contrôlée conformément à :

$$(0.22) \quad 0 \leq \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta_0.$$

Alors, pour \mathcal{R}_0 et η_0 suffisamment petits, le problème de Cauchy (\mathcal{H}) admet une solution faible entropique $u(t, x)$ qui est définie pour tout temps. De plus, pour tout couple (a, b) avec $-\infty < a < b < \infty$, l'opérateur solution :

$$(0.23) \quad \begin{aligned} S_a^b(t) : B_{L^\infty(\mathbb{R})}(\bar{u}; \eta_0] &\longrightarrow L^1([a, b]) \\ h(\cdot) &\longmapsto S_a^b(t)(h(\cdot)) := u_{|]a, b[}(t, \cdot), \end{aligned}$$

est compact.

Une littérature importante est consacrée à la construction de solutions pour le système hyperbolique (\mathcal{H}). Ces solutions sont habituellement obtenues à l'aide de schémas. Le plus connu est celui de Glimm [G]. Un algorithme qui présente des aspects novateurs a récemment été proposé par Bressan [B1]. Ces résultats ont un point commun. Ils assurent l'existence pour tout temps d'une solution faible lorsque la donnée initiale $h(x)$ est astreinte aux deux conditions de petitesse suivantes :

$$(0.24) \quad 0 \leq \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta_1 \ll 1, \quad \eta_1 > 0.$$

$$(0.25) \quad 0 \leq V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) \leq \eta_1 \ll 1, \quad \eta_1 > 0.$$

Notez que la contrainte introduite en (0.24) est requise au niveau des deux propositions A et B. Cette restriction n'a rien d'étonnant. En effet, la résolution du problème de Riemann associé à deux états u_g et u_d sert d'élément constitutif à la construction de solutions pour (\mathcal{H}). Or, sans hypothèses supplémentaires sur le flux $F(u)$, cette résolution n'est réalisable que si les vecteurs u_g et u_d sont suffisamment proches de l'origine \bar{u} . D'où la nécessité d'imposer le contrôle (0.24).

En revanche, la contrainte (0.25) ne figure plus parmi les hypothèses des théorèmes A et B. Cette absence signifie qu'un pas a été franchi dans la compréhension des systèmes de lois de conservation. Cette amélioration est non triviale. Elle ne se déduit pas des énoncés connus à ce jour. Pour s'en convaincre, rappelons brièvement les informations que délivrent (dans le contexte des énoncés A et B) une argumentation plus classique.

Pour une donnée initiale périodique, de moyenne nulle, choisie comme en (0.17) avec η_0 petit, le résultat de Glimm [G] assure l'existence d'une solution $u(t, x)$ définie dans une bande $[0, T] \times \mathbb{R}$ avec T fini (voir à ce propos les explications qui sont données en début de chapitre V.1 ou encore, pour plus de détails, l'article de Schochet [Sc3]). Rien ne garantit que cette solution locale en temps puisse être prolongée au delà de l'instant T . En effet, dans l'analyse de Glimm [G], il se produit une perte d'estimations BV lorsque l'instant t se rapproche du temps d'arrêt T . Voilà pourquoi, il est impossible d'itérer tel quel le raisonnement tenu dans Schochet [Sc3] avec T pour nouvel instant de départ.

Sous les hypothèses du théorème B, la méthode usuelle s'organise selon trois mouvements : Approximation de la donnée initiale par une suite de conditions initiales convenablement régularisées ; Construction de solutions approchées (globales en temps), associées aux problèmes de Cauchy correspondants ; Convergence d'une sous-suite extraite vers une solution exacte. Comme un domaine d'invariance est à disposition, le solveur de Riemann fabrique systématiquement des états dont la taille reste bornée. Dès lors, les estimations en norme $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ sont facilement garanties. Cette stabilité en amplitude n'est pourtant pas suffisante en vue de mener à bien les deux dernières étapes mentionnées ci-dessus. En effet, leur réalisation nécessite aussi de pouvoir contrôler ce que devient la variation (afin de pouvoir passer à la limite dans les expressions non linéaires). Or, sur ce point précis, les travaux antérieurs n'apportent aucune réponse vraiment satisfaisante.

Maintenant que nous avons motivé notre démarche, expliquons le point de vue développé dans cet article.

L'évolution en temps des solutions du problème de Cauchy (\mathcal{H}) est sous l'influence d'interactions non linéaires. Pour des solutions de faible amplitude, la nature de ces interactions se repère au niveau du développement quadratique du flux $F(u)$ près de l'origine \bar{u} . Interviennent dans ce développement *les coefficients de flux* Γ_{ik}^i . Ces quantités traduisent le défaut induit sur les vitesses de propagation par la présence de non linéarité. Elles sont obtenues en calculant le gradient des valeurs propres :

$$(0.26) \quad \nabla_u \lambda_i(\bar{u}) := \sum_{k=1}^N \Gamma_{ik}^i l_k(\bar{u}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Interviennent aussi les *coefficients d'interaction* Λ_i^{pq} (qui sont définis par la formule (0.10)). Ces expressions gèrent les échanges non linéaires qui s'effectuent entre les différents modes de propagation.

Il est important de comprendre le rôle joué par ces différents coefficients en ce qui concerne l'évolution de la variation.

La présence de coefficients d'interaction non nuls favorise sinon provoque la croissance BV. Cette affirmation est étayée par les travaux de Joly-Métivier-Rauch [JMR1], de Schochet [Sc3] et de l'auteur [Ch1]–[Ch4] sur l'optique géométrique.

Un phénomène non linéaire connu sous le nom de résonance a été isolé. Ce phénomène peut, lorsque la norme BV de la donnée de Cauchy dépasse un certain seuil (en tout état de cause plus élevé que la valeur critique η_1 qui intervient en (0.24) et (0.25)), provoquer en temps fini l'explosion d'une solution. Plus précisément, les normes BV, L^∞ et L^1 se trouvent simultanément multipliées par un facteur arbitraire. Les mécanismes qui sont à la base de cette amplification ont été mis à jour à l'issue de manipulations heuristiques par Hunter [H]. Ils ont ensuite été rigoureusement établis par Joly-Métivier-Rauch [JMR2].

Dans la situation inverse, à savoir lorsque les coefficients d'interaction sont tous nuls au point base \bar{u} (dans ce cas la quantité \mathcal{R} vaut zero), Schochet [Sc1] a mis à

jour une propriété de stabilité BV dont il a déduit une amélioration du résultat de Glimm [G]. En effet, il suffit d'imposer les deux conditions :

$$(0.27) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \tilde{\delta} \ll 1, \quad \tilde{\delta} > 0,$$

$$(0.28) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \times V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) \leq \tilde{\delta} \ll 1, \quad \tilde{\delta} > 0,$$

pour que l'existence globale soit garantie.

La relation (0.28) autorise une variation totale d'autant plus grande que l'amplitude est choisie petite. Voilà typiquement un exemple de résultat qui indique que la contrainte imposée en (0.25) ne revêt pas toujours un caractère obligatoire.

La présence des coefficients de vraie non linéarité se traduit par de la décroissance BV. Cette propriété a d'abord été observée par Lax [La] pour une loi de Bürger associée à une condition initiale périodique. Elle a ensuite retenu l'attention de Tai-Ping-Liu [TPL]. Elle permet en effet, lorsque la donnée initiale est à support compact, de décrire le comportement asymptotique en temps des solutions de systèmes de lois de conservation. Le point important à ce niveau est l'apparition, après un certain laps de temps, d'un découplage entre les différents modes de propagation.

Avant découplage, il s'établit un rapport de force entre les phénomènes de résonance et de vraie non linéarité. Cette compétition a été analysée et interprétée par l'auteur [Ch2] en ce qui concerne les équations de modulation données par l'optique géométrique. Ces dernières équations décrivent le comportement asymptotique d'ondes oscillantes qui sont des solutions exactes du système de lois de conservation. Elles fournissent un modèle qui facilite l'étude des propriétés inhérentes à (\mathcal{H}) .

Ce modèle, bien que simplifié, reste assez fidèle au système de départ (\mathcal{H}) . Cette similarité de structure souligne l'importance de la remarque suivante : Les équations de modulation sont stables dans BV lorsque les coefficients de vraie non linéarité dominent les coefficients d'interaction. Compte tenu de la convention adoptée en (0.9), cette condition se traduit par la petitesse du rapport d'influence \mathcal{R} .

Notre propos aujourd'hui concerne le problème de Cauchy (\mathcal{H}) à part entière. Le taux de croissance en variation provoqué par les résonances ainsi que le taux de décroissance en variation lié aux effets de vraie non linéarité sont mesurés. Il s'avère que ces taux sont comparables. Il s'ensuit que l'explosion ne se produit pas (ou à défaut se trouve retardée) lorsque le rapport d'influence \mathcal{R} est voisin de zéro.

Le lecteur trouvera dans l'exposé introductif de l'auteur [Ch3] une présentation générale (agrémentée d'explications formelles) des idées qui sous-tendent cet article. Notre objectif dans ce travail est de préciser les détails en toute rigueur. Le plan s'organise autour de cinq chapitres qui sont divisés en plusieurs sous-parties.

Le premier chapitre est consacré à la mise en place des notations et de quelques outils de base. Il s'agit essentiellement de collecter pour la suite les résultats exposés dans Schochet [Sc1] et Robin Young [RY1]. Dans un premier temps, le choix adopté pour la normalisation des vecteurs $r^i(u)$ est spécifié. La manière dont les invariants

de Riemann approchés sont construits est rappelée dans ce cadre. Un inventaire des estimations d'interaction usuelles est ensuite dressé. Finalement, la définition de ce que sont les *paramètres caractéristiques* qui sont associés au flux $F(u)$ est introduite.

Le second chapitre s'intéresse à une catégorie particulière de conditions initiales. Les données de Cauchy en question sont dites à *variation locale uniforme*. Elles sont petites en amplitude. Leur variation évaluée sur des intervalles de longueur fixée reste bornée mais leur variation étendue à \mathbb{R} peut être arbitrairement grande. C'est dans ce contexte qu'est présenté et illustré à l'aide d'exemples le concept de *décroissance au sens large*. Cette notion indique qu'il est pertinent de classer les conditions initiales selon leur *genre* que caractérise un couple de paramètres noté (γ, δ) .

Le troisième chapitre analyse (lorsque la condition initiale $h(x)$ possède une grande variation totale), le temps de vie des solutions du problème de Cauchy (\mathcal{H}) . Plus précisément, une durée d'existence minimale est déterminée. Cette durée dépend des paramètres caractéristiques du flux $F(u)$ ainsi que du genre (γ, δ) de la donnée initiale considérée. La façon dont se trouvent modifiées sur ce laps de temps l'amplitude et la variation locale de la solution est expliquée.

Dans les chapitres IV et V, le rapport d'influence \mathcal{R} est supposé petit. La donnée de Cauchy est notée $h(x)$. Elle est choisie du genre (γ, δ) pour des paramètres γ et δ suffisamment proches de zéro. Sous ces hypothèses, une solution $u(t, x)$ *décroissante au sens large* est construite. En d'autres termes, la stabilité en variation se trouve établie.

Le résultat ainsi mis à jour (voir le théorème 4.3) peut être regardé comme la traduction concrète, au niveau de la solution $u(t, x)$ particulière considérée, des propriétés de compacité de l'opérateur solution associé au système hyperbolique (\mathcal{H}) . Il s'interprète comme étant une alternative (efficace y compris pour des entiers N supérieurs ou égaux à 3) à la théorie de la compacité par compensation (dont les enseignements restent à ce jour limités aux systèmes d'au plus deux équations, c'est-à-dire correspondants à un entier N inférieur ou égal à 2). Ce principe présente plusieurs conséquences qui sont exposées dans un dernier volet.

La première application concerne les données de Cauchy $h(x)$ qui sont périodiques et dont la variation calculée sur une période est voisine de zéro. En changeant au besoin l'état de base, les fonctions $h(x)$ en question peuvent être rendues de moyenne nulle. L'amplitude de la solution $u(t, x)$ se trouve alors contrôlée par la variation évaluée sur une période :

$$(0.29) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq V_{\text{ar}}^{\text{per}}(h(\cdot)).$$

Il s'ensuit que la stabilité en amplitude se déduit du résultat de stabilité en variation. Dès lors, l'existence globale en temps se trouve assurée (voir le théorème 5.1.1). Pourtant, dans ce cas de figure, la variation étendue à \mathbb{R} de la condition initiale vaut exactement $+\infty$!

La deuxième implication se rapporte à des flux dont la structure permet des estimations à priori sur l'amplitude. Le problème de Cauchy (\mathcal{H}) avec donnée initiale petite dans $L^\infty(\mathbb{R})$ est alors bien posé (se reporter au contenu du théorème 5.3.1).

Finalement, une troisième et dernière application est déduite de la notion de décroissance au sens large. Comme la variation n'augmente pas, c'est l'amplitude de la condition initiale qui devient un facteur limitant en ce qui concerne l'existence pour tout temps. Cette idée est prise en compte de manière à dégager pour (\mathcal{H}) une durée de vie minimale T_δ^m . La formule explicite qui détermine T_δ^m dépend à la fois de l'amplitude, de la variation totale et de la manière dont cette variation se trouve répartie sur l'axe réel. Elle améliore de manière significative la valeur que prévoit pour T_δ^m d'autres argumentations (par exemple celles qui sont présentées dans Schochet [Sc3] ou Glimm [G]).

Je remercie les Professeurs G. Métivier et J. Rauch dont les conseils, toujours judicieux, m'ont aidé à mettre en œuvre ce travail.

CHAPITRE 1

MISE EN PLACE

1.1. Normalisation des vecteurs propres

À la matrice $DF(u)$ a été associé un système bi-orthogonal formé de vecteurs propres à droite et à gauche reliés par les relations qui sont indiquées en (0.6). Ces relations laissent de la liberté en ce qui concerne le choix adopté pour la normalisation des vecteurs $l_i(u)$ et $r^i(u)$. Comme indiqué dans Robin Young [RY1], il existe du point de vue du calcul des interactions d'ondes une façon particulièrement pertinente de réaliser cette normalisation. Le procédé en question est ici brièvement rappelé.

Soit v_i une fonction à valeurs réelles, définie sur l'espace des états, qui vaut zéro en \bar{u} :

$$(1.1.1) \quad v_i(\bar{u}) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

et dont le gradient se décompose selon :

$$(1.1.2) \quad \nabla_u v_i(u) := \sum_{j=1}^N a_i^j(u) l_j(u), \quad i = 1, \dots, N.$$

La fonction auxiliaire $v_i(u)$ est introduite pour décrire les différentes normalisations possibles pour les vecteurs $l_i(u)$ et $r^i(u)$, à savoir celles qui préservent les contraintes qui sont indiquées en (0.6) :

$$(1.1.3) \quad \bar{r}^i(u) := e^{v_i(u)} r^i(u), \quad i = 1, \dots, N.$$

$$(1.1.4) \quad \bar{l}_i(u) := e^{-v_i(u)} l_i(u), \quad i = 1, \dots, N.$$

Comme la définition donnée en (0.10) pour les différents coefficients d'interaction Λ_i^{pq} consomme exactement une dérivée, un décalage qui fait intervenir les scalaires $a_i^j(\bar{u})$ est observé dans le calcul des quantités $\bar{\Lambda}_i^{pq}$ qui sont obtenues à l'aide des nouveaux vecteurs $\bar{r}^i(u)$:

$$(1.1.5) \quad \bar{\Lambda}_i^{pq} := \bar{l}_i(\bar{u}) \cdot \{\bar{r}^p; \bar{r}^q\}(\bar{u}) = a_q^p(\bar{u}) \delta_{qi} + \Lambda_i^{pq} - a_p^q(\bar{u}) \delta_{pi}.$$

Les coefficients $\bar{\Lambda}_i^{pq}$ satisfont les propriétés d'antisymétrie :

$$(1.1.6) \quad \bar{\Lambda}_i^{pq} = -\bar{\Lambda}_i^{qp}, \quad i, p, q = 1, \dots, N,$$

et sont nuls lorsque les entiers p et q coïncident :

$$(1.1.7) \quad \bar{\Lambda}_i^{pp} = 0, \quad i, p = 1, \dots, N.$$

Les valeurs des scalaires $a_i^j(0)$ peuvent être fixées librement. On impose :

$$(1.1.8) \quad a_p^q(0) := \Lambda_p^{pq}, \quad p, q = 1, \dots, N.$$

D'après (1.1.5), ce choix a pour effet d'annuler l'ensemble des coefficients $\bar{\Lambda}_p^{iq}$ pour lesquels deux des trois indices i, p et q coïncident :

$$(1.1.9) \quad \bar{\Lambda}_p^{pq} = \bar{\Lambda}_p^{qp} = 0, \quad p, q = 1, \dots, N.$$

En revanche, aucune modification n'est observée en ce qui concerne les autres expressions :

$$(1.1.10) \quad \bar{\Lambda}_i^{pq} = \Lambda_i^{pq}, \quad p \neq q, p \neq i, q \neq i.$$

$$(1.1.11) \quad \bar{\Gamma}_{ik}^i = \Gamma_{ik}^i, \quad i, k = 1, \dots, N.$$

Les quantités Λ_i^{pq} qui correspondent à des indices i, p et q non deux à deux distincts ne sont pas pertinentes pour notre analyse. Le procédé qui vient d'être décrit permet de « gommer » ces coefficients indésirables. D'où l'intérêt de normaliser les N vecteurs $r^i(u)$ de manière à ce que :

$$(1.1.12) \quad \Lambda_i^{pq} = 0 \text{ si } i = p \text{ ou } i = q \text{ ou } p = q.$$

1.2. Invariants de Riemann approchés

La $i^{\text{ème}}$ courbe de Lax [La] issue d'un point u choisi dans Ω_2 est notée :

$$(1.2.1) \quad \varepsilon_i \mapsto T_{\varepsilon_i}^i(u), \quad i = 1, \dots, N.$$

La construction de cette courbe est classique (consulter par exemple Robin Young [RY1]). Il en existe un paramétrage de classe C^2 tel que le contact en ε_i égal à 0 avec la courbe intégrale du champ de vecteurs $r^i(u)$ issue du point u soit d'ordre deux :

$$(1.2.2) \quad \frac{d}{d\varepsilon_i} \{ \varepsilon_i \mapsto T_{\varepsilon_i}^i(u) \}_{|\varepsilon_i=0} = r^i(u).$$

La fonction composée :

$$(1.2.3) \quad T_\varepsilon : (\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N), u = (u_1, \dots, u_N)) \\ \mapsto T_\varepsilon(u) := T_{\varepsilon_N}^N(\dots T_{\varepsilon_i}^i(\dots T_{\varepsilon_1}^1(u)) \dots)$$

est définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{2N} . Ce voisinage peut être spécifié sous la forme d'un produit d'ouverts relativement compacts $\omega_2 \times \Omega_2$. En diminuant au besoin le volume de ces ouverts, l'application :

$$(1.2.4) \quad \omega_2 \ni \varepsilon \mapsto T_\varepsilon(0) \in \Omega_2,$$

devient un difféomorphisme de classe C^2 du domaine ω_2 sur Ω_2 . Son inverse est noté $w(u) = (w_1(u), \dots, w_N(u))$:

$$(1.2.5) \quad T_{w(u)}(0) = u, \quad \forall u \in \Omega_2.$$

La taille d'un état u peut aussi être contrôlée à l'aide des invariants de Riemann approchés $w_i(u)$. Il suffit en effet d'introduire :

$$(1.2.6) \quad \|u\|_{Ri} := \max_{1 \leq i \leq N} |w_i(u)|$$

pour obtenir une expression équivalente à la norme usuelle :

$$(1.2.7) \quad \|u\|_{Ri} \sim \|u\|_\infty, \quad u \in \Omega_2.$$

En combinant les relations (0.26) et (1.2.2), on voit apparaître :

$$(1.2.8) \quad |\lambda_i(T_{\varepsilon_k}^k(u)) - \lambda_i(u) - \Gamma_{ik}^i \varepsilon_k| \leq D_1 |\varepsilon_k| (|\varepsilon_k| + \|u\|_{Ri})$$

avec $u \in \Omega_2$, $i, k = 1, \dots, N$.

La procédure de normalisation décrite au sous-chapitre I.1 change la longueur des vecteurs propres. D'après la relation (1.2.2), cette manipulation a aussi pour effet de modifier les forces attribuées aux ondes. En d'autres termes, imposer la condition (1.1.12) revient à spécifier un choix particulier pour les scalaires ε_i et l'application $w(u)$.

On dit que le système de coordonnées $\{\tilde{w}_1(u), \dots, \tilde{w}_N(u)\}$ est formé d'invariants de Riemann forts sur l'ouvert Ω_2 si :

$$(1.2.9) \quad \nabla_u \tilde{w}_i(u) \cdot r^j(u) = 0, \quad i \neq j, u \in \Omega_2.$$

L'existence d'un tel système est équivalente à l'annulation sur Ω_2 de tous les coefficients d'interaction $\Lambda_i^{pq}(u)$. Cette condition est très restrictive. En général, elle est mise en défaut. Dans ce dernier cas, un résultat exposé dans Schochet [Sc1, page 1429] explique comment les coefficients d'interaction Λ_i^{pq} interviennent dans le développement à l'ordre 2 de la fonction $w_i(u)$ suivie le long de la courbe intégrale du champ de vecteurs $r^k(u)$:

$$(1.2.10) \quad w_i(T_{\varepsilon_k}^k(u)) - w_i(u) = \varepsilon_k (\delta_{ik} + \sum_{i \neq p < k \neq i} \Lambda_i^{pk} w_p(u) + \mathcal{O}(\|u\|_{Ri}^2)),$$

avec $(0, \dots, \varepsilon_k, \dots, 0) \in \omega_2$, $u \in \Omega_2$.

Seuls les triplets d'entiers (i, p, k) avec i, p et k deux à deux distincts interviennent dans la somme écrite en (1.2.10). L'absence des autres combinaisons d'indices provient

de la condition (1.1.12). Lorsque l'entier k est différent de l'indice i , le développement limité (1.2.10) se traduit clairement par la majoration :

$$(1.2.11) \quad |w_i(T_{\varepsilon_k}^k(u)) - w_i(u)| \leq |\varepsilon_k| \|u\|_{Ri} \left(\sum_{i \neq p < k \neq i} |\Lambda_i^{pk}| + D_2 \|u\|_{Ri} \right),$$

avec $(0, \dots, \varepsilon_k, \dots, 0) \in \omega_2$, $u \in \Omega_2$, $k \neq i$.

La terminologie d'*invariants de Riemann approchés* est désormais adoptée pour désigner les fonctions $w_i(u)$.

1.3. Estimations d'interaction

Dans cette partie, les vecteurs d'ondes ε et les états u sont sélectionnés dans un voisinage ouvert $\omega_3 \times \Omega_3$ de \mathbb{R}^{2N} , contenant le point $\{0\} \times \{0\}$. Ce voisinage est inclus dans le domaine $\omega_2 \times \Omega_2$. Son diamètre sera réduit chaque fois que nécessaire. On appelle problème de Riemann le problème de Cauchy (\mathcal{H}) lorsque la condition initiale contient un saut unique :

$$(1.3.1) \quad h(x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x < 0. \\ u^+ & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème admet une solution qui est formée de $N + 1$ états intermédiaires notés $(u^i)_{1 \leq i \leq N+1}$. Ces états sont séparés par des ondes élémentaires (de force ε_i) qui sont soit des ondes de raréfaction (c'est la terminologie pour $\varepsilon_i \geq 0$) soit des chocs (si au contraire $\varepsilon_i < 0$) :

$$(1.3.2) \quad u^1 = u^-.$$

$$(1.3.3) \quad u^{i+1} = T_{\varepsilon_i}^i(\dots T_{\varepsilon_1}^1(u^-) \dots), \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

$$(1.3.4) \quad u^{N+1} = u^+ = T_{\varepsilon}(u^-).$$

L'application :

$$(1.3.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{W} : \Omega_3 \times \Omega_3 &\longrightarrow \omega_3 \\ (u^-, u^+) &\longmapsto \mathcal{W}(u^-; u^+) := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \\ &= (\mathcal{W}_1(u^-; u^+), \dots, \mathcal{W}_N(u^-; u^+)) \end{aligned}$$

est de classe C^2 . Par ailleurs, la taille du saut qui sépare les deux états u^- et u^+ est équivalente au module du vecteur d'ondes ε .

En d'autres termes :

$$(1.3.6) \quad \begin{cases} (ND_3) \|u^+ - u^-\|_{\infty} \leq |\varepsilon| := \max_{1 \leq i \leq N} |\varepsilon_i|. \\ |\varepsilon| \leq (D_4/N) \|u^+ - u^-\|_{\infty}. \end{cases}$$

On se donne deux solutions adjacentes du problème de Riemann avec u^- dans Ω_3 pour l'état situé le plus à gauche :

$$(1.3.7) \quad u^{\sharp} = T_{\alpha}(u^-) \in \Omega_3, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \omega_3.$$

$$(1.3.8) \quad u^+ = T_\beta(u^\natural) \in \Omega_3, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \omega_3.$$

On dit que l'onde α_j approche l'onde β_k et on note $\alpha_j \mathcal{A} \beta_k$ si :

$$(1.3.9) \quad j > k$$

ou bien si :

$$(1.3.10) \quad j = k \text{ et } (\alpha_j < 0 \text{ ou } \beta_k < 0).$$

Les calculs portant sur les interactions d'ondes consistent à résoudre le problème de Riemann associé aux deux états extrêmes u^- et u^+ pour ensuite exprimer les forces ε_i des ondes sortantes en fonction des vecteurs d'ondes α et β . Dans son travail [RY1], Robin Young donne avec une précision d'ordre trois les relations qui unissent les différentes forces α_j , β_k et ε_i . On a :

$$(1.3.11) \quad \varepsilon_i = \alpha_i + \beta_i + \sum_{j>k} \Lambda_i^{jk}(u^-) \alpha_j \beta_k + \mathcal{O}(D(\alpha, \beta)(|\alpha| + |\beta|)),$$

où la fonctionnelle quadratique $D(\alpha, \beta)$ est définie conformément à ce qui est fait d'habitude :

$$(1.3.12) \quad D(\alpha, \beta) := \sum_{\alpha_j \mathcal{A} \beta_k} |\alpha_j| |\beta_k|.$$

On pose :

$$(1.3.13) \quad \aleph := \max(\|u^-\|_\infty; \|u^\natural\|_\infty; \|u^+\|_\infty).$$

Lorsque les vecteurs d'ondes α et β sont donnés sous la forme de deux ondes élémentaires qui s'approchent :

$$(1.3.14) \quad \alpha = (0, \dots, \alpha_p, \dots, 0) \in \omega_3 \text{ et } \beta = (0, \dots, \beta_q, \dots, 0) \in \omega_3,$$

le développement asymptotique (1.3.11) donne accès à :

$$(1.3.15) \quad |\varepsilon_i - \delta_{ip} \alpha_p - \delta_{iq} \beta_q| \leq (|\Lambda_i^{pq}| + D_5 \aleph) |\alpha_p| |\beta_q|.$$

On dispose aussi d'un contrôle sur la taille des états qui apparaissent :

$$(1.3.16) \quad \|u^{i+1}\|_{Ri} \leq D_6 \aleph, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

1.4. Paramètres caractéristiques

Les fonctions dont l'amplitude est petite et qui sont solutions du problème de Cauchy (\mathcal{H}) ont un comportement qui se trouve approximativement déterminé par la donnée de la matrice $DF(\bar{u})$ (à savoir des N valeurs propres λ_i) et de la différentielle seconde du flux $F''(\bar{u})$ (c'est-à-dire des coefficients des N formes quadratiques $f''_i(\bar{u})$). On dénombre ainsi en tout au plus $N + N^3$ quantités qui n'agissent pas de la même manière du point de vue de la stabilité BV. Ces quantités sont triées selon leur spécificité. Les *paramètres caractéristiques* du flux $F(u)$ sont destinés à mesurer l'influence de chaque catégorie d'expressions ainsi formée.

Un changement de variables affine est effectué sur les coordonnées t et x de manière à imposer la relation :

$$(1.4.1) \quad -\lambda_1 = \lambda_N = \frac{1}{2}.$$

REMARQUE 1.4.1. — Les échelles de temps et d'espace se trouvent ainsi déterminées à une dilatation près : Seule subsiste la possibilité de changer, pour un scalaire μ positif fixé, le couple (t, x) en $(\mu t, \mu x)$. \triangleleft

La relation (1.4.1) impose la distance entre les valeurs propres extrêmes :

$$(1.4.2) \quad \lambda_N - \lambda_1 = 1,$$

mais ne dit rien à propos de l'écart qui sépare les différentes vitesses de propagation. Cet écart est mesuré par le *degré ζ de stricte hyperbolicité* :

$$(1.4.3) \quad 0 < \zeta := \min_{1 \leq i \leq N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \leq 1.$$

La *borne d'accélération sur les vitesses* $A_{\mathbb{N}}$ est destinée à contrôler la stabilité des valeurs propres $\lambda_i(u)$ sous l'effet d'une perturbation :

$$(1.4.4) \quad A_{\mathbb{N}} := \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{u \neq v \in B(0; \mathbb{N})} \frac{|\lambda_i(u) - \lambda_i(v)|}{\|u - v\|_{\infty}} \neq 0.$$

On introduit le *taux Γ de vraie non linéarité* :

$$(1.4.5) \quad \Gamma := \min_{1 \leq i \leq N} \Gamma_{ii}^i = \min_{1 \leq i \leq N} f_i''(\bar{u}) \cdot (r^i(\bar{u}), r^i(\bar{u})) > 0,$$

qui, compte tenu de la convention adoptée en (0.9), prend pour valeur :

$$(1.4.6) \quad \Gamma = \Gamma_{ii}^i = 1, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Les coefficients d'interaction $\Lambda_i^{pq}(u)$ (avec i, p et q deux à deux distincts) traduisent le défaut de commutation du procédé d'intégration le long des différents champs de vecteurs $r^i(u)$. Ce défaut est contrôlé par une expression numérique qui mesure grossièrement la contribution apportée par l'ensemble des quantités Λ_i^{pq} :

$$(1.4.7) \quad \Lambda := \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{i \neq p < q \neq i} |\Lambda_i^{pq}|.$$

Les expressions Λ et Γ sont comparées à l'aide de leur quotient :

DÉFINITION 1.4.1. — On dit que le flux $F(u)$ admet \mathcal{R} pour rapport d'influence (sous-entendu rapport entre les coefficients d'interactions et de vraie non linéarité) si :

$$(1.4.8) \quad \frac{\Lambda}{\Gamma} = \mathcal{R}.$$

REMARQUE 1.4.2. — En reportant la relation (1.4.6) en (1.4.8), on retrouve la définition déjà adoptée en (0.11) pour le rapport d'influence :

$$(1.4.9) \quad \mathcal{R} = \Lambda.$$

Cette distinction de terminologie pour désigner une même quantité est introduite de manière à éviter une confusion. En effet les deux expressions \mathcal{R} et Λ ne possèdent pas du tout la même homogénéité. Un examen rapide montre que le rapport d'influence \mathcal{R} est adimensionné. Il est indépendant d'une dilatation sur les états. Il n'est pas non plus affecté par le procédé de normalisation qui est décrit au sous-chapitre 1.1. Il s'agit d'un invariant dont les liens avec les propriétés de stabilité BV du système (\mathcal{H}) seront expliqués en détail aux chapitres IV et V. \triangleleft

CHAPITRE 2

DÉCROISSANCE AU SENS LARGE

2.1. Variation locale uniformément répartie

L'axe des x est découpé en sous-parties. Ces sous-parties sont des intervalles. Ces intervalles sont désignés par la lettre I . Ils sont ouverts, bornés et délimités par les points i_1 et i_2 . Chaque fois que nécessaire, leur position en temps sera précisée. Par exemple, on dira de l'intervalle I qu'il est situé à l'instant s s'il s'agit du segment (contenu dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) dont les extrémités sont les points (s, i_1) et (s, i_2) .

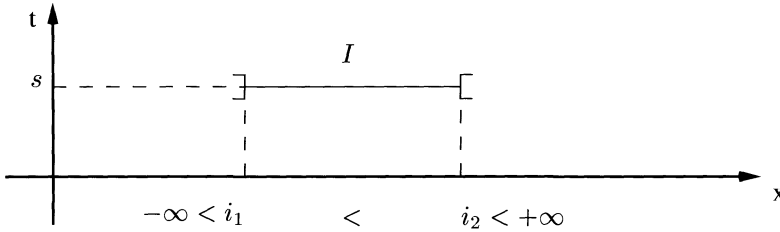


Figure 1. Intervalle I placé à l'instant s

La notation $|I|$ indique la longueur de l'intervalle I :

$$(2.1.1) \quad |I| :=]i_1, i_2[= i_2 - i_1 < \infty.$$

L'amplitude et la variation totale d'une fonction :

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto h(x) := (h_1(x), \dots, h_N(x)), \end{aligned}$$

font l'objet des définitions (0.13) et (0.14). Ces deux notions admettent une version locale :

$$(2.1.3) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(I)} := \sup_{i_1 < x < i_2} \|h(x)\|_\infty.$$

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} V_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(h(\cdot)) &:= \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{i_1 < x_1 < \dots < x_n < i_2} \sum_{j=1}^{n-1} |h_i(x_{j+1}) - h_i(x_j)| \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \sup_{\{\varphi \in C^0(I); \|\varphi\|_{C^0(I)} \leq 1\}} |\langle \partial_x h_i; \varphi \rangle_{\mathcal{M}_b(I); C^0(I)}|. \end{aligned}$$

Soit :

$$(2.1.5) \quad \begin{aligned} h|_I : I &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto h|_I(x) := h(x), \end{aligned}$$

la restriction à l'intervalle I de la fonction $h(\cdot)$.

L'application $h|_I(\cdot)$ appartient à l'espace des fonctions qui sont à variation bornée sur I , à savoir $BV(I)$, si :

$$(2.1.6) \quad \|h|_I(\cdot)\|_{BV(I)} := \|h|_I(\cdot)\|_{L^\infty(I)} + V_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(h|_I(\cdot)) < \infty.$$

L'espace vectoriel $BV(I)$ muni de la norme qui est définie en (2.1.6) est un Banach.

Comme l'intervalle I est borné, le théorème de Helly s'applique. Il affirme que l'inclusion :

$$(2.1.7) \quad BV(I) \hookrightarrow L^1(I)$$

est compacte.

Un élément $g(x)$ contenu dans $BV(I)$ admet une limite à gauche et à droite en tout point. Ces limites s'écrivent :

$$(2.1.8) \quad g(x^\mp) := \lim_{y \rightarrow x^\mp} g(y).$$

Toute fonction $g(x)$ qui est formée d'un nombre fini de discontinuités séparées par des états constants possède la régularité BV. Les applications qui satisfont ce critère sont regroupées à part, avec la version globale :

$$(2.1.9) \quad \mathcal{R}(\mathbb{R}) := \{h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N; \text{ la fonction } h(x) \\ \text{est constante par morceaux sur l'axe réel}\},$$

et la version locale :

$$(2.1.10) \quad \mathcal{R}(I) := \{g : I \longrightarrow \mathbb{R}^N; \text{ la fonction } g(x) \\ \text{est constante par morceaux sur l'intervalle } I\}.$$

La notation « $\text{supp}(h(\cdot))$ » est désormais adoptée pour désigner le support de la distribution $h(\cdot)$. Lorsque que celle-ci est une simple fonction, il s'agit donc de l'adhérence de l'ensemble des x pour lesquels le vecteur $h(x)$ est non nul.

On pose :

$$(2.1.11) \quad \text{BV}_I^\zeta(\mathbb{R}) := \{h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N; h(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ \text{supp}(\partial_x h(\cdot)) \subset I, \quad h|_I(\cdot) \in \text{BV}(I)\}.$$

$$(2.1.12) \quad \mathcal{R}_I^\zeta(\mathbb{R}) := \{h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N; h(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ \text{supp}(\partial_x h(\cdot)) \subset I, \quad h|_I(\cdot) \in \mathcal{R}(I)\}.$$

Soit κ une longueur strictement positive. Les intervalles :

$$(2.1.13) \quad I_p^\kappa :=](p+1)\kappa/2, (p+3)\kappa/2[, \quad p \in \mathbb{Z},$$

forment un recouvrement localement fini de l'axe réel :

$$(2.1.14) \quad \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} I_p^\kappa = \mathbb{R}, \quad I_p^\kappa \cap I_q^\kappa = \{\} \text{ si } |p-q| \geq 2.$$

La manière dont se trouve répartie la variation d'une fonction $h(\cdot)$ sur les différents intervalles I_p^κ est mesurée au moyen de la *variation locale uniforme de longueur κ* :

$$(2.1.15) \quad V_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc};u}(h(\cdot)) := \sup_{p \in \mathbb{Z}} V_{\text{ar}:I_p^\kappa}^{\text{loc}}(h(\cdot)).$$

Parmi les fonctions qui possèdent localement la régularité BV, certaines ont des dérivées qui chargent de manière uniforme les intervalles qui sont de longueur fixée :

DÉFINITION 2.1.1. —

On dit que la fonction $h(\cdot)$ est à variation locale uniformément répartie et on note :

$$(2.1.16) \quad h(\cdot) \in \text{BV}_u^{\text{loc}}(\mathbb{R}),$$

si :

$$(2.1.17) \quad \|h(\cdot)\|_{\text{BV}_u^{\text{loc}}(\mathbb{R})} := \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + V_{\text{ar}:1}^{\text{loc};u}(h(\cdot)) < \infty.$$

REMARQUE 2.1.1. — Soient κ et κ' deux nombres réels avec :

$$(2.1.18) \quad 0 < \kappa' \leq \kappa \leq q\kappa', \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

D'après (2.1.18), il est possible d'associer à tout indice p dans \mathbb{Z} deux entiers relatifs $p_1(p)$ et $p_2(p)$ tels que l'on ait :

$$(2.1.19) \quad I_p^\kappa \subset \bigcup_{r=p_1(p)}^{p_1(p)+2q-1} I_r^{\kappa'}.$$

$$(2.1.20) \quad I_p^{\kappa'} \subset \bigcup_{r=p_2(p)}^{p_2(p)+1} I_r^\kappa.$$

Les inclusions précédentes donnent clairement :

$$(2.1.21) \quad V_{\text{ar}:I_p^\kappa}^{\text{loc}}(h(\cdot)) \leq \sum_{r=p_1(p)}^{p_1(p)+2q-1} V_{\text{ar}:I_r^{\kappa'}}^{\text{loc}}(h(\cdot)).$$

$$(2.1.22) \quad V_{\text{ar}:I_p^{\kappa'}}^{\text{loc}}(h(\cdot)) \leq \sum_{r=p_2(p)}^{p_2(p)+1} V_{\text{ar}:I_r^\kappa}^{\text{loc}}(h(\cdot)).$$

De (2.1.21) et (2.1.22), on déduit les relations de comparaison :

$$(2.1.23) \quad \frac{1}{2} V_{\text{ar}:\kappa'}^{\text{loc};u}(h(\cdot)) \leq V_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc};u}(h(\cdot)) \leq 2q V_{\text{ar}:\kappa'}^{\text{loc};u}(h(\cdot)).$$

Les inégalités écrites en (2.1.23) indiquent qu'une fonction $h(x)$ est astreinte au contrôle (2.1.17) dès qu'il existe un nombre κ strictement positif qui réalise :

$$(2.1.24) \quad V_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc};u}(h(\cdot)) < \infty.$$

La condition (2.1.24) n'est pas affectée sous l'effet d'une dilatation, c'est-à-dire par le changement de x en μx avec μ positif. Cette remarque montre que la notion de *variation locale uniformément répartie* est invariante sous l'effet des changements de variables affines (et plus généralement sous l'effet des changements de variables uniformément lipschitziens). ◀

On s'intéresse à des solutions du système de lois de conservation (\mathcal{H}) qui sont de petite amplitude. Dans cet état d'esprit, la taille des états $h(x)$ se trouve contrôlée par un paramètre auxiliaire \aleph .

On introduit :

$$(2.1.25) \quad L^\infty(I; \aleph) := \{g(\cdot) \in L^\infty(I); \|g(\cdot)\|_{L^\infty(I)} \leq \aleph\}$$

et, pour tout symbole d'espace fonctionnel \mathcal{S} égal à L^1 , BV ou \mathcal{R} :

$$(2.1.26) \quad \mathcal{S}(I; \aleph) := \mathcal{S}(I) \cap L^\infty(I; \aleph).$$

À tout élément $g(x)$ contenu dans $\text{BV}(I; \aleph)$ est associé l'ensemble :

$$(2.1.27) \quad \mathcal{LM}(g(\cdot)) := \{(g_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}(I; \aleph)^{\mathbb{N}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n(\cdot)\|_{L^\infty(I)} \leq \|g(\cdot)\|_{L^\infty(I)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \|(g_n - g)(\cdot)\|_{L^1(I)} = 0\}.$$

L'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_{L^1(I)}$ de $\mathcal{R}(I; \aleph)$ coïncide avec l'espace $L^1(I; \aleph)$ tout entier (qui lui-même contient $\text{BV}(I; \aleph)$). Par conséquent, $\mathcal{LM}(g(\cdot))$ n'est jamais vide. Par ailleurs, on dispose d'un résultat de convergence classique :

$$(2.1.28) \quad V_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g(\cdot)) = \inf_{\{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{LM}(g(\cdot))\}} \liminf_{n \rightarrow \infty} V_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g_n(\cdot)).$$

Les deux fonctionnelles $\|\cdot\|_{L^\infty(I)}$ et $V_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$ ne sont pas d'un usage pratique dans l'étude des solutions approchées du problème de Cauchy (\mathcal{H}). On aura recours de préférence à d'autres fonctionnelles notées $\|\cdot\|_{R^i(I)}$, $\tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$ et $\bar{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$.

Ces applications sont définies en restriction à $BV(I; \mathbb{N})$ conformément à un procédé que nous décrivons à présent.

On introduit (voir (1.2.6) pour la notation) :

$$(2.1.29) \quad \|g(\cdot)\|_{Ri(J)} := \sup_{x \in J} \|g(x)\|_{Ri}, \quad J = I \text{ ou } J = \mathbb{R}.$$

Toute fonction $g(\cdot)$ contenue dans $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})$ admet un nombre fini de points de discontinuité dont les positions notées x_q^g avec q compris entre 1 et j_g sont ordonnées par ordre croissant :

$$(2.1.30) \quad x_0^g := i_1 < x_1^g < \cdots < x_q^g < \cdots < x_{j_g}^g < x_{j_g+1}^g := i_2.$$

Pour \mathbb{N} suffisamment petit, le produit de fermés $B(\bar{u}; \mathbb{N}] \times B(\bar{u}; \mathbb{N}]$ est inclus dans le domaine de définition de l'application \mathcal{W} définie en (1.3.5).

Dès lors, pour $g(\cdot)$ dans $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})$, les deux expressions écrites ci-dessous ont un sens :

$$(2.1.31) \quad \bar{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g(\cdot)) := \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{q=1}^{j_g} |\mathcal{W}_i(g(x_q^{g-}); g(x_q^{g+}))|.$$

$$(2.1.32) \quad \bar{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(g(\cdot)) := \sup_{p \in \mathbb{Z}} \bar{V}_{\text{ar}:I_p^\kappa}^{\text{loc}}(g(\cdot)).$$

En comparant (2.1.4) et (2.1.31) à l'aide de (1.3.6), on voit apparaître :

$$(2.1.33) \quad D_3 V_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g(\cdot)) \leq \bar{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g(\cdot)) \leq D_4 V_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g(\cdot)).$$

La fonctionnelle $\bar{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(\cdot)$ fournit ainsi une autre façon de mesurer la variation locale d'un élément de $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})$. Pour généraliser la formule (2.1.31) à $BV(I; \mathbb{N})$ tout entier, il suffit de s'inspirer de l'identité (2.1.28) :

$$(2.1.34) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g(\cdot)) := \inf_{\{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{LM}(g(\cdot))\}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(g_n(\cdot)).$$

Par analogie avec (2.1.15) et (2.1.32), on introduit :

$$(2.1.35) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) := \sup_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{V}_{\text{ar}:I_p^\kappa}^{\text{loc}}(h(\cdot)).$$

REMARQUE 2.1.2. — Le problème de Cauchy (\mathcal{H}) avec pour donnée initiale $h(\cdot)$ dans $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})$ admet une solution locale en temps. Cette solution est obtenue en juxtaposant les différents problèmes de Riemann posés aux points de discontinuité de la fonction $h(\cdot)$. L'expression $\bar{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(h(\cdot))$ mesure la somme des valeurs absolues des forces ainsi mises en jeu. Elle est de ce fait adaptée à l'étude des solutions approchées du système d'évolution (\mathcal{H}). Dans la pratique, étant donnée une condition initiale $h(\cdot)$ dans $BV(I; \mathbb{N})$, il est avantageux d'approcher la fonction $h(\cdot)$ dans $L^1(I)$ par une suite $(h_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ qui est contenue dans $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ et qui a pour effet de minimiser la fonctionnelle $\bar{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$. Cette remarque motive la définition introduite en (2.1.34). \triangleleft

REMARQUE 2.1.3. — De la définition (2.1.34), on déduit l'existence d'une suite particulière qui est notée $(k_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$, qui est contenue dans $\mathcal{LM}(g(\cdot))$ et qui réalise :

$$(2.1.36) \quad \tilde{V}_{ar:I}^{loc}(g(\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{ar:I}^{loc}(k_n(\cdot)).$$

Remarquez que pour tout intervalle $J =]j_1, j_2[$ inclus dans I , avec $g(\cdot)$ continue aux extrémités j_1 et j_2 , on a encore :

$$(2.1.37) \quad \tilde{V}_{ar:J}^{loc}(g|_J(\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{ar:J}^{loc}(k_n|_J(\cdot)).$$

L'identité (2.1.37) se prouve à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Si (2.1.37) est mis en défaut, il est toujours possible de trouver une suite $(e_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{LM}(g|_I(\cdot))$ avec :

$$(2.1.38) \quad \begin{cases} \tilde{V}_{ar:I}^{loc}(g|_J(\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{ar:J}^{loc}(e_n(\cdot)) < \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{ar:J}^{loc}(k_n|_J(\cdot)). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(j_1^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(j_1^+) = g(j_1). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(j_2^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(j_2^-) = g(j_1). \end{cases}$$

On forme alors la suite $(l_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ avec :

$$(2.1.39) \quad l_n(x) := \begin{cases} e_n(x) & \text{si } x \in J. \\ k_n(x) & \text{si } x \in I \setminus J. \end{cases}$$

La suite $(l_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ vit dans $\mathcal{LM}(g(\cdot))$ et vérifie d'après (2.1.38) :

$$(2.1.40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{ar:I}^{loc}(l_n(\cdot)) < \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{ar:I}^{loc}(k_n(\cdot)) = \tilde{V}_{ar:I}^{loc}(g(\cdot)),$$

ce qui est contradictoire avec la définition (2.1.34). ◀

Les propriétés de la fonctionnelle $\tilde{V}_{ar:I}^{loc}$ font l'objet d'un lemme :

LEMME 2.1.1. — *L'application $\tilde{V}_{ar:I}^{loc}$ est équivalente à $V_{ar:I}^{loc}$. Plus précisément, pour toute fonction $g(\cdot)$ dans $BV(I; \mathbb{R})$, on a les relations de comparaison :*

$$(2.1.41) \quad D_3 V_{ar:I}^{loc}(g(\cdot)) \leq \tilde{V}_{ar:I}^{loc}(g(\cdot)) \leq D_4 V_{ar:I}^{loc}(g(\cdot)).$$

Preuve du lemme 2.1.1. — Soit $(g_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{LM}(g(\cdot))$. On a, d'après (2.1.33),

$$(2.1.42) \quad D_3 V_{ar:I}^{loc}(g_n(\cdot)) \leq \tilde{V}_{ar:I}^{loc}(g_n(\cdot)) \leq D_4 V_{ar:I}^{loc}(g_n(\cdot)).$$

On écrit (2.1.42) pour le choix particulier $g_n = k_n$. Les identités (2.1.28) et (2.1.36) donnent après passage à la limite l'inégalité qui est annoncée en (2.1.41), à gauche.

La deuxième comparaison s'obtient en suivant une démarche analogue mais appliquée avec une suite $(k'_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ qui cette fois-ci réalise l'égalité au niveau de (2.1.28). ◻

REMARQUE 2.1.4. — L'encadrement (2.1.41) reste vrai lorsque les fonctionnelles $V_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$ et $\tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$ sont respectivement remplacées par $V_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}$ et $\tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}$ (ou encore, pour $h(\cdot)$ dans $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})$, par $V_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}$ et $\tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}$). Cette remarque signifie que pour étudier l'évolution de la variation locale, il suffit de considérer l'une quelconque des trois expressions $V_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}$, $\tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}$ ou $\tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}$. \triangleleft

REMARQUE 2.1.5. — D'après (2.1.41), la fonctionnelle $\tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$ est positive en ce sens où :

$$(2.1.43) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(h(\cdot)) > 0,$$

dès que la fonction $h(\cdot)$ est non constante sur I .

La dépendance de l'application \mathcal{W}_k en fonction de ses arguments n'a aucune raison d'être linéaire. On s'attend en général à ce que :

$$(2.1.44) \quad \mathcal{W}_k(u^- + v; u^+ + v) \neq \mathcal{W}_k(u^-; u^+).$$

$$(2.1.45) \quad \mathcal{W}_k(\mu u^-; \mu u^+) \neq \mu \mathcal{W}_k(u^-; u^+), \quad 1 \neq \mu > 0.$$

Les défauts qui sont observés en (2.1.44) et (2.1.45) se transmettent au niveau de $\tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$. Cette remarque signifie qu'en l'absence d'hypothèses supplémentaires, la fonctionnelle $\tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}$ ne respecte ni la linéarité, ni l'inégalité triangulaire. Attention, il ne s'agit pas là d'une semi-norme ! \triangleleft

REMARQUE 2.1.6. — Soit $(h_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{R}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, uniformément bornée dans l'espace $\text{BV}_u^{\text{loc}}(\mathbb{R})$. En d'autres termes, on part avec :

$$(2.1.46) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h_n(\cdot)) \leq \delta < \infty, \quad \kappa > 0.$$

Dans ces conditions, la compacité de l'injection (2.1.7) et le théorème 3 énoncé page 11 dans [B1] permettent de construire une sous-suite $(h_{\psi(n)}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ avec la propriété suivante : Pour tout intervalle I borné de \mathbb{R} , la suite des restrictions $(h_{\psi(n)|I}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(I)$ vers un élément qui est à variations bornées. Plus précisément, il est possible d'exhiber une fonction $h(\cdot)$ dans $\text{BV}_u^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ qui est astreinte à :

$$(2.1.47) \quad \begin{cases} \|h|_I(\cdot)\|_{L^\infty(I)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_{\psi(n)|I}(\cdot)\|_{L^\infty(I)}. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|(h_{\psi(n)|I} - h|_I)(\cdot)\|_{L^1(I)} = 0. \end{cases}$$

Au regard de la définition adoptée en (2.1.27), ces convergences signifient que la suite $(h_{\psi(n)|I}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ est contenue dans l'ensemble $\mathcal{LM}(h|_I(\cdot))$. En appliquant (2.1.34) avec pour I l'intervalle I_p^κ , on voit apparaître :

$$(2.1.48) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:I_p^\kappa}^{\text{loc}}(h|_{I_p^\kappa}(\cdot)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}_{\text{ar}:I_p^\kappa}^{\text{loc}}(h_{\psi(n)|I_p^\kappa}(\cdot)) \leq \delta$$

ce qui a fortiori garantit :

$$(2.1.49) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq \delta.$$

◁

REMARQUE 2.1.7. — Pour $g(\cdot)$ dans $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})$, la suite stationnaire $(g(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ appartient de toute évidence à $\mathcal{LM}(g(\cdot))$. Par conséquent, la majoration suivante est toujours garantie :

$$(2.1.50) \quad \tilde{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(g(\cdot)) \leq \bar{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(g(\cdot)), \quad g(\cdot) \in \mathcal{R}(I; \mathbb{N}).$$

En revanche, il peut arriver que l'égalité en (2.1.50) soit mise en défaut. Expliquons brièvement pourquoi. Soit u^\sharp un état intermédiaire.

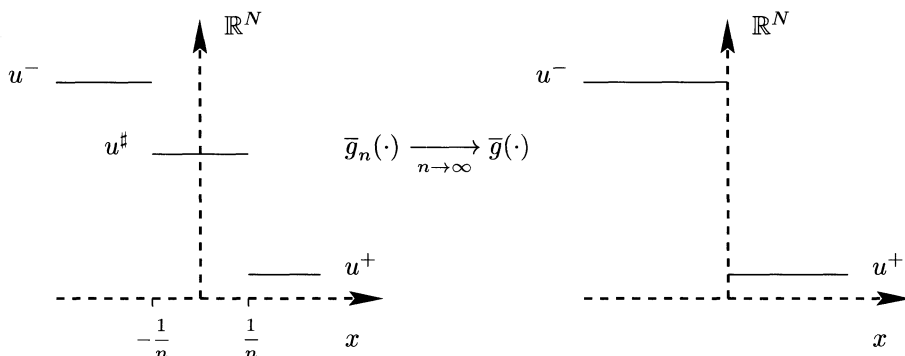


Figure 2

Clairement, la suite $(\bar{g}_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}^*}$ du dessin appartient à $\mathcal{LM}(\bar{g}(\cdot))$.

Pour des états u^- , u^\sharp et u^+ convenablement choisis, il est parfois possible d'exploiter la non linéarité de \mathcal{W}_k de manière à obtenir :

$$(2.1.51) \quad \max_{1 \leq k \leq N} (|\mathcal{W}_k(u^-; u^\sharp)| + |\mathcal{W}_k(u^\sharp; u^+)|) < \max_{1 \leq k \leq N} |\mathcal{W}_k(u^-; u^+)|.$$

L'identité (2.1.51) conduit alors à :

$$(2.1.52) \quad \tilde{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(\bar{g}(\cdot)) < \bar{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(\bar{g}(\cdot)), \quad \bar{g}(\cdot) \in \mathcal{R}(I; \mathbb{N}).$$

Notez que la suite $(\bar{g}_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\bar{g}(\cdot)$. C'est la raison pour laquelle une inégalité stricte apparaît en (2.1.52). Considérons la situation inverse, c'est-à-dire un $g(\cdot)$ dans l'ensemble $\mathcal{R}(I; \mathbb{N})$ et une suite $(g_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{LM}(g(\cdot))$ avec :

$$(2.1.53) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(g_n - g)(\cdot)\|_{L^\infty(I)} = 0.$$

On a alors nécessairement :

$$(2.1.54) \quad \bar{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(g(\cdot)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(g_n(\cdot)).$$

Cette remarque invite à envisager une autre définition pour $\mathcal{LM}(g(\cdot))$, à savoir :

$$(2.1.55) \quad \mathcal{LM}_\infty(g(\cdot)) := \left\{ (g_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}(I; \mathbb{K})^{\mathbb{N}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \|(g_n - g)(\cdot)\|_{L^\infty(I)} = 0 \right\}.$$

Le choix précédent présente l'avantage de garantir d'emblée l'égalité en (2.1.50). Par contre, il lui manque la souplesse nécessaire pour prendre en compte les passages à la limite qui, pour les systèmes de lois de conservation, se produisent naturellement dans l'espace L^1 (voir la remarque 2.1.6 ou le théorème 4 page 13 dans [B1]).

C'est pourquoi, on préfère retenir pour les besoins de cet exposé la définition (2.1.34). Ce parti pris présente une conséquence peut être inattendue. Lorsque l'inégalité stricte se produit en (2.1.50) pour une certaine fonction $g(\cdot)$ dans $\mathcal{R}(I; \mathbb{K})$, les solutions approchées du problème de Cauchy (\mathcal{H}) ne sont pas obtenues en imposant la fonction $g(\cdot)$ comme condition initiale. Le procédé adopté consiste plutôt à se donner dans un premier temps une suite $(g_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{LM}(g(\cdot))$ qui réalise :

$$(2.1.56) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}_{ar:I}^{loc} (g_n(\cdot)) = \tilde{V}_{ar:I}^{loc} (g(\cdot)),$$

pour ensuite construire une solution approchée qui correspond à chaque donnée initiale $g_n(\cdot)$ et finalement passer à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini. Bien entendu, cette démarche reste cohérente puisque d'après (2.1.27) la suite $(g_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(I)$ vers la fonction $g(\cdot)$. ◁

On poursuit par un lemme d'approximation :

LEMME 2.1.2

Soit $h(\cdot)$ dans $BV_I^c(\mathbb{R})$ avec :

$$(2.1.57) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc;u} (h(\cdot)) = \delta < \infty, \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \delta' < \infty.$$

Alors, il existe une suite $(h_n(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{R}_I^c(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$(2.1.58) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(h_n - h)(\cdot)\|_{L^1(I)} = 0.$$

$$(2.1.59) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}_{ar:1}^{loc;u} (h_n(\cdot)) \leq \delta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \delta'.$$

Preuve du lemme 2.1.2. — La fonction $h(\cdot)$ est translatée en $h^\varepsilon(\cdot)$ selon la formule $h^\varepsilon(x) = h(x + \varepsilon)$. Cette opération n'affecte pas (2.1.57) et la suite $(h_\varepsilon(\cdot))_{\varepsilon \in]0,1[}$ converge dans $L^1(I)$ vers $h(\cdot)$ lorsque le paramètre ε tend vers zéro. Soit ε fixé de manière à ce que $h_\varepsilon(\cdot)$ soit continue aux extrémités de tous les intervalles I_p^1 . L'ensemble \mathcal{I} des ε qui ont cette propriété contient zéro dans son adhérence ($0 \in \bar{\mathcal{I}}$).

Soit alors $(k_n^\varepsilon(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{LM}(h_\varepsilon(\cdot))$ qui réalise :

$$(2.1.60) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}_{ar:I}^{loc} (k_n^\varepsilon(\cdot)) = \tilde{V}_{ar:I}^{loc} (h_\varepsilon(\cdot)).$$

Les fonctions $k_n^\varepsilon(\cdot)$ sont prolongées par des constantes à l'extérieur de l'intervalle I . Ces constantes sont ajustées de façon à garantir la continuité aux extrémités i_1 et i_2 :

$$(2.1.61) \quad \tilde{k}_n^\varepsilon(x) := \begin{cases} k_n^\varepsilon(x) & \text{si } x \in I. \\ k_n^\varepsilon(i_1^+) & \text{si } x \leq i_1. \\ k_n^\varepsilon(i_2^-) & \text{si } x \geq i_2. \end{cases}$$

D'après la remarque 2.1.3, si $\varepsilon \in \mathcal{I}$ on a pour tout intervalle I_p^1 :

$$(2.1.62) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\text{ar}:I_p^1}^{\text{loc}}(\tilde{k}_n^\varepsilon|_{I_p^1}(\cdot)) = \tilde{V}_{\text{ar}:I_p^1}^{\text{loc}}(h_{|I_p^1}^\varepsilon(\cdot)) \leq \delta.$$

Comme toutes les fonctions considérées ont leur support contenu dans un compact fixé, le nombre d'intervalles I_p^1 mis en jeu au niveau de la définition (2.1.32) est fini. Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(\tilde{k}_n^\varepsilon(\cdot)) = \sup_{p \in \mathbb{Z}} \bar{V}_{\text{ar}:I_p^1}^{\text{loc}}(h_{|I_p^1}^\varepsilon(\cdot)) \leq \delta.$$

En particulier :

$$\forall \varepsilon \in I, \exists p_\varepsilon \in \mathbb{N}, \bar{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(\tilde{k}_{p_\varepsilon}^\varepsilon(\cdot)) \leq \delta + \varepsilon.$$

Soit alors $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers zéro. Il suffit alors de définir $(h_n(\cdot)) := \tilde{k}_{p_{\varepsilon_n}}^{\varepsilon_n}(\cdot)$ pour voir apparaître (2.1.59). \square

On pose :

$$(2.1.63) \quad \tilde{V}_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}_{\text{ar}:]-n, n[}^{\text{loc}}(h(\cdot)).$$

On termine ce paragraphe par un lemme qui permet d'ajuster la variation locale uniforme :

LEMME 2.1.3. — Soit $h(\cdot)$ dans $BV_u^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ avec :

$$(2.1.64) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) = \delta < \delta' < \infty.$$

$$(2.1.65) \quad \delta' < \tilde{V}_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)).$$

Soit p un entier non nul ajusté de manière à ce que :

$$(2.1.66) \quad (2p-1)\delta < \delta' \leq (2p+1)\delta.$$

Alors il existe un entier q (nécessairement supérieur à p) qui donne lieu à l'encadrement :

$$(2.1.67) \quad \delta' \leq \tilde{V}_{\text{ar}:q}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) < \delta' + 2\delta.$$

Preuve du lemme 2.1.3. — L'application :

$$(2.1.68) \quad \begin{aligned} v: \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto v(q) := \tilde{V}_{\text{ar}:q}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)), \end{aligned}$$

est croissante et vérifie d'après l'hypothèse (2.1.64) :

$$(2.1.69) \quad v(q+1) - v(q) \leq 2\delta, \quad q \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui donne :

$$(2.1.70) \quad v(p) \leq v(1) + \sum_{q=1}^{p-1} [v(q+1) - v(q)] \leq (2p-1)\delta < \delta'.$$

L'existence d'un entier q supérieur à p qui réalise (2.1.67) provient alors de ce que l'hypothèse (2.1.65) implique :

$$(2.1.71) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} v(q) > \delta'.$$

□

2.2. Décroissance au sens large

Soit T un instant positif fixé. Étant donné un espace de Banach E , le symbole $\mathcal{E}([0, T]; E)$ désigne l'ensemble des fonctions réglées de l'intervalle $[0, T]$ à valeurs dans E . Une fonction $h(t)$ contenue dans $\mathcal{E}([0, T]; E)$ admet en tout point une limite à gauche $h(t^-)$ ainsi qu'une limite à droite notée $h(t^+)$:

$$(2.2.1) \quad \lim_{s \rightarrow t^\mp} \|h(s) - h(t^\mp)\|_E = 0.$$

Le saut que subit à l'instant t la fonction $h(t)$ s'écrit :

$$(2.2.2) \quad \Delta h(t) := h(t^+) - h(t^-).$$

Ce chapitre parle de fonctions $u(t, x)$ qui possèdent la régularité :

$$(2.2.3) \quad u(t, x) \in \mathcal{E}([0, T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0, T]; \text{BV}^1_u(\mathbb{R})).$$

DÉFINITION 2.2.1

Soit κ et v deux nombres réels positifs avec v strictement inférieur à 1. On dit que l'application qui à t associe $u(t, \cdot)$ est décroissante au sens large sur l'intervalle $[0, T]$ pour la longueur κ et l'indice v si :

$$(2.2.4) \quad \tilde{V}_{\text{ar}; \kappa}^{\text{loc}; u}(u(T^-, \cdot)) \leq v \tilde{V}_{\text{ar}; \kappa}^{\text{loc}; u}(u(0^+, \cdot)).$$

REMARQUE 2.2.1. — La quantité $\tilde{V}_{\text{ar}; \kappa}^{\text{loc}; u}(u(T^-, \cdot))$ peut atteindre la valeur $+\infty$ y compris si la fonction $u(T^-, \cdot)$ possède localement la régularité BV. Dans ce cas la notion de *décroissance au sens large* ne présente aucun intérêt. En revanche, l'inégalité (2.2.4) contient une information vraiment significative lorsque la fonction $u(T^-, \cdot)$ est à variation locale uniformément répartie.

En fait, comme l'indice v est sélectionné strictement inférieur à 1, l'inégalité (2.2.4) exprime que la variation a (localement) diminue à l'instant T . On peut donc s'étonner de la terminologie *décroissance au sens large* qui est adoptée. Cette appellation est introduite parce qu'elle permet d'insister sur le fait que la baisse de la variation locale est vérifiée à l'instant d'arrêt T sans pour autant être garantie aux instants t qui précèdent T . ◁

2.3. Étude sur des exemples

Ce sous-chapitre se fixe l'objectif suivant : mettre à jour les conditions sous lesquelles la notion de décroissance au sens large introduite en (2.2.4) se trouve effectivement adaptée à la description des solutions de systèmes de lois de conservation. Plus précisément, on étudie deux exemples simples qui permettent de dégager à la fois l'intérêt et les limites de la définition 2.2.1. Il s'agit de circonvier son cadre d'application exact.

EXEMPLE 2.3.1. — On considère la loi de Bürger :

$$(2.3.1) \quad (\partial_t u)(t, x) + \frac{1}{2} \partial_x [u(t, x)^2] = 0,$$

associée à la condition initiale :

$$(2.3.2) \quad h^\delta(x) = \begin{cases} \delta & \text{sur }]-\infty, 0], \\ \frac{\delta}{n+1} & \text{sur }]n, n+1], \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où le paramètre δ , fixé positif, peut être choisi aussi petit que souhaité.

La solution entropique du problème de Cauchy ainsi formé est constituée d'une succession de chocs. Ces discontinuités sont notées $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Elles suivent des trajectoires continues, rectilignes par morceaux, paramétrées par le temps et qui avant la première interaction sont des droites d'équation :

$$(2.3.3) \quad x_{\alpha_n}^\delta(t) = n + \frac{2n+1}{2n(n+1)} \delta t, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme les vitesses mises en jeu diminuent lorsque l'entier n croît, ces chocs se rapprochent les uns des autres (puis s'assemblent) lorsque le temps évolue. Cela signifie que la force totale des discontinuités qui sont contenues dans un intervalle de longueur fixée augmente avec le temps. Il s'ensuit que la décroissance au sens large n'est réalisée sur l'intervalle $[0, T]$ pour aucun instant T positif et pour aucune longueur κ .

Notons que le cas de figure considéré ici réalise l'égalité entre l'amplitude et la variation totale :

$$(2.3.4) \quad \|h^\delta(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} / V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h^\delta(\cdot)) = 1.$$

◁

EXEMPLE 2.3.2. — On considère toujours la loi de Bürger (2.3.1) mais cette fois-ci associée à une condition initiale $h(x)$ périodique de période 4. La fonction $h(x)$ est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur l'intervalle $[0, 4[$.

On impose :

$$(2.3.5) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, 1[. \\ 0 & \text{sur } [1, 2[. \\ -1 & \text{sur } [2, 3[. \\ 0 & \text{sur } [3, 4[. \end{cases}$$

La solution entropique $u(t, x)$ du problème de Cauchy correspondant à l'équation (2.3.1) et à la condition initiale (2.3.5) est bien entendu périodique de période quatre. Elle est formée de deux chocs d'amplitude 1 qui se rejoignent à l'instant 1. Il y a aussi deux ondes de raréfaction qui prennent leur source à partir des points de coordonnées $(0, 0)$ et $(0, 3)$.

Plus précisément, pour t compris entre 0 et 1, on a :

$$(2.3.6) \quad u(t, x) = \begin{cases} x/t & \text{sur } [0, t[\\ 1 & \text{sur } [t, 1 + t/2[. \\ 0 & \text{sur } [1 + t/2, 2 - t/2[\\ -1 & \text{sur } [2 - t/2, 3 - t[\\ (x - 3)/t & \text{sur } [3 - t, 3[\\ 0 & \text{sur } [3, 4[. \end{cases}$$

Les deux ondes de raréfaction sont d'amplitude 1. Elles se touchent à l'instant $3/2$. Pour t compris entre 1 et $3/2$, on a :

$$(2.3.7) \quad u(t, x) = \begin{cases} x/t & \text{sur } [0, t[\\ 1 & \text{sur } [t, 3/2[\\ 0 & \text{sur } [3/2, 3 - t[\\ (x - 3)/t & \text{sur } [3 - t, 3[\\ 0 & \text{sur } [3, 4[. \end{cases}$$

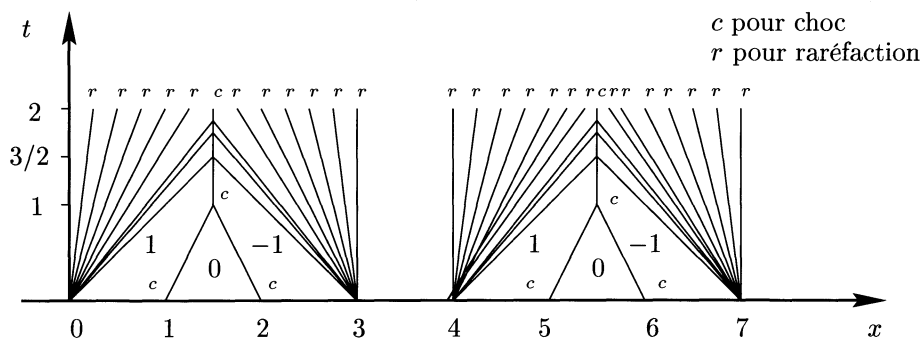


Figure 3. Caractéristiques de l'application $(t, x) \rightarrow u(t, x)$

On constate sur le dessin qui suit que la décroissance au sens large de l'application qui à t associe $u(t, \cdot)$ est mise en défaut sur les intervalles $[0, T]$ pour lesquels l'instant T précède $3/2$ et ce pour toutes les longueurs κ et tous les indices ν strictement inférieurs à 1. En fait, sur ces petits intervalles de temps, la variation calculée en restriction à un intervalle I de type espace est conservée pour peu que l'intervalle I soit convenablement choisi.

Cette situation n'est que passagère. Passé l'instant $3/2$, les chocs se mettent à interagir avec les ondes de raréfaction ce qui provoque la décroissance de la variation.

Comme la solution est périodique, le comportement asymptotique en temps de la variation calculée sur une période est en $1/T$ (voir Lax [**La**] ou plus récemment l'auteur [**Ch2**]) :

$$(2.3.8) \quad V_{\text{ar}}^{\text{per}}(u(T, \cdot)) \leq \frac{C_1}{T}, \quad T \in]0, \infty[.$$

Il s'ensuit que la décroissance au sens large est chose acquise pour T choisi suffisamment grand.

La condition initiale considérée dans ce deuxième exemple présente une caractéristique foncièrement différente de la précédente. Sa variation étendue à \mathbb{R} est très grande en comparaison de son amplitude. On a en effet :

$$(2.3.9) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} / V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) = 0.$$

◀

Résumons. Pour une loi de conservation vraiment non linéaire et à fortiori encore plus pour un système, il est inespéré d'observer pour des temps petits la baisse de la variation calculée sur des intervalles de longueur κ fixée. Il faut au moins attendre que soit passé un certain délai.

On constate par ailleurs que la décroissance au sens large se trouve compromise par le phénomène de concentration des chocs qui précède les interactions choc-choc. Elle est favorisée par l'expansion des ondes de raréfaction et provoquée par la rencontre d'un choc et d'une onde de raréfaction. Pour que de telles interactions mixtes soient présentes, il importe d'imposer la vraie non linéarité. La décroissance se trouve alors d'autant plus marquée que le quotient $\bar{\gamma}$ de la norme L^∞ sur la variation totale :

$$(2.3.10) \quad \bar{\gamma} := \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} / V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)),$$

est voisin de zero (comme c'est le cas en ce qui concerne l'exemple 2.3.2).

Au demeurant, seule cette situation est véritablement nouvelle. En effet, la présence d'un grand rapport $\bar{\gamma}$ signifie que la variation totale de $h(\cdot)$ se trouve convenablement contrôlée par l'amplitude de la fonction $h(\cdot)$. Comme la norme L^∞ a d'emblée été fixée petite, cela veut dire qu'on travaille à variation totale petite. Or ce cas de figure relève d'une analyse déjà menée à son terme dans Glimm [**G**].

Cette dernière remarque indique qu'il est pertinent de classer les données de Cauchy selon la valeur du paramètre $\bar{\gamma}$ qui leur est associé. Tel est l'objectif du sous-chapitre qui suit.

2.4. Données de Cauchy γ -acceptables

On commence par introduire une définition :

DÉFINITION 2.4.1. — Soit γ un nombre réel positif et inférieur à 1. On dit que la fonction $h(x)$ est γ -acceptable lorsqu'il existe une longueur positive κ qui réalise l'identité :

$$(2.4.1) \quad \gamma \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) = \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Une fonction à variation locale uniformément répartie est γ -acceptable pour un ensemble de valeurs qui se trouvent réparties le long du domaine :

$$(2.4.2) \quad \mathcal{A}(h) := \{\gamma \in \mathbb{R}_*^+; \text{ la fonction } h(x) \text{ est } \gamma\text{-acceptable}\}.$$

Lorsque la fonction $h(x)$ est continue, l'application qui au nombre κ associe l'expression $\tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot))$ est croissante et continue. L'ensemble $\mathcal{A}(h)$ est alors un intervalle.

Lorsqu'en revanche, la fonction $h(x)$ présente des sauts, l'ensemble $\mathcal{A}(h)$ n'est pas forcément connexe. Soit $\gamma(h)$ sa borne inférieure :

$$(2.4.3) \quad \gamma(h) := \inf_{\gamma \in \mathcal{A}(h)} \gamma.$$

Pour les exemples 2.3.1 et 2.3.2, le paramètre $\gamma(h)$ prend respectivement les valeurs 1 puis 0. Pour une fonction $h(x)$ à support compact, on obtient :

$$(2.4.4) \quad \gamma(h) = \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} / V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) \leq \frac{1}{2}.$$

DÉFINITION 2.4.2. — On dit que la fonction $h(x)$ admet pour genre le couple (γ, δ) si elle est γ -acceptable et si son amplitude se trouve contrôlée conformément à :

$$(2.4.5) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \gamma\delta.$$

Interprétée avec la définition 2.4.1, la relation (2.4.5) signifie que toute fonction $h(x)$ qui admet pour genre le couple (γ, δ) vérifie (2.4.5) et, pour une certaine longueur κ , l'identité :

$$(2.4.6) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) = \delta.$$

On introduit la dilatation :

$$(2.4.7) \quad \Theta_\kappa : (t, x) \mapsto \Theta_\kappa(t, x) := (t/\kappa, x/\kappa).$$

La transformation Θ_κ n'affecte pas les différentes vitesses de propagation. Elle laisse les paramètres caractéristiques du système (\mathcal{H}) inchangés. En revanche, elle a pour effet de modifier la condition initiale $h(x)$ en :

$$(2.4.8) \quad h_\kappa(x) = h(\kappa x).$$

Dans les nouvelles coordonnées $\Theta_\kappa(t, x)$, la relation (2.4.1) devient :

$$(2.4.9) \quad \gamma \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h_\kappa(\cdot)) = \gamma \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) = \|h_\kappa(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

En d'autres termes, le changement de variables Θ_κ permet d'aligner le nombre κ sur la valeur 1.

Un énoncé concernant l'existence locale en temps d'une solution pour le problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé à une condition initiale du genre (γ, δ) n'a de sens que si les

échelles de temps et d'espace sont convenablement ajustées. Plusieurs nombres κ sont susceptibles de satisfaire la relation qui est écrite en (2.4.1). Clairement, un résultat d'existence locale, valable jusqu'à un instant T fixé, contient d'autant plus d'informations que les variables d'espace et de temps ont été préalablement contractées. Par conséquent, la sélection d'un nombre κ aussi grand que possible s'impose.

Lorsque la variation totale est infinie, la quantité :

$$(2.4.10) \quad \kappa_\gamma := \sup_{\{\kappa; \gamma \tilde{V}_{\text{ar}; \kappa}^{\text{loc}; u}(h(\cdot)) = \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}} \kappa > 0$$

est finie. La valeur κ_γ est alors affectée à κ puis la dilatation Θ_{κ_γ} est effectuée. Ce choix est cohérent avec la relation (2.4.1). En effet, comme l'application qui à κ associe $\tilde{V}_{\text{ar}; \kappa}^{\text{loc}; u}(h(\cdot))$ est continue à gauche, la borne supérieure κ_γ est effectivement atteinte.

CHAPITRE 3

TEMPS D'EXISTENCE

Notre objectif est l'étude du problème de Cauchy pour les systèmes de lois de conservation. Rappelons brièvement le cadre du travail tel qu'il a été fixé dans les chapitres précédents. Le flux $F(u)$ est caractérisé par le *rapport d'influence* \mathcal{R} qui lui est attaché. La condition initiale $h(x)$ est à *variation locale uniformément répartie* et admet pour *genre* le couple (γ, δ) . Les indices γ et δ sont choisis suffisamment petits. Les échelles de temps et d'espace sont ajustées en utilisant d'abord le procédé de normalisation décrit au paragraphe 2.4 et ensuite la relation (1.4.1). Notez que ce choix d'échelle dépend de la donnée de Cauchy qui est sélectionnée.

Ce chapitre est consacré à la mise en place d'un algorithme. Cet algorithme s'inspire fortement du schéma proposé dans Bressan [B1], à quelques modifications près qui servent à prendre en compte la présence de données grandes en variation. Il permet d'établir l'existence locale en temps d'une solution. La question est de savoir exactement jusqu'où cette solution peut être prolongée. Une durée de vie minimale $\hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta$ est déterminée. La dépendance de l'instant $\hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta$ en fonction du rapport d'influence \mathcal{R} et du paramètre δ est rendue explicite. Est aussi expliquée la façon dont évoluent sur l'intervalle de temps $[0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta]$ la variation locale uniforme de longueur 1 et l'amplitude des solutions approchées qui sont construites.

Le plan s'organise selon les grands axes suivants. La première partie est consacrée à l'énoncé du résultat. Le second paragraphe est destiné à la mise en place des notations et à quelques rappels sur le schéma de Bressan. Le troisième volet met à jour des estimations locales en temps. Ces estimations sont ensuite utilisées pour prouver la proposition du début.

3.1. Énoncé du résultat

La partie entière d'un nombre réel x est notée $\mathcal{E}[x]$:

$$(3.1.1) \quad \mathcal{E}[x] \leq x < \mathcal{E}[x] + 1, \quad \mathcal{E}[x] \in \mathbb{Z}.$$

Les lettres μ et a désignent respectivement un entier naturel non nul et un indice qui prend les valeurs 1 ou 2. On forme :

$$(3.1.2) \quad \mu_\delta := \mathcal{E} \left[\frac{2}{\delta} \right] + 1, \quad \delta_a^\mu := \delta + \frac{a}{\mu}, \quad (\mu, a) \in \mathbb{N}^* \times \{1, 2\}.$$

Le symbole $\hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta$ représente une durée de vie (qui dépend de quatre paramètres) :

$$(3.1.3) \quad \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta := \mathcal{E} \left[\frac{\hat{t}}{(\mathcal{R} + \hat{\delta})\delta} \right].$$

Le lemme 2.1.2 est appliqué avec pour I l'intervalle $] -\mu, \mu[$ et pour $h(\cdot)$ la restriction $h|_{]-\mu, \mu[}(\cdot)$. On obtient ainsi l'existence d'un élément $h^\mu(\cdot)$ qui vérifie :

$$(3.1.4) \quad h^\mu(\cdot) \in \mathcal{R}_{]-\mu, \mu[}^c(\mathbb{R}).$$

$$(3.1.5) \quad \|h^\mu(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{\gamma}{\mu} = \gamma \delta_1^\mu.$$

$$(3.1.6) \quad \int_{-\mu}^{\mu} |h^\mu(x) - h(x)| dx \leq \frac{1}{\mu}.$$

$$(3.1.7) \quad \bar{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc};u}(h^\mu(\cdot)) \leq \bar{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc};u}(h(\cdot)) + \frac{1}{\mu} = \delta_1^\mu.$$

La section à l'instant t du domaine d'expansion (de vitesse 1) issu de la base $] -\mu, \mu[$ est notée :

$$(3.1.8) \quad E_t^\mu :=] -\mu - t, \mu + t[, \quad \mu \in \mathbb{N}^*.$$

PROPOSITION 3.1.1. —

Il existe trois nombres strictement positifs $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ et \hat{t} avec les propriétés suivantes : le problème de Cauchy (\mathcal{H}) considéré pour une condition initiale $h(x)$ à variation locale uniformément répartie et dont le genre (γ, δ) satisfait la double contrainte :

$$(3.1.9) \quad 0 < \delta \leq \hat{\delta}, \quad 0 < \gamma \leq \hat{\gamma},$$

admet une solution faible $u^\infty(t, x)$, définie sur le domaine $[0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta] \times \mathbb{R}$. L'application $u^\infty(t, x)$ est obtenue comme la limite dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ d'une suite extraite d'une suite de solutions approchées $(u^\mu(t, x))_{\mu \in [\mu_\delta, \infty[}$. Chaque fonction $u^\mu(t, x)$ est astreinte à :

$$(3.1.10) \quad u^\mu(0, \cdot) \equiv h^\mu(\cdot), \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[,$$

$$(3.1.11) \quad u^\mu(t, \cdot) \in \mathcal{R}_{E_t^\mu}^c(\mathbb{R}), \quad (t, \mu) \in [0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta] \times [\mu_\delta, \infty[,$$

$$(3.1.12) \quad \|u^\mu(t^-, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 10\gamma\delta_2^\mu, \quad (t, \mu) \in [0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta] \times [\mu_\delta, \infty[,$$

$$(3.1.13) \quad \bar{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc};u}(u^\mu(t^-, \cdot)) \leq 5\delta_2^\mu, \quad (t, \mu) \in [0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta] \times [\mu_\delta, \infty[.$$

REMARQUE 3.1.1. — Par passage à la limite (μ tend vers l'infini) dans les inégalités (3.1.12) et (3.1.13), on obtient (voir aussi la remarque 2.1.6) :

$$(3.1.14) \quad \|u^\infty(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 10 \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad t \in [0, \hat{\delta} T_{\mathcal{R}}^\delta],$$

$$(3.1.15) \quad \tilde{V}_{\text{ar};1}^{\text{loc};u}(u^\infty(t, \cdot)) \leq 5 \tilde{V}_{\text{ar};1}^{\text{loc};u}(h(\cdot)), \quad t \in [0, \hat{\delta} T_{\mathcal{R}}^\delta].$$

◁

REMARQUE 3.1.2. — Insistons de nouveau sur la spécificité des données de Cauchy auxquelles s'applique la proposition 3.1.1. Leur variation calculée sur des intervalles de longueur 1 est grande en comparaison de l'amplitude (le rapport entre ces quantités étant mesuré par le petit nombre γ). Par ailleurs, aucune limite n'est imposée en ce qui concerne la variation totale de la condition initiale $h(x)$: La quantité $V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot))$ peut très bien ne pas être finie.

◁

REMARQUE 3.1.3. — Notez que les trois nombres $\hat{\delta}$, $\hat{\gamma}$ et \hat{l} s'expriment en fonction des paramètres caractéristiques du système (se reporter aux paragraphes 3.3.1 et 3.3.3). Sous les hypothèses de la proposition 3.1.1, les arguments développés dans Glimm [G] prévoient effectivement un temps de vie qui est de l'ordre de $1/\delta$ mais ne précisent pas pour autant la forme de l'équivalence. Ils ne donnent pas non plus accès à l'information qui est délivrée en (3.1.15). Ce gain d'information provient de ce que notre analyse prend en compte la position en lesquelles les ondes interagissent (voir [Ch3]).

◁

3.2. Préliminaires

Le schéma déterministe de Bressan (dans sa version [B1] qui utilise les résultats exposés dans [Sc2] et [W]) a pour cadre d'application les données qui sont petites en norme $BV(\mathbb{R})$. Son usage est aussi adapté à l'étude de données grandes en variation à condition toutefois d'apporter les quelques précisions nécessaires.

Suivant la démarche adoptée dans Bressan [B1], des solutions approchées notées $u_\nu^\mu(t, x)$ sont construites. Ces solutions sont indexées par deux paramètres entiers non nuls μ et ν qui sont destinés à tendre vers l'infini. Les fonctions $u^\mu(t, x)$ de la proposition 3.1.1 seront obtenues en posant :

$$(3.2.1) \quad u^\mu(\cdot, \cdot) \equiv u_{\nu_\mu}^\mu(\cdot, \cdot), \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[,$$

pour un entier ν_μ convenablement choisi.

La trace à l'instant initial de l'application $u_\nu^\mu(t, x)$ coïncide avec $h^\mu(x)$:

$$(3.2.2) \quad u_\nu^\mu(0, \cdot) \equiv h^\mu(\cdot), \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[.$$

En un saut (par exemple situé au point x_0) de la fonction $h^\mu(x)$, la résolution exacte du problème de Riemann telle qu'elle est proposée dans Lax [La] se trouve

modifiée. Chaque onde de détente $u^+ = T_{\varepsilon_i}^i(u^-)$ (où la force ε_i qui intervient est positive) est remplacée par ν discontinuités.

Plus précisément, on applique le procédé :

$$(3.2.3) \quad u_\nu^\mu(t, x) := \begin{cases} u^- & \text{si } x < x_0 + t\lambda_i(T_{\varepsilon_i/\nu}^i(u^-)), \\ T_{\nu'\varepsilon_i/\nu}^i(u^-) & \text{si } x \in J_{\nu'} \text{ et si } \nu' \in [1, \nu - 1], \\ u^+ & \text{si } x > x_0 + t\lambda_i(u^+), \end{cases}$$

avec :

$$J_{\nu'} :=]x_0 + t\lambda_i(T_{\nu'\varepsilon_i/\nu}^i(u^-)), x_0 + t\lambda_i(T_{(\nu'+1)\varepsilon_i/\nu}^i(u^-))].$$

La solution approchée $u_\nu^\mu(t, x)$ se trouve ainsi définie jusqu'au moment où se produit une à plusieurs interactions. En décalant légèrement la vitesse des discontinuités, il est possible de faire en sorte que pas plus de deux discontinuités se rencontrent à chaque instant.

La fonction $u_\nu^\mu(t, \cdot)$ est constante par morceaux. Les sauts correspondent à des ondes qui se propagent. À chacune de ces ondes est attribuée une lettre grecque, par exemple α . L'onde α est caractérisée à l'instant t^- par sa *position* $x_\alpha(t)$ et sa *force* $\alpha(t^-)$. Elle possède un *type* t_α . Il s'agit d'un entier qui indique la vitesse approximative à laquelle l'onde avance :

$$(3.2.4) \quad \frac{d}{dt}\{x_\alpha(t)\} \sim \lambda_{t_\alpha}, \quad 1 \leq t_\alpha \leq N.$$

Les ondes sont classées selon leur *nature* Na_α . Si la force $\alpha(t^-)$ est négative, on pose $\text{Na}_\alpha(t^-) = c$ et on dit que l'onde α est un choc (ou encore une discontinuité admissible). Dans le cas contraire, la force $\alpha(t^-)$ est positive ou nulle. On pose alors $\text{Na}_\alpha(t^-) = r$ et on dit que l'onde α est une *raréfaction approchée*. Cette terminologie est choisie à propos : *raréfaction* pour tenir compte du signe + que possède la force de l'onde α , *approchée* parce que la discontinuité α n'est pas solution exacte du système (\mathcal{H}) .

Lorsque l'onde α rencontre une onde β , elle est prolongée dans le futur suivant l'unique onde γ de type t_γ égal à t_α issue de l'interaction. La discontinuité α naît ainsi à un instant noté τ_α^{ini} , peut éventuellement changer de nature mais ne meurt jamais.

On dit que l'onde γ est de *première catégorie* à l'instant t^- (ce qui est noté en abrégé : $\text{Ca}_\gamma(t^-) = 1$) si l'onde γ provient d'une onde α qui partage le type t_γ , qui est créée à l'instant initial et qui ne change pas de nature durant l'intervalle de temps $[0, t]$.

En d'autres termes :

$$(3.2.5) \quad \text{Ca}_\gamma(t^-) = 1 \iff \begin{cases} \exists \alpha, \tau_\alpha^{\text{ini}} = 0, x_\alpha(t) = x_\gamma(t). \\ \text{Na}_\alpha(s^-) = \text{Na}_\gamma(t^-), \forall s \in]0, t]. \end{cases}$$

Dans le cas contraire, on dit que l'onde γ est de deuxième catégorie à l'instant t^- . On écrit $\text{Ca}_\gamma(t^-) = 2$. Il s'agit de la situation qui correspond à :

$$(3.2.6) \quad \inf_{\{\alpha; x_\alpha(t)=x_\gamma(t) \text{ et } \text{Na}_\alpha(s^-)=\text{Na}_\gamma(t^-), \forall s \in]r_\alpha^{\text{ini}}, t]\}} \tau_\alpha^{\text{ini}} > 0.$$

À l'onde α est aussi attribué un *ordre* repéré par le symbole Or_α . Aux ondes de première catégorie est attribué l'ordre 1. Plus généralement, l'ordre compte le nombre de créations d'ondes qui ont vu le jour avant de donner naissance à l'onde α . Il s'agit d'un entier l compris entre 1 et ν .

Lorsque deux ondes α et β avec « $\max(\text{Or}_\alpha, \text{Or}_\beta) < \nu$ » interagissent à l'instant t , la solution est prolongée par résolution exacte du problème de Riemann puis par discrétisation (selon la règle indiquée en (3.2.3)) des ondes de détentes qui sont créées.

Lorsque deux ondes α et β avec « $\max(\text{Or}_\alpha, \text{Or}_\beta) = \nu$ » se croisent à l'instant t , elles se traversent sans que soit changée leur force et sans non plus que soient créées de nouvelles ondes. Cette procédure (communément appelée : *wave front tracking*) demande de redéfinir la fonction $u_\nu^\mu(t, \cdot)$ sur le demi-axe $[x_\alpha(t), \infty[$ tout entier. Elle empêche le nombre de discontinuités d'exploser en temps fini. Par contre, elle provoque l'apparition d'ondes non-physiques qui voyagent à vitesse infinie.

Sur chaque intervalle ouvert $]n, n+1[$ avec n entier, les ordres des ondes sont déterminés suivant les règles de marquage expliquées dans Bressan [B1]. À chaque instant n^+ , les ordres de toutes les ondes présentes sont systématiquement initialisés à 1. Malgré cette modification, notez qu'à chaque instant le nombre total de discontinuités reste fini.

Soient α et β deux ondes contenues à l'instant t dans l'intervalle I :

$$(3.2.7) \quad i_1 < x_\alpha(t) < x_\beta(t) < i_2.$$

On dit que les ondes α et β *s'approchent dans l'intervalle I* (ce qui est noté en abrégé $\alpha \mathcal{A}_I^t \beta$) si l'une ou l'autre des deux conditions (3.2.8) ou (3.2.9) écrites ci-dessous se trouve vérifiée :

$$(3.2.8) \quad t_\alpha > t_\beta.$$

$$(3.2.9) \quad t_\alpha = t_\beta \text{ et } (\text{Na}_\alpha, \text{Na}_\beta) \neq (r, r).$$

Plus généralement, on dit qu'une onde α dont le type t_α est différent de l'entier k est liée à la position x par la relation $\alpha^k \mathcal{A}_I^t x$ si elle approche une onde fictive de type k placée en x . En d'autres termes l'une ou l'autre des deux conditions (3.2.10) ou (3.2.11) explicitées ci-dessous est satisfaite :

$$(3.2.10) \quad i_1 < x_\alpha(t) < x < i_2 \text{ et } t_\alpha > k.$$

$$(3.2.11) \quad i_1 < x < x_\alpha(t) < i_2 \text{ et } t_\alpha < k.$$

À tout intervalle I situé au temps t et à tout instant n inférieur à t , est associé un ensemble $\mathcal{D}_n^t(I; \nu)$. La région $\mathcal{D}_n^t(I; \nu)$ est appelée *domaine de dépendance totale de*

sommet I , de base n , relatif à la vitesse maximale v :

$$(3.2.12) \quad \mathcal{D}_n^t(I; v) := \{(s, x); n \leq s \leq t, i_1 - v(t-s) < x < i_2 + v(t-s)\}.$$

La section à un instant s compris entre 0 et t du domaine $\mathcal{D}_0^t(I; v)$ est notée $I_s^t(v)$:

$$(3.2.13) \quad I_s^t(v) :=]i_1 - v(t-s), i_2 + v(t-s)[.$$

La définition (3.2.12) manque de précision car elle ne perçoit pas la présence des différents modes de propagation. L'équation de Riccati décrite dans Fritz John [J, (28) p. 283] indique en effet que les composantes convenablement polarisées d'une solution régulière exacte du système (\mathcal{H}) évoluent dans des directions particulières. Elles se propagent à des vitesses dites caractéristiques.

Ce principe s'interprète au niveau de la solution approchée $u_\nu^\mu(t, x)$. En fait, chaque onde α est liée à la valeur propre λ_{t_α} par la relation (3.2.4). Or le symbole \sim introduit en (3.2.4) signifie précisément que l'onde α se propage à la vitesse λ_{t_α} avec une marge d'erreur qui se trouve contrôlée par une constante fois l'amplitude des états mis en jeu.

La notion de *domaine de dépendance* $\mathcal{D}_0^t(I; k, a)$ relatif au type k et au défaut sur les vitesses a est conçue de manière à regrouper l'ensemble des positions (s, y) qui satisfont le critère suivant : Une onde α de type k qui est située au point (s, y) et qui se déplace entre les instants s et t à une vitesse comprise entre $\lambda_k - a$ et $\lambda_k + a$ est susceptible de traverser à l'instant t l'intervalle I . La région $\mathcal{D}_0^t(I; k, a)$ est définie comme étant :

$$(3.2.14) \quad \mathcal{D}_0^t(I; k, a) := \{(s, x); 0 \leq s \leq t, i_1 - (\lambda_k + a)(t-s) < x < i_2 - (\lambda_k - a)(t-s)\}.$$

La section à un instant s compris entre 0 et t du domaine $\mathcal{D}_0^t(I; k, a)$ est notée $I_s^t(k, a)$:

$$(3.2.15) \quad I_s^t(k, a) :=]i_1 - (\lambda_k + a)(t-s), i_2 - (\lambda_k - a)(t-s)[.$$

La solution approchée $u_\nu^\mu(t, x)$ est obtenue en juxtaposant côte à côte une succession d'ondes de type différent. Les ondes de type k contenues à l'instant t dans un intervalle I sont regroupées à part. La fonctionnelle ${}^I_k V_\nu^\mu(t)$ compte la somme des valeurs absolues des forces qui correspondent aux discontinuités ainsi isolées :

$$(3.2.16) \quad {}^I_k V_\nu^\mu(t) := \sum_{\{\alpha; i_1 < x_\alpha(t) < i_2, t_\alpha = k\}} |\alpha(t)|.$$

En comparant les deux définitions (2.1.31) et (3.2.16), on voit apparaître la relation :

$$(3.2.17) \quad \bar{V}_{\text{ar}; I}^{\text{loc}}(u_\nu^\mu(t, \cdot)) = \max_{1 \leq k \leq N} {}^I_k V_\nu^\mu(t).$$

3.3. Preuve de la proposition 3.1.1

3.3.1. Un raisonnement par l'absurde. — D'après la définition (1.2.3) et la condition (1.2.2), on a :

$$(3.3.1.1) \quad T_\varepsilon(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i r^i(\bar{u}) + \mathcal{O}(|\varepsilon|^2),$$

soit encore, en se souvenant de la normalisation (0.6) :

$$(3.3.1.2) \quad T_\varepsilon(0) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_N) + \mathcal{O}(|\varepsilon|^2).$$

En tenant compte de la relation (1.2.7) et en reportant l'identité (3.3.1.2) en (1.2.5), on voit apparaître :

$$(3.3.1.3) \quad u = (w_1(u), \dots, w_i(u), \dots, w_N(u)) + \mathcal{O}(\|u\|_\infty^2).$$

Par conséquent, le choix d'un contrôle $\hat{\delta}$ petit conduit à :

$$(3.3.1.4) \quad \frac{1}{2} \|u\|_\infty \leq \|u\|_{R_i} \leq 2 \|u\|_\infty, \quad \forall u \in B(\bar{u}, \hat{\delta}).$$

En accord avec (1.4.1) et (1.4.3), le contrôle $\hat{\delta}$ est choisi suffisamment proche de zéro pour que soient vérifiées les quatre contraintes suivantes :

$$(3.3.1.5) \quad \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{u \in B(\bar{u}, \hat{\delta})} |\lambda_k(u)| \leq 1.$$

$$(3.3.1.6) \quad A_{\hat{\delta}} \hat{\delta} \leq \zeta \leq 1, \quad \hat{\delta} \leq \min(\hat{\delta}; D_3 \eta_1).$$

$$(3.3.1.7) \quad 13000N^2(1 + D_4 + D_5 + D_6)(\mathcal{R} + \hat{\delta})\hat{\delta} \leq 1.$$

$$(3.3.1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Le problème de Riemann associé à deux états} \\ \text{contenus dans la boule } B(\bar{u}, \hat{\delta}) \text{ admet une solution} \\ \text{pour laquelle les estimations mentionnées} \\ \text{au chapitre I sont toutes satisfaites.} \end{array} \right.$$

Le paramètre $\hat{\gamma}$ est déterminé par la relation :

$$(3.3.1.9) \quad \hat{\gamma} := \frac{1}{80N(1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_2D_6 + 3A_{\hat{\delta}})}.$$

L'entier μ sera toujours implicitement choisi de manière à ce que :

$$(3.3.1.10) \quad \mu_\delta \leq \mu \implies \delta_2^\mu \leq 2\delta \leq 2\hat{\delta}, \quad \forall \delta \in [0, \hat{\delta}].$$

Notez qu'avec ces conventions, l'inégalité (3.1.12) implique :

$$(3.3.1.11) \quad \|u^\mu(t^-, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 10\hat{\gamma}\hat{\delta}_2^\mu \leq 20\hat{\gamma}\hat{\delta} \leq \hat{\delta}, \\ \forall (t, \mu) \in [0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta] \times [\mu_\delta, \infty[, \quad \forall \delta \in [0, \hat{\delta}].$$

La preuve de la proposition 3.1.1 repose sur une étude fine du temps d'existence correspondant à chaque solution approchée $u_\nu^\mu(t, x)$. Elle exploite le principe suivant :

Tant que la solution approchée $u_\nu^\mu(t, x)$ se trouve contrôlée conformément à l'inégalité (3.3.1.12), il est possible d'après (3.3.1.8) d'itérer l'algorithme de Bressan [B1].

Le nombre $T_{\mu, \nu}^\delta$ est défini comme étant le plus grand instant jusqu'auquel les estimations (3.1.12) et (3.1.13) sont toutes deux vérifiées. En particulier :

$$(3.3.1.12) \quad \|u_\nu^\mu(t^-, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 10\gamma\delta_2^\mu, \quad \forall t \in [0, T_{\mu, \nu}^\delta].$$

$$(3.3.1.13) \quad \bar{V}_{ar:1}^{loc:u}(u_\nu^\mu(t^-, \cdot)) \leq 5\delta_2^\mu, \quad \forall t \in [0, T_{\mu, \nu}^\delta].$$

Si l'instant $T_{\mu, \nu}^\delta$ dépasse $\hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta$ pour un certain indice ν_μ , on pose :

$$(3.3.1.14) \quad u^\mu(\cdot, \cdot) \equiv u_{\nu_\mu}^\mu(\cdot, \cdot),$$

et le contenu de la proposition 3.1.1 est établi pour cet indice μ particulier.

Retenir la situation inverse consiste à supposer :

$$(3.3.1.15) \quad T_{\mu, \nu}^\delta < \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta, \quad \forall \nu \in [1, \infty[.$$

Notre objectif est de prouver que l'hypothèse (3.3.1.15) associée à des estimations plus strictes que (3.3.1.12) et (3.3.1.13) conduit à une absurdité :

LEMME 3.3.1.1. — *Les deux inégalités :*

$$(3.3.1.16) \quad \|u_\nu^\mu(T_{\mu, \nu}^{\delta-}, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \leq 4\gamma\delta_2^\mu, \quad \forall \nu \in [\nu_\mu, \infty[,$$

$$(3.3.1.17) \quad \bar{V}_{ar:1}^{loc:u}(u_\nu^\mu(T_{\mu, \nu}^{\delta-}, \cdot)) \leq 4\delta_2^\mu, \quad \forall \nu \in [\nu_\mu, \infty[,$$

sont en contradiction avec la définition adoptée pour $T_{\mu, \nu}^\delta$.

Preuve du lemme 3.3.1.1. — On suppose que les deux inégalités (3.3.1.16) et (3.3.1.17) sont vérifiées. L'instant $T_{\mu, \nu}^\delta$ est le lieu d'au plus une interaction, disons entre deux ondes notées α et β . Dans ce cas, les conditions (3.3.1.8) et (3.3.1.12) permettent de résoudre le problème de Riemann correspondant et ainsi de prolonger la solution approchée $u_\nu^\mu(t, x)$ jusqu'à l'instant T_i où se produit la première interaction postérieure à $T_{\mu, \nu}^\delta$. Les différentes ondes créées sont repérées par les lettres $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$. D'après (1.3.15) et (3.3.1.12), on a :

$$(3.3.1.18) \quad \left| \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i| - |\alpha| - |\beta| \right| \leq (\mathcal{R} + 10ND_5\gamma\delta_2^\mu) |\alpha| |\beta|,$$

soit encore, en tenant compte de (3.3.1.9) et (3.3.1.10) :

$$(3.3.1.19) \quad \left| \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i| - |\alpha| - |\beta| \right| \leq (\mathcal{R} + \hat{\delta}) |\alpha| |\beta|.$$

Avec (1.2.11), (1.3.16), (3.3.1.4) et (3.3.1.16), il vient :

$$(3.3.1.20) \quad \begin{aligned} \|u_\nu^\mu(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq 2 \|u_\nu^\mu(t, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \\ &\leq 8\gamma\delta_2^\mu + 8ND_6 |\varepsilon| \gamma\delta_2^\mu (\mathcal{R} + 4D_2D_6\gamma\delta_2^\mu), \end{aligned}$$

avec $t \in]T_{\mu,\nu}^\delta, T_i[$. Mais d'après (3.3.1.13), (3.3.1.7), (3.3.1.9) et (3.3.1.10), on a :

$$(3.3.1.21) \quad 8ND_6 |\varepsilon| (\mathcal{R} + 4D_2D_6\gamma\delta_2^\mu)\gamma\delta_2^\mu \leq 2\gamma\delta_2^\mu.$$

L'inégalité (3.3.1.21) reportée en (3.3.1.20) conduit à :

$$(3.3.1.22) \quad \|u_\nu^\mu(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 10\gamma\delta_2^\mu, \quad t \in]T_{\mu,\nu}^\delta, T_i[.$$

Considérons à présent les modifications subies par la variation locale uniforme de longueur 1. D'après (1.3.15), (3.3.1.7), (3.3.1.10), (3.3.1.16), (3.3.1.17), l'interaction provoque une augmentation d'au plus :

$$(3.3.1.23) \quad N(\mathcal{R} + 4D_5\gamma\delta_2^\mu)(4\delta_2^\mu)^2 \leq \frac{\delta_2^\mu}{2}.$$

À ceci, il faut ajouter l'apport que fournit (éventuellement) l'entrée simultanée de deux discontinuités à l'intérieur d'un des intervalles I_p^1 . D'après (1.3.6), (3.3.1.9) et (3.3.1.22), cette contribution ne dépasse pas :

$$(3.3.1.24) \quad 40D_4\gamma\delta_2^\mu \leq \frac{\delta_2^\mu}{2}.$$

Comme toutes les discontinuités se propagent à vitesse finie, on dispose d'un laps de temps avant que de nouvelles discontinuités pénètrent les intervalles I_p^1 . En ajoutant les inégalités (3.3.1.17), (3.3.1.23) et (3.3.1.24), on constate qu'il existe un instant T_f postérieur à $T_{\mu,\nu}^\delta$ (et peut être antérieur à T_i) tel que l'on ait :

$$(3.3.1.25) \quad \bar{V}_{\text{ar};1}^{\text{loc};u}(u_\nu^\mu(t^-, \cdot)) \leq 5\delta_2^\mu, \quad t \in]T_{\mu,\nu}^\delta, T_f[.$$

Au regard de (3.3.1.22), (3.3.1.25), de la définition adoptée pour $T_{\mu,\nu}^\delta$ et de la construction précédente, on doit à la fois avoir :

$$(3.3.1.26) \quad T_{\mu,\nu}^\delta > \min(T_i, T_f) > T_{\mu,\nu}^\delta,$$

ce qui est clairement contradictoire. \square

3.3.2. Estimations locales. — On pose :

$$(3.3.2.1) \quad \diamond_\delta := 20\hat{\gamma}A_\delta\delta.$$

Pour démontrer la proposition 3.1.1, il suffit d'après le lemme 3.3.1 d'établir sous la condition (3.3.1.15) la validité des deux inégalités (3.3.1.16) et (3.3.1.17). La première étape consiste à obtenir sur de petites durées un contrôle précis des différentes expressions mises en jeu.

LEMME 3.3.2.1. —

Soit n un entier inférieur ou égal au temps d'arrêt $T_{\mu,\nu}^\delta$. À tout instant t avec :

$$(3.3.2.2) \quad n \leq t < T_{\mu,\nu}^{n,\delta} := \min(n+1; T_{\mu,\nu}^\delta) < \frac{\hat{\delta}}{i}T_{\mathcal{R}}^\delta,$$

l'amplitude et la variation locale de la solution approchée sont contrôlées conformément à :

$$(3.3.2.3) \quad \|u_\nu^\mu(t^-, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \leq (1 + 100ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\delta_2^\mu) \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} + \frac{C_n^1}{2\nu}.$$

$$(3.3.2.4) \quad \begin{aligned} I_k V_\nu^\mu(t^-) &\leq I_n^{t(k, \diamond \delta)} V_\nu^\mu(n^-) + 3200N^2(\mathcal{R} + \hat{\delta})(\delta_2^\mu)^2, \\ |I| &< 2, \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[, \quad \nu \in [1, \infty[, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Pour toute fonction test $\varphi(t, x)$ à support compact en x et de classe C^1 sur la bande $[n, T_{\mu, \nu}^{n, \delta}] \times \mathbb{R}$:

$$(3.3.2.5) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} \{ \varphi(n, x) u_\nu^\mu(n^+, x) - \varphi(T_{\mu, \nu}^{n, \delta}, x) u_\nu^\mu(T_{\mu, \nu}^{n, \delta-}, x) \} dx \right. \\ \left. + \int_n^{T_{\mu, \nu}^{n, \delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \partial_t \varphi(t, x) u_\nu^\mu(t, x) + \partial_x \varphi(t, x) F(u_\nu^\mu(t, x)) \} dx dt \right| \\ \leq \frac{C_n^2}{\nu} \|\varphi(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty([n, T_{\mu, \nu}^{n, \delta}] \times \mathbb{R})}.$$

REMARQUE 3.3.1. — Les deux constantes C_n^1 et C_n^2 sont indépendantes de l'indice ν . En revanche elles sont liées aux autres paramètres $\mu, \delta, \mathcal{R} \dots$ \triangleleft

Preuve du lemme 3.3.2.1. — La démonstration repose essentiellement sur une adaptation aux données grandes en variation des arguments qui sont présentés dans Bresan [B1]. Soit t un instant compris entre n et $T_{\mu, \nu}^{n, \delta}$. Soit I un intervalle situé à cet instant t et dont la longueur se trouve encadrée selon :

$$(3.3.2.6) \quad 1 \leq |I| < 2.$$

La condition (3.3.1.5) conjuguée avec (3.3.1.11) a pour effet de limiter la vitesse maximale de propagation :

$$(3.3.2.7) \quad \sup_{(t, x) \in [0, T_{\mu, \nu}^\delta] \times \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i(u_\nu^\mu(t, x))| \leq 1,$$

ce qui d'après (3.1.4) et (3.2.2) justifie l'information délivrée en (3.1.11).

Les encadrements (3.3.2.2) et (3.3.2.6) utilisés avec la majoration (3.3.2.7) montrent que la longueur de la section à un instant r compris entre n et t de la région $\mathcal{D}_n^t(I; 1)$ ne dépasse pas :

$$(3.3.2.8) \quad |I_r^t(1)| < 4, \quad \forall r \in [n, t].$$

Tout segment dont la longueur est inférieure à 4 est contenu dans la réunion d'au plus huit intervalles I_p^1 successifs bien choisis. Par conséquent, l'inégalité (3.3.2.8) associée à (3.3.1.13) fournit :

$$(3.3.2.9) \quad \bar{V}_{\text{ar}; I_r^t(1)}^{\text{loc}}(u_\nu^\mu(r^-, \cdot)) \leq 40\delta_2^\mu, \quad r \in [n, t].$$

Les définitions (1.4.4) et (3.3.2.1) sont regardées sous couvert du contrôle à priori donné en (3.3.1.12). En tenant compte des relations (3.3.1.6), (3.3.1.9) et (3.3.1.10), cette manipulation conduit à la majoration :

$$(3.3.2.10) \quad \sup_{(t,x) \in [0, T_{\mu, \nu}^{\delta}] \times \mathbb{R}} \max_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k(u_{\nu}^{\mu}(t, x)) - \lambda_k| \leq \diamond_{\delta} \leq \frac{\zeta}{4}.$$

Un *potentiel quadratique local* ${}^I Q_{\nu, n}^{\mu, t}(\cdot)$ est introduit. Sa construction est calquée sur celle du potentiel quadratique classique de Glimm [G]. Il s'agit en fait de sa version *locale* car seules sont comptées les ondes susceptibles d'interagir entre les instants n et t à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}_n^t(I; 1)$:

$$(3.3.2.11) \quad [n, t] \ni r \mapsto {}^I Q_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{I_r^t(1)}^r} |\alpha(r^-)| |\beta(r^-)|.$$

Avec (3.3.2.9), il vient :

$$(3.3.2.12) \quad {}^I Q_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-) \leq (40N\delta_2^{\mu})^2, \quad r \in [n, t].$$

Le domaine $\mathcal{D}_n^t(I; 1)$ est le lieu de plusieurs interactions d'ondes. Ces interactions se produisent à des instants r_j . Ces instants sont rangés par ordre croissant :

$$(3.3.2.13) \quad r_0 := n \leq r_1 < \dots < r_j < \dots < r_{N_n^t} \leq r_{N_n^t+1} := t.$$

À chaque instant r_j se rencontrent exactement deux ondes α et β . Avant l'instant r_j , l'onde α approche l'onde β . Après l'instant r_j , l'onde α n'approche plus l'onde β . Il s'ensuit que le produit $|\alpha| |\beta|$ n'est plus compté au niveau du potentiel quadratique. Cette diminution de ${}^I Q_{\nu, n}^{\mu, t}(r)$ est contrebalancée par une éventuelle augmentation, liée à la création d'ondes. Cet accroissement est contrôlé tout d'abord en invoquant (3.3.1.19) et ensuite (3.3.2.9) et (3.3.1.7) :

$$(3.3.2.14) \quad \Delta^I Q_{\nu, n}^{\mu, t}(r_j) \leq \left[-1 + N(\mathcal{R} + \hat{\delta}) \bar{V}_{\text{ar}; I_{r_j}^t(1)}^{\text{loc}}(u_{\nu}^{\mu}(r_j^-, \cdot)) \right] |\alpha| |\beta| \\ \leq -\frac{1}{2} |\alpha| |\beta|.$$

i) *Contrôle de la variation locale* :

Le potentiel ${}^I Q_{\nu, n}^{\mu, t}(\cdot)$ est utilisé pour former une première fonctionnelle :

$$(3.3.2.15) \quad {}^I_k \mathcal{F}_n^t(r^-) := {}^I_k^{t, (k, \diamond_{\delta})} V_{\nu}^{\mu}(r^-) + 2(\mathcal{R} + \hat{\delta}) {}^I Q_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-).$$

À l'instant de départ n , on obtient avec (3.3.2.12) :

$$(3.3.2.16) \quad {}^I_k \mathcal{F}_n^t(n^-) := {}^I_k^{t, (k, \diamond_{\delta})} V_{\nu}^{\mu}(n^-) + 3200N^2(\mathcal{R} + \hat{\delta})(\delta_2^{\mu})^2.$$

À chaque instant r_j , l'expression ${}^I_k \mathcal{F}_n^t(\cdot)$ se trouve modifiée. En reportant (3.3.1.19) et (3.3.2.14) en (3.3.2.15), on constate que le saut en question est négatif :

$$(3.3.2.17) \quad \Delta^I_k \mathcal{F}_n^t(r_j) \leq (\mathcal{R} + \hat{\delta})(1 - 1) |\alpha| |\beta| \leq 0.$$

La vitesse de propagation $\lambda_k(u_{\nu}^{\mu}(t, x))$ est voisine de λ_k à un défaut près qui se trouve contrôlé conformément à (3.3.2.10). L'inégalité (3.3.2.10) signifie qu'aucune

onde de type k située à l'extérieur du domaine de dépendance $\mathcal{D}_0^t(I, k, \diamond_\delta)$ ne peut pénétrer à l'intérieur de cette région (par contre, des ondes de type k placées dans $\mathcal{D}_0^t(I, k, \diamond_\delta)$ peuvent en sortir).

Il s'ensuit que l'application qui à r associe $I_k \mathcal{F}_n^t(r)$ est décroissante sur chaque intervalle ouvert $]r_j, r_{j+1}[$. Comme d'après (3.3.2.17), elle subit une baisse à chaque instant r_j , elle est en fait décroissante entre les instants n et t ce qui donne :

$$(3.3.2.18) \quad I_k^{t(k, \diamond_\delta)} V_\nu^\mu(t^-) = I_k V_\nu^\mu(t^-) \leq I_k \mathcal{F}_n^t(t^-) \leq I_k \mathcal{F}_n^t(n^-).$$

L'inégalité (3.3.2.4) du lemme 3.3.2 s'obtient en mettant bout à bout les identités écrites en (3.3.2.16) et (3.3.2.18).

ii) *Contrôle de l'amplitude :*

On introduit :

$$(3.3.2.19) \quad I_k \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-, x) := \sum_{\{\alpha; t_\alpha \neq k, \alpha^k A_{I_r^t(1)}^r x\}} |\alpha(r^-)|.$$

$$(3.3.1.20) \quad I_k \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-, x) := w_k(u_\nu^\mu(r^-, x)) \\ + 2D_6(\mathcal{R} + \hat{\delta}) \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} (I_k \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-, x) + 2(\mathcal{R} + \hat{\delta})^I \mathcal{Q}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-)).$$

$$(3.3.2.21) \quad I \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-) := \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{x \in I_r^t(1)} I_k \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-, x).$$

De toute évidence :

$$(3.3.2.22) \quad \|u_\nu^\mu(r^-, \cdot)\|_{Ri(I_r^t(1))} \leq I \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-), \quad \forall r \in [n, t].$$

À l'instant de départ n , on obtient avec (3.3.2.9) et (3.3.2.12) :

$$(3.3.2.23) \quad I \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(n^-) \\ \leq \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \cdot \left[1 + 2D_6(\mathcal{R} + \hat{\delta}) (40N\delta_2^\mu + 2(\mathcal{R} + \hat{\delta})(40N\delta_2^\mu)^2) \right].$$

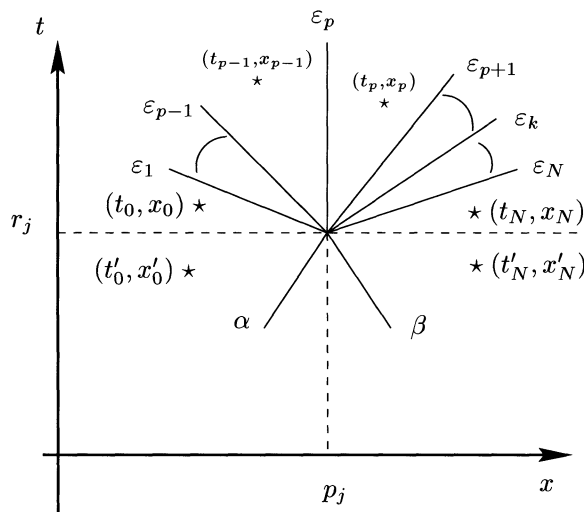
Soit encore d'après (3.3.1.7) :

$$(3.3.2.24) \quad I \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(n^-) \leq (1 + 100ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\delta_2^\mu) \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \\ \leq 2 \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})}.$$

Étudions le comportement de la fonctionnelle $I \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(r)$ pour r variant entre n et t . Le raisonnement est le suivant : la décroissance de l'application qui à r associe $I \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(r)$ est supposée connue jusqu'à l'instant r_j . En tenant compte de (3.3.2.22) et (3.3.2.24), cette information conduit à :

$$(3.3.2.25) \quad \|u_\nu^\mu(r_j^-, \cdot)\|_{Ri(I_{r_j}^t(1))} \leq 2 \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})}.$$

À l'instant r_j , l'application $I \mathcal{G}_{\nu, n}^{\mu, t}(\cdot)$ se trouve modifiée. Pour comprendre la nature des changements en question, il faut étudier comment varie l'expression $I_k \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}$ au



Les ondes créées sont notées ε_k pour $1 \leq k \leq N$.

Un point (t_0, x_0) avec $t_0 > r_j$ est positionné à gauche de l'onde ε_1 .

Un point (t'_0, x'_0) avec $t_0 < r_j$ est positionné à gauche de l'onde α .

Un point (t_N, x_N) avec $t_N > r_j$ est positionné à droite de l'onde ε_N .

Un point (t'_N, x'_N) avec $t'_N < r_j$ est positionné à droite de l'onde ε_N .

Un point (t_p, x_p) est placé entre les discontinuités ε_p et ε_{p+1} .

Figure 1. Interaction à l'instant r_j et à la position p_j des ondes α et β

voisinage du point (p_j, r_j) . La valeur de la fonctionnelle $I_k^t \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}$ calculée au point (t_p, x_p) est comparée à $I_k^t \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}(t'_0, x'_0)$ si $p < k$ et à $I_k^t \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}(t'_N, x'_N)$ dans le cas contraire (voir le dessin). Les explications sont données en ce qui concerne le premier cas de figure (à savoir si $p < k$). L'autre situation ($p \geq k$) se traite à l'aide d'arguments analogues.

Sur la figure placée page suivante, on constate que sont vérifiées les deux relations :

$$(3.3.2.26) \quad \varepsilon_p^k \mathcal{A}_{I_{t_p}^t(1)}^{t_p} x_p, \quad 1 \leq p \leq k-1.$$

$$(3.3.2.27) \quad \varepsilon_p^k \mathcal{A}_{I_{t_{p-1}}^t(1)}^{t_{p-1}} x_{p-1}, \quad 1 \leq p \leq k-1.$$

Par conséquent, on a :

$$(3.3.2.28) \quad I_k^t \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}(t_p, x_p) - I_k^t \mathcal{Z}_{\nu, n}^{\mu, t}(t_{p-1}, x_{p-1}) = -|\varepsilon_p|, \quad 1 \leq p \leq k-1.$$

En utilisant (1.3.16) et (3.3.2.25), il vient :

$$(3.3.2.29) \quad |w_k(u_\nu^\mu(t_{p-1}, x_{p-1}))| \leq 2D_6 \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{\text{Ri}(\mathbb{R})}.$$

L'inégalité (1.2.11) est appliquée avec pour estimation L^∞ le contrôle obtenu ci-dessus. En tenant compte de (3.3.1.9), il vient :

$$(3.3.2.30) \quad \begin{aligned} |w_k(u_\nu^\mu(t_p, x_p)) - w_k(u_\nu^\mu(t_{p-1}, x_{p-1}))| \\ \leq 2D_6(\mathcal{R} + 80D_2D_6\hat{\gamma}\hat{\delta}) \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{\text{Ri}(\mathbb{R})} |\varepsilon_p| \\ \leq 2D_6(\mathcal{R} + \hat{\delta}) \|u_\nu^\mu(n^-, \cdot)\|_{\text{Ri}(\mathbb{R})} |\varepsilon_p|. \end{aligned}$$

Les relations (3.3.2.28) et (3.3.2.30) sont reportées en (3.3.2.20). Cette opération se traduit par :

$$(3.3.2.31) \quad {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_p, x_p) - {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_{p-1}, x_{p-1}) \leq 0,$$

d'où l'on déduit par simple récurrence finie :

$$(3.3.2.32) \quad {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_p, x_p) \leq {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_0, x_0).$$

Ensuite, l'expression ${}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_0, x_0)$ est comparée à ${}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t'_0, x'_0)$. Le passage du point (t_0, x_0) à la position (t'_0, x'_0) n'apporte aucune modification en ce qui concerne l'invariant de Riemann approché w_k . Par ailleurs, d'après (3.3.1.19) et (3.3.2.14), on a :

$$(3.3.2.33) \quad \begin{aligned} {}^I\mathcal{Z}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_0, x_0) + 2(\mathcal{R} + \hat{\delta}) {}^I\mathcal{Q}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_0) \\ - {}^I\mathcal{Z}_{\nu,n}^{\mu,t}(t'_0, x'_0) - 2(\mathcal{R} + \hat{\delta}) {}^I\mathcal{Q}_{\nu,n}^{\mu,t}(t'_0) \leq 0. \end{aligned}$$

En résumé :

$$(3.3.2.34) \quad {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_p, x_p) \leq {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t_0, x_0) \leq {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t'_0, x'_0),$$

ce qui garantit :

$$(3.3.2.35) \quad \Delta {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(r_j) \leq 0.$$

Comme d'après l'inégalité (3.3.2.7), aucune onde ne peut passer de l'extérieur à l'intérieur de la région $\mathcal{D}_0^t(I; 1)$, la décroissance de la fonctionnelle ${}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(\cdot)$ se prolonge jusqu'à l'instant r_{j+1}^- . Elle s'enclenche ensuite par itération du raisonnement précédent à tous les crans suivants, jusqu'au temps d'arrêt t donnant avec (3.3.2.22) :

$$(3.3.2.36) \quad \|u_\nu^\mu(t^-, \cdot)\|_{\text{Ri}(I)} \leq {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(t^-) \leq {}^I\mathcal{G}_{\nu,n}^{\mu,t}(I)(n^-).$$

En reportant (3.3.2.24) en (3.3.2.36), puis en passant au « sup » sur tous les intervalles I , on voit apparaître le premier terme placé à droite de l'inégalité en (3.3.2.3). L'autre terme provient des bavures provoquées par la mise en œuvre, à chaque fois que « $\max(\text{Or}_\alpha, \text{Or}_\beta) = \nu$ », d'un solveur de Riemann approché. Le défaut en question est analysé à part :

iii) *Erreur d'amplitude liée au schéma :*

Pour contrôler la contribution apportée par les ondes qui se propagent vers la droite à vitesse infinie, il faut détailler les estimations en variation, en distinguant selon l'ordre $l \in \{1, \dots, \nu\}$ des ondes mises en jeu. Les définitions (3.2.16) et (3.3.2.11)

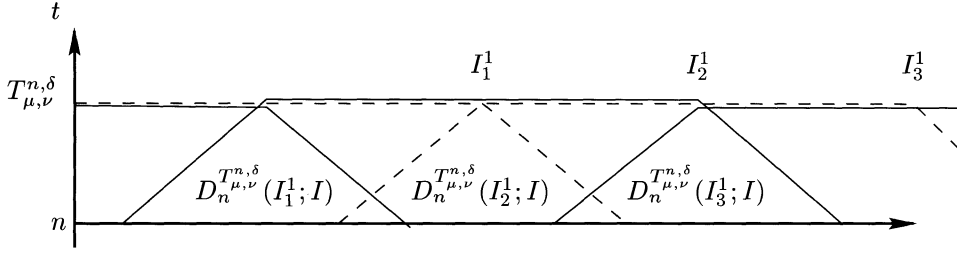


Figure 2. Étude du décalage d'amplitude induit par les interactions d'ordre ν qui se produisent à l'intérieur du domaine $D_n^{T_{\mu,\nu}^{n,\delta}}(I_p^1; I)$

admettent une version *locale marquée* qui consiste à faire intervenir dans les fonctionnelles précédentes uniquement les couples d'ondes (α, β) qui vérifient l'inégalité « $\max(\text{Or}_\alpha, \text{Or}_\beta) \geq l$ ». Avec les mêmes notations qu'en (3.3.2.13) où l'intervalle I et l'instant t sont respectivement remplacés par I_p^1 et $T_{\mu,\nu}^{n,\delta}$, on pose :

$$(3.3.2.37) \quad \mathcal{T}_{n,l}^p := \left\{ r_j; 1 \leq j \leq N_n^{T_{\mu,\nu}^{n,\delta}}, \max(\text{Or}_\alpha, \text{Or}_\beta) = l \right\}.$$

$$(3.3.2.38) \quad I_p^1 V_{\nu,n,l}^{\mu,p}(r^-) := \left\{ \sum |\alpha(r^-)|; x_\alpha(r) \in (I_p^1)_{r^{T_{\mu,\nu}^{n,\delta}}}(1), \text{Or}_\alpha \geq l \right\}.$$

$$(3.3.2.39) \quad I_p^1 Q_{\nu,n,l}^{\mu,p}(r^-) := \left\{ \sum |\alpha(r^-)| |\beta(r^-)|, \alpha \mathcal{A}_{(I_p^1)_{r^{T_{\mu,\nu}^{n,\delta}}}}^r \beta, \max(\text{Or}_\alpha; \text{Or}_\beta) \geq l \right\}.$$

La démarche de Bressan [B1, p. 88, (24),..., (32)] s'applique telle qu'elle. Par exemple, on a en remplacement de la troisième inégalité de (24) :

$$(3.3.2.40) \quad \Delta I_p^1 V_{\nu,n,l}^{\mu,p}(r) + 2(\mathcal{R} + \hat{\delta}) I_p^1 Q_{\nu,n,l}^{\mu,p}(r) \leq 0,$$

où $r \in \mathcal{T}_{n,1}^p \cup \dots \cup \mathcal{T}_{n,l-2}^p$.

La partie positive et la partie négative d'un nombre réel s sont respectivement notées :

$$(3.3.2.41) \quad [s]_+ := \max(s; 0), \quad [s]_- := \max(-s, 0).$$

Conformément à Bressan [B1], on introduit les expressions :

$$(3.3.2.42) \quad I_p^1 \dot{V}_{\nu,n,l}^{\mu,p} := \sup_{n < r \leq T_{\mu,\nu}^{n,\delta}} I_p^1 V_{\nu,n,l}^{\mu,p}(r^-).$$

$$(3.3.2.43) \quad I_p^1 \dot{Q}_{\nu,n,l}^{\mu,p} := \sum_{n < r \leq T_{\mu,\nu}^{n,\delta}} [\Delta I_p^1 Q_{\nu,n,l}^{\mu,p}(r)]_+.$$

La procédure d'initialisation de l'ordre des ondes, répétée à chaque instant entier, garantit de nouveau :

$$(3.3.2.44) \quad I_p^1 V_{\nu,n,l}^{\mu,p}(n^+) = I_p^1 Q_{\nu,n,l}^{\mu,p}(n^+) = 0, \quad \forall l \geq 2.$$

Dès lors, en répétant les manipulations (25)-(26)-(27) de Bressan [B1] et en tenant compte de (3.3.2.9) et (3.3.2.12), il vient :

$$(3.3.2.45) \quad I_p^1 \dot{V}_{\nu,n,l}^{\mu,p} \leq 2(\mathcal{R} + \hat{\delta}) I_p^1 \dot{Q}_{\nu,n,l-1}^{\mu,p}.$$

$$(3.3.2.46) \quad I_p^1 \dot{Q}_{\nu,n,l}^{\mu,p} \leq 80N(\mathcal{R} + \hat{\delta}) \delta_2^\mu (40N \delta_2^\mu I_p^1 \dot{V}_{\nu,n,l}^{\mu,p} + I_p^1 \dot{Q}_{\nu,n,l-1}^{\mu,p}).$$

Soit encore, d'après (3.3.1.7) :

$$(3.3.2.47) \quad I_p^1 \dot{Q}_{\nu,n,l}^{\mu,p} \leq 2^{-l}, l \in \{1, \dots, \nu\}.$$

On considère à présent un instant r_j dans $\mathcal{T}_{n,\nu}^p$. On a :

$$(3.3.2.48) \quad \Delta I_p^1 Q_{\nu,n,\nu}^{\mu,p}(r_j) = -|\alpha| |\beta|.$$

Les arguments du lemme 2 page 89 de Bressan [B1] se répètent textuellement. Ils montrent que le saut d'amplitude provoqué par la redéfinition de la fonction $u_\nu^\mu(r_j, \cdot)$ sur le demi-axe $[x_\alpha(r_j), \infty[$ se trouve contrôlé selon :

$$(3.3.2.49) \quad \|u_\nu^\mu(r_j^+, \cdot) - u_\nu^\mu(r_j^-, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq D_7 e^{D_8 \bar{V}_{ar:E_r_j^\mu}^{\text{loc}}(r_j^-)} |\alpha| |\beta|.$$

Clairement, d'après (3.3.2.44) et (3.3.2.47) :

$$(3.3.2.50) \quad \sum_{r \in \mathcal{T}_{p,\nu}^n} [\Delta I_p^1 Q_{\nu,n,\nu}^{\mu,p}(r)]_- \leq \sum_{r \in \mathcal{T}_{p,\nu}^n} [\Delta I_p^1 Q_{\nu,n,\nu}^{\mu,p}(r)]_+ \leq I_p^1 \dot{Q}_{\nu,n,\nu}^{\mu,p} \leq 2^{-\nu}.$$

Comme la dérivée $\partial_x u_\nu^\mu(r, \cdot)$ est à support compact (plus précisément contenu dans l'intervalle E_r^μ), seul un nombre fini (éventuellement très grand) d'entiers p sont à considérer. En reportant le produit $|\alpha| |\beta|$ écrit sous la forme (3.3.2.48) en (3.3.2.49) puis en utilisant (3.3.2.50), on voit apparaître, pour une certaine constante C_n^1 indépendante de l'indice ν :

$$(3.3.2.51) \quad \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathcal{T}_{p,\nu}^n} \|u_\nu^\mu(r^+, \cdot) - u_\nu^\mu(r^-, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_n^1 2^{-\nu}.$$

L'inégalité (3.3.2.3) du lemme 3.3.2.1 est établie.

iv) *Erreur d'approximation commise par la solution approchée :*

On commence par un lemme préliminaire qui décrit comment la force d'une onde évolue sur de petites durées :

LEMME 3.3.2.2. —

Soit n un entier inférieur ou égal au temps d'arrêt $T_{\mu,\nu}^\delta$. Soit α une onde de raréfaction qui est déjà créée à l'instant n et qui ne change pas de nature sur l'intervalle $[n, T_{\mu,\nu}^\delta]$. On a, pour $t \in [n, T_{\mu,\nu}^\delta]$:

$$(3.3.2.52) \quad (1 - 40(\delta_2^\mu)^2) \alpha(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) \leq \alpha(t^-) \leq (1 + 40(\delta_2^\mu)^2) \alpha(n^-).$$

Preuve du lemme 3.3.2.2. — Soit t un instant compris entre n et $T_{\mu,\nu}^{n,\delta}$. Soit I un intervalle de longueur inférieure à 2 (comme en (3.3.2.6)), qui est situé à l'instant t et qui contient le point $x_\alpha(t)$. Comme précédemment, la méthode consiste à introduire une fonctionnelle auxiliaire :

$$(3.3.2.53) \quad [n, t] \ni r \longmapsto I_\alpha \mathcal{H}_n^t(r^-) \\ := \alpha(r^-) + 40D_5\gamma\delta_2^\mu \alpha(r^-) \left(\sum_{\theta \mathcal{A}_{I_t^+(1)}^r \alpha} |\theta(r^-)| + 2(\mathcal{R} + \hat{\delta})^I Q_{\nu,n}^{\mu,t}(r^-) \right).$$

L'application qui à r associe $I_\alpha \mathcal{H}_n^t(\cdot)$ est décroissante entre deux instants d'interaction successifs car aucune onde ne peut pénétrer à l'intérieur de la région $\mathcal{D}_n^t(I; 1)$. D'après (3.3.1.19) et (3.3.2.14), elle diminue aussi à chaque interaction qui ne concerne pas l'onde α sélectionnée.

Considérons à présent le saut que subit l'expression $I_\alpha \mathcal{H}_n^t(\cdot)$ lorsque se produit une interaction qui met précisément en jeu l'onde α (avec une discontinuité β auxiliaire). Le signe de ce saut est étudié en distinguant selon le type de l'onde β qui intervient.

Si le type t_α est différent de t_β , la perturbation induite sur la force de l'onde α est cubique en ce sens où les identités (1.1.12), (1.3.15) et (3.3.1.12) conduisent à :

$$(3.3.2.54) \quad |\alpha(r_j^+) - \alpha(r_j^-)| \leq 20D_5\gamma\delta_2^\mu |\alpha(r_j^-)| |\beta(r_j^-)|.$$

Comme l'onde β n'approche plus l'onde α après l'instant r_j , elle n'est plus comptée après cet instant dans la somme qui apparaît en (3.3.2.53) :

$$(3.3.2.55) \quad \sum_{\theta \mathcal{A}_{I_j^+(1)}^{r_j^+} \alpha} |\theta(r_j^+)| - \sum_{\theta \mathcal{A}_{I_j^-(1)}^{r_j^-} \alpha} |\theta(r_j^-)| = -|\beta(r_j^-)|.$$

En reportant (3.3.2.54) et (3.3.2.55) en (3.3.2.53), on constate :

$$(3.3.2.56) \quad \Delta_\alpha^I \mathcal{H}_n^t(r_j) \leq 0.$$

Si en revanche le type t_α coïncide avec t_β , on a :

$$(3.3.2.57) \quad \alpha(r_j^+) \leq \alpha(r_j^-) + \beta(r_j^-) + 20D_5\gamma\delta_2^\mu \alpha(r_j^-) |\beta(r_j^-)|.$$

Mais comme l'onde β est nécessairement un choc (en d'autres termes, la force $\beta(r_j^-)$ est négative), l'inégalité précédente fournit :

$$(3.3.2.58) \quad \alpha(r_j^+) \leq \alpha(r_j^-),$$

ce qui garantit une fois de plus (3.3.2.56).

Finalement, d'après (3.3.2.56) puis (3.3.2.9) et (3.3.2.12), on trouve :

$$\begin{aligned}
 (3.3.2.59) \quad \alpha(t^-) &\leq I_\alpha \mathcal{H}_n^t(t^-) \\
 &\leq I_\alpha \mathcal{H}_n^t(n^-) \\
 &\leq \left(1 + 80D_5\gamma \times 20(\delta_2^\mu)^2 (1 + 80(\mathcal{R} + \hat{\delta})\delta_2^\mu)\right) |\alpha(n^-)| \\
 &\leq (1 + 40(\delta_2^\mu)^2) |\alpha(n^-)|.
 \end{aligned}$$

La partie droite de l'inégalité (3.3.2.52) du lemme 3.3.3 est prouvée. La minoration placée à gauche s'obtient à l'aide d'arguments qui sont tout à fait analogues. \square

COROLLAIRE 3.3.2.1. — *Soit γ une onde de détente qui est de première catégorie à l'instant $T_{\mu,\nu}^\delta$. En d'autres termes, l'onde γ provient d'une onde de raréfaction α qui est créée à l'instant initial et qui ne change pas de nature sur l'intervalle de temps $[0, T_{\mu,\nu}^\delta]$. On a alors, pour $t \in [0, T_{\mu,\nu}^\delta]$:*

$$\begin{aligned}
 (3.3.2.60) \quad (1 - D_9\delta_2^\mu)\alpha(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) &= (1 - D_9\delta_2^\mu)\gamma(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) \\
 &\leq \alpha(t^-) \leq (1 + D_9\delta_2^\mu)\alpha(0^+),
 \end{aligned}$$

$$(3.3.2.61) \quad \alpha(0^+) \leq \frac{\hat{\delta}}{\nu}.$$

Preuve du corollaire 3.3.2.1. — D'après la définition (3.1.3), l'instant $\hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^\delta$ est un entier. Par conséquent, l'hypothèse (3.3.1.15) se traduit par :

$$(3.3.2.62) \quad T_{\mu,\nu}^\delta < \mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta] + 1 \leq \hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^\delta.$$

Le lemme 3.3.3 est appliqué $\mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta] + 1$ fois.

En se souvenant de l'inégalité (3.3.2.62) et de la définition (3.1.3), on voit apparaître :

$$\begin{aligned}
 (3.3.1.63) \quad \alpha(t^-) &\leq (1 + 40(\delta_2^\mu)^2)^{\hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^\delta} \alpha(0^+) \\
 &\leq (1 + D_9\delta_2^\mu)\alpha(0^+), \quad t \in [0, T_{\mu,\nu}^\delta].
 \end{aligned}$$

La partie gauche de l'inégalité (3.3.2.60) se déduit de la même façon.

Par ailleurs, d'après (1.3.6), (3.1.5) et le procédé de discrétisation rappelé en (3.2.3), on a :

$$(3.3.2.64) \quad \alpha(0^+) \leq \frac{2D_4\gamma\delta_1^\mu}{\nu} \leq \frac{\hat{\delta}}{\nu}.$$

\square

En reportant l'inégalité (3.3.2.61) en (3.3.2.60), on retrouve le contenu du lemme 3 page 90 de Bressan [B1]. Associé avec (3.3.2.51), ce lemme garantit l'apparition de l'expression (50) du même auteur, qui n'est autre que (3.3.2.5) pour une certaine constante C_n^2 convenablement choisie.

Le lemme 3.3.2.1 est prouvé. \square

3.3.3. Convergence du schéma. — Il s'agit d'établir la proposition 3.1.1. En d'autres termes, il faut prouver sous l'hypothèse (3.3.1.15) la validité des inégalités (3.3.1.16) et (3.3.1.17).

Le paramètre $\hat{\iota}$ est déterminé par la relation :

$$(3.3.3.1) \quad \hat{\iota} := \min\left(\frac{1}{13000N^2(1 + D_6)}, 3(\mathcal{R} + \hat{\delta})\right).$$

REMARQUE 3.3.2. — Lorsque le nombre $\hat{\delta}$ et le rapport d'influence \mathcal{R} sont suffisamment petits, il suffit de retenir :

$$(3.3.3.2) \quad \hat{\iota} = 3(\mathcal{R} + \hat{\delta}), \quad \hat{\iota} T_{\mathcal{R}}^{\hat{\delta}} = \mathcal{E} \left[\frac{3}{\hat{\delta}} \right].$$

◁

L'inégalité (3.3.2.3) du lemme 3.3.2.1 est appliquée $\mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^{\hat{\delta}}] + 1$ fois, avec un entier n qui prend toutes les valeurs comprises entre 0 et $\mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^{\hat{\delta}}]$. Comme d'après (3.3.1.7) :

$$(3.3.3.3) \quad 1 + 200ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\hat{\delta} \leq 2,$$

il vient, en utilisant la majoration (3.3.2.62) :

$$(3.3.3.4) \quad \|u_{\nu}^{\mu}(T_{\mu,\nu}^{\hat{\delta}-}, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \leq (1 + 100ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\delta_2^{\mu})^{\hat{\iota} T_{\mathcal{R}}^{\hat{\delta}}} \|h^{\mu}(\cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} + \frac{C^1}{2^{\nu}},$$

avec :

$$(3.3.3.5) \quad C^1 := \sum_{j=0}^{\mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^{\hat{\delta}}]} 2^j C_j^1.$$

Le terme placé à droite de l'inégalité en (3.3.3.4) est contrôlé à l'aide de (3.1.3), (3.1.5), (3.3.1.4) et (3.3.1.10). On voit apparaître :

$$(3.3.3.6) \quad \|u_{\nu}^{\mu}(T_{\mu,\nu}^{\hat{\delta}-}, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \leq 2\exp\left\{200ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\hat{\delta}\left(\frac{\hat{\iota}}{(\mathcal{R} + \hat{\delta})\hat{\delta}} + 1\right)\right\} \gamma\delta_1^{\mu} + \frac{C^1}{2^{\nu}}.$$

Les paramètres $\hat{\delta}$ et $\hat{\iota}$ ont été ajustés en (3.3.1.7) et (3.3.3.1) de manière à ce que :

$$(3.3.3.7) \quad 200ND_6\hat{\iota} + 200ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\hat{\delta} \leq \ln 2.$$

En reportant (3.3.3.7) en (3.3.3.6), on obtient :

$$(3.3.3.8) \quad \|u_{\nu}^{\mu}(T_{\mu,\nu}^{\hat{\delta}-}, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \leq 4\gamma\left(\delta_1^{\mu} + \frac{C_1}{\gamma 2^{\nu+2}}\right).$$

On pose :

$$(3.3.3.9) \quad \nu_{\mu} := \mathcal{E} \left[\frac{\ln(C^1 \mu) - \ln(4\gamma)}{\ln 2} \right] + 1, \quad \mu \in [\mu_{\delta}, \infty[,$$

ce qui implique :

$$(3.3.3.10) \quad \delta_1^{\mu} + \frac{C_1}{\gamma 2^{\nu_{\mu}+2}} \leq \delta_2^{\mu}.$$

REMARQUE 3.3.3. — Soit \mathcal{T}_ν l'ensemble des instants compris entre 0 et $T_{\mu,\nu}^\delta$ en lesquels deux discontinuités α et β avec « $\max(\text{Or}_\alpha; \text{Or}_\beta) = \nu$ » interagissent. Pour le choix de l'indice ν_μ effectué ci-dessus, on obtient en particulier (en se souvenant de la majoration (3.3.2.51) et en utilisant (3.3.3.9)) :

$$(3.3.3.11) \quad \sum_{r \in \mathcal{T}_\nu} \|u_{\nu_\mu}^\mu(r^+, \cdot) - u_{\nu_\mu}^\mu(r^-, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\mu}, \quad \forall \nu \in [\nu_\mu, \infty[.$$

◀

La majoration (3.3.3.10) placée en (3.3.3.8) conduit à (3.3.1.16) :

$$(3.3.3.12) \quad \|u_\nu^\mu(T_{\mu,\nu}^{\delta-}, \cdot)\|_{Ri(\mathbb{R})} \leq 4\gamma\delta_2^\mu, \quad \forall \nu \in [\nu_\mu, \infty[.$$

Expliquons à présent pourquoi la variation locale uniforme de longueur 1 se trouve contrôlée à l'instant $T_{\mu,\nu}^{\delta-}$ conformément à l'inégalité (3.3.1.17). D'après la définition (2.1.32), il s'agit d'obtenir pour tout p dans \mathbb{Z} :

$$(3.3.3.13) \quad \bar{V}_{\text{ar}; I_p^1}^{\text{loc}}(u_\nu^\mu(T_{\mu,\nu}^{\delta-}, \cdot)) \leq 4\delta_2^\mu,$$

ce qui d'après l'identité (3.2.17) équivaut à établir pour tout couple (p, k) dans $\mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\}$:

$$(3.3.3.14) \quad I_p^1 V_\nu^\mu(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) \leq 4\delta_2^\mu.$$

Soit donc (p, k) un couple dans $\mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\}$. L'intervalle I_p^1 est situé à l'instant $T_{\mu,\nu}^\delta$. La section à l'instant n du domaine de dépendance relatif au type k et au défaut sur les vitesses \diamond_δ correspondant est notée :

$$(3.3.3.15) \quad \begin{aligned} {}_k J_{\nu,n}^{\mu,p} &:= I_n^{T_{\mu,\nu}^\delta}(k, \diamond_\delta) \\ &=]i_1 - (\lambda_k + \diamond_\delta)(T_{\mu,\nu}^\delta - n), i_2 - (\lambda_k - \diamond_\delta)(T_{\mu,\nu}^\delta - n)[, \end{aligned}$$

avec $0 \leq n \leq \mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta]$. D'après (3.3.2.62), la longueur du segment ${}_k J_{\nu,n}^{\mu,p}$ ne dépasse pas :

$$(3.3.3.16) \quad |{}_k J_{\nu,n}^{\mu,p}| \leq 1 + 2\diamond_\delta \hat{i} T_{\mathcal{R}}^\delta, \quad 0 \leq n \leq \mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta].$$

Or, d'après (3.3.1.6), (3.3.1.7), (3.3.1.9) et (3.3.3.1), on a :

$$(3.3.3.17) \quad 2\diamond_\delta \hat{i} T_{\mathcal{R}}^\delta \leq \frac{40\hat{\gamma}A_{\hat{\delta}}\hat{\ell}}{(\mathcal{R} + \hat{\delta})} + 40\hat{\gamma}A_{\hat{\delta}}\hat{\delta} < 1,$$

ce qui reporté en (3.3.3.16) conduit à :

$$(3.3.3.18) \quad |{}_k J_{\nu,n}^{\mu,p}| < 2, \quad 0 \leq n \leq \mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta].$$

La majoration (3.3.3.18) permet d'appliquer l'inégalité (3.3.2.4) du lemme 3.3.2 une première fois avec pour t l'instant $T_{\mu,\nu}^\delta$ et pour I l'intervalle I_p^1 :

$$(3.3.3.19) \quad I_p^1 V_\nu^\mu(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) \leq {}_k J_{\nu,n}^{\mu,p} V_\nu^\mu(n^-) + 3200N^2(\mathcal{R} + \hat{\delta})(\delta_2^\mu)^2,$$

avec $n = \mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta]$, puis ensuite avec pour t l'instant n et pour I la section ${}_k J_{\nu,n}^{\mu,p}$:

$$(3.3.3.20) \quad {}_k J_{\nu,n+1}^{\mu,p} V_\nu^\mu(n+1^-) \leq {}_k J_{\nu,n}^{\mu,p} V_\nu^\mu(n^-) + 3200N^2(\mathcal{R} + \hat{\delta})(\delta_2^\mu)^2,$$

avec $0 \leq n \leq \mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta] - 1$.

Les $\mathcal{E}[T_{\mu,\nu}^\delta] + 1$ inégalités inscrites en (3.3.3.19) et (3.3.3.20) sont recollées. Toujours d'après (3.3.2.62), il vient :

$$(3.3.3.21) \quad I_k^1 V_\nu^\mu(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) \leq {}_k J_{\nu,0}^{\mu,p} V_\nu^\mu(0^+) + 3200N^2(\mathcal{R} + \hat{\delta}) \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta (\delta_2^\mu)^2.$$

Mais d'après (3.3.1.7), (3.3.1.10) et (3.3.3.1), on a :

$$(3.3.3.22) \quad (\mathcal{R} + \hat{\delta}) \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta \delta_2^\mu \leq 2(\hat{i} + (\mathcal{R} + \hat{\delta})\hat{\delta}) \leq \frac{1}{3200N^2}.$$

Le contrôle (3.3.3.22) est placé en (3.3.3.21) :

$$(3.3.3.23) \quad I_k^1 V_\nu^\mu(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) \leq {}_k J_{\nu,0}^{\mu,p} V_\nu^\mu(0^+) + \delta_2^\mu.$$

D'après (3.3.3.18) écrit pour n égal à 0, le segment ${}_k J_{\nu,0}^{\mu,p}$ possède une longueur inférieure à deux. A ce titre, il se trouve contenu dans la réunion de trois intervalles successifs I_p^1 bien choisis. Dès lors, compte tenu de l'estimation (3.1.7), on obtient le contrôle (3.3.3.14) :

$$(3.3.3.24) \quad I_k^1 V_\nu^\mu(T_{\mu,\nu}^{\delta-}) \leq 3\delta_1^\mu + \delta_2^\mu \leq 4\delta_2^\mu, \quad \forall \nu \in [\nu_\mu, \infty[.$$

REMARQUE 3.3.4. — C'est au niveau du raisonnement tenu en (3.3.3.15),..., (3.3.3.24) que les positions en lesquelles les ondes interagissent sont prises en compte. La contribution apportée par le croisement à l'instant r de deux discontinuités α et β est majorée par une quantité proche de la valeur effective :

$$(3.3.3.25) \quad |\alpha(n)| |\beta(n)| \sim |\alpha(t)| |\beta(t)|, \quad n = \mathcal{E}[t],$$

et non pas, comme c'est le cas traditionnellement, par l'expression (plus grossière) :

$$(3.3.3.26) \quad |\alpha(0)| |\beta(0)|.$$

◀

Au regard de (3.3.3.12), (3.3.3.14) et du lemme 3.3.1, on doit avoir :

$$(3.3.3.27) \quad \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta \leq T_{\mu,\nu}^\delta, \quad \forall \nu \in [\nu_\mu, \infty[.$$

Dès lors, pour obtenir (3.1.12) et (3.1.13), il suffit de poser :

$$(3.3.3.28) \quad u^\mu(\cdot, \cdot) \equiv u_{\nu_\mu}^\mu(\cdot, \cdot), \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[.$$

Deux mots en ce qui concerne la convergence de la suite $(u^\mu(t, x))_{\mu \in [\mu_\delta, \infty[}$ pour terminer. On introduit la suite exhaustive de compacts :

$$(3.3.3.29) \quad K_q := [-q, q] \times [0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta], \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

$$(3.3.3.30) \quad K_q \subset K_{q+1}, \quad \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} K_q = \mathbb{R} \times [0, \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta].$$

D'après (3.1.13) :

$$(3.3.3.31) \quad \begin{aligned} \bar{V}_{\text{ar};[-q,q]}^{\text{loc}}(u^\mu(t^-, \cdot)) &\leq 10(1+4q)\delta < \infty, \\ \forall \mu \in [\mu_\delta, \infty[, \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, \delta_i T_{\mathcal{R}}^\delta]. \end{aligned}$$

Toutes les discontinuités se propagent avec une vitesse inférieure à 1. Par conséquent, les arguments avancés dans Bressan [B1, p. 92], au niveau de l'identité (44), se répètent tel quel.

Avec la remarque 3.3.3.2, on obtient cette fois-ci :

$$(3.3.3.32) \quad \begin{aligned} &\|u^\mu(t^-, \cdot) - u^\mu(s^-, \cdot)\|_{L^1([-q,q])} \\ &\leq D_9 |t-s| + 2q \sum_{r \in \mathcal{T}_\nu} \|u^\mu(r^+, \cdot) - u^\mu(r^-, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq D_9 |t-s| + \frac{2q}{\mu}, \quad \forall \mu \in [\mu_\delta, \infty[. \end{aligned}$$

D'après le théorème 4 page13 de Bressan [B1] (qui est une version adaptée du résultat de compacité de Helly cité en (2.17)), il existe une application croissante :

$$(3.3.3.33) \quad \psi_q : [\mu_\delta, \infty[\longrightarrow [\mu_\delta, \infty[,$$

telle que la suite des restrictions :

$$(3.3.3.34) \quad (u_{[-q,q]}^\mu(t, x))_{\mu \in [\mu_\delta, \infty[},$$

admette une sous-suite extraite :

$$(3.3.3.35) \quad (u_{[-q,q]}^{\psi_q(\mu)}(t, x))_{\mu \in [\mu_\delta, \infty[},$$

qui converge dans l'espace $L^1(K_q)$ vers une fonction ${}_q u(t, x)$.

D'après (3.3.2.5), pour toute fonction test $\varphi(t, x)$ dans $C_0^1(K_q)$, il vient :

$$(3.3.3.36) \quad \begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} \{ \varphi(0, x) h^\mu(0, x) - \varphi(\delta_i T_{\mathcal{R}}^\delta, x) u^\mu(\delta_i T_{\mathcal{R}}^\delta, x) \} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\delta_i T_{\mathcal{R}}^\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \partial_t \varphi(t, x) u^\mu(t, x) + \partial_x \varphi(t, x) F(u^\mu(t, x)) \} dx dt \right| \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\delta_i T_{\mathcal{R}}^\delta} C_n^2 / \nu_\mu \right) \|\varphi(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(K_q)}. \end{aligned}$$

D'après la définition imposée en (3.3.3.9), on a :

$$(3.3.3.37) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^{\delta_i T_{\mathcal{R}}^\delta} C_n^2 / \nu_\mu \right) \|\varphi(\cdot, \cdot)\|_{L^\infty(K_q)} = 0.$$

En passant à la limite au niveau de l'inégalité (3.3.3.36), on constate que chaque application ${}_q u(t, x)$ est solution faible sur le domaine K_q du système hyperbolique

(\mathcal{H}). Le procédé diagonal permet dès lors de construire une solution exacte $u^\infty(t, x)$ (dont la restriction à chaque compact K_q coïncide avec l'application ${}_q u(t, x)$).

REMARQUE 3.3.5. — D'après Bressan [B2], la fonction $u^\infty(t, x)$ est en fait l'unique solution entropique du problème de Cauchy (\mathcal{H}). ◁

CHAPITRE 4

STABILITÉ BV

Le cadre de travail tel qu'il a été fixé au chapitre 3 est repris. Une suite de solutions approchées $(u^\mu(t, x))_{\mu \in [\mu_\delta, \infty[}$, qui sont définies sur le domaine $[0, \hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^\delta] \times \mathbb{R}$, a été construite. À l'instant $\hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^\delta$, la variation locale uniforme de longueur 1 peut éventuellement avoir quintuplé. C'est du moins ce qu'autorise le contrôle obtenu en (3.1.13).

Supposons que la proposition 3.1.1 puisse être appliquée autant de fois que souhaité. Après n itérations, la variation locale uniforme de longueur un se trouve majorée par la borne $5^n \delta$ tandis que le temps d'arrêt mis en jeu devient $\hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^{5^n \delta}$. La série qui admet pour terme général $\hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^{5^n \delta}$ est convergente :

$$(4.0) \quad \tilde{T} := \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \hat{\delta}T_{\mathcal{R}}^{5^n \delta} < +\infty.$$

À priori, aucun contrôle sur la variation n'est disponible à l'instant \tilde{T} . En fait, comme en témoigne l'exemple décrit dans Joly-Métivier-Rauch [JMR2], une amplification de la norme BV peut se produire. Ce phénomène n'apparaît pas systématiquement. Il est lié à la présence de résonances. Or les résonances sont en compétition avec les effets induits par la vraie non linéarité qui eux favorisent la décroissance de la variation.

Notre objectif est de mesurer ces influences contraires et de prouver qu'elles sont comparables. Cela signifie que les effets de décroissance BV liés à la présence de vraie non linéarité peuvent, s'ils sont suffisamment affirmés, venir compenser la croissance BV provoquée par la présence de coefficients d'interaction non nuls. C'est le cas en particulier si le rapport d'influence \mathcal{R} est choisi suffisamment petit. Cette condition de petitesse n'est pas inconnue. Elle a déjà été exploitée par l'auteur [Ch2] afin d'établir l'existence globale pour les équations de modulation données par l'optique géométrique. En fait, son utilisation se transpose avec la même pertinence à l'étude des systèmes de lois de conservation. Elle se traduit concrètement par de la décroissance

au sens large pour les solutions associées à des données de Cauchy du genre (γ, δ) avec γ et δ petits. En d'autres termes, elle s'interprète comme un critère qui garantit la stabilité en variation du problème de Cauchy (\mathcal{H}) .

Voilà pour les motivations qui sous-tendent ce chapitre dont les grandes lignes sont maintenant brièvement présentées.

Dans le calcul de la variation d'une solution approchée $u^\mu(t, x)$, interviennent à la fois des ondes de première et de deuxième catégorie. Dans la première partie, est évaluée la contribution maximale que peut apporter, à la variation (et avant l'instant d'arrêt \mathring{T}_R^δ) les ondes qui sont de deuxième catégorie. Une onde de raréfaction admet un chemin rétrograde naturel. Cette remarque permet de définir la notion de *domaine d'expansion rétrograde de type k relatif à un intervalle I* . La manière dont ce domaine se trouve déformé lorsque le temps évolue relève d'une analyse géométrique qui est menée à son terme dans une deuxième partie. Finalement, dans un dernier volet, les informations précédentes sont recollées en vue d'établir le résultat de décroissance de la variation locale uniforme de longueur un.

4.1. Estimations en variation précisées

Le contrôle (3.1.13) explique la façon dont la variation se trouve modifiée lorsque le temps évolue. Le résultat obtenu manque de précision en particulier lorsque le rapport d'influence \mathcal{R} est proche de zéro. Dans ce cas, un bilan plus détaillé s'impose. La solution approchée $u^\mu(t, x)$ est formée d'une succession d'ondes. Celles qui, à l'instant t , sont contenues à l'intérieur de l'intervalle I sont triées comme précédemment selon leur type mais aussi selon leur nature et leur catégorie :

$$(4.1.1) \quad {}^I_k V_\mu^\pm(t^-) := \pm \sum_{\{\alpha; i_1 < x_\alpha(t^-) < i_2, t_\alpha = k, Ca_\alpha(t^-) = 1, \text{sgn}(\alpha(t)) = \pm\}} \alpha(t^-).$$

$$(4.1.2) \quad {}^I_k V'_\mu(t^-) := \sum_{\{\alpha; i_1 < x_\alpha(t^-) < i_2, t_\alpha = k, Ca_\alpha(t^-) = 2\}} |\alpha(t^-)|.$$

Toutes les ondes de type k qui sont présentes entre les deux extrémités i_1 et i_2 se trouvent ainsi recensées :

$$(4.1.3) \quad {}^I_k V_{\nu_\mu}^\mu(t^-) = {}^I_k V_\mu^+(t^-) + {}^I_k V_\mu^-(t^-) + {}^I_k V'_\mu(t^-).$$

L'exemple 2.3.2 étudié au chapitre II indique qu'il existe pour les solutions du problème de Cauchy (\mathcal{H}) qui sont associées à des conditions initiales du genre (γ, δ) un temps caractéristique. Il s'agit d'une durée au delà de laquelle on peut espérer constater la décroissance de la variation locale uniforme de longueur 1 :

$$(4.1.4) \quad T_\delta := \mathcal{E} \left[\frac{3}{\delta} \right].$$

REMARQUE 4.1.1. — Dans ce qui suit, le rapport d'influence \mathcal{R} et le paramètre $\hat{\delta}$ seront systématiquement fixés petits. Cela signifie, d'après la remarque 3.3.3.1, que dans la pratique on aura toujours :

$$(4.1.5) \quad T_\delta = \hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta.$$

Notez que l'instant T_δ dépend aussi du coefficient de vraie non linéarité Γ , même si la convention adoptée en (0.9) ne fait pas apparaître cette dernière dépendance dans l'expression numérique proposée ci-dessus. \triangleleft

L'indice μ sera désormais systématiquement fixé supérieur à μ_δ . Par ailleurs, un intervalle I de longueur 1 est sélectionné.

La variation se trouve modifiée chaque fois que se produit une interaction. Les changements concernent les forces des ondes qui interagissent mais se traduisent surtout par l'apparition d'ondes nouvelles. L'augmentation sur une durée égale à 1 de la variation locale uniforme de longueur 1 s'exprime d'après le lemme 3.3.2.1 sous la forme d'un accroissement qui ne dépasse pas la valeur $3200N^2(\mathcal{R} + \hat{\delta})(\delta_2^\mu)^2$. D'après la proposition 3.1.1, le cumul de ces contributions conduit à l'instant final $\hat{\delta}_i T_{\mathcal{R}}^\delta$ à un apport qui peut approcher le nombre $4\delta_2^\mu$. Tel n'est pas le cas lorsque le rapport d'influence \mathcal{R} est choisi suffisamment petit.

En effet, on a :

LEMME 4.1.1. — *Pour tout paramètre ε contenu dans l'intervalle $]0, 1/2]$, il existe deux nombres réels positifs notés $\delta^1(\varepsilon)$ et $\mathcal{R}^1(\varepsilon)$ tels que pour tout contrôle δ dans $]0, \delta^1(\varepsilon)]$, pour tout rapport d'influence \mathcal{R} dans $]0, \mathcal{R}^1(\varepsilon)]$ et pour tout indice μ dans $[\mu_\delta, \infty[$, on ait :*

$$(4.1.6) \quad {}^I V'_\mu(t^-) \leq \varepsilon \delta_2^\mu, \quad t \in [0, T_\delta], \quad |I| = 1, \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Preuve du lemme 4.1.1. — On pose :

$$(4.1.7) \quad \delta^1(\varepsilon) := \min(\varepsilon/40000N^2; \varepsilon/(1 + 2D_9); \hat{\delta}).$$

$$(4.1.8) \quad \mathcal{R}^1(\varepsilon) := \varepsilon/40000N^2.$$

Intuitivement, l'expression ${}^I_k V'_\mu(\cdot)$ regroupe les forces des discontinuités qui proviennent d'ondes qui sont créées après l'instant initial. Une fonctionnelle auxiliaire est introduite de manière à contrôler la croissance de l'application qui à t associe ${}^I_k V'_\mu(t)$. Soit :

$$(4.1.9) \quad {}^I_k \tilde{\mathcal{F}}_n^t(r^-) := {}^I_r^{t, (k; \diamond \delta)} V'_\mu(r^-) + 2(\mathcal{R} + \delta^1(\varepsilon))^I \mathcal{Q}_{\nu, n}^{\mu, t}(r^-).$$

Les deux fonctionnelles ${}^I_k \mathcal{F}_n^t(\cdot)$ et ${}^I_k \tilde{\mathcal{F}}_n^t(\cdot)$ sont bâties sur le même modèle. Les arguments qui sont développés dans la preuve du lemme 3.3.2 s'appliquent suivant la même logique et conduisent à une conclusion identique : L'application qui à l'instant r associe ${}^I_k \tilde{\mathcal{F}}_n^t(r)$ est décroissante. En fait, d'après (3.3.2.14), il suffit d'établir qu'à

chaque fois que se produit à l'instant r_j une interaction entre une onde α et une onde β , on a :

$$(4.1.10) \quad \Delta_k^{I_{r_j}^t(k; \diamond \delta)} V_\mu'(r_j) \leq (\mathcal{R} + \delta^1(\varepsilon)) |\alpha| |\beta|.$$

Lorsque t_α diffère de t_β , l'inégalité (4.1.10) est une simple conséquence de la démarche qui conduit à (3.3.1.19). Examinons le cas $t_\alpha = t_\beta$. Soit γ l'onde (avec $t_\gamma = t_\alpha = t_\beta$) qui prolonge α et β . La catégorie de l'onde γ est liée à celle des discontinuités α et β selon le tableau :

$$(4.1.11) \quad (\text{Ca}_\alpha(r_j^-), \text{Ca}_\beta(r_j^-)) = (1, 1) \implies \text{Ca}_\gamma(r_j^+) = 1.$$

$$(4.1.12) \quad (\text{Ca}_\alpha(r_j^-), \text{Ca}_\beta(r_j^-)) = (2, 2) \implies \text{Ca}_\gamma(r_j^+) = 2.$$

$$(4.1.13) \quad (\text{Ca}_\alpha(r_j^-), \text{Ca}_\beta(r_j^-)) = (1, 2) \implies \begin{cases} \text{Ca}_\gamma(r_j^+) = 1 & \text{si } \text{Na}_\gamma(r_j^+) = \text{Na}_\alpha(r_j^-). \\ \text{Ca}_\gamma(r_j^+) = 2 & \text{si } \text{Na}_\gamma(r_j^+) \neq \text{Na}_\alpha(r_j^-). \end{cases}$$

On note $|\varepsilon|_{\setminus \alpha, \beta}$ la somme des valeurs absolues $|\varepsilon_i|$ des forces ε_i des ondes qui sont créées à l'issue de l'interaction (et qui ne prolongent pas l'onde α ou β , à savoir avec $t_{\varepsilon_i} \neq t_\alpha$ et $t_{\varepsilon_i} \neq t_\beta$).

L'expression $\Delta_k^{I_{r_j}^t(k; \diamond \delta)} V_\mu'(\cdot)$ subit un saut dont la forme dépend des différentes situations qui sont classifiées ci-dessus :

$$(4.1.14) \quad (4.1.11) \implies \Delta_k^{I_{r_j}^t(k; \diamond \delta)} V_\mu'(r_j) = |\varepsilon|_{\setminus \alpha, \beta}.$$

$$(4.1.15) \quad (4.1.12) \implies \Delta_k^{I_{r_j}^t(k; \diamond \delta)} V_\mu'(r_j) = |\varepsilon|_{\setminus \alpha, \beta} + |\gamma| - |\alpha| - |\beta|.$$

$$(4.1.16) \quad (4.1.13) \implies$$

$$\Delta_k^{I_{r_j}^t(k; \diamond \delta)} V_\mu'(r_j) = \begin{cases} |\varepsilon|_{\setminus \alpha, \beta} - |\beta| & \text{si } \text{Na}_\gamma(r_j^+) = \text{Na}_\alpha(r_j^-). \\ |\varepsilon|_{\setminus \alpha, \beta} + |\gamma| - |\beta| & \text{si } \text{Na}_\gamma(r_j^+) \neq \text{Na}_\alpha(r_j^-). \end{cases}$$

Seule l'hypothèse (4.1.13) avec $\text{Na}_\gamma(r_j^+) \neq \text{Na}_\alpha(r_j^-)$ demande un examen attentif. Mais dans ces conditions, on a forcément :

$$(4.1.17) \quad \text{Na}_\gamma(r_j^+) = \text{Na}_\beta(r_j^-) \neq \text{Na}_\alpha(r_j^-).$$

On se souvient maintenant de (1.3.15) et de (3.1.12) pour obtenir :

$$(4.1.18) \quad |\gamma| = \text{sgn}(\gamma)\alpha + |\beta| + 10D_5\gamma\delta_2^\mu |\alpha| |\beta|,$$

d'où l'on déduit :

$$(4.1.19) \quad |\varepsilon|_{\setminus \alpha, \beta} + |\gamma| - |\beta| \leq 20ND_5\hat{\gamma}\delta^1(\varepsilon) |\alpha| |\beta| \leq \delta^1(\varepsilon) |\alpha| |\beta|.$$

La majoration (4.1.10) écrite sans le coefficient \mathcal{R} devient alors une conséquence directe de (4.1.19).

D'après (3.3.2.12), la décroissance de $I_k \tilde{\mathcal{F}}_n^t(\cdot)$ se traduit par les inégalités :

$$(4.1.20) \quad \begin{aligned} I_k V'_\mu(t^-) &\leq I_n^t(k; \diamond_\delta) V'_\mu(n^-) + 3200N^2(\mathcal{R} + \delta^1(\varepsilon))(\delta_2^\mu)^2, \\ n \leq t \leq n+1, \quad 0 \leq n < T_\delta, \quad |I| \leq 2, \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Comme les ondes qui apparaissent à l'instant initial sont par définition de première catégorie, pour tout intervalle I , on a :

$$(4.1.21) \quad I_k V'_\mu(0^+) = 0.$$

L'inégalité (4.1.20) est appliquée $\mathcal{E}[t] + 1$ fois avec comme choix pour la séquence d'instants successifs $0, 1, \dots, \mathcal{E}[t] - 1$ puis $\mathcal{E}[t]$ et pour intervalles correspondants $I_0^t(k; \diamond_\delta), I_1^t(k; \diamond_\delta), \dots, I_{\mathcal{E}[t]}^t(k; \diamond_\delta)$ puis I . D'après la majoration obtenue en (3.3.3.18), cette manipulation est licite. D'après les identités mises à jour en (4.1.21), elle conduit à :

$$(4.1.22) \quad I_k V'_\mu(t^-) \leq 3200N^2(\mathcal{R} + \delta^1(\varepsilon))T_\delta(\delta_2^\mu)^2, \quad 0 \leq t \leq T_\delta,$$

soit encore, en tenant compte d'abord de (3.3.1.10) et (4.1.4) puis ensuite de (4.1.7) et (4.1.8) :

$$(4.1.23) \quad I_k V'_\mu(t^-) \leq 19200N^2(\mathcal{R}^1(\varepsilon) + \delta^1(\varepsilon))\delta_2^\mu \leq \varepsilon\delta_2^\mu.$$

□

Le lemme 4.1.1 signifie que la contribution apportée par les ondes qui sont créées est encore négligeable à l'instant T_δ où les comptes sont faits. Ce principe a plusieurs conséquences. Il implique en particulier que la seule connaissance de l'expression $I_k V_\mu^+(t)$ permet de contrôler (à une erreur négligeable près) la quantité $I_k V_\mu^\mu(t)$ tout entière :

COROLLAIRE 4.1.1. — *Pour tout ε contenu dans l'intervalle $]0, 1]$, il existe un nombre réel positif $\gamma^1(\varepsilon)$ tel que pour tout contrôle δ dans $]0, \delta^1(\varepsilon)]$, pour tout rapport d'influence \mathcal{R} dans $]0, \mathcal{R}^1(\varepsilon)]$ et pour tout indice γ dans $]0, \gamma^1(\varepsilon)]$, on ait les majorations :*

$$(4.1.24) \quad \begin{aligned} I_k V_{\nu_\mu}^\mu(t^-) &\leq 2I_k V_\mu^+(t^-) + 3\varepsilon\delta_2^\mu, \\ t \in]0, T_\delta], \quad |I| = 1, \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Preuve du corollaire 4.1.1. — On décompose :

$$(4.1.25) \quad \begin{aligned} w_k(u^\mu(t^-, i_2^-)) - w_k(u^\mu(t^-, i_1^+)) \\ = \sum_{\{\alpha; x_\alpha(t) \in I\}} [w_k(u^\mu(t^-, x_\alpha(t)^+)) - w_k(u^\mu(t^-, x_\alpha(t)^-))]. \end{aligned}$$

Les ondes α qui sont mises en jeu dans la somme écrite en (4.1.25) sont triées selon leur type. D'après (1.2.10) et (3.1.12), une onde qui possède le type k intervient essentiellement par l'intermédiaire de sa force (qui est comptée avec son signe). D'après (1.2.11) et (3.1.12), les ondes de type a avec a différent de k sont négligeables à l'ordre 1.

En exploitant ces informations, l'identité (4.1.25) peut être remplacée par la majoration :

$$(4.1.26) \quad \begin{aligned} & \left| w_k(u^\mu(t^-, i_2^-)) - w_k(u^\mu(t^-, i_1^+)) - \frac{I}{k} V_\mu^+(t^-) + \frac{I}{k} V_\mu^-(t^-) \right| \\ & \leq \frac{I}{k} V'_\mu(t^-) + N \|u^\mu(t^-, \cdot)\|_{Ri(I)} (\mathcal{R} + D_2 \|u^\mu(t^-, \cdot)\|_{Ri(I)}) \bar{V}_{\text{ar}; I}^{\text{loc}}(u^\mu(t^-, \cdot)), \end{aligned}$$

ce qui, à l'aide de (3.3.1.4), (3.1.12) et (3.1.13), se traduit par :

$$(4.1.27) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{I}{k} V_\mu^+(t^-) - \frac{I}{k} V_\mu^-(t^-) \right| \leq 100\gamma N (\mathcal{R} + \delta) (\delta_2^\mu)^2 \\ & \quad + \frac{I}{k} V'_\mu(t^-) + \left| w_k(u^\mu(t^-, i_2^-)) - w_k(u^\mu(t^-, i_1^+)) \right|. \end{aligned}$$

Mais d'après (3.3.1.4) puis (3.1.12) :

$$(4.1.28) \quad \begin{aligned} & \left| w_k(u^\mu(t^-, i_2^-)) - w_k(u^\mu(t^-, i_1^+)) \right| \\ & \leq 2 \|u^\mu(t^-, i_2^-)\|_\infty + 2 \|u^\mu(t^-, i_1^+)\|_\infty \leq 40\gamma\delta_2^\mu. \end{aligned}$$

Le lemme 4.1.1 dont les hypothèses sont clairement vérifiées est appliqué pour majorer en (4.1.27) l'expression $\frac{I}{k} V'_\mu(t^-)$. Les contrôles à priori (3.3.1.4), (3.3.1.7) et (3.3.1.9) permettent d'estimer les autres termes :

$$(4.1.29) \quad \left| \frac{I}{k} V_\mu^+(t^-) - \frac{I}{k} V_\mu^-(t^-) \right| \leq (41\gamma + \varepsilon) \delta_2^\mu.$$

Pour les indices γ qui ne dépassent pas :

$$(4.1.30) \quad 0 < \gamma \leq \gamma^1(\varepsilon) := \varepsilon/50,$$

l'inégalité (4.1.29) se précise selon :

$$(4.1.31) \quad \left| \frac{I}{k} V_\mu^+(t^-) - \frac{I}{k} V_\mu^-(t^-) \right| \leq 2\varepsilon\delta_2^\mu.$$

On utilise de nouveau l'identité (4.1.3) pour écrire :

$$(4.1.32) \quad \frac{I}{k} V_{\nu^\mu}^\mu(t^-) \leq 2 \frac{I}{k} V_\mu^+(t^-) + \left| \frac{I}{k} V_\mu^+(t^-) - \frac{I}{k} V_\mu^-(t^-) \right| + \frac{I}{k} V'_\mu(t^-).$$

L'inégalité (4.1.14) du corollaire 4.1.1 s'obtient en reportant (4.1.6) et (4.1.31) en (4.1.32). \square

4.2. Analyse géométrique

4.2.1. Onde de détente rétrograde. — Ce second chapitre est consacré à quelques commentaires concernant les ondes qui sont de première catégorie. La trajectoire suivie par une onde α avec Ca_α égal à 1 commence à l'instant initial. Elle décrit une courbe qui est continue et affine par morceaux.

Soient β et γ deux ondes qui partagent le même type (en d'autres termes, on a t_β égal à t_γ) et qui sont initialement situées en des points distincts. Les trajectoires des ondes β et γ peuvent éventuellement se croiser. Dans ce cas, ces deux ondes occupent la même position après l'instant d'interaction. Ainsi une onde α présente

à l'instant T peut provenir d'ondes qui au départ sont éloignées les unes des autres. Cette éventualité est illustrée sur la figure de gauche du dessin pour laquelle on a :

$$(4.2.1.1) \quad x_\beta(0) \neq x_\gamma(0), \quad x_\beta(T) = x_\gamma(T).$$

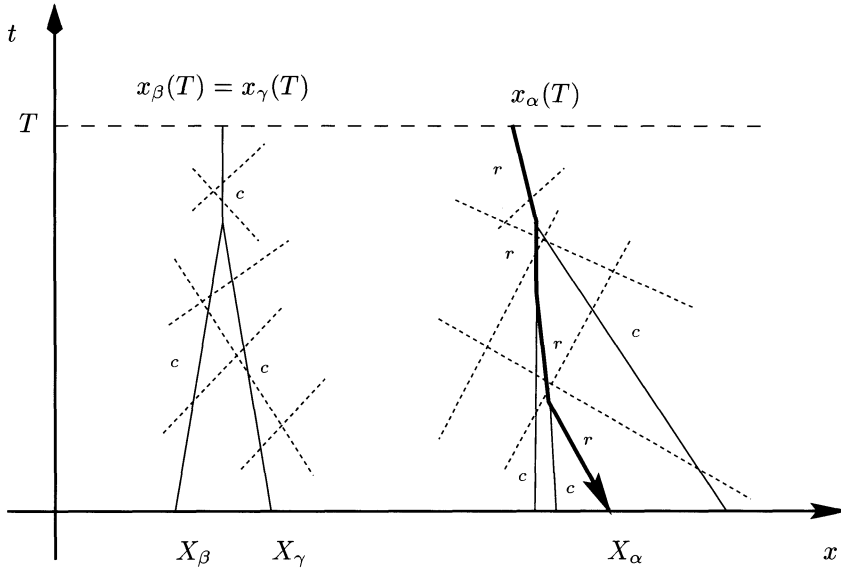


Figure 1. La flèche indique le chemin rétrograde suivi par une onde de raréfaction

Soit α une onde qui est placée à l'instant T^- . La base $\mathcal{B}_t^T(\alpha)$ à un instant t^- inférieur à T de l'onde α regroupe l'ensemble des discontinuités β qui satisfont le critère :

$$(4.2.1.2) \quad \mathcal{B}_t^T(\alpha) := \{ \beta; x_\beta(T) = x_\alpha(T), \tau_\beta^{\text{ini}} \leq t, \text{Na}_\beta(s^-) = \text{Na}_\alpha(T^-), \forall s \in]t, T] \}.$$

Si l'onde α est un choc, la base $\mathcal{B}_t^T(\alpha)$ peut éventuellement contenir plusieurs discontinuités distinctes les unes des autres. La situation est différente lorsque l'onde α est une raréfaction. En effet, comme deux ondes de détente ne peuvent en aucun cas interagir entre elles, aucune ambiguïté n'est possible. L'onde α se prolonge dans le passé nécessairement suivant l'unique onde de détente dont elle provient. En d'autres termes, il existe un unique parcours rétrograde conforme à la notion de catégorie.

En notant $\#$ le cardinal d'un ensemble, on a :

$$(4.2.1.3) \quad \# \mathcal{B}_t^T(\alpha) = 1, \quad \forall t \in]\tau_\alpha^{\text{ini}}, T] \text{ si } \text{Na}_\alpha(T^-) = r,$$

soit encore :

$$(4.2.1.4) \quad \exists ! \beta, \quad x_\beta(T) = x_\alpha(T) \text{ et } \text{Na}_\beta(s^-) = \text{Na}_\alpha(T^-), \quad \forall s \in]\tau_\alpha^{\text{ini}}, T].$$

Lorsque l'onde α est de première catégorie, le parcours rétrograde parvient obligatoirement jusqu'en $t = 0$. Le point X_α qui marque la position de l'onde β à l'instant initial :

$$(4.2.1.5) \quad X_\alpha := x_\beta(0), \quad \text{Na}_\alpha(T^-) = r, \quad \text{Ca}_\alpha(T^-) = 1,$$

est alors appelé la *racine* de l'onde α .

REMARQUE 4.2.1. — Soit α une onde de détente qui est de première catégorie à l'instant T_δ^- . Le long d'un chemin rétrograde associé à la discontinuité α (qui est figuré en trait épais sur le dessin page 67), l'application qui à t associe la force $\alpha(t)$ se comporte, à une erreur négligeable près, comme une fonction décroissante du temps. Cette propriété s'obtient en interprétant le corollaire 3.3.2.1 sous les hypothèses du lemme 4.1.1 (se reporter aussi à (4.1.7)). On a :

$$(4.2.1.6) \quad (1 - \varepsilon)\alpha(T_\delta^-) \leq \alpha(t^-) \leq (1 + \varepsilon)\alpha(0^+), \quad t \in [0, T_\delta].$$

◁

4.2.2. Domaine d'expansion rétrograde. — Parmi les ondes de raréfaction approchées qui sont de type k , de première catégorie et situées à l'instant T_δ à l'intérieur de l'intervalle I , certaines partagent la même racine. Ces discontinuités sont regroupées selon ce critère en J *paquets* qui sont indicés par l'entier j .

Les paquets d'ondes $(\alpha_1^j, \dots, \alpha_{N_j}^j)_{1 \leq j \leq J}$ en question sont déterminés en appliquant les critères suivants :

$$(4.2.2.1) \quad i_1 < x_{\alpha_1^j}(T_\delta) < \dots < x_{\alpha_{N_j-1}^j}(T_\delta) < x_{\alpha_1^j}(T_\delta) < \dots \\ \dots < x_{\alpha_{N_j}^j}(T_\delta) < x_{\alpha_1^{j+1}}(T_\delta) < \dots < x_{\alpha_{N_j}^j}(T_\delta) < i_2.$$

$$(4.2.2.2) \quad t_{\alpha_p^j} = k, \quad \text{Ca}_{\alpha_p^j}(T_\delta^-) = 1, \quad 1 \leq p \leq N_j, \quad 1 \leq j \leq J.$$

$$(4.2.2.3) \quad \text{Na}_{\alpha_p^j}(t^-) = r, \quad \forall t \in]0, T_\delta], \quad 1 \leq p \leq N_j, \quad 1 \leq j \leq J.$$

$$(4.2.2.4) \quad X_{\alpha_{N_j-1}^j} < X_{\alpha_1^j} = \dots = X_{\alpha_{N_j}^j} < X_{\alpha_1^{j+1}}, \quad 1 < j < J.$$

De chaque position $X_{\alpha_1^j}$ partent exactement ν_μ discontinuités. Ces discontinuités sont obtenues en découpant en ν_μ morceaux égaux l'onde de détente qui apparaît lorsque le problème de Riemann posé à l'instant initial à l'emplacement $X_{\alpha_1^j}$ est résolu de manière exacte. Ces ondes évoluent avec le temps. Elles forment un éventail qui a tendance à s'étendre en espace.

Pour une loi de conservation scalaire, seules sont présentes les ondes de première catégorie. La largeur de l'éventail peut alors diminuer suite à l'interaction des ondes de raréfaction (qui bordent les paquets d'ondes) avec des chocs (ce point est illustré sur la figure gauche du dessin). Les paquets d'ondes représentent exactement ce qui reste

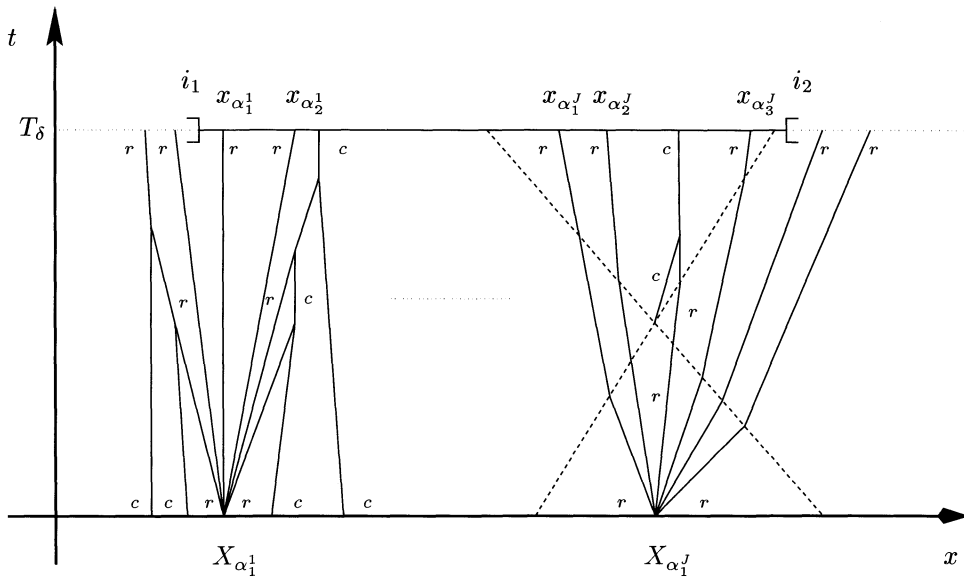


Figure 2. Les deux paquets d'ondes extrêmes (α_1^1, α_2^1) et $(\alpha_1^J, \alpha_2^J, \alpha_3^J)$

à l'instant final T_δ de l'onde de détente initiale, une fois que toutes les cancellations ont eu lieu.

Pour les véritables systèmes (avec $N \geq 3$), la notion de paquet d'ondes est plus élaborée. Plusieurs phénomènes nouveaux viennent s'ajouter aux particularités déjà citées au paragraphe précédent. Par exemple :

→ La vitesse d'expansion de l'éventail se trouve modifiée lorsque le paquet d'ondes est traversé par des discontinuités de type p différent de k .

→ Plusieurs ondes de type k (qui alors sont nécessairement de deuxième catégorie) peuvent être créées à l'intérieur des paquets d'ondes (se reporter à la figure droite du dessin). Leur présence peut provoquer la transformation (suivant le schéma indiqué en (4.1.13)) de certaines ondes de raréfaction de première catégorie en chocs de deuxième catégorie.

La notion de paquet d'ondes apporte des informations utiles. On s'intéresse en particulier au chemin suivi par les discontinuités de première catégorie placées aux positions extrêmes de chaque paquet d'ondes.

On introduit :

DÉFINITION 4.2.2.1. — On appelle domaine d'expansion rétrograde de type k associé à un intervalle I de longueur 1 situé à l'instant T_δ l'ensemble :

$$(4.2.2.5) \quad \mathcal{P}_\mu(I; k) := \{(t, y); 0 \leq t \leq T_\delta, \exists j \in [1, J], y \in]x_{\alpha_1^j}(t), x_{\alpha_{N_j}^j}(t)]\}.$$

Comme l'indique sa notation, cet ensemble dépend de l'indice μ car il est construit en considérant les discontinuités de la solution approchée $u^\mu(t, x)$. Sa section à l'instant t est désignée à l'aide du symbole :

$$(4.2.2.6) \quad \mathcal{S}_t^\mu(k) := \{y; \exists j \in [1, J], y \in]x_{\alpha_1^j}(t), x_{\alpha_{N_j}^j}(t)]\}.$$

Elle est formée de J parties connexes disjointes qui d'après le contrôle indiqué en (3.3.2.10) sont toutes contenues à l'intérieur de l'intervalle :

$$(4.2.2.7) \quad \mathcal{S}_t^\mu(k) \subset I_t^{T_\delta}(k; \diamond_\delta).$$

La majoration (3.3.3.17) et l'inclusion (4.2.2.7) impliquent :

$$(4.2.2.8) \quad \mathcal{M}(\mathcal{S}_t^\mu(k)) \leq \left| I_t^{T_\delta}(k; \diamond_\delta) \right| < 2, \quad 0 \leq t \leq T_\delta,$$

où le symbole \mathcal{M} désigne la mesure de Lebesgue.

D'après les identités qui sont écrites en (4.2.2.4), la base de chaque paquet d'ondes se réduit à un point. En d'autres termes, la section $\mathcal{S}_0^\mu(k)$ n'est autre que l'ensemble vide. Cette information permet de préciser à l'instant initial l'inégalité (4.2.2.8) selon :

$$(4.2.2.9) \quad \mathcal{M}(\mathcal{S}_0^\mu(k)) = 0.$$

La vitesse à laquelle le domaine $\mathcal{P}_\mu(I; k)$ s'étend est une fonction constante par morceaux dont la valeur à un instant t s'exprime comme la dérivée d'une somme :

$$(4.2.2.10) \quad {}^I_k \mathcal{Y}_\mu(t) := \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^J (x_{\alpha_{N_j}^j}(t) - x_{\alpha_1^j}(t)) \right\}.$$

En dehors des interactions, chaque discontinuité α_p^j se propage à la $k^{\text{ième}}$ vitesse caractéristique correspondant à l'état qui est placé juste à droite du point $x_{\alpha_p^j}(t)$. Autrement dit :

$$(4.2.2.11) \quad \frac{d}{dt} \{x_{\alpha_p^j}(t)\} = \lambda_k(u^\mu(t, x_{\alpha_p^j}(t)^+)).$$

Compte tenu de la relation (4.2.2.11), la somme écrite en (4.2.2.10) s'écrit aussi sous la forme :

$$(4.2.2.12) \quad {}^I_k \mathcal{Y}_\mu(t^-) = \sum_{j=1}^J [\lambda_k(u^\mu(t^-, x_{\alpha_{N_j}^j}(t)^+)) - \lambda_k(u^\mu(t^-, x_{\alpha_1^j}(t)^+))].$$

Les ondes contenues à l'instant t à l'intérieur de la section $\mathcal{S}_t^\mu(k)$ sont triées selon leur type a et leur catégorie ℓ . Leurs contributions respectives sont regroupées dans les $2N$ fonctionnelles suivantes :

$$(4.2.2.13) \quad {}_{\ell, k}^{a, I} \mathcal{V}_\mu(t^-) := \Gamma_{k\alpha}^k \sum_{\{\alpha; x_\alpha(t) \in \mathcal{S}_t^\mu(k), t(\alpha) = a, C_{a\alpha}(t^-) = \ell\}} \alpha(t^-),$$

pour $\ell = 1, 2, a = 1, \dots, N$.

La définition (4.2.2.13) considérée pour un indice a égal à k prête à confusion. Il faut préciser si les ondes bordantes α_1^j et $\alpha_{N_j}^j$ interviennent ou non dans la somme.

Par convention, les ondes α_1^j ne sont pas comptées tandis que les ondes $\alpha_{N_j}^j$ le sont (ce choix est en accord avec la position des parenthèses en (4.2.2.6)).

Soit α un choc de type k qui est contenu à l'instant t^- à l'intérieur de la région $\mathcal{P}_\mu(I; k)$:

$$(4.2.2.14) \quad \exists j \in [1, J], \quad x_{\alpha_1^j}(t) < x_\alpha(t) < x_{\alpha_{N_j}^j}(t).$$

Clairement :

$$(4.2.2.15) \quad x_{\alpha_1^j}(s) < x_\beta(s) < x_{\alpha_{N_j}^j}(s), \quad \forall s \in [\tau_\beta^{\text{ini}}, t], \quad \forall \beta \in \mathcal{B}_s^t(\alpha).$$

Comme :

$$(4.2.2.16) \quad \text{Na}_\beta(s^-) = c, \quad \forall s \in]\tau_\beta^{\text{ini}}, t], \quad \forall \beta \in \mathcal{B}_s^t(\alpha),$$

l'encadrement (4.2.2.15) mis en parallèle avec les conditions (4.2.2.3), (4.2.2.4) implique forcément :

$$(4.2.2.17) \quad \tau_\beta^{\text{ini}} > 0, \quad \forall \beta \in \mathcal{B}_{\tau_\beta^{\text{ini}}}^t(\alpha).$$

En d'autres termes, tout choc de type k qui est contenu à l'intérieur du domaine $\mathcal{P}_\mu(I; k)$ est nécessairement de deuxième catégorie. Cette propriété permet d'affirmer que l'expression ${}_{1,k}^{k,I}\mathcal{V}_\mu(\cdot)$ regroupe en fait la somme de toutes les forces α_p^j (du moins étendue aux indices p différent de 1) :

$$(4.2.2.18) \quad {}_{1,k}^{k,I}\mathcal{V}_\mu(t^-) = \sum_{j=1}^J \sum_{p=2}^{N_j} \alpha_p^j(t^-).$$

4.2.3. Un contrôle en variation. — La somme des forces des ondes de raréfaction de première catégorie qui sont présentes à l'instant T_δ à l'intérieur de l'intervalle I ne peut pas dépasser un certain seuil :

PROPOSITION 4.2.3.1. —

Pour tout ε contenu dans l'intervalle $]0, 1]$, il existe un entier $\mu^1(\varepsilon)$ et un nombre réel positif $\delta^2(\varepsilon)$ tels que pour tout δ dans $]0, \delta^2(\varepsilon)]$, tout μ dans $[\mu^1(\varepsilon), \infty[$ et tout \mathcal{R} dans $]0, \mathcal{R}^1(\varepsilon)]$, on ait :

$$(4.2.3.1) \quad T_\delta {}_k^I V_\mu^+(T_\delta^-) \leq 1 + \sum_{k \neq a=1}^N \left| \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{T_\delta} {}_{\ell,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \right| + \varepsilon.$$

Preuve de la proposition 4.2.3.1. — On pose :

$$(4.2.3.2) \quad \tilde{\Gamma} := \max_{1 \leq k \leq N} \max_{1 \leq a \leq N} |\Gamma_{ka}^k|.$$

$$(4.2.3.3) \quad \delta^2(\varepsilon) := \delta^1(\varepsilon'), \quad \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{1000N(1 + \tilde{\Gamma} + D_1)}.$$

Avec ces conventions, le lemme 4.1.1 implique :

$$(4.2.3.4) \quad {}^I_k V'_\mu(t^-) \leq \frac{\varepsilon \delta_2^\mu}{1000N(1 + \bar{\Gamma} + D_1)} = \varepsilon' \delta_2^\mu,$$

$$|I| = 1, \quad \delta \in]0, \delta^2(\varepsilon)], \quad \forall t \in [0, T_\delta], \quad \mu \in [\mu_\delta, \infty[, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Par ailleurs, l'inégalité (3.3.1.10) et les définitions (4.1.7) et (4.2.3.3) fournissent la majoration grossière :

$$(4.2.3.5) \quad \delta_2^\mu \leq 2\delta \leq 2\delta^2(\varepsilon) \leq 1.$$

L'indice $\mu^1(\varepsilon)$ est sélectionné de manière à ce que :

$$(4.2.3.6) \quad 100/\nu_\mu \leq \varepsilon, \quad \forall \mu \in [\mu^1(\varepsilon), \infty[.$$

L'entier μ est désormais fixé supérieur à $\mu^1(\varepsilon)$. Chaque différence qui intervient en (4.2.2.12) est décomposée sous la forme d'une somme qui fait intervenir l'ensemble des sauts intermédiaires de l'expression $\lambda_k(u^\mu(t, \cdot))$:

$$(4.2.3.7) \quad \lambda_k(u^\mu(t^-, x_{\alpha_{N_j}^j}(t^+)) - \lambda_k(u^\mu(t^-, x_{\alpha_1^j}(t^+)))$$

$$= \sum_{\{\beta; x_\beta(t) \in]x_{\alpha_1^j}(t), x_{\alpha_{N_j}^j}(t)\}} [\lambda_k(u^\mu(t^-, x_\beta(t^+)) - \lambda_k(u^\mu(t^-, x_\beta(t^-)))].$$

En mettant à profit (1.2.8), (1.3.6), (3.1.12) et (3.3.1.9), on voit apparaître :

$$(4.2.3.8) \quad \left| \lambda_k(u^\mu(t^-, x_\beta(t^+)) - \lambda_k(u^\mu(t^-, x_\beta(t^-)) - \Gamma_{kt(\beta)}^k \beta(t^-) \right|$$

$$\leq D_1 |\beta(t^-)| \delta_2^\mu.$$

Comme l'inventaire des ondes établi en (4.2.2.13) est exhaustif, il vient en utilisant (3.1.13), (4.2.2.8), (4.2.2.12), (4.2.3.7) et (4.2.3.8) :

$$(4.2.3.9) \quad \left| {}^I_k \mathcal{Y}_\mu(t^-) - \sum_{\ell=1}^2 \sum_{a=1}^N {}^{a,I}_{\ell,k} \mathcal{Y}_\mu(t^-) \right| \leq 15ND_1(\delta_2^\mu)^2.$$

La relation (4.2.2.10) est intégrée entre les instants 0 et T_δ . En tenant compte de (4.2.2.9), on obtient :

$$(4.2.3.10) \quad \int_0^{T_\delta} {}^I_k \mathcal{Y}_\mu(t^-) dt = \sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(T_\delta) - x_{\alpha_1^j}(T_\delta)].$$

D'après les encadrements cités en (4.2.2.1), les points $x_{\alpha_p^j}(T_\delta)$ sont tous contenus à l'intérieur de l'intervalle I . Comme par hypothèse, cet intervalle est de longueur 1, on a :

$$(4.2.3.11) \quad \left| \sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(T_\delta) - x_{\alpha_1^j}(T_\delta)] \right| \leq 1.$$

L'inégalité (4.2.3.9) est intégrée entre les instants 0 et T_δ :

$$(4.2.3.12) \quad \left| \int_0^{T_\delta} {}^I_k \mathcal{V}_\mu(t^-) dt - \sum_{\ell=1}^2 \sum_{a=1}^N \int_0^{T_\delta} {}^{a,I}_{\ell,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \right| \leq 15ND_1 T_\delta (\delta_2^\mu)^2.$$

L'identité (4.2.3.10) est reportée en (4.2.3.12). L'inégalité obtenue est interprétée à la lumière de (4.2.3.11). Il vient :

$$(4.2.3.13) \quad \int_0^{T_\delta} {}^{k,I}_{1,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \leq \int_0^{T_\delta} \left| {}^{k,I}_{2,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) \right| dt \\ + 1 + 15ND_1 T_\delta (\delta_2^\mu)^2 + \sum_{k \neq a=1}^N \left| \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{T_\delta} {}^{a,I}_{\ell,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \right|.$$

La remarque 4.2.1 signifie dans le contexte du lemme 4.2.1 :

$$(4.2.3.14) \quad (1 - \varepsilon') \alpha_p^j(T_\delta^-) \leq \alpha_p^j(t^-) \leq (1 + \varepsilon') \alpha_p^j(0^+), \\ \forall t \in]0, T_\delta], \quad 1 \leq p \leq N_j, \quad 1 \leq j \leq J.$$

Compte tenu de l'identité (4.2.2.18), les encadrements indiqués en (4.2.3.14) impliquent :

$$(4.2.3.15) \quad {}^{k,I}_{1,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) \geq (1 - \varepsilon') {}^{k,I}_{1,k} \mathcal{V}_\mu(T_\delta^-), \quad \forall t \in]0, T_\delta].$$

Toutes les ondes de raréfaction approchées de type k et de première catégorie qui sont contenues à l'instant T_δ à l'intérieur de l'intervalle I ne sont pas répertoriées en (4.2.3.15). Pour obtenir un décompte exhaustif, il faut compléter avec les ondes α_1^j :

$$(4.2.3.16) \quad {}^{k,I}_{1,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) \geq (1 - \varepsilon') {}^I_k V_\mu^+(T_\delta^-) - (1 - \varepsilon') \sum_{j=1}^J \alpha_1^j(T_\delta^-), \quad \forall t \in]0, T_\delta].$$

La remarque 4.2.1 est de nouveau invoquée (ou encore (4.2.3.14)). Elle permet cette fois-ci de majorer la somme qui est placée à droite de l'inégalité (4.2.3.16) conformément à :

$$(4.2.3.17) \quad \sum_{j=1}^J \alpha_1^j(T_\delta^-) \leq (1 + \varepsilon') \sum_{j=1}^J \alpha_1^j(0^+).$$

D'après l'inclusion (4.2.2.7) et l'inégalité (4.2.2.8), toutes les racines $X_{\alpha_1^j}$ sont contenues à l'intérieur d'un intervalle de longueur inférieure à 2 :

$$(4.2.3.18) \quad X_{\alpha_1^j} \in I_0^{T_\delta}(k; \diamond_\delta), \quad \forall j \in [1, J],$$

avec :

$$(4.2.3.19) \quad \left| I_0^{T_\delta}(k; \diamond_\delta) \right| < 2.$$

D'après le procédé de découpage décrit en (3.2.3), exactement ν_μ discontinuités non admissibles partent de chaque point $X_{\alpha_1^j}$. Ces discontinuités partagent la même force, égale à θ_k^j / ν_μ avec pour θ_k^j la force de l'onde de raréfaction de type k qui apparaît

lorsque le problème de Riemann posé au point $X_{\alpha_1^j}$ est résolu de manière exacte. La condition (3.1.7) associée aux informations (4.2.3.18) et (4.2.3.19) permet de contrôler en fonction du paramètre ν_μ la contribution apportée par les forces $\alpha_1^j(0)$:

$$(4.2.3.20) \quad \sum_{j=1}^J \alpha_1^j(0) = \frac{1}{\nu_\mu} \sum_{j=1}^J \theta_k^j \leq \frac{1}{\nu_\mu} \bar{V}_{\text{ar}:I_0^{T_\delta}(k;\diamond_\delta)}^{\text{loc}}(h^\mu(\cdot)) \\ \leq \frac{3}{\nu_\mu} \bar{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h^\mu(\cdot)) \leq \frac{3\delta_2^\mu}{\nu_\mu}.$$

Le contrôle (4.2.3.20) est reporté en (4.2.3.17). L'expression obtenue est ensuite plongée en (4.2.3.16) :

$$(4.2.3.21) \quad {}_{1,k}^{k,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) \geq (1 - \varepsilon') I_k V_\mu^+(T_\delta^-) - 3(1 - \varepsilon'^2) \delta_2^\mu / \nu_\mu, \quad \forall t \in]0, T_\delta].$$

L'inégalité (4.2.3.21) est intégrée de 0 à T_δ :

$$(4.2.3.22) \quad \int_0^{T_\delta} {}_{1,k}^{k,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \geq T_\delta I_k V_\mu^+(T_\delta^-) - \varepsilon' T_\delta I_k V_\mu^+(T_\delta^-) - 3\delta_2^\mu T_\delta / \nu_\mu.$$

D'après (3.1.13), (4.1.3), (4.2.3.3) et (4.2.3.5), on a :

$$(4.2.3.23) \quad \varepsilon' T_\delta I_k V_\mu^+(T_\delta^-) \leq \varepsilon' T_\delta I_k V_{\nu_\mu}^\mu(T_\delta^-) \leq 5\varepsilon' T_\delta \delta_2^\mu \leq 10\varepsilon' \left(\frac{3}{\delta} + 1 \right) \delta \\ \leq \varepsilon' (30 + 10\delta^2(\varepsilon)) \leq 35\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

Par ailleurs, les deux contrôles (4.2.3.5) et (4.2.3.6) conduisent à :

$$(4.2.3.24) \quad 3\delta_2^\mu T_\delta / \nu_\mu \leq 6\delta \left(\frac{3}{\delta} + 1 \right) / \nu_\mu \leq (18 + 6\delta^2(\varepsilon)) / \nu_\mu \\ \leq 21 / \nu_\mu \leq \varepsilon / 4, \quad \forall \mu \in [\mu^1(\varepsilon), \infty[.$$

Les majorations (4.2.3.23) et (4.2.3.24) sont placées en (4.2.3.22) :

$$(4.2.3.25) \quad T_\delta I_k V_\mu^+(T_\delta^-) \leq \int_0^{T_\delta} {}_{1,k}^{k,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité (4.2.3.4) interprétée à l'aide de l'inclusion (4.2.2.7) et du contrôle (4.2.2.8) fournit avec (4.2.3.3) :

$$(4.2.3.26) \quad \int_0^{T_\delta} \left| {}_{2,k}^{k,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) \right| dt \leq \tilde{\Gamma} \int_0^{T_\delta} I_k^{T_\delta}(k;\diamond_\delta) V_\mu'(t^-) dt \\ \leq 2\tilde{\Gamma} T_\delta \varepsilon' \delta_2^\mu \leq (12 + 4\delta^2(\varepsilon)) \tilde{\Gamma} \varepsilon' \leq 14\tilde{\Gamma} \varepsilon' \leq \varepsilon / 4.$$

Par ailleurs, d'après (4.1.7), (4.2.3.3) et (4.2.3.5), on a :

$$(4.2.3.27) \quad 15ND_1 T_\delta (\delta_2^\mu)^2 \leq 60ND_1 \left(\frac{3}{\delta} + 1 \right) \delta^2 \\ \leq 240ND_1 \delta^2(\varepsilon) \leq \frac{240ND_1 \varepsilon}{1000N(1 + \tilde{\Gamma} + D_1)} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Les majorations (4.2.3.26) et (4.2.3.27) sont reportées en (4.2.3.13) puis l'ensemble obtenu est plongé en (4.2.3.25). On voit ainsi apparaître l'inégalité (4.2.3.1) de la proposition 4.2.3.1. \square

4.2.4. Décalage sur les vitesses. — Les quantités intégrales qui sont placées à droite de l'inégalité (4.2.3.1) traduisent le décalage que provoque sur la vitesse d'expansion du domaine $\mathcal{P}_\mu(I; k)$ la traversée de cette région par des ondes qui sont de première catégorie et dont le type a est différent de k .

À l'aide de (4.2.2.7), (4.2.2.8) et (3.1.13), on obtient facilement le contrôle grossier :

$$(4.2.4.1) \quad \left| \sum_{\ell=1}^2 {}^{a,I}_{\ell,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) \right| \leq 15\delta_2^\mu, \quad t \in [0, T_\delta],$$

ce qui à fortiori conduit simplement à :

$$(4.2.4.2) \quad \left| \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{T_\delta} {}^{a,I}_{\ell,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \right| \leq \text{Constante}.$$

La majoration (4.2.4.2) manque de précision. Le fait est qu'il se produit un phénomène de cancellation. Les ondes de détentes et les chocs de type a qui traversent successivement la région $\mathcal{P}_\mu(I; k)$ décalent la vitesse d'expansion dans des directions opposées. Ces effets se compensent et donnent lieu finalement à des estimations plus fines :

PROPOSITION 4.2.4.1. —

Pour tout ε contenu dans l'intervalle $]0, 1]$, il existe deux nombres réels positifs notés $\delta^3(\varepsilon)$ et $\gamma^2(\varepsilon)$ tels que pour tout contrôle δ dans $]0, \delta^3(\varepsilon)]$, pour tout rapport d'influence \mathcal{R} dans $]0, \mathcal{R}^1(\varepsilon)]$, pour tout nombre γ dans $]0, \gamma^2(\varepsilon)]$ et pour tout entier μ dans $[\mu^1(\varepsilon), \infty[$, on ait :

$$(4.2.4.3) \quad \left| \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{T_\delta} {}^{a,I}_{\ell,k} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \right| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq a \neq k \leq N.$$

Preuve de la proposition 4.2.4.1. — Pour simplifier la discussion et les dessins, on suppose $\lambda_k = 0$. Dans ce qui suit, seul le cas d'un entier a strictement supérieur à l'indice k est envisagé. Les autres situations (à savoir $a < k$ c'est-à-dire $\lambda_a < 0$) se traitent à l'aide d'arguments semblables.

La démonstration, assez technique, se déroule en plusieurs étapes.

i) Temps d'entrée et de sortie.

Le domaine d'expansion rétrograde $\mathcal{P}_\mu(I; k)$ peut s'écrire comme l'union de ses composantes connexes :

$$(4.2.4.4) \quad \mathcal{P}_\mu(I; k) = \bigcup_{j=1}^J \mathcal{P}_\mu^j(I; k).$$

Plus précisément, les ensembles $\mathcal{P}_\mu^j(I; k)$ sont définis comme étant :

$$(4.2.4.5) \quad \mathcal{P}_\mu^j(I; k) := \{(t, x); 0 \leq t \leq T_\delta, x_{\alpha_1^j}(t) < x \leq x_{\alpha_{N_j}^j}(t)\}.$$

Plus généralement, l'indice j est ajouté en haut à droite de toutes les expressions qui ont été introduites lorsque seule la région $\mathcal{P}_\mu^j(I; k)$ se trouve concernée. Par exemple le symbole $\mathcal{S}_t^{\mu, j}(k)$ désigne la section à l'instant t du domaine $\mathcal{P}_\mu^j(I; k)$. Avec cette convention, on a aussi :

$$(4.2.4.6) \quad {}_I^I \mathcal{Y}_\mu^j(t) := \frac{d}{dt} \left\{ (x_{\alpha_{N_j}^j}(t) - x_{\alpha_1^j}(t)) \right\}.$$

$$(4.2.4.7) \quad {}_{\ell, k}^{a, I} \mathcal{Y}_\mu^j(t^-) := \Gamma_{k a}^k \sum_{\{\alpha; x_\alpha(t) \in \mathcal{S}_t^{\mu, j}(k), t(\alpha) = a, \text{Ca}_\alpha(t^-) = \ell\}} \alpha(t^-).$$

D'après la condition de stricte hyperbolicité (1.4.3) et la majoration obtenue en (3.3.2.10), on a :

$$(4.2.4.8) \quad \sup_{(t, x) \in [0, T_\delta] \times \mathbb{R}} \lambda_a(u^\mu(t, x)) - \lambda_k(u^\mu(t, x)) \geq \frac{\zeta}{2}.$$

L'inégalité (4.2.4.8) signifie qu'une onde β de type a qui, à l'instant t , se trouve située à gauche du point $x_{\alpha_1^j}(t)$:

$$(4.2.4.9) \quad x_\beta(t) \leq x_{\alpha_1^j}(t),$$

se rapproche du domaine $\mathcal{P}_\mu^j(I; k)$ lorsque le temps évolue. Il se peut qu'elle atteigne cette région avant l'instant d'arrêt T_δ . Soit alors $\text{En}^j(\beta)$ l'instant d'entrée, c'est-à-dire le nombre qui réalise :

$$(4.2.4.10) \quad x_\beta(\text{En}^j(\beta)) = x_{\alpha_1^j}(\text{En}^j(\beta)).$$

De même, on introduit l'instant de sortie $\text{So}^j(\beta)$, c'est-à-dire le nombre qui vérifie :

$$(4.2.4.11) \quad x_\beta(\text{So}^j(\beta)) = x_{\alpha_{N_j}^j}(\text{So}^j(\beta)) \text{ si } x_{\alpha_{N_j}^j}(T_\delta) < x_\beta(T_\delta),$$

avec pour autre convention :

$$(4.2.4.12) \quad \text{So}^j(\beta) = T_\delta \text{ si } x_{\alpha_1^j}(T_\delta) \leq x_\beta(T_\delta) \leq x_{\alpha_{N_j}^j}(T_\delta).$$

Les ondes qui sont de type a sont regroupées en fonction de leur instant d'entrée à l'intérieur du domaine $\mathcal{P}_\mu(I; k)$:

$$(4.2.4.13) \quad {}_k^{a, I} \mathcal{O}_n^1 := \{\beta; t_\beta = a, \tau_\beta^{\text{ini}} \leq n, x_\beta(n) \leq x_{\alpha_1^j}(n), n \leq \text{En}^1(\beta) < n + 1\}.$$

Le symbole ${}_t \alpha_\mu^j(\beta)$ est utilisé pour désigner la durée que met l'onde β pour traverser le domaine $\mathcal{P}_\mu^j(I; k)$:

$$(4.2.4.14) \quad {}_t \alpha_\mu^j(\beta) := \text{So}^j(\beta) - \text{En}^j(\beta), \quad \beta \in {}_k^{a, I} \mathcal{O}_n^1.$$

La trajectoire de l'onde β suit un chemin lipschitzien qui coupe transversalement le domaine $\mathcal{P}_\mu^j(I; k)$ suivant un arc de courbe dont la longueur est repérée par la notation :

$$(4.2.4.15) \quad {}_x \alpha_\mu^j(\beta) := \int_{\text{En}^j(\beta)}^{\text{So}^j(\beta)} (1 + x'_\beta(t)^2)^{1/2} dt.$$

LEMME 4.2.4.1. — *Sous les hypothèses de la proposition 3.1.1, il existe deux constantes positives D_{10} et D_{11} (où le nombre D_{10} est sélectionné entier) telles que l'on ait :*

$$(4.2.4.16) \quad x_\beta(t) \in S_t^\mu(k) \implies \text{So}^J(\beta) \leq t + D_{10}, D_{10} \in \mathbb{N}^*.$$

$$(4.2.4.17) \quad \left| \sum_{j=1}^J t \alpha_\mu^j(\beta) - \frac{1}{\lambda_a - \lambda_k} \sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(n) - x_{\alpha_1^j}(n)] \right| \leq D_{11} \delta,$$

$$\beta \in {}_k^{a,I} \mathcal{O}_n^1, \quad 0 \leq n \leq T_\delta - D_{10} - 1.$$

Preuve du lemme 4.2.4.1. — On pose :

$$(4.2.4.18) \quad D_{10} := \mathcal{E}[4/\zeta] + 1.$$

D'après (4.2.2.8) :

$$(4.2.4.19) \quad x_\beta(t) \in S_t^\mu(k) \implies 0 \leq x_{\alpha_{N_J}^J}(t) - x_\beta(t) \leq 2.$$

D'après (3.3.2.10) :

$$(4.2.4.20) \quad x_\beta(t) + \lambda_a D_{10} - \zeta D_{10}/4 \leq x_\beta(t + D_{10}).$$

$$(4.2.4.21) \quad x_{\alpha_{N_J}^J}(t + D_{10}) \leq x_{\alpha_{N_J}^J}(t) + \lambda_k D_{10} + \zeta D_{10}/4.$$

Le choix effectué en (4.2.4.18) associé à (4.2.4.19) et (4.2.4.20) garantit :

$$(4.2.4.22) \quad x_{\alpha_{N_J}^J}(t) + \lambda_k D_{10} + \frac{\zeta D_{10}}{4} \leq x_\beta(t) + \lambda_a D_{10} - \frac{\zeta D_{10}}{4},$$

ce qui implique à la vue de (4.2.4.20) et (4.2.4.21) :

$$(4.2.4.23) \quad \text{So}^J(\beta) \leq t + D_{10}.$$

Une onde de type a qui appartient à l'ensemble ${}_k^{a,I} \mathcal{O}_n^1$ pour un entier n inférieur à $T_\delta - D_{10} - 1$ sort du domaine $\mathcal{P}_\mu(I; k)$ à un instant antérieur à $\text{En}^1(\beta) + D_{10}$. Cette remarque associée à (3.3.2.7) conduit à :

$$(4.2.4.24) \quad \sum_{j=1}^J {}_x \alpha_\mu^j(\beta) \leq \int_{\text{En}^1(\beta)}^{\text{En}^1(\beta) + D_{10}} (1 + x'_\beta(t)^2)^{1/2} dt \leq \sqrt{2} D_{10}.$$

Toujours d'après (3.3.2.7), on a :

$$(4.2.4.25) \quad {}_t \alpha_\mu^j(\beta) \leq {}_x \alpha_\mu^j(\beta) \leq \sqrt{2} {}_t \alpha_\mu^j(\beta).$$

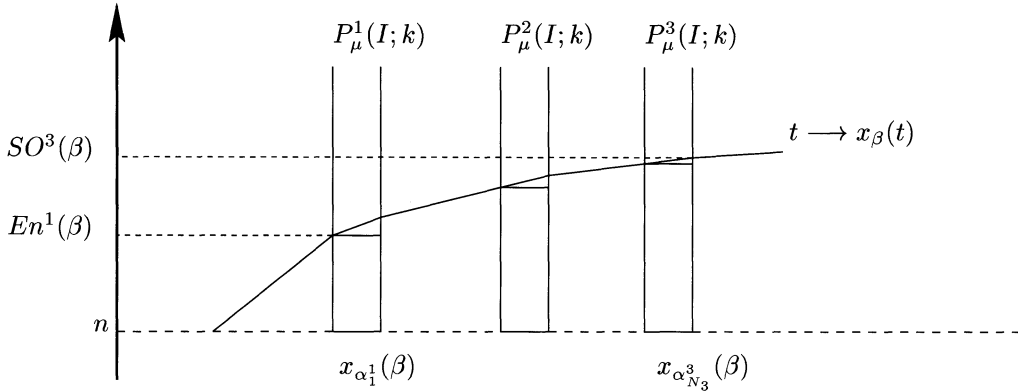


Figure 3

La limitation (3.3.2.10) imposée aux différentes vitesses de propagation garantit l'encadrement :

$$(4.2.4.26) \quad \frac{x_{\alpha_{N_j}^j}(\text{En}^j(\beta)) - x_{\alpha_1^j}(\text{En}^j(\beta))}{\lambda_a - \lambda_k + 2\Diamond\delta} \leq t \alpha_{\mu}^j(\beta) \leq \frac{x_{\alpha_{N_j}^j}(\text{En}^j(\beta)) - x_{\alpha_1^j}(\text{En}^j(\beta))}{\lambda_a - \lambda_k - 2\Diamond\delta}.$$

En utilisant (1.4.3), (3.3.2.10), (4.2.4.25) et (4.2.4.26), on obtient :

$$(4.2.4.27) \quad \left| t \alpha_{\mu}^j(\beta) - (x_{\alpha_{N_j}^j}(\text{En}^j(\beta)) - x_{\alpha_1^j}(\text{En}^j(\beta)))/(\lambda_a - \lambda_k) \right| \leq \frac{4\Diamond\delta t \alpha_{\mu}^j(\beta)}{(\lambda_a - \lambda_k + 2\Diamond\delta)(\lambda_a - \lambda_k - 2\Diamond\delta)} \leq \frac{8\Diamond\delta x \alpha_{\mu}^j(\beta)}{\zeta^2},$$

d'où l'on déduit avec (4.2.4.24) :

$$(4.2.4.28) \quad \left| \sum_{j=1}^J t \alpha_{\mu}^j(\beta) - \frac{1}{\lambda_a - \lambda_k} \sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(\text{En}^j(\beta)) - x_{\alpha_1^j}(\text{En}^j(\beta))] \right| \leq \frac{12D_{10}\Diamond\delta}{\zeta^2}.$$

La définition (4.2.4.6) permet d'écrire :

$$(4.2.4.29) \quad \sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(\text{En}^j(\beta)) - x_{\alpha_1^j}(\text{En}^j(\beta))] = \sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(n) - x_{\alpha_1^j}(n)] + \sum_{j=1}^J \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{[n, \text{En}^j(\beta)]}(s) \mathcal{Y}_{\mu}^j(s^-) ds.$$

La majoration (4.2.3.9) est interprétée en distinguant selon les différents indices j . Cette manipulation fournit :

$$(4.2.4.30) \quad \left| \sum_{j=1}^J \mathbb{I}_{[n, \text{En}^j(\beta)]}(s) \left[\mathcal{V}_\mu^j(s^-) - \sum_{a=1}^N \sum_{\ell=1}^2 {}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^j(s^-) \right] \right| \leq 15ND_1(\delta_2^\mu)^2.$$

Par ailleurs, on a :

$$(4.2.4.31) \quad \left| \sum_{j=1}^J \sum_{a=1}^N \sum_{\ell=1}^2 {}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^j(s^-) \right| \leq 15N\bar{\Gamma}\delta_2^\mu.$$

En définitif, on obtient :

$$(4.2.4.32) \quad \left| \sum_{j=1}^J t \alpha_\mu^j(\beta) - \frac{1}{\lambda_a - \lambda_k} \sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(n) - x_{\alpha_1^j}(n)] \right| \leq (240D_{10}\hat{\gamma}A_\delta + 30N\zeta D_{10}(\bar{\Gamma} + 2D_1\delta))\delta/\zeta^2 \leq D_{11}\delta,$$

à savoir (4.2.4.17) pour un choix convenable de la constante D_{11} . □

ii) *Mise en forme du problème.*

Les ondes $(\beta_q^n)_{1 \leq q \leq Q_n}$ qui sont contenues dans l'ensemble ${}^{a,I} \mathcal{O}_n^1$ sont rangées en ordre croissant suivant leurs positions respectives à l'instant n :

$$(4.2.4.33) \quad x_{\beta_1^n}(n) < x_{\beta_2^n}(n) < \dots < x_{\beta_q^n}(n) < \dots < x_{\beta_{Q_n-1}^n}(n) < x_{\beta_{Q_n}^n}(n),$$

pour $\beta_q^n \in {}^{a,I} \mathcal{O}_n^1$.

Le classement effectué ci-dessus reste conservé (au sens large) lorsque le temps évolue :

$$(4.2.4.34) \quad x_{\beta_1^n}(t) \leq \dots \leq x_{\beta_q^n}(t) \leq \dots \leq x_{\beta_{Q_n}^n}(t), \quad t \geq n.$$

Toutefois certaines discontinuités peuvent s'assembler. Par exemple les ondes successives $\beta_{q_1}^n, \beta_{q_1+1}^n, \dots, \beta_{q_2-1}^n$ et $\beta_{q_2}^n$ peuvent se confondre à l'instant t (avec $t > n$) en une seule onde β . Dans ce cas, la force $\beta(t)$ de l'onde β est décomposée sous la forme :

$$(4.2.4.35) \quad \beta(t^-) = \beta_{q_1}^n(n) + \beta_{q_1+1}^n(n) + \dots + \beta_{q_2-1}^n(n) + \beta_{q_2}^n(n) + \text{Err}(\beta(t^-)) = \text{Exa}(\beta(t^-)) + \text{Err}(\beta(t^-)),$$

avec :

$$(4.2.4.36) \quad x_{\beta_{q_1-1}^n}(t) < x_{\beta_{q_1}^n}(t) = \dots = x_{\beta_{q_2}^n}(t) < x_{\beta_{q_2+1}^n}(t).$$

Une fois passé l'instant n , il se peut que des ondes de type a apparaissent (à l'issue d'interactions) entre les deux discontinuités bordantes β_1^n et $\beta_{Q_n}^n$. Les ondes en question sont alors de deuxième catégorie au moment de leur création. Elles poursuivent ensuite leur chemin. Quelques unes se trouvent absorbées au passage des discontinuités β_q^n . Dans ce cas, leur contribution est gardée en mémoire au niveau du terme d'erreur $\text{Err}(\beta(\cdot))$.

D'autres ondes, par exemple γ , restent libres en ce sens où :

$$(4.2.4.37) \quad x_{\beta_1^n}(t) < \cdots < x_{\beta_q^n}(t) < x_\gamma(t) < x_{\beta_{q+1}^n}(t) < \cdots < x_{\beta_1^{n-1}}(t),$$

avec $t \in [n, n + D_{10} + 1]$, $t_\gamma = a$.

Il est naturel d'adopter en ce qui concerne les ondes γ qui satisfont le critère (4.2.4.37) la convention d'écriture suivante :

$$(4.2.4.38) \quad \text{Err}(\gamma(t^-)) := \gamma(t^-), \text{Exa}(\gamma(t^-)) := 0.$$

Les discontinuités sont regroupées selon leur position :

$$(4.2.4.39) \quad \begin{aligned} & {}_k^{a,I} \mathcal{O}_n^1(t) := \\ & \quad \{ \alpha; t_\alpha = a, x_\alpha(t) \in \mathcal{S}_t^\mu(k), x_{\beta_1^n}(t) \leq x_\alpha(t) < x_{\beta_1^{n-1}}(t) \}, \end{aligned}$$

pour $n \in [0, T_\delta - D_{10} - 1]$, avec par extension pour le départ et l'arrivée :

$$(4.2.4.40) \quad {}_k^{a,I} \mathcal{O}_{\text{in}}^1(t) := \{ \alpha; t_\alpha = a, x_\alpha(t) \in \mathcal{S}_t^\mu(k), x_{\beta_{Q_0}^0}(t) < x_\alpha(t) \},$$

pour $t \in [0, T_\delta]$.

$$(4.2.4.41) \quad {}_k^{a,I} \mathcal{O}_{\text{fi}}^1(t) := \{ \alpha; t_\alpha = a, x_\alpha(t) \in \mathcal{S}_t^\mu(k), x_\alpha(t) < x_{\beta_1^{T_\delta - D_{10} - 1}}(t) \},$$

pour $t \in [T_\delta - D_{10}, T_\delta]$.

Les quantités intégrales qui sont placées à droite de l'inégalité (4.2.3.1) sont décomposées conformément à la partition ainsi réalisée :

$$(4.2.4.42) \quad \begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{T_\delta} {}_{\ell,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \\ & = \sum_{n=0}^{T_\delta - D_{10} - 1} \int_0^{T_\delta} \mathbb{I}_{[n, T_\delta]}(t^-) ({}_{e,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) + {}_{d,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-)) dt \\ & \quad + \int_0^{T_\delta} {}_k^{a,I} \mathcal{V}_\mu^{\text{in}}(t^-) dt + \int_0^{T_\delta} {}_k^{a,I} \mathcal{V}_\mu^{\text{fi}}(t^-) dt. \end{aligned}$$

En ligne (4.2.4.42), on a posé :

$$(4.2.4.43) \quad {}_{e,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) := \Gamma_{ka}^k \sum_{\{ \alpha; \alpha \in {}_k^{a,I} \mathcal{O}_n^1(t) \}} \text{Exa}(\alpha(t^-)).$$

$$(4.2.4.44) \quad {}_{d,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) := \Gamma_{ka}^k \sum_{\{ \alpha; \alpha \in {}_k^{a,I} \mathcal{O}_n^1(t) \}} \text{Err}(\alpha(t^-)).$$

$$(4.2.4.45) \quad {}_k^{a,I} \mathcal{V}_\mu^\star(t^-) := \Gamma_{ka}^k \sum_{\{ \alpha; \alpha \in {}_k^{a,I} \mathcal{O}_\star^1(t) \}} \alpha(t^-), \quad \star \in \{\text{in}, \text{fi}\}.$$

La majoration évidente :

$$(4.2.4.46) \quad \left| {}_k^{a,I} \mathcal{V}_\mu^\star(t^-) \right| \leq 15N\tilde{\Gamma}\delta_2^\mu, \quad \star \in \{\text{in}, \text{fi}\},$$

associée à la propriété (4.2.4.16) fournit :

$$(4.2.4.47) \quad \left| \int_0^{T_\delta} {}_k^{a,I} \mathcal{V}_\mu^*(t^-) dt \right| \leq 30ND_{10} \tilde{\Gamma} \delta, \quad * \in \{\text{in}, \text{fi}\}.$$

Il reste à évaluer les différentes expressions :

$$(4.2.4.48) \quad \left| \int_0^{T_\delta} \mathbb{I}_{[n, T_\delta]}(t^-) {}_{*,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) dt \right|, \quad * \in \{e, d\}, \quad n \in [0, T_\delta - D_{10} - 1].$$

iii) *Des quantités négligeables.*

La quantité ${}_{d,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-)$ est constituée d'une somme d'expressions. Ces expressions comprennent les forces d'un certain nombre d'ondes de deuxième catégorie (dont certaines sont absorbées par les β_q^n tandis que d'autres ne le sont pas) augmentées de perturbations induites par le croisement de discontinuités de type a avec des discontinuités de type b différent de a . L'ensemble de ces contributions est négligeable en ce sens où :

LEMME 4.2.4.2. — *Pour tout entier n dans $[0, T_\delta - D_{10} - 1]$, on a :*

$$(4.2.4.49) \quad \left| \int_0^{T_\delta} \mathbb{I}_{[n, T_\delta]}(t^-) {}_{d,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) dt \right| \leq D_{12} \delta^2.$$

Preuve du lemme 4.2.4.2. — On pose :

$$(4.2.4.50) \quad [n, n + D_{10} + 1] \ni t \mapsto {}_k^I \mathcal{Q}_n(t^-) := \sum_{\alpha \mathcal{A}_{J_n^t} \beta} |\alpha(t^-)| |\beta(t^-)|.$$

En (4.2.4.50), l'intervalle J_n^t désigne (se reporter à (3.2.13) et (3.2.15) pour des explications en ce qui concerne les notations) :

$$(4.2.4.51) \quad J_n^t := (I_{n+D_{10}+1}^{T_\delta}(k; \diamond_\delta))_t^{n+D_{10}+1}(1).$$

Notez le principe qui est à la base de cette construction. D'après l'inclusion (4.2.2.7), l'ensemble $S_{n+D_{10}+1}^\mu(k)$ est entièrement contenu dans l'intervalle $I_{n+D_{10}+1}^{T_\delta}(k; \diamond_\delta)$. Par conséquent, le potentiel quadratique ${}_k^I \mathcal{Q}_n(t^-)$ rassemble (en particulier) toutes les interactions susceptibles de se produire entre les instants n et $n + D_{10} + 1$ à l'intérieur de la région $\mathcal{P}_\mu(I; k)$.

Une fonctionnelle auxiliaire est introduite :

$$(4.2.4.52) \quad {}_k^I \tilde{\mathcal{F}}_n(t^-) := |\Gamma_{ka}^k| \sum_{\{\alpha; \alpha \in {}_k^{a,I} \mathcal{O}_n^1(t)\}} |\text{Err}(\alpha(t^-))| + 2\tilde{\Gamma}(\mathcal{R} + \hat{\delta}) {}_k^I \mathcal{Q}_n(t^-).$$

Clairement :

$$(4.2.4.53) \quad \left| {}_{d,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) \right| \leq {}_k^I \tilde{\mathcal{F}}_n(t^-), \quad t \in [n, n + D_{10} + 1].$$

Par ailleurs, d'après (3.1.13) et (4.2.2.8), on a :

$$(4.2.4.54) \quad \begin{aligned} {}^I_k \bar{\mathcal{F}}_n(n^-) &= 2\tilde{\Gamma}(\mathcal{R} + \delta) {}^I_k \mathcal{Q}_n(n^-) \\ &\leq 2\tilde{\Gamma}(\mathcal{R} + \delta) (20(2 + D_{10})N\delta_2^\mu)^2. \end{aligned}$$

D'après la propriété (4.2.4.16), les intégrales qui sont considérées en (4.2.4.49) sont en fait étendues à un intervalle dont la longueur ne dépasse pas la valeur $D_{10} + 1$. Cette remarque associée à (4.2.4.53) et (4.2.4.54) montre qu'en vue d'établir la validité (pour une certaine constante D_{12}) de la majoration (4.2.4.49), il suffit de prouver la décroissance de l'application qui à t associe ${}^I_k \bar{\mathcal{F}}_n(t^-)$. Or ce dernier point résulte facilement de l'estimation d'interaction qui est rappelée en (1.3.15). \square

iv) Un phénomène de cancellation locale.

Ce paragraphe est consacré à l'évaluation de l'expression intégrale qui en (4.2.4.42) se rapporte à la quantité ${}^a_{e,k} \mathcal{V}_\mu^n(t^-)$. Par l'intermédiaire de la fonctionnelle « Exa », chaque discontinuité β_q^n apparaît uniquement sous la forme de sa force $\beta_q^n(n)$ à l'instant n . En conséquence de quoi, la contribution qu'elle apporte s'exprime comme étant le produit de $\beta_q^n(n)$ avec la durée passée par l'onde β_q^n à l'intérieur du domaine $\mathcal{P}_\mu(I; k)$, à savoir :

$$(4.2.4.55) \quad \int_0^{T_\delta} \mathbb{I}_{[n, T_\delta]}(t^-) {}^a_{e,k} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) dt = \Gamma_{ka}^k \sum_{q=1}^{Q_n} \beta_q^n(n) \left(\sum_{j=1}^J t \propto_\mu^j(\beta_q^n) \right).$$

En appliquant le lemme 4.2.4.1 avec (3.1.13), on voit apparaître :

$$(4.2.4.56) \quad \left| \int_0^{T_\delta} \mathbb{I}_{[n, T_\delta]}(t^-) {}^a_{e,k} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) dt - \frac{\Gamma_{ka}^k}{\lambda_a - \lambda_k} \left(\sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(n) - x_{\alpha_1^j}(n)] \right) \left(\sum_{q=1}^{Q_n} \beta_q^n \right) \right| \leq \tilde{\Gamma} D_{11} \delta \left(\sum_{q=1}^{Q_n} |\beta_q^n| \right) \leq 10\tilde{\Gamma} D_{11} \delta^2.$$

D'après (4.2.2.7) et (4.2.2.8), on a :

$$(4.2.4.57) \quad \left| \frac{1}{\lambda_a - \lambda_k} \left(\sum_{j=1}^J [x_{\alpha_{N_j}^j}(n) - x_{\alpha_1^j}(n)] \right) \right| \leq \frac{2}{\zeta}.$$

Le phénomène de cancellation se lit au niveau de la somme des β_q^n . En suivant la démarche effectuée en (4.1.25),..., (4.1.29), on obtient :

$$(4.2.4.58) \quad \left| \sum_{q=1}^{Q_n} \beta_q^n \right| \leq \left| w_a(u^\mu(n^-, x_{\beta_{Q_n}^n}(n)^+)) - w_a(u^\mu(n^-, x_{\beta_1^n}(n)^-)) \right| + \gamma \delta_2^\mu \leq 82\gamma\delta.$$

Le gain obtenu en (4.2.4.58), par rapport à une estimation en valeur absolue, concerne l'apparition du facteur γ (qui peut être rendu aussi petit que souhaité). En définitif, on trouve :

$$(4.2.4.59) \quad \left| \int_0^{T_\delta} \mathbb{I}_{[n, T_\delta]}(t^-) {}_{e,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu^n(t^-) dt \right| \leq 180\tilde{\Gamma}\gamma\delta/\zeta, \quad \forall n \in [0, T_\delta - D_{10} - 1].$$

v) *Recollement des estimations.*

Les informations qui ont été obtenues en (4.2.4.47), (4.2.4.49) et (4.2.4.59) sont reportées en (4.2.4.42). Il vient :

$$(4.2.4.60) \quad \left| \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{T_\delta} {}_{\ell,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \right| \leq 60ND_{10}\tilde{\Gamma}\delta \\ + (T_\delta - D_{10})(D_{12}\delta + 180\tilde{\Gamma}\gamma/\zeta)\delta.$$

Comme :

$$(4.2.4.61) \quad T_\delta - D_{10} \leq T_\delta - 1 \leq 3/\delta,$$

il est possible de remplacer (4.2.4.60) par la majoration :

$$(4.2.4.62) \quad \left| \sum_{\ell=1}^2 \int_0^{T_\delta} {}_{\ell,k}^{a,I} \mathcal{V}_\mu(t^-) dt \right| \leq 60ND_{10}\tilde{\Gamma}\delta + 3D_{12}\delta + 540\tilde{\Gamma}\gamma/\zeta.$$

Les inégalités qui sont écrites en (4.2.4.3) sont garanties dès lors que les deux contrôles $\delta^3(\varepsilon)$ et $\gamma^2(\varepsilon)$ sont choisis conformément à :

$$(4.2.4.63) \quad \delta^3(\varepsilon) := \min(\delta^2(\varepsilon); \varepsilon/(120ND_{10}\tilde{\Gamma} + 6D_{12})).$$

$$(4.2.4.64) \quad \gamma^2(\varepsilon) := \zeta\varepsilon/1080\tilde{\Gamma}.$$

□

4.3. Décroissance BV

Les estimations en variation qui font l'objet de la proposition 3.1.1 peuvent être améliorées lorsque le rapport d'influence \mathcal{R} est situé en dessous d'un certain seuil $\bar{\mathcal{R}}$:

THÉORÈME 4.3.1. —

Il existe une constante positive $\bar{\mathcal{R}}$ telle que tout système de lois de conservation associé à un flux $F(u)$ qui admet un rapport d'influence \mathcal{R} inférieur à $\bar{\mathcal{R}}$ vérifie la propriété suivante :

Il existe deux constantes positives $\bar{\delta}$ et $\bar{\gamma}$ et un indice $\bar{\nu}$ (compris strictement entre 0 et 1) tels que le problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé à une condition initiale $h(x)$ du genre (γ, δ) avec :

$$(4.3.1) \quad 0 < \delta \leq \bar{\delta} \text{ et } 0 < \gamma \leq \bar{\gamma},$$

admette localement en temps une solution faible qui est notée $u^\infty(t, x)$. La fonction $u^\infty(t, x)$ est définie sur le domaine $[0, T_\delta] \times \mathbb{R}$. Elle est obtenue comme la limite dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ d'une suite extraite de la suite de solutions approchées $(u^\mu(t, x))_{\mu \in [\bar{\mu}, \infty[}$. De plus, l'application qui à t associe $u^\infty(t, \cdot)$ est décroissante au sens large sur l'intervalle $[0, T_\delta]$ pour la longueur 1 et l'indice $\bar{\nu}$. En d'autres termes, on a :

$$(4.3.2) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(u^\infty(T_\delta^-, \cdot)) \leq \bar{\nu} \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(h(\cdot)).$$

Preuve du théorème 4.3.1. — Par hypothèse :

$$(4.3.3) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(h(\cdot)) = \delta.$$

Par conséquent, il suffit d'établir :

$$(4.3.4) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(u^\mu(T_\delta^-, \cdot)) \leq \bar{\nu} \delta_2^\mu, \quad \forall \mu \in [\bar{\mu}, \infty[.$$

En effet, d'après la remarque 2.1.6, l'inégalité (4.3.2) s'obtient par simple passage à la limite (en faisant tendre l'indice μ vers l'infini) au niveau de l'inégalité (4.3.4).

On fixe la valeur des différents paramètres mis en jeu :

$$(4.3.5) \quad \bar{\varepsilon} := \frac{1}{30N}, \quad \bar{\delta} := \delta^3(\bar{\varepsilon}), \quad \bar{\gamma} := \gamma^2(\bar{\varepsilon}), \quad \bar{\mathcal{R}} := \mathcal{R}^1(\bar{\varepsilon}).$$

Par ailleurs, l'indice μ est sélectionné supérieur à :

$$(4.3.6) \quad \mu \geq \bar{\mu} := \mu^1(\bar{\varepsilon}).$$

Interprétons sous ces conditions le contenu du corollaire 4.1.1. Si pour tout intervalle I_p^1 placé à l'instant T_δ , on a :

$$(4.3.7) \quad \frac{I_p^1}{k} V_\mu^+(T_\delta^-) \leq 2\delta_2^\mu/5, \quad \forall (k, p) \in [1, N] \times \mathbb{Z},$$

alors en appliquant (4.1.24), il vient :

$$(4.3.8) \quad \frac{I_p^1}{k} V_{\nu_\mu}^\mu(T_\delta^-) \leq \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{10N}\right) \delta_2^\mu, \quad \forall (k, p) \in [1, N] \times \mathbb{Z},$$

soit encore, d'après (3.2.17) :

$$(4.3.9) \quad \tilde{V}_{ar:I_p^1}^{loc}(u^\mu(T_\delta^-, \cdot)) \leq 9\delta_2^\mu/10, \quad \forall p \in \mathbb{Z},$$

ce qui implique au regard de la définition (2.1.32) :

$$(4.3.10) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(u^\mu(T_\delta^-, \cdot)) \leq 9\delta_2^\mu/10.$$

Autrement dit, le théorème 4.3 se trouve établi avec pour indice $\bar{\nu}$ le nombre réel $9/10$. Cette discussion montre que la clé du résultat de décroissance en variation repose sur les majorations qui sont indiquées en (4.3.7). Celles-ci sont obtenues à l'issue d'un raisonnement par l'absurde. On suppose que l'inégalité (4.3.7) est mise en défaut pour un certain couple d'indices (\bar{k}, \bar{p}) dans $[1, N] \times \mathbb{Z}$:

$$(4.3.11) \quad 2\delta_2^\mu/5 < \frac{I_{\bar{p}}^1}{\bar{k}} V_\mu^+(T_\delta^-),$$

et on prouve que cette hypothèse conduit à une contradiction. À cette fin, il suffit d'invoquer les propositions 4.2.1 et 4.2.4 avec pour intervalle I le segment $I_{\bar{p}}^1$. Cette opération fournit l'inégalité :

$$(4.3.12) \quad T_{\delta \bar{k}}^{I_{\bar{p}}^1} V_{\mu}^+(T_{\delta}^-) \leq 1 + N\bar{\varepsilon} \leq 1 + 1/30.$$

Mais d'après (4.3.11), on a :

$$(4.3.13) \quad 1 + \frac{1}{30} \leq \left(1 + \frac{1}{30}\right) \frac{5}{6 - 2\delta} \frac{2\delta_2^{\mu}}{5} T_{\delta} \leq T_{\delta \bar{k}}^{I_{\bar{p}}^1} V_{\mu}^+(T_{\delta}^-).$$

Les deux relations écrites en (4.3.12) et (4.3.13) sont clairement incompatibles l'une avec l'autre. Le théorème 4.3.1 est donc prouvé. \square

CHAPITRE 5

APPLICATIONS

La démonstration du théorème 4.3 repose sur le principe suivant : le comportement des solutions de systèmes de lois de conservation dont le flux présente un petit rapport d'influence \mathcal{R} est dominé par les effets de vraie non linéarité. Rien d'étonnant donc à ce que la décroissance de la variation puisse être établie.

En revanche, aucune diminution n'est garantie en ce qui concerne l'amplitude de la solution. Sur ce point, la seule information dont on dispose est délivrée par l'inégalité (3.1.14) : à priori, la norme L^∞ peut être multipliée à l'instant T_δ où sont faits les comptes, par un facteur 10. Malgré cette perte d'information, le point de vue développé dans les chapitres précédents permet d'obtenir des résultats non classiques. Ces résultats forment le contenu de trois sous-chapitres qui sont indépendants les uns des autres.

Dans la première partie, une durée de vie minimale T_δ^m pour les solutions qui sont associées à des conditions initiales grandes en norme BV et petites en amplitude est rendue explicite. L'impossibilité de prolonger la solution au delà de l'instant T_δ^m provient du manque de contrôle sur les estimations L^∞ . En fait, de telles estimations sont garanties à condition d'imposer des hypothèses supplémentaires. Deux types d'hypothèses sont envisagés dans ce travail. Dans la seconde partie, la restriction concerne la donnée de Cauchy qui est supposée périodique. Dans la troisième partie, la contrainte porte sur la fonction flux $F(u)$. Elle requiert l'existence d'un domaine d'invariance pour le problème de Riemann. Dans ces deux cas de figure, il est possible de construire une solution pour tout temps et d'en étudier les propriétés de décroissance BV.

5.1. Temps de vie minimal

La condition initiale est choisie du genre (γ, δ) . Les échelles de temps et d'espace sont ajustées en utilisant d'abord le procédé de normalisation décrit au paragraphe 2.4 et ensuite la relation (1.4.1).

Dans ce contexte, le résultat de Glimm [G] (ou celui de Bressan [B1]) s'applique à condition de mettre en œuvre la propriété de propagation à vitesse finie : Sous l'hypothèse (3.3.2.7), la valeur prise par une solution $u(\cdot, \cdot)$ en un point (t, x) dépend uniquement du comportement de la condition initiale $h(\cdot)$ en restriction à l'intervalle de base $]x - t, x + t[$.

Ce principe permet de construire une solution sur un domaine de la forme $[0, T_\delta^G] \times \mathbb{R}$. L'instant d'arrêt T_δ^G est déterminé en exigeant que la variation calculée sur tous les intervalles $]x - T_\delta^G, x + T_\delta^G[$ avec x variant dans \mathbb{R} ne dépasse pas le seuil η_1 mis en jeu en (0.24) et (0.25).

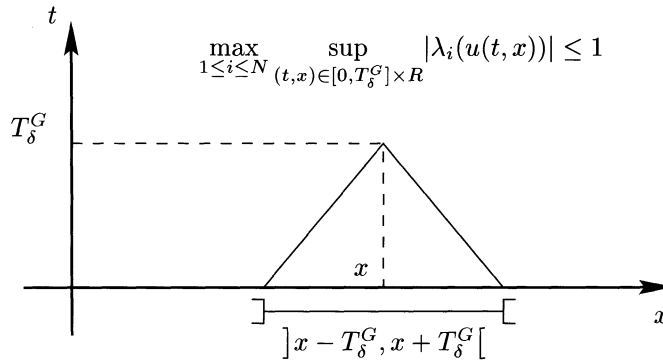


Figure 1

Concrètement, il faut imposer :

$$(5.1.1) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} V_{\text{ar};]x - T_\delta^G, x + T_\delta^G[}^{\text{loc}}(h(\cdot)) \leq \eta_1.$$

La contrainte (5.1.1) est réalisée pour toutes les données $h(x)$ qui sont du genre (γ, δ) dès que l'on a :

$$(5.1.2) \quad (1 + 4T_\delta^G)\delta \leq \eta_1.$$

Cette dernière majoration permet d'accéder au comportement asymptotique en δ de la durée de vie minimale T_δ^G qui est prévue par l'analyse faite dans Glimm [G] :

$$(5.1.3) \quad \left| T_\delta^G - \frac{\eta_1}{4\delta} \right| = o\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

En fait, il est possible de prolonger la solution (beaucoup) plus loin :

THÉORÈME 5.1.1. — Soit $F(u)$ un flux dont le rapport d'influence \mathcal{R} est inférieur à $\bar{\mathcal{R}}$. Soit $h(x)$ une condition initiale dont le genre (γ, δ) fait intervenir des paramètres γ et δ qui sont astreints à :

$$(5.1.4) \quad 0 < 3\delta \leq \bar{\delta} \quad \text{et} \quad 0 < 32\gamma \leq \bar{\gamma}.$$

Le problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé au flux $F(u)$ et à la donnée $h(x)$ admet une solution qui est définie sur un domaine de la forme $[0, T_h^v] \times \mathbb{R}$ où le temps de vie T_h^v se trouve minoré conformément à :

$$(5.1.5) \quad T_\delta^m := \frac{\bar{\delta}^3}{27\delta^4} \leq T_h^v, \quad 0 < 3\delta \leq \bar{\delta}.$$

REMARQUE 5.1.1. — Pour simplifier les écritures, la solution exacte $u^\infty(t, x)$ qui a été construite au chapitre 3 sera désormais notée $u(t, x)$. \triangleleft

REMARQUE 5.1.2. — Sous les hypothèses du théorème 4.3, le phénomène d'amplification en norme L^∞ se trouve atténué (du moins par rapport à l'évaluation grossière qui en est donnée en (3.1.14)). En effet, d'après le lemme 3.3.2.1, l'augmentation sur une durée égale à 1 de l'amplitude se traduit par un facteur multiplicatif qui ne dépasse pas la valeur $1 + 100ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\delta_2^\mu$. Le cumul de ces contributions conduit à l'instant d'arrêt T_δ à :

$$(5.1.6) \quad (1 + 100ND_6(\mathcal{R} + \hat{\delta})\delta_2^\mu)^{T_\delta} \leq \exp(200ND_6(3 + \delta)(\mathcal{R} + \hat{\delta})).$$

La quantité placée à droite de l'inégalité (5.1.6) dépend de $(\mathcal{R} + \hat{\delta})$ et peut être rendue aussi proche de 1 que souhaité pour $(\mathcal{R} + \hat{\delta})$ suffisamment petit. On pose :

$$(5.1.7) \quad m := \mathcal{E}[-\ln 16 / \ln \bar{v}] + 1 \implies \bar{v}^m \leq 1/16.$$

$$(5.1.8) \quad b := \ln 2 / (m + 1) \implies 1 + b \leq (1 + b)^{m+1} \leq 2.$$

Dans la suite, on supposera que les paramètres $\bar{\mathcal{R}}$ et $\bar{\delta}$ (dont la valeur est liée à $\hat{\delta}$ via les relations (4.1.7), (4.2.3.3), (4.2.4.63) et finalement (4.3.5)) sont ajustés de manière à ce que :

$$(5.1.9) \quad \|u(T_\delta, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (1 + b) \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

\triangleleft

REMARQUE 5.1.3. — Décrire avec une meilleure précision le comportement asymptotique du temps de vie T_h^v est un sujet d'étude dont les enjeux sont importants. Grosso modo, dire que la solution se prolonge plus loin signifie qu'il est possible d'envisager des conditions initiales dont la variation est plus grande. Les deux sous-chapitres 5.2 et 5.3 s'inspirent de ce principe.

À ce titre, le résultat (5.1.5) est des plus significatif. Il améliore les informations qui sont délivrées (comme en (5.1.3)) à l'issue d'une argumentation plus classique. \triangleleft

La puissance δ^4 qui intervient en (5.1.5) n'est certainement pas optimale. D'autres choix sont possibles. En fait, sa valeur dépend de la manière dont est déterminé le paramètre m qui est introduit en (5.1.7) et (5.1.8). Un examen plus attentif montre que le comportement en δ^4 peut être ajusté quelconque, de la forme δ^k avec k entier. Néanmoins, une limitation reste toujours présente pour T_δ^m : La solution n'est pas définie pour tout temps.

Cette imperfection de notre analyse provient du manque de précision de l'estimation L^∞ qui est avancée en (5.1.9). Le facteur $1 + \flat$ apparaît à la suite de majorations en valeur absolue, établies à l'aide de la formule (1.2.10). Cette démarche ne prend en compte aucun phénomène de cancellation. Il est probable (?) qu'une étude plus fine puisse mettre à jour un meilleur contrôle que celui qui est avancé en (5.1.9) (à savoir une réelle décroissance en amplitude). Toutefois, cet aspect du problème ne sera pas abordé dans le cadre de cet article.

Pour l'heure, rien ne garantit que le théorème 4.3 puisse être itéré indéfiniment. L'obstacle provient de ce que les traces successives $u(T_\delta, \cdot)$ ne sont pas sûres de pouvoir s'écrire pour une certaine longueur κ sous la forme d'une fonction qui admet un genre (γ, δ) avec :

$$(5.1.10) \quad \delta \leq \bar{\delta}, \quad \gamma \leq \bar{\gamma}.$$

Toutefois, lorsque les deux paramètres γ et δ sont fixés avec une certaine marge par rapport à $\bar{\gamma}$ et $\bar{\delta}$, le résultat 4.3 peut être répété plusieurs fois. Cette opération conduit à une autre interprétation de la décroissance en variation locale uniforme. Ce nouveau point de vue fait l'objet du lemme préliminaire suivant :

LEMME 5.1.1. — *Soit $h(x)$ une fonction qui est astreinte à :*

$$(5.1.11) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \gamma\delta, \quad 32\gamma \leq \bar{\gamma}.$$

$$(5.1.12) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(h(\cdot)) \leq \delta, \quad 3\delta \leq \bar{\delta}.$$

Sous les hypothèses du théorème 4.3, le problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé à la donnée initiale $h(x)$ admet une solution qui est définie sur un domaine de la forme $[0, T_h^{in}] \times \mathbb{R}$. On a l'alternative suivante :

$$(5.1.13) \quad T_h^{in} = \infty,$$

ou bien :

$$(5.1.14) \quad 8/\delta \leq T_h^{in} < \infty.$$

De plus, lorsque c'est la condition (5.1.14) qui est retenue, la trace calculée à l'instant T_h^{in} de l'application qui à t associe $u(t, \cdot)$ se trouve contrôlée conformément à :

$$(5.1.15) \quad \|u(T_h^{in}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\gamma\delta.$$

$$(5.1.16) \quad \tilde{V}_{ar:\kappa}^{loc:u}(u(T_h^{in}, \cdot)) \leq 2\delta, \quad 16 \leq \kappa.$$

Preuve du lemme 5.1.1. — Pour construire une solution locale sous les deux hypothèses (5.1.11) et (5.1.12), plusieurs stratégies sont envisagées. Elles distinguent selon les valeurs prises par la variation locale uniforme de longueur 1 et la variation totale de la donnée de Cauchy $h(x)$.

$$\mapsto i) : V_{ar}^{tot}(h(\cdot)) \leq \eta_1.$$

Le théorème de Glimm [G] est alors invoqué. Il garantit l'existence d'une solution qui est définie pour tout temps. En d'autres termes, cette situation correspond au choix $T_h^{\text{in}} = \infty$.

$$\longmapsto ii) : V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) > \eta_1 \text{ et } \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq \delta/16.$$

En considérant les définitions (4.1.7), (4.2.3.3), (4.2.4.63), (4.3.5) et la condition (3.3.1.6), on voit apparaître :

$$(5.1.17) \quad \bar{\delta} \leq D_3 \eta_1.$$

Cette inégalité associée au lemme 2.1.1 et à *ii*) conduit à :

$$(5.1.18) \quad \tilde{V}_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) \geq D_3 V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) > \bar{\delta}.$$

Les informations dont on dispose sont collectées :

$$(5.1.19) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq \delta/16 < 2\delta \leq \bar{\delta} < \tilde{V}_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)).$$

Le lemme 2.1.3 est appliqué en donnant à δ' la valeur 2δ . Il faut trouver l'entier p qui permet de réaliser la relation (2.1.66). D'après (5.1.19), on a nécessairement :

$$(5.1.20) \quad 2\delta \leq (2p+1)\tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq (2p+1)\delta/16.$$

La condition (5.1.20) impose :

$$(5.1.21) \quad 16 \leq p \leq \kappa := q.$$

La conclusion du lemme 2.1.3 s'écrit alors :

$$(5.1.22) \quad 2\delta \leq \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) < (2+1/8)\delta.$$

Le changement de coordonnées Θ_κ (dont la définition est rappelée en (2.4.7)) est effectué. Les nouvelles variables de temps et d'espace sont notées :

$$(5.1.23) \quad (\tilde{t}, \tilde{x}) := \Theta_\kappa(t, x) = (t/\kappa, x/\kappa).$$

La transformation réalisée en (5.1.23) est une contraction qui a pour effet de changer la condition initiale suivant :

$$(5.1.24) \quad \tilde{h} : \tilde{x} \longmapsto \tilde{h}(\tilde{x}) := h(\kappa\tilde{x}).$$

D'après la formule (2.4.9), on a :

$$(5.1.25) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(\tilde{h}(\cdot)) = \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)).$$

D'après l'encadrement (5.1.22) puis l'identité (5.1.25) et l'hypothèse (5.1.11), la fonction $\tilde{h}(\tilde{x})$ admet un genre $(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ qui vérifie :

$$(5.1.26) \quad 2\delta \leq \tilde{\delta} \leq (2+1/8)\delta \leq \bar{\delta}, \quad \tilde{\gamma} \leq \gamma/2 \leq \bar{\gamma}.$$

Les inégalités (5.1.26) permettent de mettre en œuvre le théorème 4.3 (avec $\bar{v} = 9/10$) dans les variables (\tilde{t}, \tilde{x}) . Cette manipulation fournit une solution locale $u(\tilde{t}, \tilde{x})$.

Cette solution est définie sur le domaine $[0, T_{\tilde{\delta}}] \times \mathbb{R}$ et se trouve contrôlée à l'instant $T_{\tilde{\delta}}$ conformément à :

$$(5.1.27) \quad \|u(T_{\tilde{\delta}}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (1+b)\|\tilde{h}(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\gamma\delta.$$

$$(5.1.28) \quad \tilde{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc};u}(u(T_{\tilde{\delta}}, \cdot)) \leq \bar{v}\tilde{\delta} \leq 2\delta.$$

On pose alors :

$$(5.1.29) \quad T_h^{\text{in}} := \kappa T_{\tilde{\delta}} \geq 16(3 - \tilde{\delta})/\tilde{\delta} \geq 16(1 - \delta)/\delta \geq 8/\delta.$$

En transcrivant les informations (5.1.27), (5.1.28) et (5.1.29) dans les variables initiales (t, x) , on voit apparaître (5.1.14), (5.1.15) et (5.1.16).

REMARQUE 5.1.4. — Les points *i*) et *ii*) n'utilisent pas la restriction $32\gamma \leq \bar{\gamma}$ mais simplement la contrainte (moins forte) $\gamma \leq \bar{\gamma}$. \triangleleft

$$\longmapsto \textit{iii}) : V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) > \eta_1 \text{ et } \delta/16 \leq \tilde{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc};u}(h(\cdot)) \leq \delta.$$

Dans ce cas, la fonction $h(x)$ admet un genre $({}^0\gamma, {}^0\delta)$ qui vérifie d'après la marge dont on dispose en (5.1.11) :

$$(5.1.30) \quad {}^0\delta \leq \delta \leq \bar{\delta}, \quad {}^0\gamma \leq 16\gamma \leq \bar{\gamma}.$$

Le théorème 4.3.1 est invoqué. Il fournit l'existence d'une solution $u(t, x)$ étendue à la bande $[0, T_{0\delta}] \times \mathbb{R}$. De plus :

$$(5.1.31) \quad \|u(T_{0\delta}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (1+b)\gamma\delta.$$

$$(5.1.32) \quad \tilde{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc};u}(u(T_{0\delta}, \cdot)) \leq \bar{v}\delta.$$

L'instant $T_{0\delta}$ est alors regardé comme un nouveau point de départ. Si la situation *i*) ou *ii*) se fait jour, le lemme 5.1.1 est prouvé. Sinon, cela signifie qu'on garde :

$$(5.1.33) \quad \delta/16 \leq \tilde{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc};u}(u(T_{0\delta}, \cdot)).$$

La minoration (5.1.33) associée à (5.1.31) et (5.1.32) implique que la trace $u(T_{0\delta}, \cdot)$ possède un genre $({}^1\gamma, {}^1\delta)$ avec :

$$(5.1.34) \quad \delta/16 \leq {}^1\delta \leq \bar{v}\delta \leq \delta, \quad {}^1\gamma \leq 16(1+b)\gamma \leq \bar{\gamma}.$$

D'après la remarque 5.1.2 et les encadrements qui ont été obtenus en ligne (5.1.34), l'opération peut être recommencée avec pour nouvelle fonction de départ $u(T_{0\delta}, \cdot)$.

La condition (5.1.7) associée à la décroissance (4.3.2) garantit que l'algorithme ainsi enclenché bifurque vers une des directions *i*) ou *ii*) (on expose ici le cas *ii*) au moins une fois avant la $m^{\text{ième}}$ itération. Soit j avec j inférieur ou égal à m l'indice concerné. La solution $u(t, x)$ se trouve ainsi définie jusqu'à l'instant :

$$(5.1.35) \quad T_h^{\text{in}} := T_{0\delta} + T_{1\delta} + \cdots + T_{j-1\delta} + \kappa T_{j\delta} \geq 8/\delta,$$

et on a d'après (5.1.8) et la démarche expliquée en (5.1.25),..., (5.1.28) :

$$(5.1.36) \quad \|u(T_h^{\text{in}}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq (1+b)^{j+1}\gamma\delta \leq 2\gamma\delta.$$

$$(5.1.37) \quad \tilde{V}_{\text{ar};\kappa}^{\text{loc};u}(u(T_h^{\text{in}}, \cdot)) \leq 2^j \delta \leq 2(\bar{v})^j \delta.$$

Par ailleurs, comme la trace $u(T_{0\delta} + \dots + T_{k\delta}, \cdot)$ mise en jeu à l'issue de k itérations avec k inférieur ou égal à j (et donc inférieur ou égal à m) possède un genre $({}^k\gamma, {}^k\delta)$ qui est encore astreint à :

$$(5.1.38) \quad \delta/16 \leq {}^k\delta \leq (\bar{v})^k \delta \leq \delta, \quad {}^k\gamma \leq 16(1+b)^k \bar{\gamma},$$

le théorème 4.3.1 peut effectivement être appliqué après k itérations ce qui justifie l'argumentation développée.

Le lemme 5.1.1 est prouvé. □

Preuve du théorème 5.1.1. — On pose :

$$(5.1.39) \quad n_\delta := \mathcal{E}[\ln(\bar{\delta}/3\delta)/\ln 2] \in \mathbb{N}, \quad 3\delta \leq \bar{\delta}.$$

Cette définition est ajustée de manière à ce que :

$$(5.1.40) \quad 32^{n_\delta} \delta \leq \bar{\delta}.$$

Le lemme 5.1 est appliqué avec pour donnée initiale la fonction $h(x)$ qui intervient au niveau du théorème 5.1. Cette démarche fournit une solution dont la trace $u(T_h^{\text{in}}, \cdot)$ à l'instant T_h^{in} se trouve contrôlée conformément aux deux inégalités (5.1.15) et (5.1.16). Le nombre κ mis en jeu en (5.1.16) est noté κ_1 . Le changement de coordonnées Θ_{κ_1} est alors effectué (voir toujours (2.4.7) pour la définition).

Les nouvelles variables de temps et d'espace sont notées :

$$(5.1.41) \quad (t_1, x_1) := \Theta_{\kappa_1}(t, x) = (t/\kappa_1, x/\kappa_1), \quad \kappa_1 := \kappa \geq 16.$$

La transformation effectuée en (5.1.41) est une contraction qui a pour effet de changer la trace $u(T_h^{\text{in}}, \cdot)$ en :

$$(5.1.42) \quad h_1 : x_1 \mapsto h_1(x_1) := u(T_h^{\text{in}}, \kappa_1 x_1).$$

La fonction $h_1(x_1)$ vérifie de nouveau les contraintes (5.1.11) et (5.1.12) mais cette fois-ci pour un indice 1δ changé en 2δ . D'après l'inégalité (5.1.40), l'opération peut ainsi être répétée au moins n_δ fois. Après n_δ itérations du raisonnement, la solution $u(t, x)$ est construite jusqu'à un instant T_h^v qui dans les variables initiales s'exprime sous la forme de la somme :

$$(5.1.43) \quad T_h^v := T_h^{\text{in}} + \kappa_1 T_{h_1}^{\text{in}} + \dots + \left(\prod_{i=1}^{n_\delta} \kappa_i \right) T_{h_{n_\delta}}^{\text{in}}.$$

Comme :

$$(5.1.44) \quad \prod_{i=1}^j \kappa_i \geq 16^j,$$

on a la minoration :

$$(5.1.45) \quad T_{h_j}^{\text{in}} \geq 8/j\delta \geq 8/2^j \delta.$$

On voit ainsi apparaître le développement (5.1.5), à savoir :

$$(5.1.46) \quad T_h^v \geq \frac{8}{\delta} \sum_{i=0}^{n_\delta} 8^i \geq \frac{8}{\delta} \frac{8^{n_\delta+1} - 1}{7} \geq \frac{8^{\ln(\delta/3\delta)/\ln 2}}{\delta} \geq \frac{\delta^3}{27\delta^4} = T_\delta^m.$$

Le théorème 5.1.1 est prouvé. \square

5.2. Conditions initiales périodiques

Cette deuxième partie s'intéresse aux données de Cauchy $h(x)$ qui sont périodiques, par exemple de période 1 (un changement de variables permet toujours de se ramener à cette situation) :

$$(5.2.1) \quad h(x+1) = h(x), \quad x \in]-\infty, \infty[.$$

Une translation convenable sur l'état u permet de travailler avec des fonctions $h(x)$ qui sont de moyenne nulle :

$$(5.2.2) \quad \int_{\mathbb{T}} h(x) dx = 0.$$

Chaque discrétisation $h^\mu(x)$ peut être choisie de moyenne nulle et périodique de période 1 en restriction à l'intervalle $]-\mu, \mu[$.

En d'autres termes, on impose :

$$(5.2.3) \quad h^\mu(x+1) = h^\mu(x), \quad x \in]-\mu, \mu-1[.$$

$$(5.2.4) \quad \int_x^{x+1} h^\mu(y) dy = 0, \quad x \in]-\mu, \mu-1[.$$

Rappelons que la solution exacte $u(t, x)$ du problème de Cauchy (\mathcal{H}) est obtenue comme la limite dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ d'une sous-suite extraite de la suite de solutions approchées $(u^\mu(t, x))_{\mu \in]\mu_\delta, \infty[}$.

L'application $u^\mu(t, \cdot)$ n'est certainement pas périodique ne serait-ce parce que son support est compact. Néanmoins, dans la mesure où l'information se propage à vitesse finie, sa restriction à l'intervalle $]-\mu+t, \mu-t[$ hérite (à une erreur près qui devient asymptotiquement négligeable : se reporter au paragraphe 3.3.2.iv) des propriétés qui sont imposées aux approximations $h^\mu(\cdot)$ sur chaque intervalle $]-\mu, \mu[$: Périodicité et moyenne nulle.

Ces caractéristiques (locales) se transmettent après passage à la limite (lorsque l'indice μ tend vers l'infini) à toute la droite réelle :

$$(5.2.5) \quad u(t, x+1) = u(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T_\delta] \times \mathbb{R}.$$

$$(5.2.6) \quad \int_x^{x+1} u(t, y) dy = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T_\delta] \times \mathbb{R}.$$

REMARQUE 5.2.1. — Quitte à effectuer une légère translation en espace (la variable x est changée en $x + \varepsilon$), on peut toujours s'arranger de manière à ce que la donnée initiale et la trace à l'instant T_δ de la solution $u(\cdot, \cdot)$ soient continues aux points demi-entiers :

$$(5.2.7) \quad h((p/2)^+) = h((p/2)^-), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

$$(5.2.8) \quad u(T_\delta, (p/2)^+) = u(T_\delta, (p/2)^-), \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Cette manipulation garantit qu'aucune perte de masse ne s'effectue à la jonction des intervalles I_k^1 . Comme les fonctions $g(\cdot)$ considérées sont périodiques de période 1, on a alors exactement :

$$(5.2.9) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:I_k^q}^{\text{loc}}(g(\cdot)) = q\tilde{V}_{\text{ar}:I_0^1}^{\text{loc}}(g(\cdot)), \quad \forall (q, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}.$$

En remplaçant la fonction $g(\cdot)$ successivement par $h(\cdot)$ puis $u(T_\delta, \cdot)$, on déduit de (5.2.9) les deux identités suivantes :

$$(5.2.10) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:q}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) = q\tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)), \quad \forall q \in \mathbb{N}^*.$$

$$(5.2.11) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:q}^{\text{loc}:u}(u(T_\delta, \cdot)) = q\tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(T_\delta, \cdot)), \quad \forall q \in \mathbb{N}^*.$$

◀

REMARQUE 5.2.2. — On a :

$$(5.2.12) \quad \|u(t, x) - u(t, z)\|_\infty \leq V_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(t, \cdot)), \quad |x - z| \leq 1.$$

La relation (5.2.12) est intégrée par rapport à la variable z , pour z variant dans l'intervalle $[0, 1]$. En tenant compte de (5.2.6), on voit ainsi apparaître :

$$(5.2.13) \quad \|u(t, x)\|_\infty \leq V_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(t, \cdot)), \quad \forall t \in [0, T_\delta].$$

Soit encore, en passant au « sup » sur x puis en utilisant le lemme 2.1.1 :

$$(5.2.14) \quad \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(t, \cdot))/D_3, \quad \forall t \in [0, T_\delta].$$

◀

Le gain d'information qu'apportent les deux remarques précédentes permet de prolonger la solution indéfiniment :

THÉORÈME 5.2.1. — *Soit $F(u)$ un flux dont le rapport d'influence \mathcal{R} est inférieur à $\bar{\mathcal{R}}$. Soit $h(x)$ une condition initiale qui est périodique de période 1, dont la moyenne sur une période est nulle et qui vérifie :*

$$(5.2.15) \quad \delta := \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq \hat{\gamma}\bar{\delta},$$

où on a posé :

$$(5.2.16) \quad \hat{\gamma} := (\mathcal{E}[1/D_3\bar{\gamma}] + 1)^{-1} \leq D_3\bar{\gamma}.$$

Le problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé au flux $F(u)$ et à la donnée $h(x)$ admet une solution $u(t, x)$ qui est définie pour tout temps. Le comportement asymptotique de la fonction $u(t, x)$ est décrit par la loi de décroissance :

$$(5.2.17) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(u(t, \cdot)) \leq \frac{20\dot{\gamma}}{(1 - \bar{v})t}, \quad t \in]0, \infty[.$$

REMARQUE 5.2.3. — En interprétant la formule (5.2.14) et le lemme 2.1.1, on retrouve l'énoncé du théorème A.

Preuve du théorème 5.2.1. — Le changement de coordonnées $\Theta_{(1/\dot{\gamma})}$ est effectué. Les nouvelles variables de temps et d'espace sont notées :

$$(5.2.18) \quad (t_1, x_1) := \Theta_{(1/\dot{\gamma})}(t, x) = (\dot{\gamma}t, \dot{\gamma}x).$$

La transformation effectuée en (5.2.15) est une contraction qui a pour effet de modifier la donnée de Cauchy $h(x)$ et la solution locale $u(t, x)$.

Ces données sont changées en :

$$(5.2.19) \quad h_1(x_1) := h(x_1/\dot{\gamma}), \quad u_1(t_1, x_1) := u(t_1/\dot{\gamma}, x_1/\dot{\gamma}).$$

Comme par définition, le nombre $1/\dot{\gamma}$ est entier, la remarque 5.2.1 s'applique. Elle conduit à :

$$(5.2.20) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(h_1(\cdot)) = \delta/\dot{\gamma}.$$

La remarque 5.2.2, l'identité (5.2.15) et l'inégalité (5.2.16) se traduisent alors par les relations de comparaison :

$$(5.2.21) \quad \|h_1(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq V_{ar:1}^{loc:u}(h(\cdot)) \\ \leq \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(h(\cdot))/D_3 = \delta/D_3 \leq (\dot{\gamma}/D_3)(\delta/\dot{\gamma}) \leq \bar{\gamma}(\delta/\dot{\gamma}).$$

Par conséquent, la fonction $h_1(x_1)$ admet pour genre un couple $({}^1\gamma, {}^1\delta)$ qui est astreint à :

$$(5.2.22) \quad {}^1\delta = \frac{\delta}{\dot{\gamma}} \leq \bar{\delta}, \quad {}^1\gamma \leq \bar{\gamma}.$$

Le théorème 4.3.1 est appliqué une première fois avec pour condition initiale la fonction qui à x_1 associe $h_1(x_1)$. À l'instant $T_{1\delta}$, la variation a baissé :

$$(5.2.23) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(u_1(T_{1\delta}, \cdot)) \leq \frac{\bar{v}\delta}{\dot{\gamma}}.$$

L'application qui à x_1 associe $u_1(T_{1\delta}, x_1)$ est périodique de période $\dot{\gamma}$ (avec ici $\dot{\gamma} \ll 1$). Cette information sur la structure de la solution permet de déduire du contrôle (5.2.23) des estimations précises à une échelle plus fine. Les segments de longueur 1 sont divisés en $1/\dot{\gamma}$ sous-intervalles sur lesquels vient se répartir de manière uniforme la majoration (5.2.23). Toujours, d'après la remarque 5.2.1 bien utilisée, on a en effet :

$$(5.2.24) \quad \tilde{V}_{ar:\dot{\gamma}}^{loc:u}(u_1(T_{1\delta}, \cdot)) \leq \bar{v}\delta.$$

Dans le système de coordonnées formé par les variables initiales t et x , l'information (5.2.24) se traduit par la relation :

$$(5.2.25) \quad \tilde{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc}:u}(u(T_{1\delta}/\dot{\gamma}, \cdot)) \leq \bar{v}\delta \leq \dot{\gamma}\bar{\delta}.$$

L'inégalité (5.2.25) signifie que le contrôle (5.2.15) est encore vérifié à l'instant $T_{1\delta}/\dot{\gamma}$. Le raisonnement précédant peut donc être répété une deuxième fois puis une infinité de fois. L'existence globale en temps se trouve de ce fait garantie.

Plus précisément, après n itérations, la solution $u(t, x)$ est construite jusqu'aux instants t qui sont compris entre :

$$(5.2.26) \quad \sum_{j=1}^{n-1} T_{j\delta} \leq t \leq \sum_{j=1}^n T_{j\delta}, \quad j\delta \leq (\bar{v})^{(j-1)}\delta.$$

Pour les instants considérés en (5.2.26), la variation locale uniforme de longueur 1 se trouve contrôlée conformément à :

$$(5.2.27) \quad \tilde{V}_{\text{ar:1}}^{\text{loc}:u}(u(t, \cdot)) \leq 5\delta(\bar{v})^{n-1}.$$

Comme :

$$(5.2.28) \quad T_{j\delta} \leq \frac{4}{j\delta} \leq \frac{4\dot{\gamma}}{(\bar{v})^{j-1}\delta},$$

l'encadrement (5.2.26) fournit la majoration :

$$(5.2.29) \quad t \leq \frac{4\dot{\gamma}}{\delta} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\bar{v})^{j-1}} \leq \frac{4\dot{\gamma}}{(1-\bar{v})\delta(\bar{v})^{n-1}}.$$

L'inégalité (5.2.29) se formule autrement :

$$(5.2.30) \quad 5\delta(\bar{v})^{n-1} \leq \frac{20\dot{\gamma}}{(1-\bar{v})t}.$$

Le comportement asymptotique annoncé en (5.2.17) s'obtient en reportant (5.2.30) en (5.2.27). \square

5.3. Existence globale et compacité

Cette troisième et dernière partie est consacrée aux systèmes de lois de conservation qui admettent un (petit) domaine d'invariance pour le problème de Riemann. Cette hypothèse signifie que les amplitudes des $N-1$ états intermédiaires u^i qui apparaissent dans la résolution du problème de Riemann (se reporter à la définition (1.3.3)) sont convenablement contrôlées si les amplitudes des deux états extrêmes le sont :

$$(5.3.1) \quad u^- \in \mathcal{D}_\eta, u^+ \in \mathcal{D}_\eta \implies u^i \in \mathcal{D}_\eta, \quad \forall i \in [1, N-1],$$

où le domaine \mathcal{D}_η est un voisinage du point \bar{u} dont le diamètre se trouve convenablement contrôlé :

$$(5.3.2) \quad \bar{u} \in \dot{\mathcal{D}}_\eta \subset \mathcal{D}_\eta \subset B(\bar{u}; \eta], \quad \eta > 0.$$

Dans ce cas, pour une donnée initiale à valeurs dans \mathcal{D}_η , le schéma de Bressan [B1] fabrique des états qui à une erreur négligeable près (voir le paragraphe 3.3.2.iv) restent tous contenus à l'intérieur de \mathcal{D}_η .

La contrainte (5.3.1) est vérifiée pour certains systèmes de deux équations (consulter [CCS]) et n'est réalisée qu'exceptionnellement pour les systèmes de N équations avec N supérieur ou égal à 3 (voir [Se]).

Il faut concevoir la contrainte (5.3.1) comme une hypothèse simplificatrice dans le cadre de laquelle la notion de décroissance au sens large s'illustre de manière très significative :

THÉORÈME 5.3.1. — *Soit $F(u)$ un flux dont le rapport d'influence \mathcal{R} est inférieur à $\bar{\mathcal{R}}$ et qui admet des domaines d'invariance pour le problème de Riemann. Il existe une constante positive H telle que le problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé à une condition initiale $h(x)$ dont l'amplitude est contrôlée conformément à :*

$$(5.3.3) \quad h(x) \in \mathcal{D}_{\bar{\gamma}\delta/8}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

admette une solution $u(t, x)$ qui est définie pour tout temps. De plus, l'opérateur solution ainsi mis à jour est compact de L^∞ à valeurs L^1_{loc} en ce sens où la loi de décroissance suivante se trouve vérifiée :

$$(5.3.4) \quad \tilde{V}_{ar:I}^{loc}(u(t, \cdot)) \leq \frac{H |I|}{t}, \quad |I| \geq t, \quad t \in]0, \infty[.$$

REMARQUE 5.3.1. — Cette nouvelle formulation du théorème B est plus précise. \triangleleft

REMARQUE 5.3.2. — Comme expliqué dans l'introduction, le théorème 5.3 propose une alternative à la compacité par compensation. L'inégalité (5.3.4) provient de ce que la décroissance au sens large permet de mesurer concrètement les propriétés de compacité de l'opérateur solution. \triangleleft

Preuve du théorème 5.3.1. — Soit $\varphi(x)$ une fonction positive, régulière (à savoir de classe C^∞), à support compact et d'intégrale 1. La condition initiale $h(x)$ est approchée par une suite de données régularisées :

$$(5.3.5) \quad h_n(x) := (h * \varphi_n)(x), \quad \varphi_n(x) := n\varphi(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La solution locale (ou globale) qui est associée à la donnée de Cauchy $h_n(x)$ est notée $u_n(t, x)$. Les coordonnées t et x sont appelées les *variables de départ*.

Si la variation étendue à \mathbb{R} de la fonction $h_n(x)$ se trouve majorée par le contrôle η_1 , le théorème de Glimm [G] s'applique tel quel. Il existe alors une solution $u_n(t, x)$ qui est définie pour tout temps et dont la variation totale est évaluée conformément à :

$$(5.3.6) \quad \tilde{V}_{ar:\mathbb{R}}^{loc}(u_n(t, \cdot)) \leq D_{13}\eta_1, \quad t \in]0, \infty[,$$

pour une certaine constante D_{13} .

Notez que la relation (5.3.6) donne en particulier :

$$(5.3.7) \quad \tilde{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(u_n(t, \cdot)) \leq \frac{D_{13}\eta_1 |I|}{t}, \quad |I| \geq t, \quad t \in]0, \infty[.$$

Examinons à présent la situation inverse, à savoir :

$$(5.3.8) \quad V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h_n(\cdot)) > \eta_1.$$

En appliquant la démarche déjà expliquée en (5.1.17) - (5.1.18), on voit apparaître :

$$(5.3.9) \quad \tilde{V}_{\text{ar};\mathbb{R}}^{\text{loc}}(h_n(\cdot)) > D_3\eta_1 \geq \bar{\delta}.$$

Comme l'application qui à x associe $h_n(x)$ est de classe C^∞ et possède une dérivée qui est uniformément bornée sur \mathbb{R} , il existe une longueur κ_n^0 qui réalise l'égalité :

$$(5.3.10) \quad \tilde{V}_{\text{ar};\kappa_n^0}^{\text{loc};u}(h_n(\cdot)) = \bar{\delta}.$$

Pour une donnée initiale $h(x)$ peu régulière, il faut s'attendre à ce que le nombre κ_n^0 soit petit (intuitivement, le scalaire κ_n^0 converge vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini).

Le changement de coordonnées $\Theta_{\kappa_n^0}$ est effectué. Les nouvelles variables de temps et d'espace sont notées :

$$(5.3.11) \quad (t_n^0, x_n^0) := \Theta_{\kappa_n^0}(t, x) = (t/\kappa_n^0, x/\kappa_n^0),$$

et sont appelées les *variables adaptées*.

La manipulation effectuée en (5.3.11) consiste donc à opérer une importante dilatation qui a pour effet de modifier la donnée de Cauchy $h_n(x)$ et la solution (locale ou globale) $u_n(t, x)$ qui lui est éventuellement associée respectivement en :

$$(5.3.12) \quad h_n^0(x_n^0) := h_n(\kappa_n^0 x_n^0), \quad u_n^0(t_n^0, x_n^0) := u_n(\kappa_n^0 t_n^0, \kappa_n^0 x_n^0).$$

La condition recherchée en (5.3.4) ne varie pas sous l'action des opérateurs de dilatation Θ_κ . Par conséquent, les relations :

$$(5.3.13) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_n^0 \in]0, \infty[, \forall I \text{ avec } |I| \geq t_n^0, \quad \tilde{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq \frac{H |I|}{t_n^0}$$

impliquent :

$$(5.3.14) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \infty[, \forall I \text{ avec } |I| \geq t, \quad \tilde{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(u_n(t, \cdot)) \leq \frac{H |I|}{t}.$$

En d'autres termes, il suffit d'établir la validité de l'identité (5.3.4) pour chaque fonction $u_n^0(t_n^0, x_n^0)$ (regardée dans les variables adaptées (t_n^0, x_n^0)) pour que celle-ci soit vraie uniformément en n pour les fonctions $u_n(t, x)$ (considérées cette fois-ci dans les variables de départ (t, x)).

Supposons que les inégalités qui sont indiquées en (5.3.13) soient toutes satisfaites. D'après (5.3.14), la suite de solutions $(u_n(t, x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les hypothèses du théorème de Helly (dont l'énoncé est rappelé en (2.1.7)). Il est donc possible d'en extraire une sous-suite qui converge fortement dans l'espace $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ vers une application qui est notée $u(t, x)$.

D'après la remarque 2.1.6, la fonction $u(t, x)$ possède une variation locale qui se trouve majorée conformément à (5.3.4). De plus, elle est solution du problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé à la condition initiale $h(x)$. En un mot, le théorème 5.3.1 est prouvé. \square

Il s'agit maintenant d'établir, pour tout indice n : Premièrement, l'existence pour tout temps d'une solution $u_n^0(t_n^0, x_n^0)$. Deuxièmement, la validité des contrôles qui sont mentionnés en (5.3.13). Ce programme est mené à son terme pour un entier n particulier positif fixé.

On introduit :

$$(5.3.15) \quad \bar{m} := \mathcal{E}[-\ln 8 / \ln \bar{v}] + 1 \implies \bar{v}^{\bar{m}} \leq 1/8.$$

L'étude débute par un énoncé préliminaire qui fait en quelque sorte écho au lemme 5.1.1 :

LEMME 5.3.1. — *Soit $h(x)$ une fonction qui est astreinte aux deux contraintes :*

$$(5.3.16) \quad h(x) \in \mathcal{D}_{\bar{\gamma}\bar{\delta}/8}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(5.3.17) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(h(\cdot)) \leq \bar{\delta}.$$

Sous les hypothèses du théorème 4.3, le problème de Cauchy (\mathcal{H}) associé à la donnée initiale $h(x)$ admet une solution qui est définie sur un domaine de la forme $[0, T_h^{in}] \times \mathbb{R}$. De plus, on a l'alternative suivante.

Ou bien :

$$(5.3.18) \quad T_h^{in} = \infty, \quad \frac{2}{\bar{\delta}} \leq {}^1T_h^{in} \leq \frac{24\bar{m}}{\bar{\delta}},$$

avec :

$$(5.3.19) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(u(t, \cdot)) \leq 5\bar{\delta}, \quad \forall t \in [0, {}^1T_h^{in}],$$

$$(5.3.20) \quad \tilde{V}_{ar}^{tot}(u(t, \cdot)) \leq D_{14}\eta_1, \quad \forall t \in [{}^1T_h^{in}, \infty[.$$

Ou alors, on a la décomposition :

$$(5.3.21) \quad T_h^{in} = {}^1T_h^{in} + \kappa^2 T_h^{in} < \infty,$$

avec :

$$(5.3.22) \quad \frac{2}{\bar{\delta}} \leq {}^1T_h^{in} \leq \frac{24\bar{m}}{\bar{\delta}}, \quad \frac{2}{\bar{\delta}} \leq {}^2T_h^{in} \leq \frac{6}{\bar{\delta}}, \quad 2 \leq \kappa,$$

$$(5.3.23) \quad u(t, x) \in \mathcal{D}_{\bar{\gamma}\bar{\delta}/8}, \quad \forall (t, x) \in [0, T_h^{in}] \times \mathbb{R},$$

$$(5.3.24) \quad \tilde{V}_{ar:1}^{loc:u}(u(t, \cdot)) \leq 5\bar{\delta}, \quad \forall t \in [0, T_h^{in}],$$

$$(5.3.25) \quad \tilde{V}_{ar:\kappa}^{loc:u}(u(t, \cdot)) \leq 5\bar{\delta}, \quad \forall t \in [{}^1T_h^{in}, T_h^{in}],$$

$$(5.3.26) \quad \tilde{V}_{ar:\kappa}^{loc:u}(u(T_h^{in}, \cdot)) \leq \bar{v}\bar{\delta} \leq \bar{\delta}.$$

Preuve du lemme 5.3.1. — D'après (5.3.2), l'hypothèse (5.3.16) implique en particulier :

$$(5.3.27) \quad \|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \bar{\gamma}\bar{\delta}/8.$$

La démonstration s'inspire de celle du lemme 5.1.1. On retrouve les trois stratégies *i*), *ii*) et *iii*).

La direction *i*) se traite de manière identique. Il s'agit simplement de compléter avec l'inégalité (5.3.20) dont l'obtention est immédiate puisque cette majoration se trouve déjà énoncée dans le travail de Glimm [G].

$$\mapsto \textit{ii}) : V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) > \eta_1 \text{ et } \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq \bar{\delta}/8.$$

De nouveau :

$$(5.3.28) \quad \tilde{V}_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) > \bar{\delta}.$$

Le lemme 2.1.3 est mis en jeu avec pour δ' le choix $\bar{\delta}/2$. Il faut trouver l'indice p qui permet de réaliser la relation (2.1.66). D'après *i*), on doit nécessairement avoir :

$$(5.3.29) \quad \bar{\delta}/2 \leq (2p+1)\tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq (2p+1)\bar{\delta}/8,$$

ce qui impose :

$$(5.3.30) \quad 2 \leq p \leq \kappa := q.$$

Le lemme 2.1.3 affirme :

$$(5.3.31) \quad \bar{\delta}/2 \leq \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq 3\bar{\delta}/4 \leq \bar{\delta}.$$

Le changement de coordonnées Θ_κ est effectué (voir (2.4.7) pour une définition). Les nouvelles variables de temps et d'espace sont notées :

$$(5.3.32) \quad (\tilde{t}, \tilde{x}) := \Theta_\kappa(t, x) = (t/\kappa, x/\kappa).$$

La transformation effectuée en (5.3.32) est une contraction qui a pour effet de changer la trace de la donnée de Cauchy $h(x)$ en :

$$(5.3.33) \quad \tilde{h} : \tilde{x} \mapsto \tilde{h}(\tilde{x}) := h(\kappa\tilde{x}).$$

D'après la formule (2.4.9) :

$$(5.3.34) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(\tilde{h}(\cdot)) = \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)).$$

Dès lors, la fonction $\tilde{h}(x)$ admet un genre $(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ qui vérifie :

$$(5.3.35) \quad \bar{\delta}/2 \leq \tilde{\delta} \leq \bar{\delta}, \quad \tilde{\gamma} \leq \bar{\gamma}.$$

Les inégalités (5.3.35) permettent d'appliquer le théorème 4.3 dans les variables (\tilde{t}, \tilde{x}) . Cette procédure garantit l'existence d'une solution $u(\tilde{t}, \tilde{x})$ qui se trouve définie sur un domaine de la forme $[0, T_{\tilde{\delta}}] \times \mathbb{R}$ avec :

$$(5.3.36) \quad 2/\tilde{\delta} \leq T_{\tilde{\delta}} := \mathcal{E}[3/\tilde{\delta}] \leq 6/\tilde{\delta}. \quad \bullet$$

$$(5.3.37) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(\tilde{t}, \cdot)) \leq 5\tilde{\delta}, \quad \forall \tilde{t} \in [0, T_{\tilde{\delta}}].$$

$$(5.3.38) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(T_{\bar{\delta}}, \cdot)) \leq \bar{v}\bar{\delta} \leq \bar{\delta}.$$

$$\longmapsto iii) : V_{\text{ar}}^{\text{tot}}(h(\cdot)) > \eta_1 \text{ et } \bar{\delta}/8 < \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h(\cdot)) \leq \bar{\delta}.$$

Le théorème 4.3.1 est invoqué plusieurs fois. À chaque fois, la solution est étendue sur une bande dont la largeur (dans la direction du temps) ne dépasse pas :

$$(5.3.39) \quad \frac{2}{\bar{\delta}} \leq T_{j\delta} := \mathcal{E}[3^j\delta] \leq \frac{24}{\bar{\delta}}$$

et on a :

$$(5.3.40) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(t, \cdot)) \leq 5\bar{v}^{j-1}\bar{\delta} \leq 5\bar{\delta},$$

$$\forall t \in [T_{1\delta} + \dots + T_{j-1\delta}, T_{1\delta} + \dots + T_{j\delta}].$$

$$(5.3.41) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(u(T_{1\delta} + \dots + T_{j\delta}, \cdot)) \leq \bar{v}^j\bar{\delta}.$$

D'après (5.3.15) et (5.3.41), au plus i itérations du raisonnement avec i inférieur ou égal à \bar{m} sont nécessaires pour qu'une des deux situations i) ou ii) se produise. D'après (5.3.39), on a alors :

$$(5.3.42) \quad 2/\bar{\delta} \leq {}^1T_h^{\text{in}} := T_{1\delta} + \dots + T_{i\delta} \leq 24i/\bar{\delta} \leq 24\bar{m}/\bar{\delta}.$$

L'estimation (5.3.19) provient de (5.3.40). La majoration (5.3.24) se déduit aussi de (5.3.40), du moins pour les instants t qui précèdent ${}^1T_h^{\text{in}}$. Pour t compris entre ${}^1T_h^{\text{in}}$ et T_h^{in} , il faut faire attention à ce que la variation locale uniforme de longueur 1 ne dépasse pas la borne $5\bar{\delta}$ qui est imposée. Il suffit pour cela d'avoir recours au théorème 4.3.1 dès que l'expression $\tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}$ dépasse le seuil $\bar{\delta}/8$.

Les contrôles (5.3.25) et (5.3.26) s'obtiennent en traduisant successivement les relations (5.3.37) et (5.3.38) dans les variables (t, x) .

Le lemme 5.3.1 est prouvé. \square

Rappelons que la condition initiale $h_n^0(x_n^0)$ est astreinte à :

$$(5.3.43) \quad h_n^0(x_n^0) \in \mathcal{D}_{\bar{\gamma}\bar{\delta}/8}, \quad \forall x_n^0 \in \mathbb{R}.$$

$$(5.3.44) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u}(h_n^0(\cdot)) = \bar{\delta}.$$

Le lemme 5.3.1 est appliqué une première fois avec pour donnée de Cauchy la fonction $h_n^0(x_n^0)$. Lorsque l'instant d'arrêt $T_{h_n^0}^{\text{in}}$ est fini, cette démarche procure une solution dont la trace $u(T_{h_n^0}^{\text{in}}, \cdot)$ calculée à l'instant $T_{h_n^0}^{\text{in}}$ se trouve contrôlée conformément à (5.3.23) et (5.3.26). Le nombre κ mis en jeu au niveau de (5.3.26) est alors noté κ_n^1 . Le changement de coordonnées $\Theta_{\kappa_n^1}$ est ensuite effectué. Les nouvelles variables de temps et d'espace ainsi obtenues sont désignées par les lettres :

$$(5.3.45) \quad (t_n^1, x_n^1) := \Theta_{\kappa_n^1}(t, x) = (t_n^0/\kappa_n^1, x_n^0/\kappa_n^1), \quad \kappa_n^1 = \kappa \geq 2.$$

La transformation effectuée en (5.3.45) est une contraction qui a pour effet de changer la trace $u(T_{h_n^0}^{\text{in}}, \cdot)$ en :

$$(5.3.46) \quad h_n^1 : x_n^1 \mapsto h_n^1(x_n^1) := u(T_{h_n^0}^{\text{in}}, \kappa_n^1 x_n^1).$$

D'après les formules (2.4.9) et (5.3.26), la fonction $h_n^1(x_n^1)$ vérifie à nouveau les deux contraintes (5.3.16) et (5.3.17). L'algorithme ainsi enclenché peut donc être itéré indéfiniment. Comme d'après (5.3.22), chaque répétition du procédé se traduit par un saut en temps de $2/\bar{\delta}$ ou plus, l'existence pour tout temps se trouve assurée.

Soyons plus précis.

Après $q + 1$ itérations du raisonnement, la solution (locale) qui est construite est notée $u_n^q(t_n^q, x_n^q)$ avec pour nouvelles coordonnées :

$$(5.3.47) \quad t_n^q := t_n^0 / \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right), \quad x_n^q := x_n^0 / \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right).$$

On adopte les conventions d'écriture suivante :

$$(5.3.48) \quad {}^0T_n^0 := 0, \quad {}^1T_n^0 := T_{h_n^0}^{\text{in}}.$$

$$(5.3.49) \quad {}^qT_n^0 := T_{h_n^0}^{\text{in}} + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\prod_{j=1}^i \kappa_n^j \right) T_{h_n^i}^{\text{in}}, \quad q \geq 2.$$

L'application $u_n^q(t_n^q, x_n^q)$ se trouve ainsi définie sur le domaine :

$$(5.3.50) \quad (t_n^0, x_n^0) \in {}^q\mathcal{B}_n^0 := [{}^qT_n^0, {}^{q+1}T_n^0] \times \mathbb{R}.$$

En reportant l'identité (5.3.21) en (5.3.49), on voit apparaître :

$$(5.3.51) \quad {}^qT_n^0 = {}^1T_{h_n^0}^{\text{in}} + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\prod_{j=1}^i \kappa_n^j \right) {}^1T_{h_n^i}^{\text{in}} + \kappa_n^1 {}^2T_{h_n^0}^{\text{in}} + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\prod_{j=1}^{i+1} \kappa_n^j \right) {}^2T_{h_n^i}^{\text{in}},$$

pour $q \geq 2$.

D'après (5.3.24) et (5.3.25), la fonction $u_n^q(t_n^q, x_n^q)$ est astreinte à :

$$(5.3.52) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:1}^{\text{loc}:u} (u_n^q(t_n^q, \cdot)) \leq 5\bar{\delta}, \quad \forall t_n^q \in [0, {}^1T_{h_n^q}^{\text{in}}].$$

$$(5.3.53) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa_n^{q+1}}^{\text{loc}:u} (u_n^q(t_n^q, \cdot)) \leq 5\bar{\delta}, \quad \forall t_n^q \in [{}^1T_{h_n^q}^{\text{in}}, T_{h_n^q}^{\text{in}}].$$

Ces inégalités se transcrivent dans les variables adaptées :

$$(5.3.54) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j)}^{\text{loc}:u} (u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq 5\bar{\delta}, \quad \forall t_n^0 \in [{}^qT_n^0, {}^qT_n^0 + \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right) {}^1T_{h_n^q}^{\text{in}}].$$

On trouve aussi :

$$(5.3.55) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:(\prod_{j=1}^{q+1} \kappa_n^j)}^{\text{loc}:u} (u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq 5\bar{\delta}, \quad \forall t_n^0 \in [{}^qT_n^0 + \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right) {}^1T_{h_n^q}^{\text{in}}, {}^{q+1}T_n^0].$$

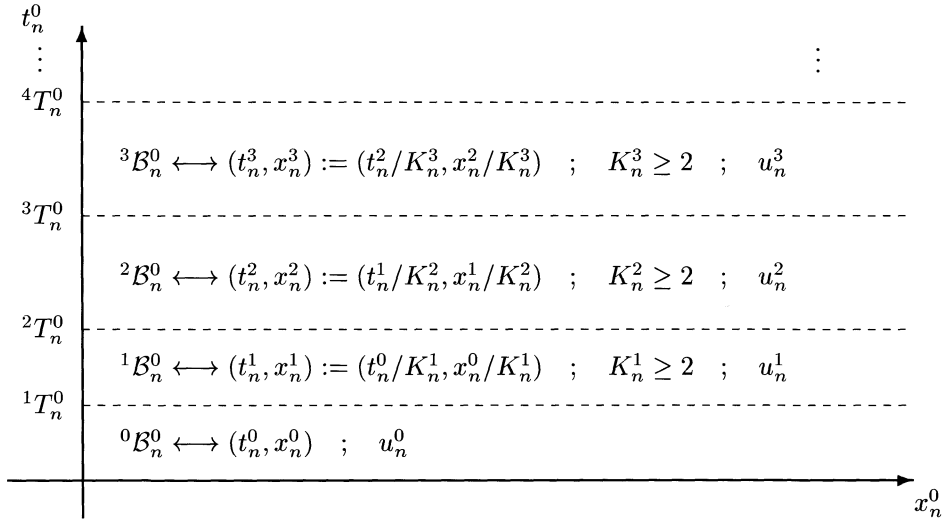


Figure 2. Domaines de prolongement successifs dans les variables adaptées de la solution $u_n^0(t_n^0, x_n^0)$

Clairement :

$$(5.3.56) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq 2\tilde{V}_{\text{ar}:t_n^0}^{\text{loc};u}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) \frac{|I|}{t_n^0}, \quad |I| \geq t_n^0.$$

Si :

$$(5.3.57) \quad {}^qT_n^0 < \prod_{j=1}^q \kappa_n^j \text{ et } t_n^0 \in [{}^qT_n^0, \prod_{j=1}^q \kappa_n^j],$$

on utilise simplement (5.3.54) et (2.1.23) pour obtenir :

$$(5.3.58) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:t_n^0}^{\text{loc};u}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq 10\bar{\delta}.$$

Dans le cas contraire, la remarque 2.1.1 est appliquée avec les choix :

$$(5.3.59) \quad \kappa' = \prod_{j=1}^q \kappa_n^j \leq {}^qT_n^0 \leq \kappa = t_n^0 \leq {}^qT_n^0 + \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right) {}^1T_{h_n^q}^{\text{in}}.$$

On obtient :

$$(5.3.60) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc};u}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq 5(2r+1)\bar{\delta},$$

avec :

$$(5.3.61) \quad r := \mathcal{E}[t_n^0/\kappa'] + 1.$$

On a la majoration évidente :

$$(5.3.62) \quad 2r + 1 \leq 2 {}^q T_n^0 / \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right) + 2 {}^1 T_{h_n^q}^{\text{in}} + 5.$$

Soit encore, en se souvenant des encadrements qui sont donnés en (5.3.22) et de la définition (5.3.51) :

$$(5.3.63) \quad 2r + 1 \leq \frac{48\bar{m}}{\bar{\delta}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} \left(\prod_{j=i+1}^q \kappa_n^j \right)^{-1} \right) + \frac{12}{\bar{\delta}} \left(1 + \sum_{i=0}^{q-2} \left(\prod_{j=i+2}^q \kappa_n^j \right)^{-1} \right) + 5.$$

Comme tous les nombres κ_n^j sont supérieurs à deux, il vient :

$$(5.3.64) \quad 2r + 1 \leq \frac{48\bar{m}}{\bar{\delta}} + \frac{24}{\bar{\delta}} + 5.$$

En reportant (5.3.64) en (5.3.60) puis l'expression obtenue (resp (5.3.58)) en (5.3.56), on voit apparaître :

$$(5.3.65) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_{\text{ar}:I}^{\text{loc}}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) &\leq (480\bar{m} + 240 + 50\bar{\delta}) |I| / t_n^0, \\ |I| \geq t_n^0, \quad \forall t_n^0 &\in [{}^q T_n^0, {}^q T_n^0 + (\prod_{j=1}^q \kappa_n^j)^{-1} {}^1 T_{h_n^q}^{\text{in}}]. \end{aligned}$$

Si :

$$(5.3.66) \quad {}^q T_n^0 + \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right)^{-1} {}^1 T_{h_n^q}^{\text{in}} < \prod_{j=1}^{q+1} \kappa_n^j$$

et :

$$(5.3.67) \quad t_n^0 \in [{}^q T_n^0 + \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right)^{-1} {}^1 T_{h_n^q}^{\text{in}}, \prod_{j=1}^{q+1} \kappa_n^j],$$

on majore simplement en utilisant (5.3.55) et (2.1.23) :

$$(5.3.68) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:t_n^0}^{\text{loc}:u}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq 10\bar{\delta}.$$

Dans le cas contraire, la remarque 2.1.1 est appliquée pour les nouveaux choix :

$$(5.3.69) \quad \kappa' = \prod_{j=1}^{q+1} \kappa_n^j \leq {}^q T_n^0 + \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right)^{-1} {}^1 T_{h_n^q}^{\text{in}} \leq \kappa = t_n^0 \leq {}^{q+1} T_n^0.$$

Cette opération donne :

$$(5.3.70) \quad \tilde{V}_{\text{ar}:\kappa}^{\text{loc}:u}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) \leq 5(2r + 1)\bar{\delta},$$

avec :

$$(5.3.71) \quad r := \mathcal{E}[t_n^0/\kappa'] + 1.$$

Un calcul analogue à celui qui est développé en (5.3.62),..., (5.3.64) fournit cette fois-ci :

$$(5.3.72) \quad 2r + 1 \leq 2^{q+1} T_n^0 / \left(\prod_{j=1}^q \kappa_n^j \right) + 5 \leq \frac{96\bar{m}}{\bar{\delta}} + \frac{24}{\bar{\delta}} + 5,$$

ce qui garantit :

$$(5.3.73) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_{\text{ar};I}^{\text{loc}}(u_n^0(t_n^0, \cdot)) &\leq (960\bar{m} + 240 + 50\bar{\delta}) |I| / t_n^0, \\ |I| &\geq t_n^0, \quad \forall t_n^0 \in [{}^q T_n^0 + (\prod_{j=1}^q \kappa_n^j)^{-1} T_{h_n^q}^{\text{in}}, {}^q T_n^0]. \end{aligned}$$

On pose :

$$(5.3.74) \quad H := \max(D_{13}\eta_1; 960\bar{m} + 240 + 50\bar{\delta}).$$

Les inégalités (5.3.7), (5.3.65) et (5.3.73) montrent que la contrainte (5.3.13) est satisfaite par la fonction $u_n^0(t_n^0, x_n^0)$ avec pour constante H l'expression qui est définie en (5.3.74).

Le théorème 5.3.1 est prouvé.

REMARQUE 5.3.3. — De manière à pouvoir développer les idées de décroissance au sens large dans un contexte très général, les paramètres $\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{\delta}$ et $\bar{\gamma}$ ont été fixés très proches de zéro. Notre propos se rapporte donc à des systèmes qui sont des perturbations (non triviales) de N lois scalaires bien découplées. Comme tous les effets non linéaires classiques (bien qu'amointris) restent tout de même présents à ce niveau, l'analyse garde toute sa saveur...

Toutefois, il serait intéressant de poursuivre l'étude en ce qui concerne des situations plus concrètes, issues de la physique. Un exemple de système qui comporte trois équations apparaît en dynamique des gaz. Il s'agit de l'équation d'Euler pour un fluide compressible. Dans ce cas, le deuxième champ caractéristique est linéairement dégénéré (en d'autres termes : Γ_{22}^2 vaut 0). Aucune décroissance en variation ne peut donc être induite par la vraie non linéarité de ce côté là. Toutefois, comme le coefficient d'interaction correspondant est aussi égal à zéro (la nullité de Λ_{13}^2 a déjà été remarquée et exploitée dans **[RY1]** et **[Sc1]**), les interactions qui se produisent sur le deuxième mode ne provoquent pas non plus d'augmentation sur la variation. On constate ainsi que la variation d'entropie (à savoir la somme des valeurs absolues des forces des discontinuités de type 2), regardée en gommant les erreurs d'ordre trois ou plus, garde une valeur constante (éventuellement strictement positive). Cette particularité provoque sur le premier et le troisième champ un afflux régulier de création d'ondes (car les coefficients Λ_{23}^1 et Λ_{12}^3 sont différents de zéro) qui se trouve équilibré par la décroissance induite par la vraie non linéarité du premier et du troisième champ (on a aussi Γ_{11}^1 et Γ_{33}^3 non nuls).

En fait, le système considéré du point de vue de l'optique géométrique est stable. En d'autres termes, les équations de modulation admettent une solution pour tout temps. De plus, cette solution reste convenablement contrôlée (voir sur ce sujet **[Ch3]**). Cette

stabilité des équations asymptotiques donne des renseignements en ce qui concerne le système d'Euler d'origine. Elle se traduit pour les données qui sont de petites amplitude par de l'existence en grand temps. La récente contribution de Robin Young [RY2] va dans le sens de cette affirmation. Notre méthode, appliquée dans le contexte de la dynamique des gaz, permet certainement de préciser les résultats de Robin Young [RY2]. Le fait est qu'elle prend en compte un facteur jusqu'à présent passé sous silence dans les argumentations. À savoir l'influence stabilisatrice de la vraie non linéarité.

BIBLIOGRAPHIE

- [B1] A. Bressan, *Lectures notes on systems of conservation laws*, S.I.S.S.A, Trieste, 1996.
- [B2] A. Bressan, *The Semigroup Approach to Systems of conservation laws*, S.I.S.S.A, Via Beirut 4, Trieste, 135/95/M.1994.
- [CCS] K. Chueh, C. Conley, J. Smoller, *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations*, Indiana Math., **26** (1977), 373-392.
- [Ch1] C. Cheverry, *Justification de l'optique géométrique nonlinéaire pour un système de lois de conservation*, Duke Mathematical Journal, **87**, , (1997), 213-263.
- [Ch2] C. Cheverry, *The modulation equations of non linear geometric optics*, Comm. in Part. Diff. Eq, **21**(1996), 1119-1140.
- [Ch3] C. Cheverry, *About the Cauchy problem for a system of conservation laws*, Geometrical optics and related topics. Progress in non linear differential equations and their applications. Birhäuser. To appear.
- [Ch4] C. Cheverry, *Optique géométrique oscillante en présence d'un grand choc*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. À paraître.
- [G] J. Glimm, *Solutions in the large for non linear hyperbolic systems*, Commun. Pure. Applied. Math., **28** (1970), 697-715
- [GL] J. Glimm, P. Lax, *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, Memoirs Amer. Math. Soc., **101** (1970).
- [H] J. Hunter, *Hyperbolic waves and nonlinear geometric acoustics*, Transactions of the Sixth Army Conference on Applied Mathematics and Computing, **2** (1989), 527-569.
- [J] F. John, *Formation of Singularities in One-Dimensional Nonlinear Wave Propagation*, Commun. Pure. Applied. Math., **27** (1974), 377-405.

- [JMR1] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Resonant one dimensional nonlinear geometric optics*, J. Funct. Anal., **114** (1993), 106-231.
- [JMR2] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *A non linear instability for 3×3 systems of conservation laws*, Comm. Math. Phys., **162** (1994), 47-59.
- [La] P. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure. Appl. Math., **10** (1957), 537-566.
- [RY1] R. Young, *Sup-norm Stability for Glimm's Scheme*, Comm. Pure. Appl. Math., **46** (1993), 903-948.
- [RY2] B. Temple, R. Young, *The large time stability of sound waves*, Commun. Math. Phys., **179** (1996), 417-466.
- [Sc1] S. Schochet, *Glimm's scheme for systems with almost-planar interactions*, Comm. in Part. Diff. Eq., **16** (1991), 1423-1440.
- [Sc2] S. Schochet, *The essence of Glimm's scheme*, Preprint.
- [Sc3] S. Schochet, *Resonant nonlinear geometrical optics for weak solutions of conservation laws*, J. Diff. Eq., **113** (1994), 473-504.
- [Se] D. Serre, *Domaines invariants pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation*, J. Diff. Eq., **69** (1987), 46-62.
- [TPL] Tai-Ping-Liu, *Decay to N-waves of solutions of general systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, Comm. in Part. Diff. Eq., **30** (1977), 585-610.
- [W] B. Wendroff, *An analysis of front tracking for chromatography*, Acta. Appl. Math., **30** (1993), 265-285.