MÉMOIRES DE LA S. M. F.

BERTRAND LEMAIRE

Intégrales orbitales sur $GL(N,F)$ où F est un corps local non archimédien

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 70 (1997)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1997_2_70__R1_0>

INTÉGRALES ORBITALES SUR $GL(N,F)$ OÙ F EST UN CORPS LOCAL NON ARCHIMÉDIEN

Bertrand Lemaire

Résumé. — Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique $p \geq 0$ et N un entier ≥ 2. Nous prouvons en détail les résultats de base de la théorie des intégrales orbitales sur $G = GL(N,F)$, résultats pour la plupart connus mais non encore rédigés pour $p > 0$: convergence, propriétés de descente, développement en germes au voisinage d'un point d'orbite fermée et leur indépendance linéaire, caractérisation sur l'ensemble des éléments absolument semi-simples réguliers, densité des intégrales orbitales absolument semi-simples régulières dans l'espace des distributions invariantes. Le traitement des éléments inséparables, i.e. ceux dont une au moins des composantes irréductibles du polynôme minimal est inséparable sur F, nous conduit à découper les nappes de Dixmier de G en sous-nappes et à produire une normalisation $J^G(f,x)$ ($f \in C_c^\infty(G)$, $x \in G$) des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application $x \mapsto J^G(f,x)$ localement constante sur chacune de ces sous-nappes.

Abstract. — Let F be a non-archimedean locally compact field of characteristic $p \geq 0$ and N an integer ≥ 2. We prove in detail the basic results of the orbital integral theory on $GL(N,F)$. Most of them are already known but had never been written before for $p > 0$: convergence, reduction formulas, germ expansion in a neighbourhood of a point in a closed orbit and linear independence of the germs, characterization on the set of regular absolutely semi-simple elements, density of the regular absolutely semi-simple orbital integrals in the space of invariant distributions. The treatment of the inseparable elements, i.e. those whose minimal polynomial has at least one component inseparable on F, leads us to break down the Dixmier strata of G in sub-strata and to produce a normalization $J^G(f,x)$ ($f \in C_c^\infty(G)$, $x \in G$) of the orbital

integrals on G which induce, for all $f \in C_c^\infty(G)$, a map $x \mapsto J^G(f,x)$ locally constant on each of these sub-strata.

Table des matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Préambule

Ce papier ne prétend pas à l'originalité dans la mesure où il contient relativement peu de résultats vraiment nouveaux. D'ailleurs, nous conseillons aux spécialistes de commencer la lecture directement à partir de la section 4. Nous avons essayé de rassembler, en rédigeant complètement les démonstrations introuvables dans la littérature, les résultats de base de la théorie des intégrales orbitales sur $G = GL(N, F)$ où F est un corps commutatif localement compact non archimédien (non discret) de caractéristique $p \geq 0$ et N un entier ≥ 2. Insistons sur le fait que pour $p = 0$, et même, plus généralement, pour p ne divisant pas N, on dispose aujourd'hui de résultats beaucoup plus profonds — et très souvent valables pour n'importe quel groupe réductif connexe défini sur F — que ceux présentés ici. Pour $p > 0$ en revanche, la théorie est beaucoup moins avancée ; d'où l'intérêt de disposer d'un terrain solide permettant plus tard d'approfondir cette théorie, voire de l'étendre à d'autres groupes que le groupe $GL(N)$. Cette rédaction nous a semblé nécessaire pour plusieurs raisons : si la philosophie générale veut que la plupart des énoncés relatifs à l'analyse harmonique sur $GL(N)$, vrais en caractéristique nulle « passent » à la caractéristique > 0, les arguments utilisés sont parfois bien différents d'une caractéristique à l'autre ; les techniques que nous présentons, de nature essentiellement algébrique, sont toutes indépendantes de la caractéristique ; la normalisation des intégrales orbitales sur G (issue des travaux de Bushnell-Kutzko [**BK**]) introduite dans la section 4, semble particulièrement adaptée, si p divise N, aux problèmes liés au nombre infini de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G ; un outil, donc, pour de prochains travaux.

1.2. Description des résultats

L'article s'organise en cinq sections, auxquelles s'ajoute la présente introduction.

Dans la section 2, on rappelle la structure des classes de conjugaison de G en insistant sur les particularités issues de la caractéristique > 0. Les complications sont essentiellement dues à la présence, si p divise N, d'éléments *inséparables*, i.e. dont une au moins des composantes irréductibles du polynôme minimal est inséparable sur F, instables par extension algébrique du corps de base. On a en particulier deux notions d'élément semi-simple [**B**] Alg. VII, §9 : les éléments *absolument semi-simples*, i.e. qui restent semi-simples lorsque considérés dans $GL(N, \overline{F})$ pour une clôture algébrique $\overline{F}$ de F, et les éléments *semi-simples inséparables.* Au voisinage de ces derniers, les techniques classiques en caractéristique nulle fondées sur le déploiement d'un sous-groupe de Cartan de G par extension séparable (finie) du corps de base sont inutilisables : les orbites inséparables « dégénèrent » par extension radicielle de F, cf. la remarque (2.4.1). De plus, la décomposition de Jordan en parties semi-simple et unipotente commutant entre elles, couramment utilisée dans la théorie des intégrales orbitales en caractéristique nulle, n'existe pas pour les éléments inséparables. On note $\widetilde{G} \subset G$ l'ensemble des éléments séparables et $\widetilde{G}_{\mathrm{r}} \subset \widetilde{G}$ l'ensemble des éléments réguliers absolument semi-simples.

Une orbite $O_G(s)$ ($s \in G$) est fermée dans G (pour la topologie ϖ-adique sur G où ϖ désigne une uniformisante de F) si et seulement si s est semi-simple, et pour tout $x \in G$, la proposition (2.3.1) décrit explicitement la fermeture $\overline{O_G(x)}$ de l'orbite $O_G(x)$ dans G ; en particulier $\overline{O_G(x)}$ contient une unique orbite fermée : l'*orbite fermée associée à* x. Un élément $x \in G$ est dit *irréductible* (resp. *elliptique*) si son polynôme minimal (resp. caractéristique) est irréductible sur F.

On reprend la décomposition de G en nappes de Dixmier utilisée dans [**BDKV**], décomposition que l'on affine en stratifiant chaque nappe en sous-nappes : une sous-nappe $X_{\alpha,\beta}$ d'une nappe X_α est l'ensemble des éléments de X_α dont l'orbite fermée associée est contenue dans la nappe X_β. Les propriétés topologiques des nappes et des sous-nappes sont décrites en 2.5 et 2.6.

En 2.8, on rappelle la généralisation aux orbites quelconques, rédigée par Laumon [**La**], des constructions de Howe pour les orbites unipotentes [**Ho**]. Signalons le rôle central du lemme (2.8.1) dans la théorie des intégrales orbitales puisque c'est grâce à lui qu'on peut dans la section 3 montrer leur convergence.

Dans la section 3, on établit, avec une attention particulière aux questions de normalisation, les propriétés fondamentales des intégrales orbitales sur G. La preuve de leur convergence, rédigée par Laumon [**La**] sur des idées de [**BDKV**] généralisant le travail de Howe [**Ho**] pour les intégrales orbitales unipotentes, est basée sur la notion de descente parabolique : pour tout $x \in G$ et toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'intégrale orbitale sur G de f au point x se réduit, via descente parabolique, à l'intégrale orbitale sur un sous-groupe de Lévi M de G d'une fonction $f_M \in C_c^\infty(M)$ en un point $x_M \in M$ (la composante de x sur M) irréductible dans M (3.3.1), d'où la convergence puisque l'orbite $O_M(x_M)$ est fermée dans M ; de plus, si L est un sous-groupe de Lévi contenant le centralisateur de x dans G, l'intégrale orbitale sur G de f au point x se réduit, via descente parabolique, à l'intégrale orbitale sur L au point x d'une fonction $f_L \in C_c^\infty(L)$ (3.3.3). On appelle *normalisation* des intégrales orbitales sur G la donnée, pour chaque orbite O de G, d'une mesure AdG-invariante non nulle sur O. En 3.4, on définit naturellement à partir des éléments irréductibles de G et de la propriété de descente (3.3.1), une normalisation « I » des intégrales orbitales sur G compatible à la propriété de descente (3.3.3).

Les points suivants sont cités dans [**BDKV**] mais, à notre connaissance, non rédigés pour $p > 0$; on a donc puisé avec circonspection dans la littérature écrite en caractéristique nulle (principalement la thèse de Rogawski [**R 1**] et l'article de Vignéras [**V**]) : développement en germes au voisinage d'un élément semi-simple (3.5.2) et formule d'homogénéité des germes au voisinage d'un élément central (3.6.2). Insistons sur le fait — trop souvent négligé — que ces germes, en tant que germes d'intégrales orbitales sur G, dépendent étroitement de la normalisation des dites intégrales orbitales que l'on a choisie. Pour tout sous-groupe de Lévi L contenant le centralisateur dans G d'un élément semi-simple s de G, les germes (définis par la normalisation « I ») au voisinage de s dans L sont les restrictions à L des germes (définis par la normalisation « I ») au voisinage de s dans G (3.5.5). La propriété d'indépendance linéaire des germes (définis par n'importe quelle normalisation des intégrales orbitales sur G) est montrée dans la section 5.

Dans la section 4, on présente une approche nouvelle, adaptée au traitement des éléments inséparables. L'idée, suggérée dans [**DK**] puis [**BDKV**], est de produire une normalisation des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » localement constante sur chacune des sous-nappes de G. Notons qu'il n'existe pas de normalisation des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » localement constantes sur les nappes de Dixmier, cf. la remarque (4.4.3). Pour ce faire, on réduit comme dans la section 3 le problème aux éléments irréductibles, éléments au voisinage desquels on dispose des fines constructions de Bushnell-Kutzko [**BK**]. Si $s \in G$ est irréductible, considérons une *strate simple* $[\mathcal{G}, n_F(s), -(k_F(s)+1), s]$ où $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $M(N, F)$ normalisé par $F[s]^\times$ et maximal pour cette dernière condition ; pour la notion de strate simple et la définition des entiers $n_F(s)$ et $k_F(s)$, on renvoie à 4.2. Soit alors dg_s la mesure de Haar sur le centralisateur G_s de s dans G définie par

$$\mathrm{vol}(\{g \in G : g^{-1}sg \in s + J_{\mathcal{G}}^{k_F(s)+1}\}, \frac{dg}{dg_s}) = 1$$

où $J_{\mathcal{G}}^{k_F(s)+1}$ est la puissance $(k_F(s)+1)$-ième du radical de Jacobson de $\mathcal{G}$ et dg la mesure de Haar sur G telle que $\mathrm{vol}(GL(N, \mathcal{O}_F), dg) = 1$. On vérifie que dg_s ainsi définie ne dépend pas du choix de $\mathcal{G}$. Etendue par descente parabolique à tous les éléments de G, cette normalisation — dite normalisation « J » — des intégrales orbitales sur G induit, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » localement constante sur chacune des sous-nappes de G (4.4.2). Comme les germes introduits dans la section 3 sont des germes d'intégrales orbitales sur G, on peut en retour (dans la section 6) caractériser les intégrales orbitales sur G définies par la normalisation « J » (6.1.2) : ce sont les fonctions Ad^*G-invariantes $\Phi : G \to \mathbf{C}$ admettant un développement en germes (définis par la normalisation « J ») au voisinage de chaque élément semi-simple de G et telles qu'il existe une partie compacte $\Omega \subset G$ telle que $\{g \in G : \Phi(g) \neq 0\} \subset \mathrm{Ad}G(\Omega)$.

Mais revenons un instant sur cette normalisation « J ». Soit $s \in \widetilde{G}$ irréductible. Posant $E = F[s]$, on a $G_s \simeq GL(d, E)$, $d[E : F] = N$. Soit alors $d\widetilde{g}_s$ la mesure de Haar sur G_s telle que (en identifiant G_s avec $GL(d, E)$)

$$\mathrm{vol}(GL(d, \mathcal{O}_E), \eta_G(s)^{-1} d\widetilde{g}_s) = 1$$

avec

$$\eta_G(s) = q^{\frac{1}{2}\delta(E/F)^d} |\det{}_{\mathrm{Lie}(G_s)\backslash \mathrm{Lie}(G)}(1 - \mathrm{Ad}s^{-1})|_F^{1/2}$$

où q est le cardinal du corps résiduel de F et $\delta(E/F)$ l'exposant du discriminant de l'extension E/F. Etendue par descente parabolique à tous les éléments de $\widetilde{G}$, cette normalisation des intégrales orbitales séparables sur G induit, pour tout $x \in G$ (séparable ou non) et toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » constante au voisinage de x dans $X \cap \widetilde{G}$ où X est la sous-nappe de G contenant x (4.5.1) ; en d'autres termes, il existe une constante $\lambda = \lambda_G(x) > 0$ telle que pour tout $y \in X \cap \widetilde{G}$ suffisamment proche de x, la mesure dg_y sur G_y donnée par la normalisation « J » coïncide avec $\lambda^{-1} d\widetilde{g}_y$.

La preuve de la propriété d'indépendance linéaire des germes (5.6.1) élaborée dans la section 5 constitue la partie la plus délicate de l'article. C'est bien entendu le cas $s \in G$ semi-simple inséparable qui pose problème : pour $s \in G$ absolument semi-simple, on peut procéder comme en caractéristique nulle, cf. la remarque (5.6.2). Fixé un élément $s \in G$ semi-simple, que l'on peut supposer irréductible grâce à la propriété de descente des germes définis par la normalisation « I » (3.5.5), toute la difficulté consiste à se ramener au cas où s est central dans G, plus précisément à réduire les intégrales orbitales sur G des fonctions $f \in C_c^\infty(G)$ au voisinage de s dans G à des intégrales orbitales sur

G_s de fonctions $\phi_f \in C_c^\infty(G_s)$ au voisinage de s (ou de 1) dans G_s. En fait, il suffit de réduire « suffisamment » d'intégrales orbitales elliptiques sur G à des intégrales orbitales elliptiques sur G_s. On y parvient, assez péniblement, grâce aux résultats de [**Le 2**] et à la machinerie de Bushnell-Kutzko [**BK**].

Dans la section 6, on prouve la caractérisation des intégrales orbitales sur G énoncée plus haut puis, grâce à la proposition (5.6.1), la variante suivante sur $\widetilde{G}_{\mathrm{r}}$ (6.1.3) : toute fonction Ad^*G-invariante $\widetilde{\Phi} : \widetilde{G}_{\mathrm{r}} \to \mathbf{C}$ admettant un développement en germes (définis par *n'importe quelle* normalisation des intégrales orbitales sur G) au voisinage de chaque élément semi-simple de G et telle qu'il existe une partie compacte $\Omega \subset G$ telle que $\{g \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}} : \Phi(g) \neq 0\} \subset \mathrm{Ad}G(\Omega)$, est une intégrale orbitale sur G. Quant à la propriété de densité des intégrales orbitales absolument semi-simples régulières dans l'espace des distributions $\mathrm{Ad}G$-invariantes sur G (6.2.2) — à l'origine de cet article, puisqu'on en avait besoin pour clore la preuve de la conjecture de Howe pour G en caractéristique > 0 (cf. [**Le 1**] Chap. 4) —, elle s'obtient facilement grâce, à nouveau, à la propriété d'indépendance linéaire des germes (5.6.1).

Ce papier s'inspire très largement du chapitre 3 de [**Le 1**]. Signalons que la démonstration de la propriété d'indépendance linéaire des germes donnée dans le numéro 4.3 du dit chapitre n'est pas correcte, puisque basée sur une formule d'entrelacement fausse en général. La section 5 du présent article répare cette erreur.

CHAPITRE 2

LES CLASSES DE CONJUGAISON DE G

2.1. Notations

Soient $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, κ_F le corps résiduel de F et q le cardinal de κ_F. Fixons une uniformisante $\varpi = \varpi_F$ de F et notons $|\;|_F$ la valeur absolue sur F normalisée par $|\varpi|_F = q^{-1}$. Si $p > 0$, on identifie F à $\kappa_F((\varpi))$, le corps des séries de Laurent formelles en l'indéterminée ϖ sur κ_F.

Soit $V = F^N$. L'algèbre de matrices $M(N, F)$, identifiée à $A(V) = \mathrm{End}_F(V)$, est munie de la topologie ϖ-adique induite par F. Le corps F est naturellement identifié au centre de $A(V)$. Sauf mention du contraire, toutes les notions topologiques utilisées font référence à la topologie ϖ-adique. Notons que puisque F est complet, pour toute extension finie F'/F, la topologie ϖ-adique produit sur F' (identifié à $F^{[F':F]}$) coïncide avec la topologie $\varpi_{F'}$-adique où $\varpi_{F'}$ est une uniformisante de F'.

On note $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}_F(A(V))$ la représentation adjointe de G et l'on appelle *orbite* une $\mathrm{Ad}G$-orbite dans $A(V)$. Soit H est un sous-groupe de G. Pour $x \in A(V)$, on note $O_H(x) = \{h^{-1}xh : h \in H\}$ l'$\mathrm{Ad}H$-orbite de x et $H_x = \{h \in H : h^{-1}xh = x\}$ le fixateur de x dans H. Pour $X \subset A(V)$, on note $\mathrm{Ad}H(X)$ l'union des $\mathrm{Ad}H$-orbites $O_H(x)$, $x \in X$. On note $\mathcal{U}_H$ l'ensemble des éléments unipotents de H et l'on pose $\mathcal{U} = \mathcal{U}_G$.

On utilise le langage des groupes algébriques de la manière (abusive) suivante. Tous les groupes algébriques que l'on considère sont supposés définis sur F et l'on n'introduit que leurs groupes des points sur F. On appelle *groupe ϖ-adique* le groupe des points F-rationnels d'un groupe algébrique linéaire connexe défini sur F, muni de la topologie ϖ-adique induite par F. Un groupe ϖ-adique $H = \underline{H}(F)$ est dit réductif si $\underline{H}$ est réductif, déployé si $\underline{H}$ est F-déployé, etc. On appelle sous-groupe parabolique (resp. tore, sous-groupe de Cartan, etc.) d'un groupe ϖ-adique $H = \underline{H}(F)$ le groupe des points F-rationnels d'un F-sous-groupe parabolique (resp. F-tore, F-sous-groupe de

Cartan, etc.) de $\underline{H}$; si de plus H est réductif, on appelle sous-groupe de Lévi de H une *composante de Lévi* d'un sous-groupe parabolique $P = \underline{P}(F)$ de H i.e. le groupe des points F-rationnels d'un F-sous-groupe de Lévi de $\underline{P}$. Si $H = \underline{H}(F)$ et $H' = \underline{H}'(F)$ sont deux groupes ϖ-adiques, un *morphisme* (de groupes ϖ-adiques) $\varphi : H \to H'$ est un homomorphisme de groupes induit par un morphisme (de groupes algébriques) $\underline{\varphi} : \underline{H} \to \underline{H}'$ défini sur F.

Soit Γ_F l'ensemble des groupes ϖ-adiques isomorphes à un produit de la forme $\prod_{i=1}^r GL(n_i, F_i')$ pour des entiers $n_i \geq 1$ et des extensions finies F_i'/F.

2.2. Paramétrisation des orbites de G

Soit Π l'ensemble des *partitions*, i.e. l'ensemble des suites d'entiers ≥ 0 presque tous nuls $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq \cdots)$. On définit le *poids* $|\alpha|$ d'une partition $\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq \cdots)$ par la formule $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$. Pour tout entier $m \geq 1$, on note Π_m l'ensemble des partitions de m, i.e. le sous-ensemble de Π formé des partitions de poids m. A toute partition $\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq \cdots)$, on associe la *partition duale* $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1 \geq \hat{\alpha}_2 \geq \cdots \geq \hat{\alpha}_n \geq \cdots)$ définie par $\hat{\alpha}_j = \#\{i : \alpha_i \geq j\}$. L'application $\Pi \to \Pi$, $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ induit, par restriction pour chaque entier $m \geq 1$, une bijection $\Pi_m \to \Pi_m$. On a sur Π_m une relation d'ordre partiel « $\prec$ » définie comme suit. Si α, β sont deux partitions de m, alors $\alpha \prec \beta$ si et seulement si pour chaque entier $k \geq 1$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \sum_{i=1}^k \beta_i$. On vérifie aisément la propriété (cf. [M] Chap. 1)

$$\alpha \prec \beta \Longleftrightarrow \hat{\beta} \prec \hat{\alpha}.$$

Deux partitions α, β de m telles que $\alpha \prec \beta$ sont dites *adjaçentes* si $\alpha \neq \beta$ et s'il n'existe pas d'élément $\gamma \in \Pi_m$ tel que $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq \beta$ et $\alpha \prec \gamma \prec \beta$.

L'ensemble $\mathcal{U}$ est union finie de classes de conjugaison, paramétrées par les éléments de Π_N. Rappelons brièvement la construction, telle qu'on peut par exemple la trouver dans [**Ho**]. Si $u \in \mathcal{U}$, on note $\{V_u^i : i = 0, \ldots, r\}$ (où $r-1$ est le rang de $u-1$) le drapeau de V défini par $V_u^i = \ker\{(u-1)^i : V \to V\}$ et α_u la partition de N duale de la partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots)$ donnée par $\lambda_i = \dim(V_u^i) - \dim(V_u^{i-1})$ si $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $\lambda_i = 0$ si $i > r$. L'application $u \mapsto \alpha_u$ induit une bijection entre l'ensemble des orbites de $\mathcal{U}$ et Π_N. Pour chaque $\alpha \in \Pi_N$, on note O_α l'orbite unipotente associée à α i.e. l'union des $u \in \mathcal{U}$ tels que $\alpha_u = \alpha$.

Tout $x \in G$ définit sur V une structure de $F[T]$-module V_x. Deux éléments x, y de G sont dans la même orbite si et seulement si les $F[T]$-modules V_x et V_y sont isomorphes. Ainsi l'application $x \mapsto V_x$ induit une bijection entre

- l'ensemble des orbites de G,
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de $F[T]$-modules W tels que $\dim_F(W) = N$ et $T.W = W$.

Soit $\Phi_F \subset F[T]$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré ≥ 1, excepté le polynôme T. La théorie des modules sur les anneaux principaux assure l'existence (et l'unicité) d'une application

$$G \times \Phi_F \to \Pi,\ (x, f) \mapsto \psi_x(f) = (\psi_x(f)_1 \geq \psi_x(f)_2 \geq \cdots \geq \psi_x(f)_n \geq \cdots)$$

telle que pour chaque $x \in G$,

$$V_x \simeq \bigoplus_{f \in \Phi_F,\, i \geq 1} F[T]/(f^{\psi_x(f)_i})$$

(isomorphisme de $F[T]$-modules). Alors ([**B**] Alg. VII, n°5, Prop. 3), l'application $x \mapsto \psi_x$ induit une bijection entre

- l'ensemble des orbites de G,
- l'ensemble des applications $\psi : \Phi_F \to \Pi$ telles que $\|\psi\| = N$ où $\|\psi\| \overset{\text{déf}}{=} \sum_{f \in \Phi_F} \deg(f)|\psi(f)|$.

Pour chaque application $\psi : \Phi_F \to \Pi$ telle que $\|\psi\| = N$, on note O_ψ l'union des $x \in G$ tels que $\psi_x = \psi$. Ainsi, O_ψ est une orbite unipotente de G paramétrée par $\alpha \in \Pi_N$ (i.e. $O_\psi = O_\alpha$) si et seulement si $\psi(T-1) = \alpha$ et $|\psi(f)| = 0$ pour tout $f \in \Phi_F - \{T-1\}$.

Le *support* d'une application $\psi : \Phi_F \to \Pi$ est l'ensemble des polynômes $f \in \Phi_F$ tels que $|\psi(f)| \neq 0$; on le note $\mathrm{Supp}(\psi)$.

2.3. Fermeture des orbites de G

Soit $x \in G$. Pour chaque entier $k \geq 1$, posons $D_{x,k} = \prod_{f \in \Phi_F} f^{\psi_x(f)_k}$. Ainsi, $\{D_{x,N} \,|\, D_{x,N-1} \,|\, \dots \,|\, D_{x,1}\}$ est la suite des diviseurs élémentaires de x.

(2.3.1) PROPOSITION. — *Soit $x \in G$. La fermeture $\overline{O_G(x)}$ de l'orbite $O_G(x)$ dans G pour la topologie ϖ-adique est union disjointe des orbites O_ψ où ψ parcourt l'ensemble (fini) des applications $\Phi_F \to \Pi$ telles que pour tout $f \in \Phi_F$, $|\psi(f)| = |\psi_x(f)|$ et $\psi(f) \prec \psi_x(f)$.*

Démonstration. — Soit $y \in \overline{O_G(x)}$. Comme x et y ont même polynôme caractéristique, pour tout $f \in \Phi_F$, on a $|\psi_y(f)| = |\psi_x(f)|$. De plus ([**B**] Alg. VII, §5 App., n°3, Prop. 5), pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, le polynôme $P_{x,i} = \prod_{k=0}^{i-1} D_{x,N-k}$ est le p.g.c.d. des mineurs d'ordre i de la matrice $(T - x) \in GL(N, F[T])$; on en déduit que $P_{x,i}$ divise $P_{y,i}$ $(i = 1, \dots, N)$ donc que $\prod_{k=1}^{i} D_{y,k}$ divise $\prod_{k=1}^{i} D_{x,k}$ $(i = 1, \dots, N)$ et finalement que $\psi_y(f) \prec \psi_x(f)$ pour tout $f \in \Phi_F$.

Réciproquement, soit $y \in G$ tel que $|\psi_y(f)| = |\psi_x(f)|$ et $\psi_y(f) \prec \psi_x(f)$ pour tout $f \in \Phi_F$; on suppose que y n'appartient pas à l'orbite $O_G(x)$. Commençons par isoler les composantes primaires de x. Pour $f \in \mathrm{Supp}(\psi_x) \subset \Phi_F$, notons

V_f le sous-espace vectoriel de V défini par $V_f = \ker\{f(x)^{m(f)} : V \to V\}$ où $m(f) = \psi_x(f)_1$ est la multiplicité de f dans le polynôme minimal de x. La *décomposition* de V en $V = \oplus_f V_f$ où f parcourt les éléments de $\mathrm{Supp}(\psi_x)$ définit un sous-groupe de Lévi de G

$$M = \{g \in G : gV_f \subset V_f, \forall f \in \mathrm{Supp}(\psi_x)\} = \textstyle\prod_f GL(V_f).$$

Quitte à remplacer y par $g^{-1}yg$ pour un $g \in G$, on peut supposer que $y \in M$. Il suffit alors de montrer que y est dans la fermeture dans M de l'AdM-orbite $O_M(x)$. On est donc ramenés au cas où le support de ψ_x est réduit à un élément, disons f.

Soit $d = \deg(f)$ et soient $\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq \cdots)$, $\beta = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq \cdots)$ les partitions de N/d définies par $\alpha_i = \psi_y(f)_i$ et $\beta_i = \psi_x(f)_i$. Par induction grâce à la transitivité de la relation d'ordre partielle « $\prec$ » sur $\Pi_{N/d}$, on peut supposer les partitions $\alpha \prec \beta$ *adjaçentes* c'est-à-dire de la forme

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta_i & \text{si } i \notin \{m, n\} \\ \alpha_m = \beta_m - 1 & \\ \alpha_n = \beta_n + 1 & \end{cases}$$

pour deux entiers $m \geq 0$ et $n \geq m + 1$. On peut sans perte de généralité se limiter à l'étude des deux cas de figure suivants :

cas 1 : $\alpha_1 = \beta_1 - 1$, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = \beta_2 = 0$,

cas 2 : $\alpha_1 = \beta_1 - 1$, $\alpha_2 = \beta_2 + 1 > 1$ et $\alpha_3 = \beta_3 = 0$.

La dernière étape consiste à construire, pour chacun de ces deux cas, une application algébrique $\Lambda : F \to G$ telle que $\Lambda(0) \in O_G(y)$ et $\Lambda(\eta) \in O_G(x)$ pour tout $\eta \in F - \{0\}$. On pose $f = T^d + c_{d-1}T^{d-1} + \cdots + c_1 T + c_0$ et l'on note J et $I(\eta)$ ($\eta \in F$) les matrices $d \times d$ définies par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -c_{d-1} \end{pmatrix}, \; I(\eta) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \eta \\ \vdots & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le *cas 1*, le $F[T]$-module V_x s'identifie à $F[T]/(f^{\beta_1})$ muni de la base

$$\{1, T, \dots, T^{d-1}; f, Tf, \dots, T^{d-1}f; \dots; f^{\frac{N}{d}-1}, Tf^{\frac{N}{d}-1}, \dots, T^{d-1}f^{\frac{N}{d}-1}\}$$

et la matrice de la multiplication par T dans cette base est

$$\Lambda = \begin{pmatrix} J & 0 & \dots & \dots & 0 \\ I(1) & J & \ddots & & \vdots \\ 0 & I(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I(1) & J \end{pmatrix} \quad (\beta_1 \times \beta_1 \text{ blocs}).$$

Pour $\zeta \in F$, on définit la matrice

$$\Lambda(\eta) = \Lambda_{\beta_1}(\eta) = \begin{pmatrix} J & 0 & \dots & \dots & 0 \\ I(\eta) & J & \ddots & & \vdots \\ 0 & I(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I(1) & J \end{pmatrix} \quad (\beta_1 \times \beta_1 \text{ blocs}).$$

Il est clair que $\Lambda(0) \in O_G(y)$; pour $\eta \neq 0$, $\Lambda(\eta) = g^{-1}\Lambda g$ où $g = g_{\beta_1}(\eta)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\eta 1_d, 1_d, \dots, 1_d)$ (β_1 blocs diagonaux, 1_d désignant la matrice identité de $GL(d, F)$). L'application $\eta \mapsto \Lambda(\eta)$ construite ci-dessus vérifie donc les propriétés voulues.

Dans le *cas 2*, le $F[T]$-module V_x s'identifie à $F[T]/(f^{\beta_1}) \oplus F[T]/(f^{\beta_2})$ muni de la base

$$\{1, T, \dots, T^{d-1}; f, Tf, \dots, T^{d-1}f; \dots; f^{\beta_1-1}, Tf^{\beta_1-1}, \dots, T^{d-1}f^{\beta_1-1}\} \times$$
$$\{1, T, \dots, T^{d-1}; f, Tf, \dots, T^{d-1}f; \dots; f^{\beta_2-1}, Tf^{\beta_2-1}, \dots, T^{d-1}f^{\beta_2-1}\}$$

et, avec les notations introduites plus haut, la matrice de la multiplication par T dans cette base est la matrice diagonale par blocs

$$\Lambda' = \mathrm{diag}(\Lambda_{\beta_1}(1), \Lambda_{\beta_2}(1)).$$

Pour $\eta \in F$, on définit la matrice

$$\Lambda'(\eta) = \begin{pmatrix} \Lambda_{\beta_1}(\eta) & 0 \\ \Upsilon & \Lambda_{\beta_2}(1) \end{pmatrix}, \; \Upsilon = \begin{pmatrix} I(1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\beta_2 \times \beta_1 \text{ blocs}).$$

Ainsi, $\Lambda'(0) \in O_G(y)$ et pour $\eta \in F - \{0\}$, $\Lambda'(\eta) = g'^{-1}\Lambda' g'$ où

$$g' = \begin{pmatrix} g_{\beta_1}(\eta) & 0 \\ \Sigma & g_{\beta_2}(\eta) \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1_d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1_d \end{pmatrix} \quad (\beta_2 \times \beta_1 \text{ blocs}).$$

Comme pour le *cas 1*, l'application $\eta \mapsto \Lambda'(\eta)$ vérifie les propriétés voulues. □

(2.3.2) COROLLAIRE. — *(i) Les éléments d'orbite fermée dans G pour la topologie ϖ-adique sont les $x \in G$ tels que $\psi_x(f)_i \in \{0,1\}$ pour tout $f \in \Phi_F$ et tout entier $i \geq 1$ (i.e. les éléments « semi-simples » au sens de [B] Alg. VIII, §9, Déf. 1).*

(ii) La fermeture dans G d'une orbite O pour la topologie ϖ-adique est union de O et d'un nombre fini d'orbites de dimension (en tant que variétés ϖ-adiques) strictement inférieure à la dimension de O. En particulier, toute orbite de G est une sous-variété ϖ-adique localement fermée de G.

Démonstration. — Le point (i) découle directement de la proposition (2.3.1).

Pour (ii), soit $x \in G$ et soit $y \in \overline{O_G(x)} - O_G(x)$. La dimension de l'orbite $O_G(y)$ coïncide avec $N^2 - \dim(G_y)$ et l'algèbre de Lie de G_y s'identifie à $\mathrm{End}_{F[T]}(V_y)$ dont la dimension est $-N+2\sum_{i=1}^{N} i \deg(D_{y,i})$ ([**J**] Theorem 3.16). Ainsi, reprenant la notation $P_{z,i} = \prod_{k=0}^{i-1} D_{z,N-k}$ ($z \in G$) introduite au début de la preuve de (2.3.1), on obtient

$$\dim O_G(x) - \dim O_G(y) = 2\sum_{i=1}^{N} \deg\left(\frac{P_{y,i}}{P_{x,i}}\right) > 0. \tag{2.3.3}$$

D'où le point (ii) de (2.3.2). □

2.4. Lexique

Désormais, et jusqu'à la fin de ce papier, nous utilisons la terminologie[(1)] suivante. Un élément $x \in G$ est dit

– *primaire* si le support de ψ_x est réduit à un élément,

– *semi-simple* si $\psi_x(f)_i \in \{0,1\}$ pour tout $f \in \Phi_F$ et tout entier $i \geq 1$,

[(1)]Signalons, pour éviter les confusions, que nos éléments *semi-simples* (resp. *absolument semi-simples*, *irréductibles*) sont les éléments « fermés » (resp. « semi-simples », « elliptiques ») de [La].

– *irréductible* (ou *simple*) si x est primaire et semi-simple, autrement dit si le polynôme minimal de x est irréductible sur F,
– *régulier* si $\psi_x(f)_2 = 0$ pour tout $f \in \Phi_F$, i.e. si $D_{x,2} \equiv 1$,
– *elliptique* si x est irréductible et régulier, autrement dit si le polynôme caractéristique de x est irréductible sur F,
– *séparable* si tout $f \in \mathrm{Supp}(\psi_x)$ est séparable sur F,
– *absolument semi-simple* ([**B**] Alg. VIII, §9, Déf. 2) si x est semi-simple et séparable.

Au risque de gêner certains lecteurs, nous employons le terme semi-simple pour désigner à la fois les « vrais » éléments semi-simples (i.e. ceux qui restent semi-simples dans $GL(N, \overline{F})$ pour une clôture algébrique $\overline{F}$ de F) et les « faux » éléments semi-simples (i.e. les autres). Bien sûr, ces derniers n'existent que si $p \mid N$. Le point de vue que nous adoptons, aidé en cela par les travaux de Bushnell-Kutzko [**BK**], nous conduit en effet à traiter indistinctement les « vrais » et les « faux » éléments semi-simples ; nous verrons dans la section 4 que les intégrales orbitales sur G ont, pourvu qu'on les normalise correctement, des propriétés de régularité qui d'une certaine manière « ne voient pas » les éléments inséparables (cf. la proposition (4.4.2)).

(2.4.1) REMARQUE. — Si s est un élément absolument semi-simple de G, on peut fixer un sous-groupe de Cartan Γ de G_s, i.e. un sous-groupe de Cartan de G contenant s, et étudier le comportement des orbites voisines de $O_G(s)$ dans $\mathrm{Ad}G(\Gamma)$ en déployant Γ par une extension séparable finie de F (cf. par exemple le Lemma 19 de [**HC 1**]). Pour les éléments semi-simples inséparables en revanche, ce procédé n'est pas utilisable : si $p \mid N$ et x est un élément semi-simple inséparable de G, alors G_x est (non canoniquement) isomorphe à $\prod_{i=1}^{r} GL(n_i, F_i')$ pour des entiers $n_i \geq 1$ et des extensions finies F_i'/F, données par $F[x] = F_1' \times \cdots \times F_r'$, dont une au moins est inséparable ; en particulier, G_x est dans Γ_F mais n'est pas réductif (comme groupe ϖ-adique), et pour toute sous-$F[x]$-algèbre $Q \subseteq \mathrm{End}_{F[x]}(V)$ commutative séparable maximale, le sous-groupe $\Gamma = Q^\times \subseteq G_x$ dégénère en se déployant sur F (comme F-algèbre, Q est inséparable). Exemple : supposons $p > 0$ et considérons l'élément

$$x = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \varpi \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(p, F).$$

Il est elliptique dans $GL(p, F)$ et conjugué dans $GL(p, F[\sqrt[p]{\varpi}])$ à

$$y = \begin{pmatrix} \sqrt[p]{\varpi} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt[p]{\varpi} \end{pmatrix},$$

lequel est loin d'être semi-simple dans $GL(p, F[\sqrt[p]{\varpi}])$ puisque produit de la matrice scalaire $\mathrm{diag}(\sqrt[p]{\varpi}, \dots, \sqrt[p]{\varpi})$ par un unipotent régulier.

(2.4.2) Remarque. — Les énoncés de normalisation et de descente des intégrales orbitales en caractéristique nulle sont pour la plupart formulés en termes de la décomposition de Jordan. Or cette décomposition n'existe pas en général pour les éléments inséparables (exemple : si $p > 0$, un élément $x \in GL(p^2, F)$ de polynôme minimal $T^{p^2} - \varpi^p$ ne peut pas s'écrire sous la forme $x = su$ avec s semi-simple, u unipotent et $su = us$). On verra dans la section 2 comment, moyennant quelques petites modifications, on peut sans la décomposition de Jordan reformuler tous les résultats de descente connus en caractéristique nulle.

Soient $G_{\mathrm{r}} \subset G$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers et $G_{\mathrm{e}} \subset G_{\mathrm{r}}$ l'ensemble des éléments elliptiques. Soit $\widetilde{G} \subset G$ l'ensemble des éléments séparables et soient $\widetilde{G}_{\mathrm{r}} = \widetilde{G} \cap G_{\mathrm{r}}$, $\widetilde{G}_{\mathrm{e}} = \widetilde{G} \cap G_{\mathrm{e}}$.

On généralise naturellement les définitions et notations de 2.4 à tout groupe $H \in \Gamma_F$, donc en particulier au centralisateur dans G d'un $s \in G$ semi-simple : soit un isomorphisme (de groupes ϖ-adiques) $\varphi : H \xrightarrow{\simeq} \prod_{i=1}^{r} GL(n_i, F_i')$ pour des entiers $n_i \geq 1$ et des extensions finies F_i'/F. Un élément $h \in H$ est dit *primaire* (resp. *semi-simple*, *irréductible*, *séparable*, etc.) dans H si pour chaque indice $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $n_i \geq 2$, la composante de $\varphi(h)$ sur $GL(n_i, F_i')$ est, en remplaçant N par n_i et F par F_i' dans les définitions précédentes, primaire (resp. semi-simple, irréductible, séparable, etc.). Ces définitions sont indépendantes de l'isomorphisme φ choisi. Comme pour G, on définit H_{r}, H_{e}, $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}_{\mathrm{r}}$ et $\widetilde{H}_{\mathrm{e}}$.

2.5. Nappes de Dixmier

Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $F[T]_n$ la variété ϖ-adique formée des polynômes unitaires de degré n non divisibles par le polynôme T, et p_n : $F[T]_n \to F^{n-1} \times F^{\times}$ l'isomorphisme de variétés ϖ-adiques donné par $p_n(\xi) = (c_{n-1}(\xi), \dots, c_0(\xi))$ pour $\xi = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\xi) T^i$. Si $\xi \in \coprod_{n \geq 1} F[T]_n$, pour chaque entier $k \geq 1$, soit $\mathcal{V}_k(\xi)$ l'image réciproque par l'application p_d, où

$d = \deg(\xi)$, du voisinage ouvert compact de $p_d(\xi)$ dans $F^{d-1} \times F^\times$ formé des d-uplets $(c_{d-1}, c_{d-2}, \ldots, c_0)$ tels que $c_i \equiv c_i(\xi) \pmod{\mathcal{P}^k}$ pour $i = 1, \ldots, d-1$ et $c_0 \equiv c_0(\xi) \bmod (1 + \mathcal{P}_F^k)$. Comme le résultant $R(f, g) \in F$ de deux polynômes f, $h \in \coprod_{n \geq 1} F[T]_n$ dépend continuement des coefficients de f et g, si f et g sont premiers entres eux, alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout couple $(f', h') \in \mathcal{V}_k(f) \times \mathcal{V}_k(h)$, les polynômes f' et h' sont premiers entre eux.

Fixons un entier $n \geq 1$ et un polynôme $\xi \in F[T]_n$. Soit $\prod_{f \in \Phi_F} f^{m_f(\xi)}$ la décomposition de ξ en produit de polynômes irréductibles sur F, et soit $k(\xi)$ le plus petit entier $k \geq 1$ tel que pour tous polynômes $f, h \in \Phi_F$, $f \neq h$ tels que $m_f(\xi) > 0$ et $m_h(\xi) > 0$, on ait la propriété : pour tout couple $(f', h') \in \mathcal{V}_k(f^{m_f(\xi)}) \times \mathcal{V}_k(h^{m_h(\xi)})$, les polynômes f' et h' sont premiers entre eux. Ainsi, pour chaque entier $k \geq k(\xi)$ la partie

$$\mathcal{W}_k(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_f \mathcal{V}_k(f^{m_f(\xi)})$$

où f parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de ξ, est un voisinage ouvert compact de ξ dans $F[T]_n$ (lemme de Hensel), et les $\mathcal{W}_k(\xi)$ $(k \geq k(\xi))$ forment un système fondamental de voisinages ouverts compacts de ξ dans $F[T]_n$. De plus, le lemme suivant implique que si l'entier k est suffisamment grand, alors pour chaque composante irréductible f de ξ et pour tout $\phi \in \mathcal{V}_k(f^{m_f(\xi)})$, les degrés des composantes irréductibles de ϕ sont multiples de $\deg(f)$.

(2.5.1) LEMME. — *Soient un polynôme $f \in \Phi_F$ et un entier $m \geq 1$. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{V}_k(f^m)$ et toute racine γ de ϕ,* $\deg(f)$ *divise* $[F[\gamma] : F]$.

Démonstration. — Fixons une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et une racine α de f dans $\overline{F}$. Soient $E = F[\alpha]$, K/F la sous-extension séparable maximale de E/F et r le plus grand entier $m \geq 0$ tel que $f \in F[T^{p^m}]$ ($p^r = 1$ si $p = 0$). Alors $f(T) = h(T^{p^r})$ pour un polynôme $h \in \Phi_F$, séparable sur F puisque $h \notin F[T^p]$. Comme $\deg(f) = p^r \deg(h)$ et que le nombre de racines distinctes de f est égal à $\deg(h)$, on a $[E : K] = p^r$. Donc $K = F[\alpha^{p^r}]$ et $x^{p^r} \in K$ pour tout $x \in E$. Soit $\nu : \overline{F} \to \mathbf{Q}$ la valuation sur $\overline{F}$ telle que $\nu(K) = \mathbf{Z}$ i.e. la valuation sur $\overline{F}$ qui prolonge la valuation normalisée sur K, et soit S l'ensemble des F-plongements de K dans $\overline{F}$. Si $\phi \in F[T]_n$ où $n = m \deg(f)$, pour toute racine γ de ϕ dans $\overline{F}$, on a $\nu(h^m(\gamma^{p^r})) = \nu((f^m - \phi)(\gamma))$. Par suite, il existe un entier $k \geq 1$ tel que, pour tout polynôme $\phi \in \mathcal{V}_k(f^m)$ et toute racine γ de ϕ dans $\overline{F}$, il existe un unique $\sigma_\gamma \in S$ tel que $\nu(\gamma^{p^r} - \sigma_\gamma \alpha^{p^r}) > \nu(\sigma \alpha^{p^r} - \sigma_\gamma \alpha^{p^r})$ pour tout $\sigma \in S$, $\sigma \neq \sigma_\gamma$; alors $\sigma_\gamma K \subset F[\gamma^{p^r}]$ (lemme de Krasner).

Soit $P(T) \in K[T]$ tel que $\nu(P(\alpha)) = p^{-r}$ i.e. tel que $P(\alpha)$ soit une uniformisante de E. Pour chaque $\sigma \in S$, il existe un unique plongement de E dans $\overline{F}$ prolongeant σ ([**B**] Alg.V, § 8, Prop. 8), que l'on note encore σ. Quitte à rempacer k par un entier plus grand, on peut supposer que pour tout $\phi \in \mathcal{V}_k(f^m)$ et toute racine γ de ϕ dans $\overline{F}$ telle que $\sigma_\gamma = \mathrm{id}_{K/F}$, $\nu(P(\gamma)) = \nu(P(\alpha))$. Alors, pour tout $\phi \in \mathcal{V}_k(f^m)$ et toute racine γ de ϕ dans $\overline{F}$, $\nu(\sigma_\gamma P(\gamma)) = \nu(\sigma_\gamma P(\sigma_\gamma \alpha)) = p^{-r}$, donc p^r divise $[F[\gamma] : \sigma_\gamma K]$ et finalement $\deg(f) = p^r \deg(h)$ divise $[F[\gamma] : F]$. □

Soit $x \in G$. L'isomorphisme de $F[T]$-modules $V_x \simeq \oplus_{i=1}^N F[T]/(D_{x,i})$ donné par la théorie des diviseurs élémentaires permet d'associer à x une partition de N

$$\alpha_x \stackrel{\text{déf}}{=} (\deg(D_{x,1}) \geq \deg(D_{x,2}) \geq \cdots \geq \deg(D_{x,N}) \geq 0 = \cdots = 0 = \cdots).$$

L'application $G \to \Pi_N$, $x \mapsto \alpha_x$ prolonge l'application $\mathcal{U} \to \Pi_N$, $u \mapsto \alpha_u$ définie en 2.2. On note $p_{\mathrm{car}} : G \to F[T]_N$ l'application « polynôme caractéristique » donnée par $p_{\mathrm{car}}(x) = \prod_{i=1}^N D_{x,i}$.

Pour chaque $\alpha \in \Pi_N$, soit $X_\alpha = \{x \in G : \alpha_x = \alpha\}$ la *nappe de Dixmier* de G associée à α. La décomposition de G en nappes de Dixmier décrite dans la proposition suivante est essentielle pour la suite de la construction.

(2.5.2) PROPOSITION. — *(i) Pour chaque $\alpha \in \Pi_N$, la nappe X_α est une partie $\mathrm{Ad}G$-invariante de G, l'orbite O_α (cf. 2.2) est l'unique orbite unipotente de X_α et la restriction à X_α de l'application p_{car} induit une bijection entre l'ensemble des orbites de X_α et $p_{\mathrm{car}}(X_\alpha)$.*

(ii) $G = \coprod_{\alpha \in \Pi_N} X_\alpha$.

(iii) Soit $\alpha \in \Pi_N$. Pour tout $x \in X_\alpha$, la dimension de l'orbite $O_G(x)$ (en tant que variété ϖ-adique) est $2\sum_{i=1}^N i(1-\alpha_i)$.

(iv) Soit $\alpha \in \Pi_N$. La fermeture $\overline{X_\alpha}$ de la nappe X_α dans G pour la topologie ϖ-adique est contenue dans $\coprod_{\beta \prec \alpha} X_\beta$ et X_α est ouverte dans $\coprod_{\beta \prec \alpha} X_\beta$; en particulier, X_α est une sous-variété ϖ-adique localement fermée de G. Précisément, $\overline{X_\alpha}$ est union des fermetures dans G des orbites de X_α.

Démonstration. — Les points (i) et (ii) sont clairs.

(iii) Soit $x \in X_\alpha$. La dimension de l'algèbre de Lie de G_x est $-N + 2\sum_{i=1}^N i\alpha_i$ ([**J**] Theorem 3.16) donc la dimension de l'orbite $O_G(x)$ est $N^2 + N - 2\sum_{i=1}^N i\alpha_i = 2\sum_{i=1}^N i(1-\alpha_i)$.

(iv) Soit $y \in \overline{X_\alpha}$. Les arguments utilisés au début de la preuve de (2.3.1) entraînent que $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{N-k} \leq \deg(\prod_{k=0}^{i-1} D_{y,N-k})$ $(i = 1, \ldots, N)$ donc que $\sum_{k=1}^{i} \alpha_k \geq \deg(\prod_{k=1}^{i} D_{y,k})$ $(i = 1, \ldots, N)$ et finalement que $\alpha_y \prec \alpha$. D'où l'inclusion $\overline{X_\alpha} \subseteq \coprod_{\beta \prec \alpha} X_\beta$.

La seconde assertion du point (iv) résulte de l'inclusion ci-dessus grâce à la transivité de la relation d'ordre partielle « $\prec$ » sur Π_N : pour toute partition β de N, la partie $\coprod_{\gamma\prec\beta} X_\gamma$ est union des fermetures dans G des nappes X_γ ($\gamma \prec \beta$) donc est fermée dans G. Comme la partie $\coprod_{\beta\prec\alpha,\beta\neq\alpha} X_\beta$ est union des $\coprod_{\gamma\prec\beta} X_\gamma$ ($\beta \prec \alpha$, $\beta \neq \alpha$), elle est fermée dans G donc dans $\coprod_{\beta\prec\alpha} X_\beta$ et par conséquent (passage au complémentaire) la nappe X_α est ouverte dans $\coprod_{\beta\prec\alpha} X_\beta$.

Quant à la précision, il est clair que l'union des fermetures dans G des orbites de X_α est contenue dans $\overline{X_\alpha}$. Il suffit donc de montrer que cette union est fermée dans G. Si $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0 = \cdots = 0 = \cdots)$, un polynôme ξ appartient à $p_{\mathrm{car}}(X_\alpha)$ si et seulement si il existe des polynômes $\phi_i \in \coprod_{n\geq 1} F[T]_n$ ($i = 1,\ldots,r$) tels que $\xi = \prod_{i=1}^r (\phi_i)^i$ et $\alpha_i = \sum_{j=i}^r \deg(\phi_j)$ ($i = 1,\ldots,r$). Soit $\xi \in F[T]_N - p_{\mathrm{car}}(X_\alpha)$. Si $k \geq k(\xi)$ est un entier suffisamment grand, pour tout polynôme $\zeta = \prod_f \zeta_f$ dans $\mathcal{W}_k(\xi) = \prod_f \mathcal{V}_k(f^{m_f(\xi)})$ où f parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de ξ, les degrés des composantes irréductibles de ζ_f sont multiples de $\deg(f)$ (pour chaque f) et donc $\mathcal{W}_k(\xi) \subset F[T]_N - p_{\mathrm{car}}(X_\alpha)$. On en déduit que $p_{\mathrm{car}}(X_\alpha)$ est une partie fermée de $F[T]_N$. Comme l'union des fermetures dans G des orbites de X_α est la trace sur $\coprod_{\beta\prec\alpha} X_\beta$ de l'image réciproque de $p_{\mathrm{car}}(X_\alpha)$ par l'application p_{car}, cette union est fermée dans G. □

Ainsi, la nappe régulière $X_{(N>0=\cdots=0=\cdots)}$ est l'ensemble des orbites de dimension maximale ; a l'opposé, la nappe centrale $X_{(1=\cdots=1>0=\cdots=0=\cdots)}$ (identifiée à $F^\times$) est l'ensemble des orbites de dimension nulle.

(2.5.3) REMARQUE. — La fermeture d'une nappe X_α dans G pour la topologie ϖ-adique ne coïncide en général pas avec $\coprod_{\beta\prec\alpha} X_\beta$. Considérons par exemple les partitions $\alpha = (3 \geq 1)$ et $\beta = (2 \geq 2)$ de $N = 4$ et soit $x \in GL(4,F)$ un élément de polynôme minimal f de degré 2 irréductible sur F. Cet x appartient à la nappe X_β de $GL(4,F)$ mais n'appartient pas à la fermeture dans $GL(4,F)$ de la nappe X_α ; il n'est en effet pas possible d'approcher d'aussi près que l'on veut le polynôme caractéristique f^2 de x par un polynôme ayant une racine dans F.

Pour la topologie de Zariski en revanche, la fermeture d'une nappe X_α de G est bien l'union des nappes X_β ($\beta \prec \alpha$).

2.6. Sous-nappes des nappes de Dixmier

La décomposition de G en nappes de Dixmier n'est pas assez fine pour le propos qui nous intéresse ; on verra en particulier qu'il n'existe pas de normalisation des intégrales orbitales sur G induisant des applications localement constantes sur les nappes de Dixmier. On raffine donc cette décomposition en stratifiant les nappes en sous-nappes.

Soit $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \alpha_r > 0 = \cdots = 0 = \cdots)$ une partition de N. La nappe X_α est l'ensemble des points sur F d'une sous-variété algébrique lisse $\underline{X}_\alpha$ définie sur F de $\underline{G} = GL(N)$ vu comme groupe algébrique défini sur F. De même, notant Y_α l'ensemble des suites $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r\}$ de polynômes unitaires $\xi_i \in F[T] - TF[T]$ tels que $\xi_{i+1} \mid \xi_i$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ et $\deg(\xi_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, Y_α est l'ensemble des points sur F d'une variété lisse $\underline{Y}_\alpha$ définie sur F. Soit $\underline{p}_\alpha : \underline{X}_\alpha \to \underline{Y}_\alpha$ le morphisme algébrique tel que $p_\alpha(x) = \{D_{x,1}, \ldots, D_{x,r}\}$ pour tout $x \in X_\alpha$ et soit $\underline{s}_\alpha : \underline{Y}_\alpha \to \underline{X}_\alpha$ la section de $\underline{p}_\alpha$ définie comme suit. Pour chaque $\{\xi_i\}_{i=1}^r \in Y_\alpha$, $s_\alpha(\{\xi_i\})$ est la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{diag}(J(\xi_1), \ldots, J(\xi_r)) \quad (\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_r \text{ blocs})$$

où

$$J(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -c_{d-1} \end{pmatrix} \in GL(d, F)$$

pour tout polynôme $\xi = T^d + \sum_{i=1}^{d-1} c_i T^i \in F[T] - TF[T]$. Ainsi, $\underline{p}_\alpha$ est surjective, submersive et de fibres les $\mathrm{Ad}\underline{G}$-orbites de $\underline{X}_\alpha$ (avec la terminologie de Gelfand-Kazhdan **[GK]**, le couple $(\underline{X}_\alpha, \underline{p}_\alpha)$ est un « geometrical factor »).

Pour décrire la topologie de Y_α, reprenons les notations introduites en 2.5. Soit $\{\xi_i\}_{i=1}^r$ un élément de Y_α et soit

$$k(\{\xi_i\}) \stackrel{\text{déf}}{=} \max\left\{k(\xi_r), k\left(\frac{\xi_{r-1}}{\xi_r}\right), \ldots, k\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)\right\}.$$

Alors, pour chaque entier $k \geq k(\{\xi_i\})$, la partie

$$\mathcal{W}_k(\{\xi_i\}) = \left\{\{\zeta_i\} \in Y_\alpha : \zeta_r \in \mathcal{W}_k(\xi_r),\ \frac{\zeta_{r-i}}{\zeta_{r-i+1}} \in \mathcal{W}_k\left(\frac{\xi_{r-i}}{\xi_{r-i+1}}\right),\ i = 1, \ldots, r-1\right\}$$

est un voisinage ouvert compact de de $\{\xi_i\}$ dans Y_α et les $\mathcal{W}_k(\{\xi_i\})$ $(k \geq k(\{\xi_i\}))$ forment un système fondamental de voisinages ouverts compacts de $\{\xi_i\}$ dans Y_α.

Pour chaque $x \in G$, on appelle *orbite fermée associée à* x l'unique orbite semi-simple contenue dans la fermeture de $O_G(x)$ dans G i.e. l'orbite O_ψ où ψ est l'unique application $\Phi_F \to \Pi_N$ telle que pour tout $f \in \Phi_F$, $|\psi(f)| = |\psi_x(f)|$ et $\psi(f)_1 \in \{0, 1\}$ où $\psi(f) = (\psi(f)_1 \geq \psi(f)_2 \geq \cdots \geq \psi(f)_N \geq 0 = \cdots)$. Si s est un élément semi-simple de G, on note $A_G(s)$ l'ensemble des $x \in G$ d'orbite fermée associée $O_G(s)$, i.e. l'ensemble des $x \in G$ tels que $p_{\mathrm{car}}(x) = p_{\mathrm{car}}(s)$. En d'autres termes, $A_G(s)$ est la fermeture dans G de l'unique orbite régulière O_ψ telle que $\mathrm{Supp}(\psi) = \mathrm{Supp}(\psi_s)$ et les orbites de $A_G(s)$ sont paramétrées par l'ensemble fini $\Pi_{|\psi(f_1)|} \times \cdots \times \Pi_{|\psi(f_r)|}$ où $\{f_1, \ldots, f_r\} = \mathrm{Supp}(\psi)$.

Tout $x \in \widetilde{G}$ possède une (unique) *décomposition de Jordan* de la forme $x = s_x u_x$ avec $s_x \in G$ semi-simple et $u_x \in G_{s_x}$ unipotent ([**B**] Alg. VII, §5, Prop. 11 et Prop. 12). Ainsi, pour $s \in G$ absolument semi-simple, $A_G(s) = \coprod_u O_G(su)$ où $u \in \mathcal{U}_{G_s}$ parcourt un système de représentants des $\mathrm{Ad}G_s$-orbites unipotentes de G_s.

Fixons une partition α de N. Pour chaque partition β de N telle que $\beta \prec \alpha$, soit $X_{\alpha,\beta} \subset X_\alpha$ la *sous-nappe* de G formée des éléments de X_α dont l'orbite fermée associée est contenue dans X_β.

(2.6.1) PROPOSITION. — *(i) Pour chaque $\beta \in \Pi_N$ tel que $\beta \prec \alpha$, la sous-nappe $X_{\alpha,\beta}$ de G est une partie $\mathrm{Ad}G$-invariante de X_α.*

(ii) $X_\alpha = \coprod_{\beta \prec \alpha} X_{\alpha,\beta}$.

(iii) Pour chaque $\beta \in \Pi_N$ tel que $\beta \prec \alpha$, on a $X_{\alpha,\beta} = X_\alpha \cap (\cup_{s \in X_{\beta,\beta}} A_G(s))$. En particulier, $X_{\alpha,(1=\cdots=1>0=\cdots=0=\cdots)} = F^\times O_\alpha$ et $X_{\alpha,\alpha} = \{x \in X_\alpha : x \text{ semi-simple}\}$.

(iv) Soit $\beta \in \Pi_N$ tel que $\beta \prec \alpha$. La fermeture $\overline{X_{\alpha,\beta}}$ de la sous-nappe $X_{\alpha,\beta}$ dans G pour la topologie ϖ-adique est union des fermetures dans G des orbites de $X_{\alpha,\beta}$ et $X_{\alpha,\beta}$ est ouverte dans $(\coprod_{\gamma \prec \alpha, \gamma \neq \alpha} X_\gamma) \coprod (\coprod_{\gamma \prec \beta} X_{\alpha,\gamma})$; en particulier, $X_{\alpha,\beta}$ est une sous-variété ϖ-adique fermée de X_α localement fermée dans G.

Démonstration. — Les points (i), (ii) et (iii) découlent directement de la construction.

Pour (iv), il suffit de remarquer que $p_{\mathrm{car}}(X_{\alpha,\beta})$ coïncide avec $p_{\mathrm{car}}(X_\alpha) \cap p_{\mathrm{car}}(X_\beta)$, laquelle intersection est fermée dans $F[T]_N$ (cf. la fin de la preuve du point (iv) de (2.5.2)). Comme l'union des fermetures dans G des orbites de $X_{\alpha,\beta}$ est la trace sur $\coprod_{\beta \prec \alpha} X_\beta$ de l'image réciproque de $p_{\mathrm{car}}(X_{\alpha,\beta})$ par l'application p_{car}, cette union est fermée dans G et coïncide avec $\overline{X_{\alpha,\beta}}$. Enfin, comme les orbites de X_α sont fermées dans X_α, la sous-nappe $X_{\alpha,\beta}$ est fermée dans X_α.

Soit $\{\xi_i\}_{i=1}^r \in Y_{\alpha,\beta} = p_\alpha(X_{\alpha,\beta})$. Si $k \geq k(\{\xi_i\})$ est un entier suffisamment grand, le voisinage $\mathcal{W}_k(\{\xi_i\})$ de $\{\xi_i\}$ dans Y_α est contenu dans $\coprod_{\beta \prec \gamma \prec \alpha} Y_{\alpha,\gamma}$. Par suite, $\coprod_{\beta \prec \gamma \prec \alpha} X_{\alpha,\gamma}$ est ouvert dans X_α et la sous-nappe $X_{\alpha,\beta}$ est ouverte dans $(\coprod_{\gamma \prec \alpha, \gamma \neq \alpha} X_\gamma) \coprod (\coprod_{\gamma \prec \beta} X_{\alpha,\gamma})$. □

2.7. Décompositions standards

On dit que la décomposition ordonnée d'une partie Ω de G en $\Omega = \coprod_{i=0}^{m} \Omega_i$ est une *décomposition standard* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- pour chaque $k \in \{0, \dots, m\}$, la partie $\coprod_{i=0}^{k} \Omega_i$ est fermée dans G,
- pour chaque $k \in \{0, \dots, m\}$, la partie Ω_k est ouverte dans $\coprod_{i=0}^{k} \Omega_i$.

Si $x \in G$, il résulte du point (ii) de (2.3.2) qu'une décomposition de la fermeture $\overline{O_G(x)}$ dans G de l'orbite $O_G(x)$ de la forme $\overline{O_G(x)} = \coprod_{i=0}^{m} O_G(x_i)$ est une décomposition standard si et seulement si $\dim(O_G(x_i)) \leq \dim(O_G(x_{i+1}))$ pour $i = 0, \dots, m-1$. Rappelons que si s est un élément semi-simple de G, $A_G(s)$ coïncide avec la fermeture $\overline{O}$ dans G de l'unique orbite régulière O contenue dans $A_G(s)$; par conséquent les décompositions standards de $A_G(s)$ en union disjointe d'orbites ont déja été décrites.

Si α, β sont deux partitions de N telles que $\alpha \prec \beta$, alors $O_\alpha \subseteq \overline{O_\beta}$ (2.3.1) ; en particulier $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \varnothing$. Cette observation jointe au point (iv) de (2.5.2) entraînent qu'une décomposition de G en $G = \coprod_{i=0}^{n} X_{\alpha_i}$ est une décomposition standard si et seulement si elle est *compatible avec la relation d'ordre partiel* « $\prec$ » *sur* Π_N au sens où pour tout couple d'entiers (i, j), $0 \leq i, j \leq n$, la condition $\alpha_i \prec \alpha_j$ implique $i \leq j$. Enfin, si $G = \coprod_{i=0}^{n} X_{\alpha_i}$ est une décomposition standard et si, pour chaque partition α_i, l'on se donne une décomposition de la nappe X_{α_i} en $X_{\alpha_i} = \coprod_{j=0}^{n_i} X_{\alpha_i, \beta_j}$ compatible avec la relation d'ordre partiel « $\prec$ » sur Π_N, alors la décomposition de G obtenue en rangeant les sous-nappes X_{α_i, β_j} suivant l'ordre lexicographique est une décomposition standard (point (iv) de (2.6.1)).

2.8. Fermeture des « orbites paraboliques » de G

Si $u \in \mathcal{U}$, le drapeau $\{V_u^i : i = 0, \dots, r\}$ (où $r-1$ est le rang de $u-1$) de V introduit en 2.2 définit un sous-groupe parabolique de G

$$P = \{g \in G : gV_u^i \subseteq V_u^i,\ i = 1, \dots, r\}.$$

De plus, $U = \{g \in G : (g-1)V_u^i \subseteq V_u^{i-1},\ i = 1, \dots, r\}$ est le radical unipotent de P et tout $v \in U$ induit, par passage au quotient pour chaque $i \in \{2, \dots, r\}$, une application

$$(v-1)_i : V_u^i / V_u^{i-1} \longrightarrow V_u^{i-1} / V_u^{i-2}.$$

Le Lemma 2 de [**Ho**] dit très exactement que l'AdP-orbite $O_P(v)$ d'un $v \in U$ est dense dans U pour la topologie ϖ-adique si et seulement si les applications $(v-1)_i$, $i = 1, \dots, r$ sont toutes injectives ; en particulier, $O_P(u)$ est dense dans U. Grâce à ce résultat, Howe peut montrer la convergence des intégrales orbitales unipotentes en toute caractéristique (i.e. pour $p \geq 0$), [**Ho**] Prop. 5. La généralisation du Lemma 2 de [**Ho**] aux orbites quelconques de G décrite ci-dessous (et son application à la théorie des intégrales orbitales, cf. 3.2 ci-après) est esquissée dans [**BDKV**] et complètement rédigée par Laumon dans [**La**] 4.8.

Soit $x \in G$ et pour chaque $f \in \mathrm{Supp}(\psi_x)$, soit $V_{x,f}$ le *sous-espace caractéristique* de V défini par

$$V_{x,f} = \ker\{f(x)^{\psi_x(f)_1} : V \to V\}.$$

La décomposition de V en $V = \oplus_f V_{x,f}$ définit un sous-groupe de Lévi de G

$$M' = \{g \in G : gV_{x,f} \subseteq V_{x,f},\ \forall f \in \mathrm{Supp}(\psi_x)\} = \textstyle\prod_f GL(V_{x,f}).$$

Fixons un $f \in \mathrm{Supp}(\psi_x)$ et soit $\{V_{x,f}^m : m = 0,\ldots,\psi_x(f)_1\}$ le drapeau de $V_{x,f}$ défini par $V_{x,f}^m = \ker\{f(x)^m : V_{x,f} \to V_{x,f}\}$. Il induit un sous-groupe parabolique de $GL(V_{x,f})$

$$P_f'' = \{g \in GL(V_{x,f}) : gV_{x,f}^m \subseteq V_{x,f}^m,\ m = 0,\ldots,\psi_x(f)_1\}.$$

On peut alors définir un sous-groupe parabolique de M'

$$P'' = \textstyle\prod_f P_f'' \subseteq \prod_f GL(V_{x,f}) = M'.$$

Soit U'' le radical unipotent de P''.

Fixons un ordre $\mathrm{Supp}(\psi_x) = \{f_1,\ldots,f_r\}$ sur le support de ψ_x et soit P' le sous-groupe parabolique de G de composante de Lévi M' donné par

$$P' = \{g \in G : g(\oplus_{i=1}^k V_{x,f_i}) \subseteq \oplus_{i=1}^k V_{x,f_i},\ k = 1,\ldots,r\}.$$

Soit U' le radical unipotent de P' et soit P le le sous-groupe parabolique de G de radical unipotent $U''U'$ défini par $P = P''U'$.

Notons que les groupes M', P'' $(= M' \cap P)$ dépendent canoniquement de x tandis que les groupes P', P dépendent de x et de l'ordre arbitrairement fixé sur le support de ψ_x. On appelle *M' le sous-groupe de Lévi de G associé à x, P'' le sous-groupe parabolique de M' associé à x* et l'on dit que P est *un sous-groupe parabolique de G associé à x*. Notons que deux sous-groupes paraboliques de G associés à x sont conjugués dans G. Pour alléger l'écriture, on se référera dans la suite à cette construction par la formule «soit $x \in G$ et soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8», laquelle sous-entend que l'on s'est donné un ordre sur le support de ψ_x et que P est le sous-groupe parabolique de G associé à x et à cet ordre.

Soit $\pi'' : P'' \to P''/U'' = \overline{P}''$ le quotient réductif maximal de P'', et soit $\pi : P \to P/U' = P'' \xrightarrow{\pi''} \overline{P}''$ le quotient réductif maximal de P.

(2.8.1) LEMME ([**La**] Lemma 4.8.4). — *Le centralisateur G_x de x dans G est contenu dans P'' et $\pi''(x)$ est irréductible dans $\overline{P}''$. De plus,*

$$\overline{O_{P''}(x)} = \pi''^{-1}(O_{\overline{P}''}(\pi''(x)))$$

(fermeture dans P'' pour la topologie ϖ-adique) et $\overline{O_{P''}(x)} - O_{P''}(x)$ est une sous-variété ϖ-adique fermée de $\overline{O_{P''}(x)}$.

(2.8.2) COROLLAIRE. — *On a*

$$\overline{O_P(x)} = \pi^{-1}(O_{\overline{P}''}(\pi''(x)))$$

(fermeture dans P pour la topologie ϖ-adique) et $\overline{O_P(x)} - O_P(x)$ est une sous-variété ϖ-adique fermée de $\overline{O_P(x)}$.

Démonstration. — Pour tout $p'' \in P''$, $M' = p''^{-1}M'p''$ est le sous-groupe de Lévi de G associé à $p''^{-1}xp''$, par conséquent $\det_{\mathrm{Lie}(U')}(1 - \mathrm{Ad}p''^{-1}xp'') \neq 0$ (on a $G_{p''^{-1}xp''} \subset M'$) et l'application $U' \to U'$, $u' \mapsto (p''^{-1}xp'')^{-1}u'^{-1}(p''^{-1}xp'')u'$ est un isomorphisme de variétés ϖ-adiques. Puisque $P = P''U'$ (produit semi-direct), on a donc $O_P(x) = O_{P''}(x)U'$ et $\overline{O_P(x)} = \overline{O_{P''}(x)}U'$ où $\overline{O_{P''}(x)}$ désigne la fermeture de $O_{P''}(x)$ dans P''. D'où finalement

$$\overline{O_P(x)} = \pi''^{-1}(O_{\overline{P}''}(\pi''(x)))U' = \pi^{-1}(O_{\overline{P}''}(\pi''(x)))$$

(lemme (2.8.1)) et

$$\overline{O_P(x)} - O_P(x) = (\pi''^{-1}(O_{\overline{P}''}(\pi''(x)) - O_{P''}(x))U'.$$

□

CHAPITRE 3

INTÉGRALES ORBITALES SUR G

3.1. Notations

Soient $\mathcal{K} = M(N, \mathcal{O})$ l'$\mathcal{O}$-ordre héréditaire maximal standard dans $A(V)$ et $J_{\mathcal{K}} = \varpi\mathcal{K}$ son radical de Jacobson. Soit $K = GL(N, \mathcal{O})$ le groupe multiplicatif de $\mathcal{K}$ (i.e. le sous-groupe ouvert compact maximal standard de G) et pour chaque entier $m \geq 1$, soit $K^m = 1 + J_{\mathcal{K}}^m$ le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}^m$ de K.

Soit X un espace topologique totalement discontinu. On note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur X localement constantes à support compact. Le dual algébrique $D(X)$ de $C_c^\infty(X)$ est l'espace des distributions sur X. Si Ω est une partie ouverte (resp. fermée) de X, on identifie $C_c^\infty(\Omega)$ (resp. $D(\Omega)$) à l'espace des fonctions (resp. distributions) sur X à support dans Ω, cf. [**BZ**] 1.7. Toute action (à gauche, continue) $H \times X \to X$, $(h, x) \mapsto \tau h(x)$ d'un sous-groupe H de G sur X, induit une action τ^* sur $C_c^\infty(X)$ (et plus généralement sur l'espace des fonctions à valeurs complexes sur X)

$$(\tau^* h(f))(x) = f(\tau h^{-1}(x)) \quad (h \in H,\ x \in X,\ f \in C_c^\infty(X))$$

et une action τ sur $D(X)$

$$\langle \tau h(T), f\rangle = \langle T, \tau^* h^{-1}(f)\rangle \quad (h \in H,\ T \in D(X),\ f \in C_c^\infty(X))\,.$$

Pour toute partie $Y \subset X$, on note $\mathbf{1}_Y$ la fonction caractéristique de Y.

Si Ω est une partie AdG-invariante de G, on note $C_0(\Omega)$ le sous-espace de $C_c^\infty(\Omega)$ engendré par les fonctions de la forme $f - \mathrm{Ad}^* g(f)$ ($f \in C_c^\infty(\Omega)$, $g \in G$).

3.2. Convergence

Soit dg la mesure de Haar sur G — fixée pour toute la suite de l'article — telle que $\mathrm{vol}(K, dg) = 1$.

Soit $s \in G$ semi-simple. Le groupe G_s est dans Γ_F donc est unimodulaire, et la donnée d'une mesure de Haar dg_s sur G_s induit une mesure invariante

$\frac{dg}{dg_s}$ sur l'espace homogène $G_s\backslash G$, [**W**] Chap. II, §9. On peut alors, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, définir l'*intégrale orbitale au point s sur G*

$$I^G(f, s, dg_s) = \int_{G_s\backslash G} f(g^{-1}sg)\frac{dg}{dg_s}.$$

Puisque l'orbite $O_G(s)$ est fermée dans G, cette intégrale converge absolument ; c'est même une somme finie, la restriction de f à $O_G(s)$ restant localement constante à support compact.

La généralisation de cette construction aux orbites quelconques se heurte à deux difficultés : le centralisateur dans G d'un élément qui n'est pas semi-simple est-il encore unimodulaire ? Si tel est le cas, l'intégrale orbitale définie comme ci-dessus pour un élément dont l'orbite n'est pas fermée dans G est-elle encore convergente ? Comme pour le lemme (2.8.1), la réponse (positive) à ces deux questions a été rédigée par Laumon.

(3.2.1) Lemme ([**La**] Lemma 4.8.6). — . *Pour tout $x \in G$, le centralisateur G_x de x dans G est un groupe unimodulaire.*

(3.2.2) Proposition ([**La**] (Prop. 4.8.9)). — *Soient $x \in G$ et dg_x une mesure de Haar sur G_x. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'intégrale orbitale*

$$I^G(f, x, dg_x) = \int_{G_x\backslash G} f(g^{-1}xg)\frac{dg}{dg_x}$$

est absolument convergente.

Le calcul explicite d'une intégrale orbitale est en général très difficile. Pour $x \in \mathcal{U}$, Howe réduit $I^G(f, x, dg_x)$ à une intégrale convergente sur le radical unipotent U du sous-groupe parabolique de G associé à x, [**Ho**] Prop. 5. Pour x quelconque, on peut, via le corollaire (2.8.2), reprendre l'idée de Howe et réduire $I^G(f, x, dg_x)$ à une intégrale orbitale convergente $I^M(\phi_f, x_M, dm_{x_M})$ ($\phi_f \in C_c^\infty(M)$, $x_M \in M$ irréductible dans M) où M est une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique de G associé à x, cf. 2.8. Rappelons cette construction, qui nous servira plus loin de définition pour normaliser les intégrales orbitales sur G.

Démonstration de (3.2.2). — Soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8. On se donne une décomposition de Lévi $P'' = MU''$ de P'' ; elle induit une décomposition de Lévi $P = MU$. Soit $x = x_M x_{U''}$ ($x_M \in M$, $x_{U''} \in U''$) la décomposition de x suivant $P'' = MU''$. Fixons un sous-groupe ouvert compact maximal K_P de G tel que $G = PK_P$ et $P \cap K_P = (M \cap K_P)(U \cap K_P)$ (si $g \in G$ est tel que gMg^{-1} et gPg^{-1} sont standards, on peut prendre $K_P = g^{-1}Kg$, cf. [**BZ**] Lemma 3.11), et des mesures de Haar dk_P, dm, du respectivement sur K_P, M, U telles que

$$\mathrm{vol}(K_P, dk_P) = \mathrm{vol}(M \cap K_P, dm) = \mathrm{vol}(U \cap K_P, du) = 1$$

(comme tous les sous-groupe ouverts compacts maximaux de G sont conjugués dans G, dk_P est la restriction à K_P de la mesure dg sur G). On a alors la formule d'intégration (cf. [**C**] 4.1)

$$\int_G f(g)dg = \int_M \int_U \int_{K_P} f(muk_P)dm\,du\,dk_P \quad (f \in C_c^\infty(G)).$$

Comme $G_x = P_x$, la mesure dg_x sur le groupe unimodulaire G_x induit une mesure invariante $\dfrac{dm\,du}{dg_x}$ sur l'espace homogène $G_x\backslash P$ ([**W**] Chap. II, §9). Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a donc l'égalité

$$I^G(f, x, dg_x) = \int_{G_x\backslash M\times U} \int_{K_P} \mathrm{Ad}^* k_P(f)(u^{-1}m^{-1}xmu)\frac{dm\,du}{dg_x} dk_P;$$

il ne s'agit encore que d'une égalité formelle au sens où le terme à gauche du signe « = » converge si et seulement si le terme à droite converge.

L'AdP-orbite $O_P(x)$ s'identifie (en tant que variété ϖ-adique) à l'espace homogène $P_x\backslash P$ et l'on note $d\alpha$ la mesure sur $O_P(x)$ déduite de la mesure $\dfrac{dm\,du}{dg_x}$ sur $P_x\backslash P$ par cette identification. Elle vérifie l'égalité $d(p\alpha p^{-1}) = \delta_P(p)d\alpha$ ($p \in P$) où δ_P désigne le caractère module sur P (cf. 3.3 pour la définition).

Comme M est (non canoniquement) isomorphe à un produit $\prod_{i=1}^r GL(n_i, F)$ pour des entiers $n_i \geq 1$ et x_M est irréductible dans M (2.8.1), le centralisateur M_{x_M} de x_M dans M est dans Γ_F donc est unimodulaire. Fixons une mesure de Haar dm_{x_M} sur M_{x_M}. Elle induit une mesure invariante $\dfrac{dm}{dm_{x_M}}$ sur l'espace homogène $M_{x_M}\backslash M$. On identifie les variétés ϖ-adiques $O_M(x_M)U$ et $M_{x_M}\backslash P$ et l'on note $d\beta$ la mesure sur $O_M(x_M)U$ déduite de la mesure $\dfrac{dm}{dm_{x_M}}du$ sur $M_{x_M}\backslash P$ par cette identification. Elle vérifie l'égalité $d(p\beta p^{-1}) = \delta_P(p)d\beta$ ($p \in P$), donc induit une mesure $d\widetilde{\beta}$ sur l'ouvert dense et AdP-invariant $O_P(x)$ de $O_M(x_M)U$ (2.8.2), elle aussi vérifiant l'égalité $d(p\widetilde{\beta}p^{-1}) = d\widetilde{\beta}$ ($p \in P$).

On en déduit qu'il existe une constante $c = c(dm_{x_M}) > 0$ telle que $d\alpha = c\,d\widetilde{\beta}$ (cf. [**W**] Chap. II, §9). La partie fermée $O_M(x_M)U - O_P(x) \subset O_M(x)U$ ayant un volume nul pour la mesure $d\beta$ (2.8.2), pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a l'égalité

$$I^G(f,x,dg_x) = c\int_{M_{x_M}\backslash M}\int_U\int_{K_P}\mathrm{Ad}^*k_P(f)(m^{-1}x_Mmu)\frac{dm}{dm_{x_M}}du\,dk_P.$$

Comme l'AdM-orbite $O_M(x_M)$ est fermée dans M, cette intégrale converge absolument. □

On étend naturellement le lemme (3.2.1) et la proposition (3.2.2) à tout groupe $H\in\Gamma_F$: soit dh la mesure de Haar sur H qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de H (ils sont tous conjugués dans H). Soient $x\in H$ et dh_x une mesure de Haar sur le centralisateur (unimodulaire grâce à (3.2.1)) H_x de x dans H. Pour toute fonction $f\in C_c^\infty(H)$, on définit l'*intégrale orbitale au point x sur H*

$$I^H(f,x,dh_x) = \int_{H_x\backslash H} f(h^{-1}xh)\frac{dh}{dh_x}.$$

Comme pour tous espaces topologiques séparés localement compacts totalement discontinus (donc en particulier tous groupes ϖ-adiques) $H_1,\ldots,H_r$, on a ([**HC 1**] Cor. of Lemma 16)

$$(3.2.3)\qquad C_c^\infty(H_1\times\cdots\times H_r) = C_c^\infty(H_1)\otimes\cdots\otimes C_c^\infty(H_r),$$

cette intégrale converge absolument.

3.3. Descente parabolique

La preuve de la proposition (3.2.2) repose sur l'idée de *descente parabolique*, centrale dans la théorie des intégrales orbitales. On rappelle les deux formules de réduction dont nous aurons besoin par la suite.

Soient L un sous-groupe de Lévi de G, (P,A) une paire parabolique de L (i.e. P est un sous-groupe parabolique de L et A un tore déployé du radical de P) et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de L en *bonne position par rapport à* (P,A) i.e. tel que $L=PK_P$ et $P\cap K_P=(M\cap K_P)(U\cap K_P)$ où M est le centralisateur de A dans L et U le radical unipotent de P. Soient dk_P, du les mesures de Haar respectivement sur K_P, U telles que $\mathrm{vol}(K_P,dk_P)=\mathrm{vol}(U\cap K_P,du)=1$. Soit $\delta_P : P\to q^{\mathbf{Z}}\subset\mathbf{Q}$ le *caractère module* sur P défini par $d(p'pp'^{-1})=\delta_P(p')dp$ ($p'\in P$) où dp est une mesure de Haar à droite ou à gauche sur P. Pour toute fonction $f\in C_c^\infty(L)$, soit $f^P\in C_c^\infty(M)$ le *terme K_P-invariant de f suivant P* défini par

$$f^P(m)=\delta_P^{1/2}(m)\int_U\int_{K_P}\mathrm{Ad}^*k_P(f)(mu)du\,dk_P\quad(m\in M).$$

Cette intégrale converge absolument (c'est même une somme finie).

Pour tout sous-groupe de Lévi M de G, on note A_M le centre de M.

(3.3.1) PROPOSITION. — *Soit $x \in G$ et soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8. Soient M une composante de Lévi de P'', K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A_M), et dm_{x_M} une mesure de Haar sur le centralisateur M_{x_M} dans M de la composante x_M de x sur M. Alors il existe une (unique) mesure de Haar dg_x sur G_x telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on ait*

$$I^G(f, x, dg_x) = I^M(f^P, x_M, dm_{x_M})$$

où $f^P \in C_c^\infty(M)$ est le terme K_P-invariant de f suivant P.

Démonstration. — cf. la preuve de (3.2.2). □

(3.3.2) REMARQUE (Avec les notations de (3.3.1)). — L'application

$$C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(M), \quad f \mapsto f^P$$

n'est pas surjective. Cependant, la distribution T sur G définie par $\langle T, f\rangle = I^M(f^P, x_M, dm_{x_M})$ n'est pas identiquement nulle (prendre pour f la fonction caractéristique d'un compact ouvert de G contenant x_M), et (3.3.1) implique que si dg_x est une mesure de Haar sur G_x telle que $I^G(f, x, dg_x) = \langle T, f\rangle$ pour une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $\langle T, f\rangle \neq 0$, alors $I^G(\cdot, x, dg_x) = T$ (égalité dans $D(G)$).

(3.3.3) PROPOSITION. — *Soit $x \in G$ et soit L un sous-groupe de Lévi de G contenant G_x. Soient Q un sous-groupe parabolique de G de composante de Lévi L et K_Q un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (Q, A_L). Alors, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$ et toute mesure de Haar dg_x sur G_x, on a*

$$I^G(f, x, dg_x) = |D_{L\backslash G}(x)|_F^{-1/2} I^L(f^Q, x, dg_x)$$

où $f^Q \in C_c^\infty(L)$ est le terme K_Q-invariant de f suivant Q et $D_{L\backslash G}$ la fonction sur L définie par

$$D_{L\backslash G}(l) = \det_{\mathrm{Lie}(L)\backslash \mathrm{Lie}(G)}\left(1 - \mathrm{Ad}\, l^{-1}\right) \quad (l \in L).$$

Démonstration. — Cf. **[La]** Prop. 4.3.11. Dans l'énoncé de Laumon, x est supposé d'orbite fermée, mais la démonstration fonctionne tout aussi bien pour x quelconque. □

(3.3.4) COROLLAIRE. — *L'intégrale orbitale $I^L(f^Q, x, dg_x)$ ($f \in C_c^\infty(G)$) ne dépend pas du choix du sous-groupe parabolique Q de composante de Lévi L ni du choix du sous-groupe ouvert compact maximal K_Q en bonne position par* *rapport à (Q, A_L) (bien que le terme K_Q-invariant de f suivant Q, lui, en dépende).*

3.4. Normalisation « I »

Soient M un sous-groupe de Lévi de G et $s \in M$ irréductible dans M. Comme M_s est dans Γ_F, tous les sous-groupes ouverts compacts maximaux de M_s sont conjugués dans M_s. On définit l'intégrale orbitale normalisée au point s sur M

$$I^M(\cdot, s) = I^M(\cdot, s, dm_s)$$

(égalité dans $D(M)$) où dm_s est la mesure de Haar sur M_s qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de M_s.

(3.4.1) DÉFINITION (Normalisation « I »). — Soit $x \in G$ et soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8. Soient M une composante de Lévi de P'' et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A_M). Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on définit l'intégrale orbitale normalisée au point x sur G par

$$I^G(f, x) = I^M(f^P, x_M)$$

où $f^P \in C_c^\infty(M)$ est le terme K_P-invariant de f suivant P et x_M la composante de x sur M.

Cohérence de la définition (3.4.1). — Stricto sensu, il suffit de vérifier que la distribution $I^G(\cdot, x)$ sur G ne dépend

(i) ni du choix de K_P,

(ii) ni du choix de la composante de Lévi M de P'',

(iii) ni du choix de P (i.e. de l'ordre sur le support de ψ_x définissant P).

On vérifie aussi que la distribution $I^G(\cdot, x)$ ainsi définie

(iv) ne dépend pas vraiment de x mais seulement de $O_G(x)$.

Soit U (resp. U'') le radical unipotent de P (resp. P'').

(i) Les groupes P, M étant fixés, soient $K_{P,1}$, $K_{P,2}$ deux sous-groupes ouverts compacts maximaux de G en bonne position par rapport à (P, A_M). Soit $p \in P$ tel que $K_{P,2} = \mathrm{Ad}p(K_{P,1})$ et pour $i = 1, 2$, soient $dk_{P,i}$, du_i les mesures de Haar respectivement sur $K_{P,i}$, U telles que

$$\mathrm{vol}(K_{P,i}, dk_{P,i}) = \mathrm{vol}(U \cap K_{P,i}, du_i) = 1.$$

Comme $U \cap K_{P,2} = p(U \cap K_{P,1})p^{-1}$, $\mathrm{vol}(U \cap K_{P,2}, du_1) = \delta_P(p)$ et donc

$$du_1 = \delta_P(p) du_2.$$

Soit dm la mesure de Haar sur M telle que $\mathrm{vol}(M \cap K_{P,i}, dm) = 1$ ($i = 1, 2$) (ceci a un sens car $M \cap K_{P,i}$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de M) et soit dm_{x_M} la mesure de Haar sur M_{x_M} qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de M_{x_M}. On a donc deux mesures $d\beta_1$, $d\beta_2$ sur la sous-variété ϖ-adique $O_M(x_M)U$ de P déduites par identification respectivement des mesures $\dfrac{dm}{dm_{x_M}}du_1$, $\dfrac{dm}{dm_{x_M}}du_2$ sur l'espace homogène $M_{x_M}\backslash P$, et qui vérifient la relation

$$d\beta_1 = \delta_P(p)d\beta_2.$$

Par suite, $d\beta_1$ est l'image de $d\beta_2$ par l'isomorphisme de variétés ϖ-adiques

$$O_M(x_M)U \to O_M(x_M)U,\ \beta \mapsto p\beta p^{-1}$$

et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$,

$$\int_{O_M(x_M)U}\int_{K_{P,1}} \mathrm{Ad}^*k_{P,1}(f)(\beta_1)d\beta_1\, dk_{P,1} = \int_{O_M(x_M)U}\int_{K_{P,2}} \mathrm{Ad}^*k_{P,2}(\mathrm{Ad}^*p(f))(\beta_2)d\beta_2\, dk_{P,2}.$$

On conclut en remarquant que pour toute mesure de Haar dg_x sur G_x, la distribution $I^G(\cdot, x, dg_x)$ est AdG-invariante sur G.

(ii) Le groupe P étant fixé, soient M_1, M_2 deux composantes de Lévi de P''. Soit $u'' \in U''$ tel que $M_2 = u''M_1u''^{-1}$ et soient $x = s_1u_1$ et $x = s_2u_2$ ($s_1 \in M_1$, $u_1 \in U$, $s_2 = u''s_1u''^{-1}$, $u_2 = u''s_1^{-1}u''^{-1}s_1u_1$) les décompositions de x respectivement suivant $P'' = M_1U''$ et $P'' = M_2U''$. Soit $K_{P,1}$ un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A_{M_1}) et soit $K_{P,2} = u''K_{P,1}u''^{-1}$; il est clair que $K_{P,2}$ est en bonne position par rapport à (P, A_{M_2}). Soient dm_1 la mesure de Haar sur M_1 telle que $\mathrm{vol}(M \cap K_{P,1}, dm_1) = 1$ et dm_{s_1} la mesure de Haar sur $(M_1)_{s_1}$ telle que $I^{M_1}(\cdot, s_1) = I^{M_1}(\cdot, s_1, dm_{s_1})$ (égalité dans $D(M_1)$). Alors, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(M_2)$,

$$\begin{aligned} I^{M_2}(\phi, s_2) &= \int_{(M_1)_{s_1}\backslash M_1} \phi\left(\mathrm{Ad}u''(m_1^{-1})\mathrm{Ad}u''(s_1)\mathrm{Ad}u''(m_1)\right)\frac{dm_1}{dm_{s_1}} \\ &= I^{M_1}(\mathrm{Ad}^*u''^{-1}(\phi), s_1). \end{aligned}$$

Si $f \in C_c^\infty(G)$, pour $i = 1, 2$, notons $f^{P,i} \in C_c^\infty(M_i)$ le terme $K_{P,i}$-invariant de f suivant P. Comme $I^G(\cdot, x, dg_x)$ est (pour toute mesure de Haar dg_x sur G_x) une distribution AdG-invariante sur G, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, la relation

$$\mathrm{Ad}^*u''^{-1}(f^{P,2}) = (\mathrm{Ad}^*u''^{-1}(f))^{P,1} \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

entraîne l'égalité

$$I^{M_1}(f^{P,1}, s_1) = I^{M_2}(f^{P,2}, s_2).$$

(iii) Les groupes P, M, K_P étant fixés, soit P' le sous-groupe parabolique de G de composante de Lévi M' défini par $P' = M'P$ et soit U' le radical unipotent de P'. Il est clair que K_P est en bonne position par rapport à $(P', A_{M'})$ et que $K_{P''} = M' \cap K_P$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de M' en bonne position par rapport à (P'', A_M). Comme $U = U''U'$ (produit semi-direct), on a la relation

$$(f^{P'})^{P''} = f^P \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

où $f^P \in C_c^\infty(M)$ est le terme K_P-invariant de f suivant P, $f^{P'} \in C_c^\infty(M')$ le terme $K_{P'}$-invariant de f suivant P' et $(f^{P'})^{P''} \in C_c^\infty(M)$ le terme $K_{P''}$-invariant de $f^{P'}$ suivant P''. Soit x_M la composante de x sur M et soit dg_x la mesure de Haar sur G_x telle que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on ait $I^G(f, x, dg_x) = I^M(f^P, x_M)$ (3.3.1). Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a (3.3.3)

$$\begin{aligned} I^{M'}(f^{P'}, x, dg_x) &= |D_{M'\backslash G}(x)|_F^{1/2} I^G(f, x, dg_x) \\ &= |D_{M'\backslash G}(x)|_F^{1/2} I^M((f^{P'})^{P''}, x_M). \end{aligned}$$

On en déduit (cf. la remarque (3.3.2)) que dg_x est l'unique mesure de Haar sur le centralisateur $G_x = M'_x$ de x dans G telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(M')$, on ait

$$I^{M'}(\phi, x, dg_x) = |D_{M'\backslash G}(x)|_F^{1/2} I^M(\phi^{P''}, x_M),$$

laquelle caractérisation est bien indépendante du choix de P.

(iv) Les groupes P, M, K_P étant fixés, soit dm_{x_M} la mesure de Haar sur M_{x_M} telle que $I^M(\cdot, x_M) = I^M(\cdot, x_M, dm_{x_M})$ (égalité dans $D(M)$) et soit $y = gxg^{-1}$ ($g \in G$) un élément de $O_G(x)$. Soit $\mathrm{Ad}g(dm_{x_M})$ l'image de dm_{x_M} par l'isomorphisme de variétés ϖ-adiques

$$M_{x_M} \xrightarrow{\mathrm{Ad}g} (gMg^{-1})_{gx_Mg^{-1}}.$$

Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a

$$\begin{aligned} I^G(f, y) &= I^{gMg^{-1}}(f^{gPg^{-1}}, gx_Mg^{-1}, \mathrm{Ad}g(dm_{x_M})) \\ &= I^M(\mathrm{Ad}^*g^{-1}(f^{gPg^{-1}}), x_M, dm_{x_M}) \end{aligned}$$

où $f^{gPg^{-1}} \in C_c^\infty(gMg^{-1})$ est le terme gK_Pg^{-1}-invariant de f suivant P. Comme pour le point (ii), on conclut grâce à la relation

$$\mathrm{Ad}^*g^{-1}(f^{gPg^{-1}}) = (\mathrm{Ad}^*g^{-1}(f))^P \quad (f \in C_c^\infty(G)).$$

La cohérence de la définition (3.4.1) est ainsi complètement établie. □

Grâce à (3.2.3) et en utilisant la linéarité de l'application $f \mapsto f^P$, on étend naturellement la normalisation « I » à tout groupe $H \in \Gamma_F$ (notation : $I^H(f,x)$ pour tous $x \in H$, $f \in C_c^\infty(H)$).

La normalisation « I » traduisant directement la propriété de descente (3.3.1), il est naturel de se demander si elle est compatible à la propriété de descente (3.3.3). La réponse à cette question passe par le petit lemme suivant.

(3.4.2) LEMME. — *Soit $x \in G$ primaire et soit L un sous-groupe de Lévi de G tel que $G_x \subset L$. Alors $L = G$.*

Démonstration. — Soit $\{V_i\}_{i=1}^r$ ($V = \oplus_{i=1}^r V_i$) la famille de sous-espaces vectoriel de V telle que

$$L = \{g \in G : gV_i \subseteq V_i,\ i = 1, \dots, r\}.$$

On note $1_V = e_1 \oplus e_2 \oplus \dots \oplus e_r$ la décomposition de l'élément unité 1_V de $A(V)$ en somme d'idempotents $e_i \in \mathrm{Hom}_F(V, V_i)$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, la condition $G_x \subset L$ entraîne que l'idempotent e_i commute à tous les éléments de G_x donc à tous les éléments de $\mathrm{Lie}(G_x)$ (si $y \in \mathrm{Lie}(G_x)$, alors $1_V + \varpi^m y \in G_x$ pour tout entier m suffisamment grand, donc $(\varpi^{-m}1_V + y) \in G_x$ et par suite y commute à x). Par conséquent (**[J]** Cor. 1 of Theorem 3.17) pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, l'idempotent e_i appartient au sous-anneau $F[x]$ de $A(V)$. Comme x est supposé primaire, $\mathrm{Supp}(\psi_x) = \{f\}$ et $F[x] \simeq F[T]/(f^{\psi_x(f)_1})$. Or l'anneau $F[x]$ possède un unique idempotent non nul (si $\phi \in F[T]$, la condition $\phi(x)^2 = \phi(x)$ implique que $f^{\psi_x(f)_1}$ divise $\phi^2 - \phi = \phi(\phi - 1)$, et les conditions $\phi(x)^2 = \phi(x)$, $\phi(x) \neq 0$ impliquent que $f^{\psi_x(f)_1}$ divise $\phi - 1$), par conséquent $r = 1$ et $L = G$. □

(3.4.3) PROPOSITION. — *Soient $x \in G$ et L un sous-groupe de Lévi de G contenant G_x. Soient Q un sous-groupe parabolique de G de composante de Lévi L et K_Q un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (Q, A_L). Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a l'égalité*

$$I^G(f,x) = I^L(f^Q, x)$$

où $f^Q \in C_c^\infty(L)$ est le terme K_Q-invariant de f suivant Q.

Démonstration. — Soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8 et soit P' le sous-groupe parabolique de composante de Lévi M' défini par $P' = M'P$. Comme x est primaire dans M' et $G_x \subset M'_x$, le Lemme 3.4 entraîne la double inclusion

$$M' \subseteq L \subseteq G.$$

Soit M une composante de Lévi de P''. Soient $x_M \in M$ la composante de $x \in P''$ sur M et dm_{x_M} la mesure de Haar sur M_{x_M} qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de M_{x_M}. Comme l'énoncé de la proposition (3.4.3) est indépendant du choix de K_Q (corollaire (3.3.4)), la double inclusion $A_M \subseteq A_{M'} \subseteq A_L$ permet de supposer K_Q en bonne position par rapport à (P, A_M). Alors, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a l'égalité (3.4.1)

$$I^G(f,x) = I^M(f^P, x_M, dm_{x_M})$$

où $f^P \in C_c^\infty(M)$ est le terme K_Q-invariant de f suivant P.

Soit dg_x la mesure de Haar sur le centralisateur $G_x = M'_x$ de x dans G telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(M')$, on ait (3.3.1)

$$I^{M'}(\phi, x, dg_x) = I^M(\phi^{P''}, x_M, dm_{x_M})$$

où $\phi^{P''} \in C_c^\infty(M)$ est le terme $(K_Q \cap M')$-invariant de ϕ suivant P''. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, la proposition (3.3.3) jointe à a relation $(f^{P'})^{P''} = f^P$ où $f^{P'}$ est le terme K_Q-invariant de f suivant P', entraîne l'égalité

$$\begin{aligned} I^G(f,x) = I^M\left((f^{P'})^{P''}, x_M, dm_{x_M}\right) &= I^{M'}(f^{P'}, x, dg_x) \\ &= |D_{M'\backslash G}(x)|_F^{1/2} I^G(f, x, dg_x). \end{aligned}$$

En reprenant à l'identique le raisonnement ci-dessus en remplaçant G par son sous-groupe de Lévi L, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(L)$, on obtient l'égalité

$$I^L(\phi, x) = |D_{M'\backslash L}(x)|_F^{1/2} I^L(\phi, x, dg_x).$$

La relation (3.3.3)

$$I^G(f,x) = |D_{G\backslash L}(x)|_F^{-1/2} I^L(f^Q, x, dg_x) \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

et l'égalité

$$|D_{M'\backslash G}(x)|_F^{1/2} |D_{L\backslash G}(x)|_F^{-1/2} |D_{M'\backslash L}(x)|_F^{-1/2} = 1$$

impliquent le résultat. □

3.5. Germes au voisinage d'un élément semi-simple

Soit $s \in G$ semi-simple et soit $A_G(s) = \coprod_{i=0}^m O_G(x_i)$ une décomposition standard, cf. 2.7. Pour chaque $k \in \{0, \dots, m\}$, soit $O_k = \coprod_{i=0}^k O_G(x_i)$.

(3.5.1) LEMME. — *Pour tout entier $a \geq 1$, il existe un jeu de fonction $\{f_{s,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(sK^a)$ tel que*

(1) $\mathrm{Supp}(f_{s,k}) \cap O_k \subset O_G(x_k)$ *pour $k = 0, \dots, m$,*

(2) $I^G(f_{s,i}, x_j) = \delta_{i,j}$ *pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $0 \leq i, j \leq m$.*

Démonstration. — Fixons un entier $a \geq 1$. Les conditions (1) et (2) de l'énoncé ne dépendant pas vraiment des éléments x_i mais seulement des orbites $O_G(x_i)$, on peut supposer la famille $\{x_i\}_{i=1}^m$ contenue dans le voisinage ouvert compact sK^a de s dans G. On procède par induction croissante sur le nombre d'orbites de $A_G(s)$. Soit $k \in \{0, \dots, m-1\}$ et supposons que l'on a construit des fonctions $f_{s,i}^k \in C_c^\infty(sK^a)$ $(i = 0, \dots, k)$ vérifiant les conditions

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{Supp}(f_{s,i}^k) \cap O_i \subset O_G(x_i), & i = 0, \dots, k \\ I^G(f_{s,i}^k, x_j) = \delta_{i,j}, & 0 \leq i, j \leq k \end{array} \right.$$

(pour $k = 0$, cette hypothèse est trivialement vraie : on a $I^G(\mathbf{1}_W, x_0) > 0$ pour tout ouvert compact $W \subseteq sK^a$ d'intersection non vide avec $O_G(s)$). Pour passer au cran suivant, fixons un ouvert compact C de G tel que $\mathrm{Ad}C(x_{k+1}) \subset sK^a$ (comme $x_{k+1} \in sK^a$, un tel C existe). Soit $\alpha_C > 0$ le volume de C pour la mesure $\mathrm{Ad}G$-invariante sur $O_G(x_{k+1})$ donnée par la normalisation « I » et soit $\phi_C \in C_c^\infty(O_G(x_{k+1}))$ la fonction définie par

$$\phi_C = {\alpha_C}^{-1} \mathbf{1}_{\mathrm{Ad}C(x_{k+1})}.$$

Puisque $\mathrm{Ad}C(x_{k+1})$ est ouvert dans $O_{k+1} \cap sK^a$ et $O_{k+1} \cap sK^a$ est fermé dans sK^a, il existe une fonction $h \in C_c^\infty(sK^a)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Supp}(h) \cap O_{k+1} \subset O_G(x_{k+1}) \\ h|_{O_G(x_{k+1})} = \phi_C \end{array} \right. .$$

Il est clair que $I^G(h, x_i) = \delta_{k+1,i}$ $(i = 0, \dots, k)$. On définit les fonctions $f_{s,i}^{k+1} \in C_c^\infty(sK^a)$ $(i = 0, \dots, k+1)$ par

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_{s,i}^{k+1} = f_{s,i}^k - I^G(f_{s,i}^k, x_{k+1})h, & i = 0, \dots, k \\ f_{s,k+1}^{k+1} = h & \end{array} \right. .$$

Elle vérifient les conditions d'induction au cran $k + 1$. □

Soient Z un sous-espace d'un espace topologique X et x un élément de $\overline{Z}$ où $\overline{Z}$ est la fermeture de Z dans X. Toute fonction complexe f définie au voisinage de x dans Z, i.e. définie sur $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap Z$ pour un voisinage $\mathcal{W}$ de x dans X, induit un germe de fonctions au point x dans Z que l'on note $[f]_x^Z$ (deux fonctions f_1, f_2 respectivement définies sur les voisinages $\mathcal{V}_{f_1}$ et $\mathcal{V}_{f_2}$ de x dans Z induisent le même germe $[f_1]_x^Z = [f_2]_x^Z$ si et seulement si il existe un voisinage $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}_{f_1} \cap \mathcal{V}_{f_2}$ de x dans Z sur lequel f_1 et f_2 coïncident). Si de plus Z est muni d'une action de groupe $H \times Z \to Z$, $(h, x) \mapsto \tau h(x)$, cette action induisant une action τ^* sur l'espace des fonctions complexes sur Z (cf. 3.1), elle induit aussi une action sur les germes, que l'on note encore τ^* :

$$\tau^* h\left([f]_x^Z\right) = [\tau^* h(f)]_{\tau h(x)}^Z \quad (f : \mathcal{V}_f \to \mathbf{C},\ h \in H).$$

(3.5.2) PROPOSITION. — *Soit $s \in G$ semi-simple. Pour chaque orbite O de $A_G(s)$, il existe un unique germe $[I_O]_s^G = [I_O^G]_s^G$ tel que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on ait le développement*

$$[I^G(f,\cdot)]_s^G = \sum_O I^G(f, x_O)[I_O(\cdot)]_s^G$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) x_O est un quelconque élément de O. De plus, pour chaque orbite $O \subset A_G(s)$ et pour tout $g \in G$, on a

$$\mathrm{Ad}^* g\left([I_O]_s^G\right) = [I_O]_{gsg^{-1}}^G.$$

Démonstration. — Existence : soit $A_G(s) = \coprod_{i=0}^m O_G(x_i)$ une décomposition (standard ou non), et soit $\{f_{s,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(G)$ un jeu de fonctions vérifiant la condition (2) de (3.5.1) pour cette décomposition. Soit $h \in C_c^\infty(G)$. On définit la fonction $\phi_h \in C_c^\infty(G)$ par

$$\phi_h = h - \sum_{i=0}^m I^G(h, x_i) f_{s,i}.$$

Pour tout $g \in A_G(s)$, on a $I^G(\phi_h, g) = 0$. Par suite, il existe une fonction $\phi \in C_0(G)$ qui coïncide avec ϕ_h sur $A_G(s)$, **[V]** Prop. 2.1. Comme la fonction $\phi - \phi_h$ est nulle sur $A_G(s)$, on peut appliquer le Lemme 2.4 de **[V]** et conclure à l'existence d'un voisinage ouvert, $\mathrm{Ad}G$-invariant et compact modulo conjugaison (i.e. contenu dans $\mathrm{Ad}G(C)$ pour une partie compacte C de G) de s dans G sur lequel $\phi - \phi_h$ est nulle[(1)]. Ainsi, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, les germes $[I^G(f_{s,i},\cdot)]_s^G$ $(i = 0, \ldots, m)$ vérifient l'égalité

$$[I^G(f,\cdot)]_s^G = \sum_{i=0}^m I^G(f, x_i)[I^G(f_{s,i},\cdot)]_s^G.$$

Unicité : soient $[a_i]_s^G$ $(i = 0, \ldots, m)$ des germes au point s dans G tels que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$,

$$\sum_{i=0}^m I^G(f, x_i)[a_i(\cdot)]_s^G = 0.$$

Alors, pour $k = 0, \ldots, m$, on a

$$0 = \sum_{i=0}^m I^G(f_{s,k}, x_i)[a_i(\cdot)]_s^G = [a_k(\cdot)]_s^G.$$

(1) L'article de M.-F. Vignéras est écrit pour la caractéristique nulle mais les preuves des deux résultats cités fonctionnent en toute caractéristique.

Par conséquent les germes $[I^G(f_{s,i},\cdot)]_s^G$ ($i = 1,\dots,m$) sont les seuls vérifiant les conditions de l'énoncé. Il est clair qu'ils ne dépendent que des orbites $O_G(x_i)$ et pas du choix des représentants x_i de chacune de ces orbites. Pour $i = 0,\dots,m$, on pose $[I_{O_G(x_i)}(\cdot)]_s^G = [I^G(f_{s,i},\cdot)]_s^G$.

Propriété d'invariance par conjugaison : soit $g \in G$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a

$$\mathrm{Ad}^*g\left([I^G(f,\cdot)]_s^G\right) \overset{\text{déf}}{=} [\mathrm{Ad}^*g(I^G(f,\cdot))]_{gsg^{-1}}^G = [I^G(f,\cdot)]_{gsg^{-1}}^G.$$

Par suite, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, le développement en germes au point s dans G entraîne le développement

$$[I^G(f,\cdot)]_{gsg^{-1}}^G = \sum_O I^G(f,x_O)\mathrm{Ad}^*g\left([I_O(\cdot)]_s^G\right)$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) $x_O \in O$. On conclut grâce à la propriété d'unicité des germes $[I_O]_{gsg^{-1}}^G$ montrée plus haut. □

(3.5.3) REMARQUE. — Dans l'esprit de la propriété d'invariance des germes par conjugaison montrée ci-dessus, mentionnons la propriété d'invariance des supports par conjugaison suivante. Supposons donné, pour chaque orbite $O \subset A_G(s)$, un représentant a_O du germe $[I_O]_s^G$. Alors, pour tout $g \in G$, la fonction $\mathrm{Ad}^*g(a_O)$ est un représentant du germe $[I_O]_{gsg^{-1}}^G$. Fixons une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ et un voisinage $\mathcal{V}_f$ de s dans G tel que $I^G(f,x) = \sum_O I^G(f,x_O)a_O(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}_f$. Alors, pour tout $g \in G$, $g\mathcal{V}_f g^{-1}$ est un voisinage de gsg^{-1} dans G tel que $I^G(f,x) = \sum_O I^G(f,x_O)\mathrm{Ad}^*g(a_O)(x)$ pour tout $x \in g\mathcal{V}_f g^{-1}$. Bien sûr, si l'on prend pour chaque représentant a_O une intégrale orbitale sur G, cette remarque est une trivialité.

(3.5.4) REMARQUE. — Les germes $[I_O]_s^G$, en tant que germes d'intégrales orbitales normalisées, dépendent de cette normalisation. Pour chaque orbite O de G, supposons donnée une constante complexe $\alpha_O \neq 0$ et notons $I'^G(\cdot,x_O)$ ($x_O \in O$) la distribution sur G définie par $I'^G(\cdot,x_O) = \alpha_O I^G(\cdot,x_O)$. Soit $\alpha_{I,I'} : G \to \mathbf{C} - \{0\}$ l'application définie par $\alpha_{I,I'}(x) = \alpha_{O_G(x)}$ ($x \in G$). Soit $s \in G$ semi-simple. Pour chaque orbite O de $A_G(s)$, il existe un unique germe $[I'_O]_s^G$ tel que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on ait le développement ((3.5.2) pour la normalisation $I'^G(\cdot,\cdot)$)

$$[I'^G(f,\cdot)]_s^G = \sum_O I'^G(f,x_O)[I'_O(\cdot)]_s^G$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) x_O est un quelconque élément de O. Soit $A_G(s) = \coprod_{i=0}^m O_G(x_i)$ une décomposition (standard ou non) et soit $\{f_{s,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(G)$ un jeu de fonctions vérifiant la condition (2) de (3.5.1) pour cette décomposition. Pour $i = 1, \ldots, m$, posons $\alpha_i = \alpha_{O_G(x_i)}$. Pour tout couple d'entiers (i,j), $0 \leq i,j \leq m$, on a

$$I'^G(\alpha_i^{-1} f_{s,i}, x_j) = \delta_{i,j}.$$

Par conséquent (3.5.2), pour $i = 0, \ldots, m$, on a

$$\begin{aligned} [I'_{O_G(x_i)}(\cdot)]_s^G &= [I'^G(\alpha_i^{-1} f_{s,i}, \cdot)]_s^G \\ &= [\alpha_i^{-1} \alpha_{I,I'}(\cdot) I^G(f_{s,i}, \cdot)]_s^G \\ &= \alpha_i^{-1} [\alpha_{I,I'}(\cdot)]_s^G [I_{O_G(x_i)}(\cdot)]_s^G. \end{aligned}$$

Soient un groupe $H \in \Gamma_F$ et un élément semi-simple s de H. Comme pour G, on note $A_H(s)$ l'ensemble des $x \in H$ tels que $O_H(s) \subset \overline{O_H(x)}$ où $\overline{O_H(x)}$ est la fermeture de $O_H(x)$ dans H pour la topologie ϖ-adique. Pour chaque AdH-orbite O de $A_H(s)$, on note $[I_O^H]_s^H$ le germe attaché à O comme dans la proposition (3.5.2).

Si L est un sous-groupe de Lévi de G contenant le centralisateur G_s dans G d'un élément semi-simple s de G, alors L contient le sous-groupe de Lévi de G associé à s (3.4.2) et l'application $O \mapsto L \cap O$ induit une bijection de l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ sur l'ensemble des AdL-orbites de $A_L(s) = L \cap A_G(s)$ (cf. (2.3.1)).

(3.5.5) PROPOSITION. — *Soit $s \in G$ semi-simple et soit L un sous-groupe de Lévi de G contenant G_s. Pour chaque orbite O de $A_G(s)$, le germe $[I_{L\cap O}^L]_s^L$ est la restriction à L du germe $[I_O]_s^G$ (i.e. $[I_{L\cap O}^L]_s^L = [I_O]_s^L$).*

Démonstration. — Soit $A_G(s) = \coprod_{i=0}^m O_G(x_i)$ ($x_i \in L$ pour $i = 0, \ldots, m$) une décomposition standard et soit $\{f_{s,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(G)$ un jeu de fonctions vérifiant les conditions (1) et (2) de (3.5.1) pour cette décomposition. Pour $k = 0, \ldots, m$, soit $O_k = \coprod_{i=1}^k O_G(x_i)$. Il est clair que $A_L(s) = \coprod_{i=0}^m O_L(x_i)$ est une décomposition standard.

Fixons un sous-groupe parabolique Q de G de composante de Lévi L et un sous-groupe ouvert compact maximal K_Q de G en bonne position par rapport à (Q, A_L). Alors, pour tout $y \in G$ tel que $G_y \subset L$ et toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a (3.4.3)

$$I^G(f, y) = I^L(f^Q, y)$$

où $f^Q \in C_c^\infty(L)$ est le terme K_Q-invariant de f suivant Q. Comme L contient le sous-groupe de Lévi de G associé à s, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de s dans L tel que, pour tout $y \in \mathcal{V}$, le sous-groupe de Lévi de G associé à y, donc à fortiori le centralisateur de y dans G, est contenu dans L. Par conséquent, pour $i = 0, \ldots, m$, la restriction à L du germe $[I^G(f_{s,i}, \cdot)]_s^G$ est le germe $[I^L(f_{s,i}^Q, \cdot)]_s^L$. On est donc ramenés à montrer l'égalité

$$[I^L_{O_L(x_i)}(\cdot)]_s^L = [I^L(f_{s,i}^Q, \cdot)]_s^L \quad (i = 0, \ldots, m).$$

On peut supposer $m > 0$ car si $m = 0$ (i.e. si $s \in G_{\mathrm{r}}$), l'égalité $I^L(f_{s,0}^Q, x_0) = I^G(f_{s,0}, x_0) = 1$ assure que $[I^L(f_{s,0}^Q, \cdot)]_s^L$ est bien le germe cherché. Soit U le radical unipotent de Q et pour $k = 0, \ldots, m$, soit $O_k^L = L \cap O_k$ $(= \coprod_{i=0}^k O_L(x_i))$. Si $x \in A_L(s)$, l'application $U \to U$, $u \mapsto x^{-1}uxu^{-1}$ est un isomorphisme de variétés ϖ-adiques, donc $xU = O_U(x)$. Ainsi, pour $k = 1, \ldots, m$, on a (condition (1) de (3.5.1))

$$\mathrm{Supp}(f_{s,k}) \cap \mathrm{Ad}K_Q(xU) \subset \mathrm{Supp}(f_{s,k}) \cap O_G(x) = \varnothing \quad (x \in O_{k-1}^L)$$

donc

$$\mathrm{Supp}(f_{s,k}^Q) \cap O_{k-1}^L = \varnothing.$$

En définitive, le jeu de fonction $\{f_{s,i}^Q\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(L)$ satisfait les conditions

(1) $\mathrm{Supp}(f_{s,k}^Q) \cap O_k^L \subset O_L(x_k)$ pour $k = 0, \ldots, m$,

(2) $I^L(f_{s,i}^Q, x_j) = I^G(f_{s,i}, x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tel que $0 \leq i, j \leq m$.

On conclut grâce à (3.5.2). □

3.6. Homogénéité des germes au voisinage d'un élément central

Pour $t \in \mathcal{O} - \{0\}$ (on rappelle que $F^\times$ est identifié au centre de G) et $f \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$, soit $f^t \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(1 + tJ_K))$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f^t(1 + tx) = f(1 + x) & \text{si } x \in \mathrm{Ad}G(J_K)) \\ f^t(g) = 0 & \text{si } g \notin \mathrm{Ad}G(1 + tJ_K) \end{cases}.$$

(3.6.1) LEMME. — *Soient $u \in \mathcal{U}$ et $t \in \mathcal{O} - \{0\}$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$, on a*

$$I^G(f^t, u) = |t|_F^{\frac{1}{2}\dim(O_G(u))} I^G(f, u)$$

où $\dim(O_G(u))$ désigne la dimension de $O_G(u)$ (en tant que variété ϖ-adique).

Démonstration. — Soit $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0 = \cdots = 0 = \cdots)$ la partition de N telle que $O_G(u) = O_\alpha$. Quitte à remplacer u par $g^{-1}ug$ pour un $g \in G$, on peut supposer que u est la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_r})$ où

$$J_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\alpha_i, F).$$

Soit $y = \mathrm{diag}(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_r}) \in G$ la matrice diagonale par blocs donnée par

$$y_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} t^{\alpha_i - 1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & t^{\alpha_i - 2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\alpha_i, F).$$

On vérifie sans peine que $y^{-1}uy = 1 + t(u-1)$. Ainsi, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$,

$$\begin{aligned} I^G(f^t, u) &= |\det\nolimits_{\mathrm{Lie}(G_u)\backslash\mathrm{Lie}(G)}(\mathrm{Ad}y)|_F \int_{G_u\backslash G} f^t(g^{-1}y^{-1}uyg)\frac{dg}{dg_u} \\ &= |\det\nolimits_{\mathrm{Lie}(G_u)\backslash\mathrm{Lie}(G)}(\mathrm{Ad}y)|_F \, I^G(f, u) \end{aligned}$$

où dg_u est la mesure de Haar sur G_u donnée par la normalisation « I ». Or l'espace $\mathrm{Lie}(G_u)\backslash\mathrm{Lie}(G)$ est symplectique pour la forme $(x, y) \mapsto \mathrm{trace}((1 - u)[x, y])$ où $[x, y] = xy - yx$, et $\mathrm{Ad}y$ en est une similitude de rapport t. Par conséquent

$$|\det\nolimits_{\mathrm{Lie}(G_u)\backslash\mathrm{Lie}(G)}(\mathrm{Ad}y)|_F = |t|_F^{\dim(\mathrm{Lie}(G_u)/2}\backslash\mathrm{Lie}(G)) = |t|_F^{\dim(O_G(u))/2}$$

et le lemme (3.6.1) est prouvé. □

(3.6.2) PROPOSITION. — *Soit $z \in A_G$ $(= F^\times)$. Pour chaque orbite $O \subset A_G(z)$, le germe $[I_O]_z^G$ vérifie la formule d'homogénéité*

$$[I_O(z(1 + tx))]_z^G = |t|_F^{d_x - \dim(O)/2}[I_O(z(1 + x))]_z^G \quad (x \in J_K,\ t \in \mathcal{O} - \{0\})$$

où d_x est la dimension (en tant que variété ϖ-adique) du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de G associé à $1 + x$.

Démonstration. — Soit $A_G(z) = \coprod_{i=0}^m O_G(zu_i)$ une décomposition standard de $A_G(z) = z\mathcal{U}$ et soit $\{f_{z,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(zK^1)$ un jeu de fonctions vérifiant les conditions (1) et (2) de (3.5.1) pour cette décomposition.

Commençons par réduire la preuve au cas $z = 1$. Soit $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(G)$ l'action de translation à gauche donnée par $\lambda g(x) = gx$ $((g,x) \in G \times G)$. Puisque λz commute à l'action par conjugaison sur G, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, $I^G(\lambda^* z(f), zx) = I^G(f,x)$. On en déduit que $\{\lambda^* z^{-1}(f_{z,i})\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(K^1)$ est un jeu de fonctions vérifiant les conditions (1) et (2) de (3.5.1) pour la décomposition standard $A_G(1) = \coprod_{i=0}^m O_G(u_i)$. Par conséquent (3.5.2)

$$[I_{O_G(zu_i)}]_z^G = \lambda^* z([I_{O_G(u_i)}]_1^G) \quad (i = 0, \ldots, m)$$

et l'on peut supposer que $z = 1$.

Soient $x \in J_K$, $f \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$ et $t \in \mathcal{O} - \{0\}$. Montrons l'égalité

$$I^G(f^t, 1 + tx) = |t|_F^{d_x} I^G(f, 1 + x). \tag{3.6.3}$$

Soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à $1 + x$ en 2.8 et soit U le radical unipotent de P. Alors $G_{1+tx} = G_{1+x} = P''_{1+x}$, M' est le sous-groupe de Lévi de G associé à $1+tx$, P'' est le sous-groupe parabolique de M' associé à $1+tx$ et P est un sous-groupe parabolique de G associé à $1+tx$. Soit $\{0\} = V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^r = V$ $(V^i \neq V^{i-1})$ le drapeau de V tel que $P = \{g \in G : gV^i \subseteq V^i,\ i = 0, \ldots, r\}$ et soit $L(P)$ la sous-algèbre parabolique de $A(V)$ définie par $L(P) = \{g \in A(V) : gV^i \subseteq V^i,\ i = 1, \ldots, r\}$. Fixons une composante de Lévi M de P''. Pour $i = 1, \ldots, r$, soit V_i le supplémentaire de V_{i-1} dans V^i tel que $M = \{g \in G : gV_i \subseteq V_i,\ i = 1, \ldots, r\}$, et soit $L(M)$ la sous-algèbre de Lévi de $A(V)$ définie par $L(M) = \{g \in A(V) : gV_i \subseteq V_i,\ i = 1, \ldots, r\}$. Soit aussi $L(U) = \{g \in A(V) : gV^i \subseteq V^{i-1},\ i = 1, \ldots, r\}$. Notons $x = x_M + x_U$ $(x_M \in L(M),\ x_U \in L(U))$ la décomposition de x suivant $L(P) = L(M) \oplus L(U)$. On a les relations

$$\begin{cases} 1 + x = (1 + x_M)(1 + (1 + x_M)^{-1} x_U) \\ 1 + tx = (1 + tx_M)(1 + t(1 + tx_M)^{-1} x_U) \end{cases}.$$

Fixons un sous-groupe ouvert compact maximal K_P de G en bonne position par rapport à (P, A_M) et soient dk_P, dm, du les mesures de Haar respectivement sur K_P, M, U telles que

$$\mathrm{vol}(K_P, dk_P) = \mathrm{vol}(M \cap K_P, dm) = \mathrm{vol}(U \cap K_P, du) = 1.$$

Ainsi, posant $y_M = 1 + x_M$, on a $M_{1+tx_M} = M_{y_M}$ et

$$I^G(f^t, 1 + tx) = \int_{M_{y_M} \backslash M} (f^t)^P (m^{-1}(1 + tx_M)m) \frac{dm}{dm_{y_M}}$$

où $(f^t)^P$ est le terme K_P-invariant de f^t suivant P et dm_{y_M} est la mesure de Haar sur M_{y_M} donnée par la normalisation « I ». Comme $\mathrm{Ad}^*g(f^t) = (\mathrm{Ad}g(f))^t$ ($g \in G$), pour tout $m \in M$, on a

$$(f^t)^P(m^{-1}(1+tx_M)m) =$$
$$\delta_P^{1/2}(1+tx_M)|\det_{\mathrm{Lie}(U)}(\mathrm{Ad}m^{-1})|_F \int_{K_P}\int_U (\mathrm{Ad}^* mk_P(f))^t((1+tx_M)u)dk_P\, du.$$

Or, notant dn la mesure de Haar sur $L(U)$ image de du par l'isomorphisme de variétés ϖ-adiques $U \to L(U)$, $u \mapsto u-1$, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$, on a

$$\begin{aligned}\int_U (\phi)^t(1+tx_M)du &= \int_{L(U)} \phi^t(1+tx_M+(1+tx_M)n)dn \\ &= |t|_F^{\dim(L(U))}\int_{L(U)} \phi^t(1+tx_M+t(1+x_M)n)dn \\ &= |t|_F^{d_x}\int_U \phi((1+x_M)u)du\end{aligned}$$

(grâce à l'égalité $|\det_{L(U)}(1+tx_M)|_F = |\det_{L(U)}(1+x_M)|_F = 1$). D'où l'égalité (3.6.3).

Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, soit $r(f)$ le plus petit entier ≥ 1 tel que pour tout $g \in \mathrm{Ad}G(K^{r(f)})$, on ait le développement (3.5.2)

$$I^G(f,g) = \sum_{i=1}^m I^G(f,u_i)I^G(f_{1,i},g).$$

Ainsi, pour $f \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$, $t \in \mathcal{O}-\{0\}$ et $x \in \mathrm{Ad}G(J_K^{r(f^t)-\nu(t)})$ où $\nu(t) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ est défini par $|t|_F = q^{-\nu(t)}$, grâce au lemme (3.6.1) on a le développement

$$I^G(f^t, 1+tx) = \sum_{i=0}^m |t|_F^{\frac{1}{2}\dim(\mathcal{O}_G(u_i))} I^G(f,u_i)I^G(f_{1,i},1+tx).$$

Pour $f \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$ fixée, l'application $\mathcal{O}-\{0\} \to C_c^\infty(\mathrm{Ad}G(K^1))$, $t \mapsto f^t$ est localement constante. On en déduit que pour chaque entier $\nu \geq 0$, il existe un plus petit entier r tel que $r \geq r(f^t)$ pour tout $t \in \varpi^\nu\mathcal{O}^\times$; on le note $r(f,\nu)$. Soient $r_0 = \max\{r(f_{1,i},0) : i = 0,\dots,m\}$, $r_1 = \max\{r(f_{1,i},1) : i = 0,\dots,m\}$ et $\rho = \max\{r_0; r_1 - 1\}$. Alors, pour $t \in \mathcal{O}^\times \coprod \varpi\mathcal{O}^\times$ et $x \in \mathrm{Ad}G(J_K^\rho)$, le développement ci-dessus appliqué aux fonctions $f_{1,i}$ entraîne la relation

$$|t|_F^{d_x} I^G(f_{1,i}, 1+x) = |t|_F^{\dim(\mathcal{O}_G(u_i))/2} I^G(f_{1,i}, 1+tx) \quad (i = 0,\dots,m).$$

Par induction croissante sur la valuation $\nu(t)$ de t, pour $t \in \mathcal{O} - \{0\}$ et $x \in \mathrm{Ad}G(J_{\mathcal{K}}^{\rho})$, on obtient

$$I^G(f_{1,i}, 1 + tx) = |t|_F^{d_x - \dim(O_G(u_i))/2} I^G(f_{1,i}, 1 + x) \quad (i = 0, \ldots, m),$$

ce qui achève la preuve de (3.6.2). □

3.7. Commentaire

On a jusqu'à présent suivi d'assez près, en la modifiant au besoin pour l'adapter à nos objets, la théorie telle qu'elle se présente en caractéristique nulle. On pourrait dans le même esprit montrer la propriété d'indépendance linéaire des germes (5.6.1) au voisinage de n'importe quel $s \in G$ absolument semi-simple. Pour un tel s en effet, tous les ingrédients utilisés dans la preuve de cette propriété en caractéristique nulle sont à notre disposition pour $p \geq 0$: le Lemma 19 de [**HC 1**] pour la réduction au cas $s \in A_G$ (cf. [**R 1**]), la formule d'homogénéité des germes au voisinage d'un élément central (3.6.2), et l'existence, pour tout sous-groupe de Cartan elliptique Γ de G, d'une constante $c_\Gamma \neq 0$ telle que $[I_{\{1\}}]_1^{\Gamma \cap G_{\mathrm{r}}} = c_\Gamma$ ([**He**] Appendice 3 pour $p \geq 0$; l'énoncé d'Henniart est en fait plus précis, cf. (5.5.1)). Pour $s \in G$ semi-simple inséparable en revanche, la réduction au cas $s \in A_G$ pratiquée en caractéristique nulle ne fonctionne plus (c'est d'ailleurs ce même obstacle que l'on a déjà rencontré lorsqu'on a voulu étendre à $G - \widetilde{G}$ la propriété d'intégrabilité locale des caractères-distributions des représentations admissibles irréductibles de G, cf. [**Le 2**]) ; d'autre part, on a besoin de l'existence d'une normalisation — disons $I'^G(\cdot,\cdot)$ — des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application $x \mapsto I'^G(f, x)$ localement constante sur G_{r}. La normalisation « J » définie dans la section 4 vérifie cette propriété. Nous l'utiliserons dans la section 5 pour bâtir, à l'aide d'une partie des résultats de [**Le 2**], une preuve de la propriété d'indépendance linéaire des germes valable dans le cas général i.e. pour $p \geq 0$ et $s \in G$ semi-simple.

CHAPITRE 4

NORMALISATION « J » DES INTÉGRALES ORBITALES SUR G

4.1. Introduction

Dans cette section, on montre en la produisant explicitement qu'il existe une normalisation $J^G(\cdot,\cdot)$ des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application $x \mapsto J^G(f,x)$ localement constante sur chacune des sous-nappes de G. La question de l'existence d'une telle normalisation se ramenant à l'étude des orbites voisines d'une orbite irréductible O dans la sous-nappe de G contenant O, on rappelle en 4.2 les constructions et résultats du chapitre 1 de **[BK]** que nous utilisons pour décrire ces orbites. Les résultats techniques rassemblés en 4.3 nous permettent de construire en 4.4 la normalisation « J » souhaitée. Enfin, pour les orbites séparables, on relie en 4.5 cette normalisation « J » à la normalisation standard définie dans **[V]**.

4.2. Rappels sur les constructions de Bushnell et Kutzko

Soit F'/F une extension finie de F. On note $\mathcal{O}_{F'}$ l'anneau des entiers de F', $\mathcal{P}_{F'}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{F'}$, $\kappa_{F'}$ le corps résiduel de F' et $\nu_{F'} : F' \to \mathbf{Z}\cup\{\infty\}$ la valuation normalisée sur F'. Soit V' un F'-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une *chaîne de $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux dans V'* i.e. une suite $\{L_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux dans V' telle que

(i) $L_{i+1} \subset L_i$ et $L_{i+1} \neq L_i$ $(i \in \mathbf{Z})$,

(ii) il existe un entier e (la *$\mathcal{O}_{F'}$-période de $\mathcal{L}$*) tel que $L_{i+e} = \mathcal{P}_{F'}L_i$ $(i \in \mathbf{Z})$.

Cette chaîne définit un $\mathcal{O}_{F'}$-ordre héréditaire $\mathcal{G} = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_{F'}}(\mathcal{L})$ dans la F'-algèbre $A_{F'}(V') = \mathrm{End}_{F'}(V')$; réciproquement, tout $\mathcal{O}_{F'}$-ordre héréditaire $\mathcal{G}_1$ dans $A_{F'}(V')$ est de la forme $\mathcal{G}_1 = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_{F'}}(\mathcal{L}_1)$ pour une chaîne de $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux $\mathcal{L}_1$ dans V', unique à changement d'indexation près. On note $e(\mathcal{G}\,|\,\mathcal{O}_{F'})$ la $\mathcal{O}_{F'}$-période de $\mathcal{L}$, $J_\mathcal{G}$ le radical de Jacobson de $\mathcal{G}$, $J_\mathcal{G}^i = (J_\mathcal{G})^i$ $(i \in \mathbf{Z})$ les puissances de $J_\mathcal{G}$ et $\nu_\mathcal{G}$ la « valuation » sur $A_{F'}(V')$ relative à $\mathcal{G}$ donnée par

$$\nu_\mathcal{G}(x) = \max\{i \in \mathbf{Z} : x \in J_\mathcal{G}^i\} \quad (x \in A_{F'}(V'))$$

(en particulier pour $V' = F'$, on a $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{F'}$ et $\nu_{\mathcal{G}} = \nu_{F'}$). On pose

$$\begin{aligned}
&N(\mathcal{G}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathrm{Aut}_{F'}(V') : xL_i \in \mathcal{L} \;\; (i \in \mathbf{Z})\},\\
&U^0(\mathcal{G}) = U(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^\times,\\
&U^i(\mathcal{G}) = 1 + J_{\mathcal{G}}^i \quad (i \text{ entier} \geq 1).
\end{aligned}$$

Comme l'ordre $\mathcal{G}$ détermine la chaîne $\mathcal{L}$, on a de manière équivalente

$$N(\mathcal{G}) = \{x \in \mathrm{Aut}_{F'}(V') : x^{-1}\mathcal{G}x = \mathcal{G}\}.$$

De plus, $N(\mathcal{G})$ est un sous-groupe ouvert, compact modulo le centre (naturellement identifié à $F'^\times$) de $\mathrm{Aut}_{F'}(V')$, et les $U^i(\mathcal{G})$ (i entier ≥ 0) sont des sous-groupes ouverts compacts distingués de $N(\mathcal{G})$.

Soit E/F' une extension de F' contenue dans $A_{F'}(V')$ et soit $B = A_E(V')$ le commutant de E dans $A_{F'}(V')$. On note $e(E/F')$, $f(E/F')$ respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de l'extension E/F'. Supposons que $E^\times \subset N(\mathcal{G})$. Alors les L_i sont des $\mathcal{O}_E$-réseaux et

$$\mathcal{B} = B \cap \mathcal{G} = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{L})$$

est un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire dans B ; réciproquement, si $\mathcal{B}_1$ est un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire dans B, il existe un unique $\mathcal{O}_{F'}$-ordre héréditaire $\mathcal{G}_1$ dans $A_{F'}(V')$ normalisé par $E^\times$ tel que $\mathcal{B}_1 = B \cap \mathcal{G}_1$ i.e. $\mathcal{G}_1 = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_{F'}}(\mathcal{L}_1)$ où $\mathcal{L}_1$ est la chaîne de $\mathcal{O}_E$-réseaux dans V' attachée à $\mathcal{B}_1$. On a ([**BK**] 1.2.4)

$$J^i_{\mathcal{B}} = \mathrm{End}^i_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{L}) = B \cap \mathrm{End}^i_{\mathcal{O}_{F'}}(\mathcal{L}) = B \cap J^i_{\mathcal{G}} \quad (i \in \mathbf{Z})$$

et

$$e(\mathcal{B}\,|\,\mathcal{O}_E) = \frac{e(\mathcal{G}\,|\,\mathcal{O}_{F'})}{e(E/F')}.$$

Soit

$$\mathcal{A}_{F'}(E) = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_{F'}}(\{\mathcal{P}_E^i\}_{i \in \mathbf{Z}})$$

l'unique $\mathcal{O}_{F'}$-ordre héréditaire dans $A_{F'}(E)$ normalisé par $E^\times$. Pour alléger l'écriture, on pose $A(V') = A_F(V')$ et $\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}_F(E)$.

Fixons un élément $\beta \in E$ tel que $F'[\beta] = E$ et posons $n_{F'}(\beta) = -\nu_E(\beta)$. L'application $a_\beta : A_{F'}(V') \to A_{F'}(V')$, $g \mapsto \beta g - g\beta$ déforme la filtration de $A_{F'}(V')$ induite par les puissances de $J_{\mathcal{G}}$. Pour mesurer cette déformation, Bushnell-Kutzko introduisent (et décrivent) les réseaux $\mathcal{N}_k(\beta, \mathcal{G})$ suivants ([**BK**] 1.4) : pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, soit $\mathcal{N}_k(\beta, \mathcal{G})$ l'$\mathcal{O}_{F'}$-ordre (et $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$-bimodule) dans $A_{F'}(V')$ donné par

$$\mathcal{N}_k(\beta, \mathcal{G}) = \{g \in \mathcal{G} : a_\beta(g) \in J^k_{\mathcal{G}}\} \subset \mathcal{G}.$$

On a

$$\bigcap_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{N}_k(\beta, \mathcal{G}) = \mathcal{B}$$

et $\mathcal{N}_k(\beta, \mathcal{G}) \subset \mathcal{B} + J_{\mathcal{G}}$ pour k suffisamment grand ([**BK**] 1.4.4). Soit $k_0(\beta, \mathcal{G}) \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ *l'exposant critique de β dans $\mathcal{G}$* défini comme suit. Si $\beta \in F'$, alors $k_0(\beta, \mathcal{G}) = -\infty$; sinon,

$$k_0(\beta, \mathcal{G}) = \max\{k \in \mathbf{Z} : \mathcal{N}_k(\beta, \mathcal{G}) \not\subset \mathcal{B} + J_{\mathcal{G}}\}$$

ou de manière équivalente ([**BK**] 1.4.13)

$$k_0(\beta, \mathcal{G}) = \min\{k \in \mathbf{Z} : J_{\mathcal{G}}^k \cap a_\beta(A_{F'}(V')) \subset a_\beta(\mathcal{G})\}.$$

On pose $k_{F'}(\beta) = k_0(\beta, \mathcal{A}_{F'}(E))$ et $e_\beta(\mathcal{G}) = e(\mathcal{B} \mid \mathcal{O}_E)$. Alors on a l'égalité ([**BK**] 1.4.13)

$$k_0(\beta, \mathcal{G}) = e_\beta(\mathcal{G}) k_{F'}(\beta).$$

De plus, si la quantité $k_{F'}(\beta)$ est finie (i.e. si $\beta \notin F'$), on a $k_{F'}(\beta) \geq -n_{F'}(\beta)$ ([**BK**] 1.4.15) et donc $k_0(\beta, \mathcal{G}) \geq -e_\beta(\mathcal{G}) n_{F'}(\beta) = \nu_{\mathcal{G}}(\beta)$.

On terminera ces rappels par la notion de *strate* ([**BK**] 1.5). Une strate dans $A_{F'}(V')$ est un 4-uple $[\mathcal{G}, n, r, \alpha]$ où $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_{F'}$-ordre héréditaire dans $A_{F'}(V')$, n et r deux entiers tels que $n > r$, et α un élément de $A_{F'}(V')$ tel que $\nu_{\mathcal{G}}(\alpha) \geq -n$. Cette strate est dite *fondamentale* si $\alpha + J_{\mathcal{G}}^{-r}$ ne contient pas d'élément nilpotent de $A_{F'}(V')$, *pure* si $\nu_{\mathcal{G}}(\alpha) = -n$ et si l'algèbre $F'[\alpha]$ est un corps tel que $F'[\alpha]^\times \subset N(\mathcal{G})$ (clairement, toute strate pure est fondamentale), *simple* si elle est pure et si $r < -k_0(\alpha, \mathcal{G})$. Deux strates $[\mathcal{G}_i, n_i, r_i, \alpha_i]$ ($i = 1, 2$) dans $A_{F'}(V')$ sont dites *équivalentes* (notation : $[\mathcal{G}_1, n_1, r_1, \alpha_1] \sim [\mathcal{G}_2, n_2, r_2, \alpha_2]$) si $\alpha_1 + J_{\mathcal{G}}^{r_1} = \alpha_2 + J_{\mathcal{G}}^{r_2}$.

4.3. Un lemme d'entrelacement ; application

Soit E/F, $E \neq F$ une extension de F contenue dans $A(V)$ (on rappelle que $V = F^N$) et soit $B = A_E(V)$ le commutant de E dans $A(V)$. Soient $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ normalisé par $E^\times$, $\mathcal{B} = B \cap \mathcal{G}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$.

Fixons une *$\mathcal{O}_E$-base* ([**BK**] Def. 1.1.7) $\{w_k\}$ de la chaîne de $\mathcal{O}_E$-réseaux attachée à $\mathcal{G}$ et soit W le sous-F-espace vectoriel de V engendré par $\{w_k\}$. Le choix de W induit une injection de F-algèbres

$$\iota_W : A(E) \longrightarrow A(V) \tag{4.3.1}$$

qui prolonge l'inclusion $E \hookrightarrow A(V)$ (l'extension E/F étant canoniquement identifiée à un sous-corps de $A(E)$), et une *(W, E)-décomposition de* $A(V)$ (i.e. un isomorphisme de $(A(E), B)$-bimodules, [**BK**] 1.2.6)

$$\tau_W : A(E) \otimes_E B \xrightarrow{\simeq} A(V). \tag{4.3.2}$$

Explicitement, l'isomorphisme (4.3.2) est donné par l'injection (4.3.1), l'inclusion canonique $B \hookrightarrow A(V)$ et la multiplication dans $A(V)$. De plus, cette

(W,E)-décomposition (4.3.2) induit, par restriction pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, un isomorphisme de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodules ([**BK**] 1.2.10)

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_E} J_{\mathcal{B}}^i \xrightarrow{\simeq} J_{\mathcal{G}}^i. \tag{4.3.3}$$

Fixons un élément $s \in E$ tel que $F[s] = E$ et posons $e = e_s(\mathcal{G})$, $\nu = \nu_{\mathcal{G}}(s) = -e\,n_F(s)$, $k_0 = k_0(s,\mathcal{G}) = e\,k_F(s)$, $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G})$. Pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, la (W,E)-décomposition induit par restriction un isomorphisme de $(\mathcal{O}_E,\mathcal{B})$-bimodules ([**BK**] 1.4.13)

$$\mathcal{N}_k(s,\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{B} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{N}_{ek}(s,\mathcal{G}). \tag{4.3.4}$$

On se propose de montrer que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'application $x \mapsto I^G(f,x,dg_x)$ est — pourvu que l'on normalise convenablement les mesures de Haar dg_x sur G_x pour x voisin de s dans $\iota_W(\mathrm{Aut}_F(E))$ — localement constante au voisinage de s dans $\iota_W(\mathrm{Aut}_F(E))$.

(4.3.5) LEMME. — *Pour tout entier $n \geq 1$, on a*

$$\{g \in G : g^{-1}sg \in s + J_{\mathcal{G}}^{k_0+n}\} = G_s(1 + J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G})).$$

Démonstration. — Les arguments sont ceux de la preuve du Theorem 1.5.8 de [**BK**]. Fixons un entier $n \geq 1$ et notons $\mathcal{I}$ la partie $\{g \in G : g^{-1}sg \in s+J_{\mathcal{G}}^{k_0+n}\}$. Soient $g \in \mathcal{I}$ et $y \in J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G})$. Comme $(1+y) \in U^n(\mathcal{G}) \subset N(\mathcal{G})$, $g(1+y) \in \mathcal{I}$ si et seulement si

$$sg \equiv g(1+y)s(1+y)^{-1} \pmod{gJ_{\mathcal{G}}^{k_0+n}}.$$

Or $(1+y)s(1+y)^{-1} = s - (sy-ys)(1+y)^{-1} \in s + J_{\mathcal{G}}^{k_0+n}$ car $y \in J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G})$, par conséquent $g(1+y)s(1+y)^{-1} \equiv gs \pmod{gJ_{\mathcal{G}}^{k_0+n}}$ et $g(1+y) \in \mathcal{I}$ puisque $gs \equiv sg \pmod{gJ_{\mathcal{G}}^{k_0+n}}$. On a donc montré la relation

$$\mathcal{I}(1 + J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G})) = \mathcal{I},$$

laquelle implique en particulier l'inclusion

$$G_s(1 + J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G})) \subseteq \mathcal{I}.$$

Réciproquement, soit $g \in \mathcal{I}$; on veut montrer que $g(1+J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G}))$ est d'intersection non vide avec G_s. Posons $t = \nu_{\mathcal{G}}(g)$. Comme $sg - gs \in gJ_{\mathcal{G}}^{k_0+n} \subset J_{\mathcal{G}}^{k_0+t+n}$, il existe un $y \in J_{\mathcal{B}}^{t+n}\mathcal{N}(G)$ tel que $sg-gs = sy-ys$ ([**BK**] Cor. 1.4.10). Ainsi, $\gamma = g-y$ appartient à $B \cap J_{\mathcal{G}}^t = J_{\mathcal{B}}^t$. De plus, comme $B^\times = G_s$ est dense dans B, quitte à remplacer y par $y+\alpha$ pour un $\alpha \in J_{\mathcal{B}}^{t+n}$, on peut supposer que $\gamma \in G_s$. Montrons par induction que pour chaque entier $i \geq 1$, il existe des éléments $g_i \in g(1 + J_{\mathcal{B}}^n \mathcal{N}(\mathcal{G}))$, $\gamma_i \in G_s$ tels que

$$g_i \equiv \gamma_i \pmod{J_{\mathcal{B}}^{t+in} \mathcal{N}(\mathcal{G})}.$$

Le cas $i = 1$ ayant déjà été traité ($(g_1, \gamma_1) = (g, \gamma)$ satisfait les conditions voulues), fixons un entier $j \geq 1$ et supposons qu'il existe des éléments g_j, γ_j comme ci-dessus. Soit $x \in J_{\mathcal{B}}^{t+jn} \mathcal{N}(G)$ tel que $g_j = \gamma_j + x$. Comme $g_j \in \mathcal{I}$, en remplaçant g_j par $\gamma_j + x$ dans la relation $sg_j \equiv g_j s \pmod{g_j J_{\mathcal{G}}^{k_0+n}}$, on obtient

$$sx \equiv xs \pmod{\gamma_j J_{\mathcal{G}}^{k_0+n} + J_{\mathcal{G}}^{k_0+t+(j+1)n}}$$

et donc

$$sx - xs \in J_{\mathcal{G}}^{k_0+t+jn} \cap \left(\gamma_j J_{\mathcal{G}}^{k_0+n} + J_{\mathcal{G}}^{k_0+t+(j+1)n}\right)$$

car $x \in J_{\mathcal{B}}^{t+jn} \mathcal{N}(G)$. Soit $z \in J_{\mathcal{B}}^{t+jn} \mathcal{N}(\mathcal{G}) \cap (\gamma_j J_{\mathcal{B}}^n \mathcal{N}(\mathcal{G}) + J_{\mathcal{B}}^{t+(j+1)n} \mathcal{N}(\mathcal{G}))$ tel que $sx - xs = sz - zs$ (**[BK]** Prop. 1.4.16). On écrit z sous la forme $z = \gamma_j a + b$ avec $\gamma_j a \in J_{\mathcal{B}}^{t+jn} \mathcal{N}(\mathcal{G}) \cap \gamma_j J_{\mathcal{B}}^n \mathcal{N}(\mathcal{G})$ et $b \in J_{\mathcal{B}}^{t+(j+1)n} \mathcal{N}(\mathcal{G})$. Soit $\delta = x - z \in B$. Comme plus haut, on peut supposer que $\gamma_j + \delta$ appartient à G_s. On pose $g_{j+1} = g_j(1 + a)^{-1}$ et $\gamma_{j+1} = \gamma_j + \delta$. Alors

$$g_{j+1} = (\gamma_{j+1}(1 + a) + b - \delta a)(1 + a)^{-1} \equiv \gamma_{j+1} \pmod{J_{\mathcal{B}}^{t+(j+1)n} \mathcal{N}(\mathcal{G})}.$$

Comme la partie $\Lambda = g(1 + J_{\mathcal{B}}^n \mathcal{N}(\mathcal{G}))$ est ouverte compacte dans G, si i est un entier suffisamment grand, $g' + J_{\mathcal{B}}^{t+in} \mathcal{N}(\mathcal{G}) \subset \Lambda$ pour tout $g' \in \Lambda$. Par conséquent $\Lambda \cap G_s \neq \varnothing$ et le lemme (4.3.5) est prouvé. $\square$

Le lemme suivant est une (légère) extension de la Proposition 2.2.2 de **[BK]**.

(4.3.6) LEMME. — *Soient n un entier ≥ 1 et $x \in \iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+n})$. Alors la strate $[\mathcal{G}, -\nu, -e(k_F(s) + n), x]$ est simple et équivalente à $[\mathcal{G}, -\nu, -e(k_F(s) + n), s]$.*

Démonstration. — Puisque $\mathcal{P}_E^k J_{\mathcal{B}} = J_{\mathcal{B}}^{ek}$ ($k \in \mathbf{Z}$), l'isomorphisme (4.3.3) implique que l'on a l'inclusion $\iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+n}) \subset s + J_{\mathcal{G}}^{e(k_F(s)+n)}$. Les strates $[\mathcal{G}, -\nu, -e(k_F(s) + n), x]$ et $[\mathcal{G}, -\nu, -e(k_F(s) + n), s]$ sont donc équivalentes.

Comme s est elliptique dans le groupe $H = \mathrm{Aut}_F(E)$, le H-entrelacement formel de la strate simple $[\mathcal{A}, n_F(s), -(k_F(s) + n), s]$ dans $A(E)$

$$\mathcal{I}_H([\mathcal{A}, n_F(s), -(k_F(s) + n), s]) \stackrel{\text{déf}}{=}$$
$$\{h \in H : h^{-1}(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+n})h \cap (s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+n}) \neq \varnothing\}$$

coïncide avec

$$E^\times(1 + \mathcal{P}_E^n \mathcal{N}_{k_F(s)}(s, \mathcal{A}))$$

([**BK**] Theorem 1.5.8). En particulier, $\mathcal{I}_H([\mathcal{A}, n_F(s), -(k_F(s)+n), s])$ est compact modulo le centre de H et contenu dans $N(\mathcal{A})$. Soit $\alpha \in J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+1}$ tel que $x = \iota_W(s+\alpha)$. Le centralisateur $H_{s+\alpha}$ de $s+\alpha$ dans H est contenu dans $\mathcal{I}_H([\mathcal{A}, n_F(s), -(k_F(s)+1), s])$ donc est compact modulo le centre de H, ce qui implique (en utilisant par exemple la décomposition de Jordan additive dans $A(E)$) que $s+\alpha$ est elliptique dans H. De plus, comme $F[s+\alpha]^\times \subset N(\mathcal{A})$, on a $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}(F[s+\alpha])$ (comme $\mathcal{O}_F$-ordres) donc $e(F[s+\alpha]/F) = e(E/F)$ et $f(F[s+\alpha]/F) = f(E/F)$. Soit $E' = F[x] \subset A(V)$. Puisque $E' = \iota_W(F[s+\alpha]) \simeq F[s+\alpha]$ (isomorphisme de F-algèbres), E' est un corps i.e. x est irréductible dans G. Il est clair que $\nu_G(x) = \nu$. Pour $\eta \in H$, $y \in A(E)$ et $b \in B$, on a

$$(\eta \otimes 1)(y \otimes b)(\eta \otimes 1)^{-1} = \eta y \eta^{-1} \otimes b.$$

Par conséquent (cf. l'isomorphisme (4.3.3)) $E'^\times \subset N(\mathcal{G})$ et la chaîne de $\mathcal{O}_F$-réseaux dans V attachée à $\mathcal{G}$ est une chaîne de $\mathcal{O}_{E'}$-réseaux. Soient $B' = \mathrm{End}_{E'}(V) \subset A(V)$ et $\mathcal{B}' = B' \cap \mathcal{G}$. Comme la strate $[\mathcal{G}, -\nu, -(k_0+en), x]$ dans $A(V)$ est pure et équivalente à $[\mathcal{G}, -\nu, -(en+k_0), s]$, pour tout couple d'entiers (m,k), $k \leq k_0 + en$, on a ([**BK**] 2.1.3)

$$J_{\mathcal{B}'}^m \mathcal{N}_k(x, \mathcal{G}) = J_{\mathcal{B}}^m \mathcal{N}_k(s, \mathcal{G}).$$

En particulier, pour $m = 0$ et $k = k_0 + 1$, on obtient

$$\mathcal{B}' + J_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{N}_{k_0+1}(x, \mathcal{G}) + J_{\mathcal{G}} = \mathcal{N}_{k_0+1}(s, \mathcal{G}) + J_{\mathcal{G}}$$

avec (grâce à [**BK**] 1.4.8)

$$\mathcal{N}_{k_0+1}(s, \mathcal{G}) + J_{\mathcal{G}} = \mathcal{B} + J_{\mathcal{B}} \mathcal{N}(\mathcal{G}) + J_{\mathcal{G}} = \mathcal{B} + J_{\mathcal{G}}.$$

Donc $\mathcal{B}' + J_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{B} + J_{\mathcal{G}}$. Mais puisque $\mathcal{A}(E')$ est un $\mathcal{O}_{E'}$-module à droite libre de de rang $[E' : F] = [E : F]$, on a $[\mathcal{A}(E') \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} \mathcal{B}' : \mathcal{A}(E') \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} J_{\mathcal{B}'}] = [\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}]^{[E:F]}$ d'où (cf. l'isomorphisme (4.3.3)) $[\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}] = [\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}]^{[E:F]}$; de même, $[\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}] = [\mathcal{B} : J_{\mathcal{B}}]^{[E:F]}$. Par conséquent l'indice $[\mathcal{B}' + J_{\mathcal{G}} : J_{\mathcal{G}}] = [\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}]$ coïncide avec l'indice $[\mathcal{B} + J_{\mathcal{G}} : J_{\mathcal{G}}] = [\mathcal{B} : J_{\mathcal{B}}]$, d'où $\mathcal{B}' + J_{\mathcal{G}} = \mathcal{B} + J_{\mathcal{G}}$. On en déduit que $\mathcal{N}_{k_0}(x, \mathcal{G}) \not\subset \mathcal{B}' + J_{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{N}_{k_0+1}(x, \mathcal{G}) \subset \mathcal{B}' + J_{\mathcal{G}}$, donc que $k_0(x, \mathcal{G}) = k_0$. □

(4.3.7) Proposition. — *Pour chaque $x \in \iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+1})$, soit dg_x la mesure de Haar sur G_x telle que*

$$\mathrm{vol}(G_x(1 + \mathcal{P}_E \mathcal{N}(\mathcal{G})), \frac{dg}{dg_x}) = 1.$$

Alors, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, le germe au point s dans $\iota_W(\mathrm{Aut}_F(E))$

$$x \mapsto [I^G(f,x,dg_x)]_s^{\iota_W(\mathrm{Aut}_F(E))}$$

est un germe constant.

Démonstration. — Soient n un entier ≥ 1 et $x \in \iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+n})$. Soient $E' = F[x]$, $B' = \mathrm{End}_{E'}(V) \subset A(V)$ et $\mathcal{B}' = B' \cap \mathcal{G}$. Puisque les strates $[\mathcal{G}, -\nu, -e(k_F(s)+n), x]$ et $[\mathcal{G}, -\nu, -e(k_F(s)+n), s]$ sont simples et équivalentes (4.3.6), on a $e(E'/F) = e(E/F)$ et $f(E'/F) = f(E/F)$ ([**BK**] 2.1.4), et pour $m \in \mathbf{Z}$, $J_{\mathcal{B}'}^m \mathcal{N}_{k_0}(x,\mathcal{G}) = J_{\mathcal{B}}^m \mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G})$ ([**BK**] 2.3.1). Comme $\mathcal{A}(E')$ est un $\mathcal{O}_{E'}$-module à droite libre de rang $[E' : F] = [E : F]$, pour $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, on a $[\mathcal{A}(E') \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} \mathcal{B}' : \mathcal{A}(E') \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} J_{\mathcal{B}'}^m] = [\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}^m]^{[E:F]}$ d'où (cf. l'isomorphisme (4.3.3)) $[\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}^m] = [\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}^m]^{[E:F]}$; de même, $[\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}^m] = [\mathcal{B} : J_{\mathcal{B}}^m]^{[E:F]}$. Donc $[\mathcal{B} : J_{\mathcal{B}}^m] = [\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}^m]$ ($m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$). Par suite, pour toutes mesures invariantes $d\mu$ et $d\mu'$ respectivement sur les espaces homogènes $G_s \backslash G$ et $G_x \backslash G$, la quantité

$$\frac{\mathrm{vol}(G_x(1+\mathcal{P}_{E'}^n \mathcal{N}_{k_0}(x,\mathcal{G})), d\mu')}{\mathrm{vol}(G_x(1+\mathcal{P}_{E'} \mathcal{N}_{k_0}(x,\mathcal{G})), d\mu')} = \frac{[\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}^{en-e}]}{[\mathcal{N}_{k_0}(x,\mathcal{G}) : J_{\mathcal{B}'}^{en-e} \mathcal{N}_{k_0}(x,\mathcal{G})]}$$

coïncide avec

$$\frac{\mathrm{vol}(G_s(1+\mathcal{P}_{E}^n \mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G})), d\mu)}{\mathrm{vol}(G_s(1+\mathcal{P}_{E} \mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G})), d\mu)}.$$

Pour chaque entier $n \geq 1$, soient $\mathcal{W}_n$ et $\mathcal{V}_n$ les voisinages ouverts compacts de s respectivement dans H et G définis par $\mathcal{W}_n = s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+n}$ et $\mathcal{V}_n = s + J_{\mathcal{G}}^{k_0+en}$. Ainsi (avec les mesures dg_x définies dans l'énoncé de (4.3.7)), pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \iota_W(\mathcal{W}_n)$, on a

$$\begin{aligned} I^G(\mathbf{1}_{\mathcal{V}_n}, x, dg_x) &= \mathrm{vol}(G_x(1+\mathcal{P}_{F[x]}^n \mathcal{N}_{k_0}(x,\mathcal{G})), \frac{dg}{dg_x}) \\ &= \mathrm{vol}(G_s(1+\mathcal{P}_{E}^n \mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G})), \frac{dg}{dg_s}) = I^G(\mathbf{1}_{\mathcal{V}_n}, s, dg_s); \end{aligned}$$

en particulier, $I^G(\mathbf{1}_{\mathcal{V}_1}, x, dg_x) = 1$.

Soit une fonction $f \in C_c^\infty(G)$. On peut, sans perte de généralité, supposer que f est la fonction caractéristique d'un ouvert compact C de G. Comme l'orbite $O_G(s)$ est fermée dans G, on peut construire un recouvrement du compact $O_G(s) \cap C$ de $O_G(s)$ de la forme $O_G(s) \cap C = O_G(s) \cap (\coprod_{i=1}^m \mathrm{Ad}g_i(\mathcal{V}_{n_i}))$ pour des entiers $n_i \geq 1$ et des $g_i \in G$. Soit $n = \max\{n_i : i = 1, \ldots, m\}$. Alors, pour tout $x \in \iota_W(\mathcal{W}_n)$,

$$I^G(f, x, dg_x) = \sum_{i=1}^m I^G(\mathbf{1}_{\mathcal{V}_{n_i}}, x, dg_x) = I^G(f, s, dg_s),$$

et la proposition (4.3.7) est prouvée. □

(4.3.8) REMARQUE. — Si de plus $s \in G_{\mathrm{e}}$ (i.e. si $[E:F]=N$), la proposition (4.3.7) dit qu'il existe un jeu de mesures de Haar $\{dg_x\}$ sur les centralisateurs G_x des $x \in G$ voisins de s dans G tel que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, le germe $x \mapsto [I^G(f,x,dg_x)]_s^G$ est un germe constant. Harish-Chandra avait déjà, grâce à son très élégant principe de submersion, montré ce résultat (et même un résultat plus profond) au voisinage de tout $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{e}}$, puis par descente parabolique au voisinage de tout $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}}$, **[HC 2]** Theorem 3. D'ailleurs, sa démonstration fonctionne encore au voisinage d'un $s \in G_{\mathrm{r}}$ inséparable, cf. **[Le 3]**.

4.4. Définition de la normalisation « J »

On peut dès lors définir l'intégrale orbitale normalisée $J^G(\cdot,x)$ pour tout $x \in G$. Soit $s \in G - A_G$ irréductible et soient $E = F[s]$, $B = A_E(V)$. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ normalisé par $E^\times$ tel que $\mathcal{B} = B \cap \mathcal{G}$ soit un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire *maximal* dans B i.e. tel que $e(\mathcal{B} \mid \mathcal{O}_E) = 1$ (on a besoin d'associer à s un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ tel que la normalisation définie ci-après ne dépende pas du choix de cet ordre ; il est clair qu'on aurait tout aussi bien pu travailler avec un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{G}'$ dans $A(V)$ normalisé par $E^\times$ tel que $B \cap \mathcal{G}'$ soit un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire minimal, i.e. d'Iwahori, dans B). On pose $J^G(\cdot,s) = I^G(\cdot,s,dg_s)$ (égalité dans $D(G)$) où dg_s est la mesure de Haar sur G_s telle que

$$\mathrm{vol}(G_s(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G})), \frac{dg}{dg_s}) = 1.$$

A priori, la mesure invariante $\dfrac{dg}{dg_s}$ sur l'espace homogène $G_s\backslash G$ — donc aussi la distribution $J^G(\cdot,s)$ sur G — définie ci-dessus dépend du choix de $\mathcal{G}$. Vérifions qu'il n'en est rien. Soient $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ deux $\mathcal{O}_F$-ordres héréditaires dans $A(V)$ normalisés par $E^\times$ tels que $\mathcal{B}_i$ ($i = 1$, 2) soit un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire maximal dans B. Soit $b \in B^\times = G_s$ tel que $\mathcal{B}_2 = b\mathcal{B}_1 b^{-1}$. Alors $\mathcal{G}_2 = b\mathcal{G}_1 b^{-1}$ et pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\mathcal{N}_k(s,\mathcal{G}_2) = b\mathcal{N}_k(s,\mathcal{G}_1)b^{-1}$. On a donc

$$G_s(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_2)) = G_s(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_1))b^{-1}$$

et pour toute mesure invariante $d\mu$ sur l'espace homogène $G_s\backslash G$,

$$\mathrm{vol}(G_s(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_2)), d\mu) = \mathrm{vol}(G_s(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_1)), d\mu).$$

Si $z \in A_G$, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on pose $J^G(f,z) = f(z)$.

Soit M un sous-groupe de Lévi de G. Via la donnée d'un isomorphisme (de groupes ϖ-adiques) $\varphi : M \xrightarrow{\simeq} \prod_{i=1}^r GL(n_i,F)$ ($n_i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$) et grâce à (3.2.3), pour tout $x \in M$ irréductible dans M, on définit l'intégrale orbitale normalisée $J^M(\cdot, x)$ au point x sur M composante par composante comme ci-dessus. Cette définition ne dépend pas de l'isomorphisme φ choisi. Recopions alors la définition (3.4.1).

(4.4.1) DÉFINITION (Normalisation « J »). — Soit $x \in G$ et soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8. Soient M une composante de Lévi de P'' et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A). Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on définit l'intégrale orbitale normalisée au point x dans G

$$J^G(f, x) = J^M(f^P, x_M)$$

où $f^P \in C_c^\infty(M)$ est le terme K_P-invariant de f suivant P et x_M la composante de x sur M.

Cohérence de la définition (4.4.1). — Clairement, les points (i), (ii), (iii) et (iv) de la preuve de la cohérence de la définition (3.4.1) restent vrais si l'on remplace la normalisation « I » par la normalisation « J ». □

Comme pour la normalisation « I », on étend naturellement la normalisation « J » à tout groupe $H \in \Gamma_F$ (notation : $J^H(f, x)$ pour tous $x \in H$, $f \in C_c^\infty(H)$), et la proposition (3.4.3) reste vraie si l'on remplace la normalisation « I » par la normalisation « J ». De même (3.5.2), si s est un élément semi-simple de G, pour chaque orbite O de $A_G(s)$ il existe un unique germe $[J_O]_s^G = [J_O^G]_s^G$ tel que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on ait le développement

$$[J^G(f, \cdot)]_s^G = \sum_O J^G(f, x_O)[J_O(\cdot)]_s^G$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) x_O est un quelconque élément de O. Les propositions (3.5.5) et (3.6.2) restent vraies si l'on remplace la normalisation « I » par la normalisation « J ».

(4.4.2) PROPOSITION. — *Pour chaque sous-nappe $X_{\alpha,\beta}$ de G et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'application*

$$X_{\alpha,\beta} \to \mathbf{C}, \ x \mapsto J^G(f, x)$$

est localement constante.

Démonstration. — Soient α, β deux partitions de N telles que $\beta \prec \alpha$, et soit $f \in C_c^\infty(G)$. On pose $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r > 0 = \cdots = 0 = \cdots)$. Comme $J^G(f, y) = J^G(f, g^{-1}yg)$ pour tout $y \in G$ et tout $g \in G$, et comme les fibres de la submersion $p_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ (cf. 2.6) sont les orbites de X_α, on est ramenés à montrer que pour tout $\{\zeta_i\}_{i=1}^r \in Y_{\alpha,\beta} = p_\alpha(X_{\alpha,\beta})$, le germe de fonctions au point $\{\zeta_i\}_{i=1}^r$ dans $Y_{\alpha,\beta}$

$$\{\xi_i\}_{i=1}^r \mapsto [J^G(f, s_\alpha(\{\xi_i\}_{i=1}^r))]_{\{\zeta_i\}_{i=1}^r}^{Y_{\alpha,\beta}}$$

est un germe constant.

Soit $x \in X_{\alpha,\beta}$ et soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8. Soit M une composante de Lévi de P'' et soit $x_M \in M$ la composante de x sur M. Fixons un isomorphisme (de groupes ϖ-adiques)

$$\varphi : M \xrightarrow{\simeq} \prod_{i=1}^d GL(n_i, F) \quad (n_1 + \cdots + n_d = N)$$

et soit $(s_1, \ldots, s_d) = \varphi(x_M)$. Pour chaque $i = 1, \ldots, d$, soit $E_i = F[s_i] \subset A(F^{n_i})$ et fixons une injection de F-algèbres $\iota_i : A(E_i) \to A(F^{n_i})$ (4.3.1) prolongeant l'inclusion $E_i \hookrightarrow A(F^{n_i})$ et telle que pour toute fonction $h_i \in C_c^\infty(GL(n_i, F))$, le germe

$$y_i \mapsto [J^{GL(n_i,F)}(h_i, y_i)]_{s_i}^{\iota_i(\mathrm{Aut}_F(E_i))}$$

est un germe constant (4.3.7).

Soit K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P, A_M) et soit $f^P \in C_c^\infty(M)$ le terme K_P-invariant de f suivant P. Grâce à (3.2.3), on peut supposer que la décomposition de f^P à travers φ est de la forme

$$f^P = \left(\otimes_{i=1}^d f_i\right) \circ \varphi \quad (f_i \in C_c^\infty(GL(n_i, F))).$$

Pour $i = 1, \ldots, d$, fixons un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}_i$ de s_i dans $\mathrm{Aut}_F(E_i)$ contenu dans l'ensemble $\mathrm{Aut}_F(E_i)_{\mathrm{e}}$ des éléments elliptiques de $\mathrm{Aut}_F(E_i)$ (d'après (2.5.1), cet ensemble est ouvert dans $\mathrm{Aut}_F(E_i)$) et tel que pour tout $y_i \in \iota_i(\mathcal{V}_i)$,

$$J^{GL(n_i,F)}(f_i, y_i) = J^{GL(n_i,F)}(f_i, s_i).$$

Soit $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\prod_{i=1}^d \mathcal{V}_i) \subset M$. Pour tout $y \in \mathcal{V}$, on a l'égalité

$$J^M(f^P, y) = J^M(f^P, x_M).$$

Quitte à restreindre les ouverts $\mathcal{V}_i \subset \mathrm{Aut}_F(E_i)$ ($i = 1, \ldots, d$), on peut supposer (grâce à (2.5.1)) que pour tout $y \in \mathcal{V}$, le sous-groupe de Lévi $M'(y)$ de G associé à y est contenu dans M' : cela revient à supposer que pour tout couple d'entier (i, j), $1 \leq i, j \leq d$ tel que $\varphi^{-1}(s_i)$ et $\varphi^{-1}(s_j)$ sont dans deux composantes distinctes de M' pour la décomposition de M' en produit de groupes linéaires sur F (cf. 2.8), alors pour tout couple $(x_i, x_j) \in \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_j$, le polynôme minimal de x_i est distinct de celui de x_j. Alors, pour chaque $y \in \mathcal{V}$, il existe, et l'on peut donc fixer, un u''_y dans le radical unipotent U'' de P'' tel que

$$\begin{cases} yu''_y \in \coprod_{\beta \prec \gamma \prec \alpha} X_{\alpha,\gamma} \\ M \text{ est une composante de Lévi de } P''(yu''_y) \end{cases}$$

où $P''(yu''_y)$ est le sous-groupe parabolique de $M'(y)$ associé à yu''_y (noter que $M'(y)$ est le sous-groupe de Lévi de G associé à yu''_y). Ainsi, pour tout $y \in \mathcal{V}$, on a $J^G(f, yu''_y) = J^M(f^P, y)$ (4.4.1) et donc $J^G(f, yu''_y) = J^G(f, x)$.

Soit $Y_{\mathcal{V}} = p_\alpha(\{yu''_y : y \in \mathcal{V}\}) \subset \coprod_{\beta \prec \gamma \prec \alpha} Y_{\alpha,\gamma}$. Pour $k \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ suffisamment grand, le voisinage $Y_{\alpha,\beta} \cap \mathcal{W}_k(p_\alpha(x))$ (pour la définition de $\mathcal{W}_k(p_\alpha(x))$, cf. 2.6) de $p_\alpha(x)$ dans $Y_{\alpha,\beta}$ est contenu dans $Y_{\alpha,\beta} \cap Y_{\mathcal{V}}$. La proposition (4.4.2) est donc prouvée. □

(4.4.3) REMARQUE. — Dans l'ordre d'idées de la remarque (2.5.3) et contrairement à ce que l'on pensait intitialement, il n'existe pas de normalisation des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » localement constante sur les nappes de Dixmier de G. En effet, considérons un pseudo-coefficient f_π de la représentation de Steinberg π du groupe $H = GL(2, F)$ et soit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme u_1 est dans l'orbite unipotente régulière de H, u_1 est dans la fermeture de $\widetilde{H}_{\mathrm{e}}$ (resp. $\widetilde{H}_{\mathrm{r}} - \widetilde{H}_{\mathrm{e}}$) dans H pour la topologie ϖ-adique. Or

$$\begin{cases} J^H(f_\pi, x) \neq 0 & \forall x \in \widetilde{H}_{\mathrm{e}} \\ J^H(f_\pi, x) = 0 & \forall x \in \widetilde{H}_{\mathrm{r}} - \widetilde{H}_{\mathrm{e}} \end{cases},$$

par conséquent l'application $x \mapsto J^H(f_\pi, x)$, comme d'ailleurs l'application « intégrale orbitale de f_π » induite par n'importe quelle autre normalisation des intégrales orbitales sur H, ne peut pas être localement constante au voisinage de u_1 dans la nappe régulière de H.

Je remercie J.-L. Waldspurger de m'avoir évité une erreur « embarrassante » en m'indiquant le contre-exemple ci-dessus.

4.5. Comparaison avec la normalisation standard

On peut, comme il est suggéré dans [**BDKV**] Appendice A, 2.d, essayer d'utiliser la normalisation définie dans [**V**] 1.g. A tout $x \in \widetilde{G}$, Vignéras associe une « mesure orbitale canonique normalisée » $d_G(x)\mu_x^*$ où μ_x^* est l'image par l'isomorphisme de variétés ϖ-adiques $G_x\backslash G \to O_G(x)$, $g \mapsto g^{-1}xg$ d'une mesure G-invariante μ_x sur l'espace homogène $G_x\backslash G$ canoniquement définie à partir de la décomposition de Jordan $x = su$, $s \in G$ semi-simple, $u \in \mathcal{U}_{G_s} = G_s \cap \mathcal{U}$ — en particulier pour x semi-simple, $\mu_x = \dfrac{d'g}{d'g_x}$ où $d'g$ (resp. $d'g_x$) est la mesure de Haar sur G qui donne volume 1 aux sous-groupes d'Iwahori de G (resp. G_x) —, et où $d_G(x)$ est un facteur de normalisation défini comme suit. Soient $\underline{T}$ un tore maximal du groupe algébrique $\underline{G} = GL(N)$ tel que $s \in \underline{T}(F)$, Σ un système de racines de $\underline{G}$ par rapport à $\underline{T}$, $\Sigma_1 \subset \Sigma$ l'ensemble des racines triviales sur s et $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. Alors $d_G(x) = |D_G(s)|_F^{1/2}$ où

$$D_G(s) \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\alpha\in\Sigma_2} (1 - \alpha(s)) = \det\nolimits_{\mathrm{Lie}(G_s)\backslash\mathrm{Lie}(G)}(1 - \mathrm{Ad}s^{-1}).$$

Si $p \mid N$, on ne peut prolonger cette normalisation sur $G - \widetilde{G}$ de manière à obtenir, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » localement constante sur chacune des sous-nappes de G, comme le montre le contre-exemple suivant. Supposons $p > 0$ et reprenons l'élément $x \in H = GL(p, F)$ défini dans la remarque (2.4.1). Il est elliptique inséparable dans H et peut être approché d'aussi près que l'on veut par un élément $y \in \widetilde{H}_e$. Mais comme x a une seule valeur propre $\sqrt[p]{\varpi}$ de multiplicité p dans l'extension radicielle $F[\sqrt[p]{\varpi}]$ de F, quand un tel y tend vers x, ses valeurs propres tendent toutes vers $\sqrt[p]{\varpi}$ dans une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et le facteur de normalisation $d_H(y)$ tend vers 0. Précisément (proposition (4.5.1) ci-après), notant $\delta_F(y)$ ($y \in \widetilde{H}_e$) l'exposant du discriminant de l'extension $F[y]/F$, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(H)$, l'application $y \mapsto q^{\frac{1}{2}\delta_F(y)} d_H(y) I^H(f, y)$ est localement constante au voisinage de x dans $\widetilde{H}_e$.

Soit M un groupe ϖ-adique isomorphe à un produit $\prod_{i=1}^r GL(n_i, F)$ pour des entiers $n_i \geq 1$. On pose

$$d_M(y) = |\det\nolimits_{\mathrm{Lie}(M_y)\backslash\mathrm{Lie}(M)}(1 - \mathrm{Ad}_M y^{-1})|_F^{\frac{1}{2}} \quad (y \in M).$$

Soit $s \in \widetilde{M}$ irréductible dans M. La F-algèbre $F[s]$ se décompose en $F[s] = E_1 \times \cdots \times E_r$ pour des extensions séparables finies E_i/F, et l'on pose

$$\delta_M(s) = q^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^r \delta(E_i/F) d_i}$$

où $\delta(E_i/F)$ est l'exposant du discriminant de l'extension E_i/F et $n_i = d_i[E_i : F]$.

Soit $x \in \widetilde{G}$ et soient M', P, $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8, U'' le radical unipotent de P'' et $\pi'' : P'' \to P''/U'' = \overline{P}''$ le quotient réductif maximal de P''. On pose $\eta_G(x) = \delta_{\overline{P}''}(\pi''(x))\, d_{\overline{P}''}(\pi''(x))$.

(4.5.1) PROPOSITION. — *Soit une sous-nappe $X_{\alpha,\beta}$ de G. Pour tout $x \in X_{\alpha,\beta}$ (séparable ou non) et toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'application*

$$X_{\alpha,\beta} \to \mathbf{C},\ y \mapsto \eta_G(y) I^G(f,y)$$

est constante au voisinage de x dans $X_{\alpha,\beta} \cap \widetilde{G}$.

Démonstration. — Soit $x \in X_{\alpha,\beta}$ et soient M', P et $P'' = M' \cap P$ les sous-groupes de G associés à x en 2.8. Fixons une composante de Lévi M de P'' et un isomorphisme (de groupes ϖ-adiques)

$$\varphi : M \xrightarrow{\simeq} \prod_{i=1}^{r} GL(n_i, F) \quad (n_1 + \cdots + n_r = N).$$

Soit $x_M \in M$ la composante de x sur M et soit $(s_1, \ldots, s_r) = \varphi(x_M)$. Pour $i = 1, \ldots, r$, soit $E_i = F[s_i] \subset A(F^{n_i})$. Pour $y \in \widetilde{M}$ irréductible dans M, posant $(y_1, \ldots, y_r) = \varphi(y)$, on a

$$\delta_M(y) d_M(y) = \prod_{i=1}^{r} \delta_{GL(n_i,F)}(y_i) d_{GL(n_i,F)}(y_i).$$

Ainsi (cf. la preuve de la proposition (4.4.2), il suffit de produire, pour $i = 1, \ldots, r$, une injection de F-algèbres $\iota_i : A(E_i) \to A(F^{n_i})$ prolongeant l'inclusion $E_i \hookrightarrow A(F^{n_i})$ et une constante $\lambda_i = \lambda_{GL(n_i,F)}(s_i) > 0$ telles que que pour tout $y_i \in \iota_i(\mathrm{Aut}_F(E_i))$ séparable dans $GL(n_i, F)$ et voisin de s_i dans $\iota_i(\mathrm{Aut}_F(E_i))$, on ait

$$\delta_{GL(n_i,F)}(y_i) d_{GL(n_i,F)}(y_i) I^{GL(n_i,F)}(\cdot, y_i) = \lambda_i J^{GL(n_i,F)}(\cdot, y_i)$$

(égalité dans $D(GL(n_i, F))$).

Soit $s \in G$ irréductible et soient $E = F[s] \subset A(V)$, $B = A_E(V)$. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ normalisé par $E^\times$ tel que $\mathcal{B} = B \cap \mathcal{G}$ soit un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire maximal dans B. Soient $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \mathcal{N}_{k_F(s)}(s, \mathcal{G})$. Fixons comme en 4.3 via le choix d'une $\mathcal{O}_E$-base $\{w_k\}$ de la chaîne de $\mathcal{O}_F$-réseaux dans V attachée à $\mathcal{G}$, une injection de F-algèbres $\iota_W : A(E) \to A(V)$ (4.3.1) prolongeant l'inclusion $E \hookrightarrow A(V)$. Si $y \in \iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+1})$, la strate $[\mathcal{G}, n_F(s), -(k_F(s)+1), y]$ dans $A(V)$ est simple et équivalente à $[\mathcal{G}, n_F(s), -(k_F(s)+1), s]$ (4.3.6). Pour un tel y, soit dg_y la mesure de Haar sur $G_y \simeq GL(d, F[y])$ ($d[E : F] = N$) donnant volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de G_y i.e. la mesure de Haar sur G_y telle que $I^G(\cdot, y) = I^G(\cdot, y, dg_y)$ (égalité dans $D(G)$). Montrons qu'il existe une constante $\lambda = \lambda_G(s) > 0$ telle que pour tout $y \in \iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+1}) \cap \widetilde{G}$,

$$\mathrm{vol}(G_y(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \eta_G(y)\frac{dg}{dg_y}) = \lambda.$$

Fixons un $y \in \iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+1}) \cap \widetilde{G}$ et soient $E' = F[y] \subset A(V)$, $B' = A_{E'}(V)$ et $\mathcal{B}' = B' \cap \mathcal{G}$. Fixons aussi une uniformisante $\varpi_{E'}$ de E'. Soit

$$Sw(E'/F) = \frac{\delta(E'/F)}{f(E'/F)} - e(E'/F) + 1$$

l'exposant de Swan de l'extension E'/F. On a $f(E'/F) = f(E/F)$, $e(E'/F) = e(E/F)$ ([**BK**] 2.1.4) et la relation

$$e(\mathcal{B}' \,|\, \mathcal{O}_{E'}) = \frac{e(\mathcal{G}\,|\,\mathcal{O}_F)}{e(E'/F)}$$

implique l'égalité $e(\mathcal{B}' \mid \mathcal{O}_{E'}) = 1$. Soit $p_{E'} : A(V) \to B'$ la projection orthogonale relativement à l'accouplement non dégénéré $(x_1, x_2) \mapsto \mathrm{tr}_{A(V)/F}(x_1x_2)$ sur $A(V)$ où $\mathrm{tr}_{A(V)/F}$ désigne la trace usuelle. L'application

$$A(V) \to B',\ g \mapsto f(g) = \varpi_{E'}^{Sw(E'/F)} p_{E'}(g)$$

est une *corestriction modérée* sur $A(V)$ relative à E'/F ([**BK**] 1.3). Soient $A_y = 1 - \mathrm{Ad}y^{-1} : A(V) \to A(V)$ et $k_1 = k_F(s) + n_F(s) \geq 0$. Pour $m \in \mathbf{Z}$, on a la suite exacte courte ([**BK**] 1.4.10)

$$0 \to J_{\mathcal{B}'}^m \backslash J_{\mathcal{B}'}^m \mathcal{N}_{k_F(s)}(y, \mathcal{G}) \xrightarrow{A_y} J_{\mathcal{G}}^{m+k_1} \xrightarrow{f} J_{\mathcal{B}'}^{m+k_1} \to 0. \tag{4.5.2}$$

Pour $m \in \mathbf{Z}$, on a $J_{\mathcal{B}'}^m \mathcal{N}_{k_F(s)}(y, \mathcal{G}) = J_{\mathcal{B}}^m \mathcal{N}(\mathcal{G})$ ([**BK**] 2.1.3), donc en particulier $J_{\mathcal{B}'} \mathcal{N}_{k_F(s)}(y, \mathcal{G}) = J_{\mathcal{B}} \mathcal{N}(\mathcal{G}) = \mathcal{P}_E \mathcal{N}(\mathcal{G})$. Comme $|\det_{\mathrm{Lie}(G_y)\backslash \mathrm{Lie}(G)}(A_y)|_F = d_G(y)^2$ et $|\det_{\mathcal{B}}(f)|_F = q^{-f(E'/F)Sw(E'/F)d}$, de la suite exacte courte (4.5.2) pour $m = 1$, on déduit l'égalité

$$\begin{aligned} d_G(y)^2 \mathrm{vol}(G_y(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \frac{dg}{dg_y}) & \\ &= q^{-f(E'/F)Sw(E'/F)d} \mathrm{vol}(G_y(1+J_{\mathcal{G}}^{k_1+1}), \frac{dg}{dg_y}). \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \mu &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{vol}(G_y(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \frac{dg}{dg_y})\mathrm{vol}(G_y(1+J_{\mathcal{G}}^{k_1+1})), \frac{dg}{dg_y}) \\ &= \frac{[\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}^{k_1}]}{\mathrm{vol}(1+J_{\mathcal{B}'}, dg_y)^2} \frac{\mathrm{vol}(1+J_{\mathcal{G}}, dg)^2}{[\mathcal{G} : \mathcal{N}(\mathcal{G})][\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}^{k_1}]}. \end{aligned}$$

Comme $[\mathcal{B}' : J_{\mathcal{B}'}^{k_1}] = [\mathcal{B} : J_{\mathcal{B}}^{k_1}]$ et $\mathrm{vol}(1 + J_{\mathcal{B}'}, dg_y) = [U(\mathcal{B}') : U^1(\mathcal{B}')]^{-1} = [U(\mathcal{B}) : U^1(\mathcal{B})]^{-1}$, on a

$$\mu = [\mathcal{B} : J_{\mathcal{B}}^{k_1}][U(\mathcal{B}) : U^1(\mathcal{B})]^2 \frac{\mathrm{vol}(U^1(\mathcal{G}), dg)^2}{[\mathcal{G} : \mathcal{N}(\mathcal{G})][\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}^{k_1}]}.$$

En remplaçant $\mathrm{vol}(G_y(1 + J_{\mathcal{G}}^{k_1+1})), \dfrac{dg}{dg_y})$ par $\mathrm{vol}(G_y(1 + \mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \dfrac{dg}{dg_y})^{-1}\mu$ dans l'égalité précédant la définition de μ, on obtient

$$d_G(y)^2 \,\mathrm{vol}(G_y(1 + \mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \tfrac{dg}{dg_y})^2 = q^{-f(E'/F)Sw(E'/F)d}\mu$$

d'où

$$\mathrm{vol}(G_y(1 + \mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \eta_G(y)\frac{dg}{dg_y}) = \eta_G(y) d_G(y)^{-1} q^{-\frac{1}{2}f(E'/F)Sw(E'/F)d}\mu^{\frac{1}{2}}.$$

Or $\eta_G(y)d_G(y)^{-1} = \delta_G(y)$ et $\delta_G(y)q^{-\frac{1}{2}f(E'/F)Sw(E'/F)d} = q^{\frac{1}{2}f(e-1)d}$, d'où

$$\mathrm{vol}(G_y(1 + \mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \eta_G(y)\frac{dg}{dg_y}) = q^{\frac{1}{2}f(E/F)(e(E/F)-1)d}\mu^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda.$$

En définitive, pour tout $y \in \iota_W(s + J_{\mathcal{A}}^{k_F(s)+1}) \cap \widetilde{G}$, on a

$$\eta_G(y) I^G(\cdot, y) = \lambda J^G(\cdot, y)$$

(égalité dans $D(G)$). D'où la proposition (4.5.1). □

CHAPITRE 5

INDÉPENDANCE LINÉAIRE DES GERMES

5.1. Introduction

Dans cette section, on donne une preuve de l'indépendance linéaire des germes au voisinage de n'importe quel élément semi-simple de G (5.6.1). Le résultat n'était jusqu'alors connu que pour les éléments absolument semi-simples (cf. [**BDKV**] Appendice 1). Fixé un élément $s \in G$ semi-simple que l'on peut supposer irréductible grâce à la proposition (3.5.5), l'idée consiste à réduire les intégrales orbitales sur G des fonctions $f \in C_c^\infty(G)$ au voisinage de s dans G à des intégrales orbitales sur $H = G_s$ de fonctions $\phi_f \in C_c^\infty(H)$ au voisinage de s dans H, pour ensuite appliquer la propriété suivante : pour tout sous-groupe de Cartan elliptique Γ de H, il existe une constante $c_\Gamma(H) \neq 0$ telle que $[I^H_{\{s\}}]_s^{\Gamma \cap H_r} = c_\Gamma(H)$ ([**R 2**] en caractéristique nulle pour tout groupe semi-simple connexe défini sur F, [**He**] Appendice 3 en toute caractéristique pour $GL(n)$). Comme la preuve s'appuie sur un passage à la limite combinant la propriété ci-dessus et la formule d'homogénéité des germes au voisinage d'un élément central (3.6.2), il suffit de réduire « suffisamment » d'intégrales orbitales semi-simples régulières sur G à des intégrales orbitales elliptiques sur G_s. Cette partie réduction d'intégrales orbitales repose en caractéristique nulle sur le Lemma 19 de [**HC 1**] (cf. aussi [**R 1**] §1, Lemma 1), lemme topologique dont la démonstration n'est pas utilisable si s est inséparable. On a donc finalement opté pour une approche légèrement différente. La submersion utilisée dans [**Le 2**] permet de réduire toute distribution AdG-invariante T sur G à une distribution AdH-invariante θ_T sur H de support contenu dans un voisinage (indépendant de T) de 1 dans H compact modulo H-conjugaison. En fait, seule la restriction de T à un petit voisinage ouvert AdG-invariant de s dans G joue un rôle pertinent dans la réduction. On est donc ramenés à la question suivante : si l'on prend pour T une intégrale orbitale sur G de support suffisamment concentré sur $O_G(s)$, la distribution θ_T ainsi obtenue est-elle une intégrale orbitale sur H ? C'est la réponse à cette question — réponse partielle puisque seulement pour des intégrales orbitales T bien particulières — qui occupe l'essentiel de cette section.

5.2. Rappels sur les éléments minimaux de Bushnell et Kutzko

Soit F'/F une extension finie de F. On rappelle la notion d'*élément minimal sur* F' ([**BK**] 1.4.14). Soit K/F' une extension finie de F' et soit $b \in K$ tel que $K = F'[b]$. Posons $\nu = \nu_K(b)$, et choisissons une uniformisante $\varpi_{F'}$ de F'. On dit que b est minimal sur F' si

$$\begin{cases} (\nu, e(K/F')) = 1 \\ \varpi_{F'}^{-\nu} b^{e(K/F')} + \mathcal{P}_K \text{ engendre l'extension de corps résiduels } \kappa_K/\kappa_{F'} \end{cases}.$$

En fait, on utilisera surtout le critère suivant ([**BK**] Prop. 1.4.15) : $\nu \leq k_{F'}(b)$ avec égalité si et seulement si b est minimal sur F'. Rappelons aussi la notion de *polynôme caractéristique attaché à une strate fondamentale* $[\mathcal{G}, r, r-1, b]$ dans $A_{F'}(V')$ où V' est un F'-espace vectoriel de dimension finie N'. Posons

$$y_b = b^{e/g} \varpi_{F'}^{r/g} + J_{\mathcal{G}}$$

où $e = e(\mathcal{G} \mid \mathcal{O}_{F'})$ et $g = (e, r)$. En tant qu'élément de $\mathcal{G}/J_{\mathcal{G}}$, y_b ne dépend que de la classe d'équivalence de la strate $[\mathcal{G}, r, r-1, b]$ dans $A_{F'}(V')$ (et pas du choix de $\varpi_{F'}$). Soit $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ la chaîne de $\mathcal{O}_{F'}$-réseaux dans $A_{F'}(V')$ attachée à $\mathcal{G}$. On a

$$\mathcal{G}/J_{\mathcal{G}} = \prod_{i=0}^{e-1} \mathrm{End}_{\kappa_{F'}}(L_i/L_{i+1}) \subset \mathrm{End}_{\kappa_{F'}}(L_0/L_e).$$

Soit alors $\phi_b(T) \in \kappa_{F'}[T]$ le polynôme caractéristique de y_b vu comme $\kappa_{F'}$-endomorphisme de L_0/L_e ; de manière équivalente, $\phi_b(T)$ est la réduction modulo $\mathcal{P}_{F'}$ du polynôme caractéristique de $b^{e/g}\varpi_{F'}^{r/g}$ vu comme F'-endomorphisme de V'. Comme pour y_b, ϕ_b ne dépend que de la classe d'équivalence de la strate $[\mathcal{G}, r, r-1, b]$ dans $A_{F'}(V')$. Si $[\mathcal{G}, r, r-1, b]$ est pure, alors $\phi_b = \phi^{N'/d}$ ($d = \deg(\phi)$) pour un polynôme $\phi \in \kappa_{F'}[T]$ irréductible sur $\kappa_{F'}$, et d divise $f(F'[b]/F')$. Si de plus $[\mathcal{G}, r, r-1, b]$ est simple, alors $d = f(F'[b]/F')$. Notons que si $[\mathcal{G}, r, r-1, b]$ est pure, alors $[\mathcal{G}, r, r-1, b]$ est simple si et seulement si b est minimal sur F' (on a $e_b(\mathcal{G})k_{F'}(b) = k_0(b, \mathcal{G}) \geq \nu_{\mathcal{G}}(b) = e_b(\mathcal{G})\nu_{F'[b]}(b)$).

Si F' et F'' sont deux extensions finies de F d'indice de ramification $e' = e(F'/F)$ et $e'' = e(F''/F)$, on note encore $\nu_{F'}$ la valuation sur F'' donnée par $\nu_{F'} = \frac{e'}{e''}\nu_{F''}$.

5.3. Lemmes techniques

Le premier lemme découle directement d'un cas particulier de (4.3.6).

(5.3.1) LEMME. — *Soit $[\mathcal{G}, n, r, \alpha]$ une strate simple dans $A(V)$ tel que $F[\alpha]$ est un sous-corps maximal de $A(V)$ et soit $\alpha' \in \alpha + J_{\mathcal{G}}^{-r}$. Alors la strate $[\mathcal{G}, n, r, \alpha']$ est simple et $F[\alpha']$ est un sous-corps maximal de $A(V)$.*

Démonstration. — D'après (4.3.6), la strate $[\mathcal{G}, n, r, \alpha']$ est simple et équivalente à $[\mathcal{G}, n, r, \alpha]$ (on a $A(F[\alpha]) \simeq A(V)$), d'où $f(F[\alpha']/F) = f(F[\alpha]/F)$ et $e(F[\alpha']/F) = e(F[\alpha]/F)$ (**[BK]** 2.1.4). Donc $F[\alpha']$ est un sous-corps maximal de $A(V)$. □

Le deuxième lemme est un résultat technique sur les *raffinements* d'une strate simple, cf. **[BK]** 2.2. Soit une strate simple $[\mathcal{G}, n, r, s]$ dans $A(V)$. Soient $E = F[s]$, $B = A_E(V)$ et $\mathcal{B} = B \cap \mathcal{G}$. On fixe aussi une *corestriction modérée* (**[BK]** Def. 1.3.3) $s_{E/F}$ sur $A(V)$ relative à E/F. Soit $\alpha \in J_{\mathcal{G}}^{-r}$ tel que $[\mathcal{B}, r, r-1, s_{E/F}(\alpha)]$ est une strate simple dans B et $E_1 = E[s_{E/F}(\alpha)]$ $(= F[s, s_{E/F}(\alpha)])$ est un sous-corps maximal de B. Alors (**[BK]** Prop. 2.2.3), $[\mathcal{G}, n, r-1, s+\alpha]$ est une strate simple dans $A(V)$, $K = F[s+\alpha]$ est un sous-corps maximal de $A(V)$ (donc $e(K/F) = e(\mathcal{G}\,|\,\mathcal{O}_F) = e(E_1/F)$ et $f(K/F) = f(E_1/F)$) et

$$k_F(s+\alpha) = \begin{cases} -r = k_E(s_{E/F}(\alpha)) & \text{si } s_{E/F}(\alpha) \notin E \\ k_0(s, \mathcal{G}) = k_F(s) & \text{si } s_{E/F}(\alpha) \in E \end{cases}.$$

Sous ces hypothèses, on a le lemme suivant.

(5.3.2) LEMME. — *Soit $s_{E_1/E}$ une corestriction modérée sur B relative à E_1/E. Il existe une corestriction modérée $s_{K/F}$ sur $A(V)$ relative à K/F telle que pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et tout $g \in J_{\mathcal{G}}^i$,*

$$s_{K/F}(g) \equiv s_{E_1/E} \circ s_{E/F}(g) \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1}}.$$

Démonstration. — Posons $s_{E_1/F} = s_{E_1/E} \circ s_{E/F}$. D'après **[BK]** Def. 1.3.3, $s_{E_1/F}$ est une corestriction modérée sur $A(V)$ relative à E_1/F. Si $E_1 = E = B$ (i.e. si $s_{E/F}(\alpha) \in E$), alors les strates $[\mathcal{G}, n, r, s]$ et $[\mathcal{G}, n, r, s+\alpha]$ sont simples et équivalentes (5.3.1). Par conséquent (**[BK]** 2.4.12) $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_{E_1}$ ont même image dans $\mathcal{G}/J_{\mathcal{G}}$ et il existe des corestrictions modérées $s'_{K/F}$ et $s'_{E_1/F}$ sur $A(V)$ relatives à K/F et E_1/F respectivement telles que pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et tout $g \in J_{\mathcal{G}}^i$,

$$s'_{K/F}(g) \equiv s'_{E/F}(g) \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1}}.$$

Comme $s_{E_1/F} = \eta s'_{E_1/F}$ pour un $\eta \in \mathcal{O}_{E_1}^\times$, si $\xi \in \mathcal{O}_K^\times$ est tel que $\xi \equiv \eta \pmod{J_{\mathcal{G}}}$, alors $s_{K/F} = \xi s'_{K/F}$ est une corestriction modérée sur $A(V)$ relative à K/F qui satisfait les relations de congruence voulues.

On suppose désormais que $E_1 \neq E$. Commençons par montrer que pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, $\mathcal{P}_K^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1} = \mathcal{P}_{E_1}^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1}$. Notons a_s l'application $A(V) \to$

$A(V)$, $g \mapsto sg - gs$ et posons $k_0 = k_0(s, \mathcal{G})$. Soit $g \in \mathcal{P}_K^i \mathcal{N}_{1-r}(s + \alpha, \mathcal{G})$ pour un $i \in \mathbf{Z}$. On a

$$(s + \alpha)g - g(s + \alpha) \equiv 0 \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1-r}}.$$

Comme $g \in J_{\mathcal{G}}^i$ et $\alpha \in J_{\mathcal{G}}^{-r}$, cela implique que $a_s(g) \in J_{\mathcal{G}}^{i-r}$. Grâce à [**BK**] 1.4.10, il est possible d' écrire g sous la forme $g = \delta + y$ avec $\delta \in J_{\mathcal{B}}^i$ et $y \in J_{\mathcal{B}}^{i-r-k_0} \mathcal{N}_{k_0}(s, \mathcal{G})$. Alors,

$$0 \equiv (s + \alpha)(\delta + y) - (\delta + y)(s + \alpha) \equiv a_s(y) + \alpha\delta - \delta\alpha \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1-r}}$$

(les termes αy et $y\alpha$ sont dans $J_{\mathcal{G}}^{i+1-r}$ car $-r - k_0 > 0$). Par conséquent (en appliquant $s_{E/F}$) $s_{E/F}(\alpha)\delta - \delta s_{E/F}(\alpha) \in J_{\mathcal{B}}^{i+1-r}$, et puisque $k_0(s_{E/F}(\alpha), \mathcal{B}) = -r$, $\delta \in P_{E_1}^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1}$. En définitive, on a montré l'inclusion

$$\mathcal{P}_K^i \mathcal{N}_{1-r}(s + \alpha, \mathcal{G}) + J_{\mathcal{G}}^{i+1} \subset \mathcal{P}_{E_1}^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1}.$$

Par ailleurs, $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{N}_{1-r}(s + \alpha, \mathcal{G})$ d'où

$$\mathcal{P}_K^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1} \subset \mathcal{P}_K^i \mathcal{N}_{1-r}(s + \alpha, \mathcal{G}) + J_{\mathcal{G}}^{i+1}.$$

Or $[\mathcal{P}_K^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1} : J_{\mathcal{G}}^{i+1}] = [\mathcal{P}_K^i : \mathcal{P}_K^{i+1}]$, $[\mathcal{P}_{E_1}^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1} : J_{\mathcal{G}}^{i+1}] = [\mathcal{P}_{E_1}^i : \mathcal{P}_{E_1}^{i+1}]$, et puisque $f(K/F) = f(E_1/F)$,

$$[\mathcal{P}_K^i : \mathcal{P}_K^{i+1}] = [\mathcal{P}_{E_1}^i : \mathcal{P}_{E_1}^{i+1}].$$

Par conséquent $\mathcal{P}_K^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1} = \mathcal{P}_{E_1}^i + J_{\mathcal{G}}^{i+1}$.

Ensuite, choisissons une corestriction modérée $s_{K/F}$ sur $A(V)$ relative à K/F et traitons le cas $i = 0$. Notons $\gamma = s + \alpha$ et a_γ l'application $A(V) \to A(V)$, $g \mapsto \gamma g - g\gamma$. Comme $\mathcal{O}_K + J_{\mathcal{G}} = \mathcal{O}_{E_1} + J_{\mathcal{G}}$, l'application $\bar{s}_{K/F} : \mathcal{G}/J_{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}/J_{\mathcal{G}}$ déduite de $s_{K/F}$ par passage au quotient est un endomorphisme de $(\kappa_{E_1} \times \kappa_{E_1})$-bimodule, de même image $\mathcal{O}_{E_1} + J_{\mathcal{G}}$ que l'application $\bar{s}_{E_1/F} : \mathcal{G}/J_{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}/J_{\mathcal{G}}$. Montrons que $\bar{s}_{K/F}$ et $\bar{s}_{E_1/F}$ ont même noyau. Comme $s_{E/F}(\alpha) \notin E$, $k_0(\gamma, \mathcal{G}) = k_0(s_{E/F}(\alpha), \mathcal{B}) = -r$ et le noyau de $\bar{s}_{K/F}$ coïncide avec $a_\gamma(\mathcal{P}_K^r \mathcal{N}_{-r}(\gamma, \mathcal{G})) + J_{\mathcal{G}}$ ([**BK**] 1.4.10). Les strates $[\mathcal{G}, n, r, \gamma]$ et $[\mathcal{G}, n, r, s]$ sont pures et équivalentes, donc $P_K^r \mathcal{N}_{-r}(\gamma, \mathcal{G}) = J_{\mathcal{B}}^r \mathcal{N}_{-r}(s, \mathcal{G})$ ([**BK**] Prop. 2.1.3), et puisque $-r - k_0 > 0$, $J_{\mathcal{B}}^r \mathcal{N}_{-r}(s, \mathcal{G}) = J_{\mathcal{B}}^r + J_{\mathcal{B}}^{-k_0} \mathcal{N}_{k_0}(s, \mathcal{G})$ ([**BK**] 1.4.9). Soient $\delta \in J_{\mathcal{B}}^r$ et $y \in J_{\mathcal{B}}^{-k_0} \mathcal{N}_{k_0}(s, \mathcal{G})$. On a

$$a_\gamma(\delta + y) \equiv a_s(y) + \alpha\delta - \delta\alpha \pmod{J_{\mathcal{G}}}$$

car $\alpha y - y\alpha \in J_{\mathcal{G}}^{-r-k_0}$ et $-r - k_0 > 0$, d'où

$$s_{E/F}(a_\gamma(\delta + y)) \equiv s_{E/F}(\alpha)\delta - \delta s_{E/F}(\alpha) \pmod{J_{\mathcal{B}}}$$

et

$$s_{E_1/E} \circ s_{E/F}(a_\gamma(\delta + y)) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_{E_1}}.$$

En définitive, on a montré l'inclusion

$$\ker(\bar{s}_{K/F}) \subseteq \ker(\bar{s}_{E_1/F}).$$

Comme $\ker(\bar{s}_{K/F})$ et $\ker(\bar{s}_{E_1/F})$ ont même dimension en tant qu'espaces vectoriels à gauche (ou a droite) sur κ_{E_1}, cette inclusion est une égalité. Par conséquent $\bar{s}_{K/F}$ et $\bar{s}_{E_1/F}$ diffèrent d'un κ_{E_1}-automorphisme de κ_{E_1}, i.e. $\xi s_{K/F}$ coïncide avec $s_{E_1/F}$ sur $\mathcal{G}/J_{\mathcal{G}}$ pour un $\xi \in \mathcal{O}_K^\times$. Comme $\xi s_{K/F}$ est encore une corestriction modérée sur $A(V)$ relative à K/F, on a prouvé le résultat pour $i = 0$.

Traitons maintenant le cas général. Choisissons une corestriction modérée $s_{K/F}$ sur $A(V)$ relative à K/F telle que $s_{K/F}(g) \equiv s_{E_1/F}(g) \pmod{J_{\mathcal{G}}}$ pour tout $g \in \mathcal{G}$. Fixons un entier $i \in Z$ et montrons que, pour tout $g \in J_{\mathcal{G}}^i$, $s_{K/F}(g) \equiv s_{E_1/F}(g) \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1}}$. Soient $\delta \in \mathcal{P}_K^i$ et $y \in \mathcal{G}$, et soit $\delta' \in \mathcal{P}_{E_1}^i$ tel que $\delta \equiv \delta' \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1}}$. Puisque $s_{K/F}$ et $s_{E_1/F}$ coïncident sur $\mathcal{G}/J_{\mathcal{G}}$, on a

$$s_{K/F}(\delta y) + J_{\mathcal{G}}^{i+1} = \delta s_{K/F}(y) + J_{\mathcal{G}}^{i+1} = \delta' s_{E_1/F}(y) + J_{\mathcal{G}}^{i+1}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \delta' s_{E_1/F}(y) + J_{\mathcal{G}}^{i+1} &= s_{E_1/F}(\delta' y) + J_{\mathcal{G}}^{i+1} \\ &= s_{E_1/F}(\delta y) + J_{\mathcal{G}}^{i+1} \end{aligned}$$

car $\delta y \equiv \delta' y \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1}}$. Comme $J_{\mathcal{G}}^i = \varpi_K^i \mathcal{G}$ pour une uniformisante ϖ_K de K, tout élément de $J_{\mathcal{G}}^i$ est de la forme δy ($\delta \in \mathcal{P}_K^i$, $y \in \mathcal{G}$). Par conséquent $s_{K/F}$ et $s_{E_1/F}$ coïncident sur $J_{\mathcal{G}}^i / J_{\mathcal{G}}^{i+1}$, ce qui achève la preuve du lemme (5.3.2). $\square$

Le lemme suivant est une simple généralisation du Lemme 1.2.2 de [**Le 3**]. Comme l'a très justement remarqué A. Genestier, la preuve du dit Lemme 1.2.2 n'est pas complète : il faut, pour pouvoir appliquer le lemme de Nakayama, montrer au préalable que l'image de $\pi_m + \eta_m$ est bien un réseau (η_m n'est pas linéaire). La preuve que nous donnons ici, légèrement differente, répare cette omission. Nous n'utiliserons pas directement ce lemme par la suite, mais seulement le corollaire qui suit.

(5.3.3) LEMME. — *Soient X, Y deux $\mathcal{O}$-modules libres de rang fini, et $\mathcal{L} = \{X_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ une chaîne de $\mathcal{O}$-réseaux dans $X_F = F \otimes_{\mathcal{O}} X$ telle que $X_0 = X$. Soit $\phi : X \to Y$ une application de la forme $\pi + \eta$ pour des applications $\pi, \eta : X \to Y$ telles que π est $\mathcal{O}$-linéaire et surjective, et η satisfait la propriété : pour tous $x, x' \in X$, $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, la condition $x \equiv x' \pmod{X_r}$ implique que $\eta(x) \equiv \eta(x') \pmod{\pi(X_{r+1})}$.*

Alors il existe une application injective $\beta : X \to X$ telle que $\pi \circ \beta = \phi$. Si de plus η est différentiable (resp. analytique), alors il existe une application *différentiable (resp. analytique) bijective $\beta : X \to X$ telle que $\pi \circ \beta = \phi$ et $|\mathrm{Jac}_x(\beta)|_F = 1$ $(x \in X)$.*

Démonstration. — Soit $e \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ la $\mathcal{O}$-période de la chaîne $\mathcal{L}$. Pour $i \in \mathbf{Z}$, posons $Y_i = \pi(X_i)$. Ainsi $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ est une suite de $\mathcal{O}$-réseaux dans $F \otimes_{\mathcal{O}} Y$ telle que $Y_0 = Y$, $Y_{i+1} \subset Y_i$ et $Y_{i+e} = \varpi Y_i$ $(i \in \mathbf{Z})$. Soit M un $\mathcal{O}$-réseau dans X_F tel que $\varpi X = X_e \subset M \subset X$ et pour $i = 0, \dots, e-1$, les κ_F-espaces vectoriels $(M \cap X_i)/X_e$ et $(\pi^{-1}(Y_e) \cap X_i)/X_e$ sont supplémentaires dans X_i/X_e. Ainsi, $\ker \pi \cap M \subset \varpi X$ et $\pi(M \cap X_i) = Y_i$ $(i = 0, \dots, e-1)$. Puisque Y est $\mathcal{O}$-projectif, la suite exacte courte de $\mathcal{O}$-modules

$$0 \to \ker \pi \cap M \to M \xrightarrow{\pi} Y \to 0$$

est scindée. Soit $\mu : Y \to M$ une section de π i.e. une application $\mathcal{O}$-linéaire telle que $\pi \circ \mu = \mathrm{id}_Y$. Pour $i = 0, \dots, e-1$, π induit, par restriction et passage au quotient, un isomorphisme de κ_F-espaces vectoriels $(M \cap X_i)/X_e \to Y_i/Y_e$, par suite $\mu(Y_i) \subset M \cap X_i \subset X_i$. Donc pour $i \in \mathbf{Z}$, $\mu(Y_i) \subset X_i$. Soit $|\ |_{\mathcal{L}}$ la F-norme sur X_F associée à $\mathcal{L}$ i.e. l'application $X_F \to \mathbf{R}$ définie par

$$|x|_{\mathcal{L}} = q^{-\frac{1}{e}\max\{i\in\mathbf{Z} : x \in X_i\}} \quad (x \in X_F).$$

Pour x, $y \in X_F$, $t \in F$, on a

(i) $|tx|_{\mathcal{L}} = |t|_F |x|_{\mathcal{L}}$,

(ii) $|x+y|_{\mathcal{L}} \leq \max\{|x|_{\mathcal{L}}, |y|_{\mathcal{L}}\}$,

(iii) $|x|_{\mathcal{L}} = 0$ si et seulement si $x = 0$.

En particulier, (ii) entraîne que $|x+y|_{\mathcal{L}} = \max\{|x|_{\mathcal{L}}, |y|_{\mathcal{L}}\}$ dès que $|x|_{\mathcal{L}} \neq |y|_{\mathcal{L}}$.

Soit $\beta\,(= \beta_\mu) : X \to X$ l'application définie par $\beta = \mathrm{id}_X + \mu \circ \eta$. Pour $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} \pi \circ \beta(x) &= (\pi + \eta)(x) \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

De plus, pour x, $y \in X$, on a $|\mu \circ \eta(x) - \mu \circ \eta(y)|_{\mathcal{L}} \leq q^{-\frac{1}{e}} |x - y|_{\mathcal{L}}$ donc

$$\begin{aligned} |\beta(x) - \beta(y)|_{\mathcal{L}} &= \max\{|x-y|_{\mathcal{L}}, |\mu \circ \eta(x) - \mu \circ \eta(y)|_{\mathcal{L}}\} \\ &= |x - y|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

En particulier, β est injective.

Si de plus η est différentiable (resp. analytique) alors β est différentiable (resp. analytique), et puisque $\mu \circ \eta$ est lipschitzienne de rapport < 1, on a $\mathrm{Jac}_x(\beta) \in U^1(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}^\times$ donc $|\mathrm{Jac}_x(\beta)|_F = 1$ $(x \in X)$. En particulier, β est ouverte et la formule de changement de variables dans les intégrales entraîne que

$$\mathrm{vol}(\beta(X), dx) = \mathrm{vol}(X, dx)$$

où dx est une mesure de Haar sur X. Or $Z = \beta(X)$ est fermé dans X (X est compact et β est continue), d'où $\mathrm{vol}(X - Z, dx) = 0$ si et seulement si $X - Z = \varnothing$. Donc $Z = X$ i.e. β est surjective. □

(5.3.4) COROLLAIRE. — *Soit un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\zeta} & \mathcal{Y} \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\lambda \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

où $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sont des variétés ϖ-adiques (i.e. analytiques, séparées, de dimension finie, cf. **[HC 1]** *V, §2), X, Y des $\mathcal{O}$-modules libres de rang fini, et ζ, λ, α, ϕ des morphismes de variétés ϖ-adiques (i.e. applications analytiques). Soit $\mathcal{L} = \{X_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ une chaîne de $\mathcal{O}$-réseaux dans $X_F = F \otimes_{\mathcal{O}} X$ telle que $X_0 = X$. On suppose que*

(i) α, λ sont des isomorphismes,

(ii) ϕ est de la forme $\pi + \eta$ pour des applications π, $\eta : X \to Y$ telles que π est $\mathcal{O}$-linéaire et surjective, et η satisfait la propriété : pour tous x, $x' \in X$, $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, la condition $x \equiv x' \pmod{X_r}$ implique que $\eta(x) \equiv \eta(x') \pmod{\pi(X_{r+1})}$.

Alors ζ est une application surjective et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathcal{Y})$, on a

$$\int_X f \circ \zeta \circ \alpha^{-1}(x)dx = \int_X f \circ \lambda^{-1} \circ \pi(x)dx$$

où dx désigne une (quelconque) mesure de Haar sur X.

Démonstration. — D'après (5.3.3), il existe une application analytique bijective $\beta : X \to X$ telle que $\pi\circ\beta = \phi$ et $|\mathrm{Jac}_x(\beta)|_F = 1$ ($x \in X$). Donc ϕ est surjective, et $\zeta = \lambda^{-1}\circ\phi\circ\alpha$ est surjective. La seconde assertion n'est autre que la formule de changement de variables dans les intégrales ($\zeta\circ\alpha^{-1} = \lambda^{-1}\circ\pi\circ\beta$). □

5.4. Descente centrale d'intégrales orbitales sur G

Soient E/F, $E \neq F$ une extension de F contenue dans $A(V)$, $B = \mathrm{End}_E(V)$ le commutant de E dans V et $H = B^\times = \mathrm{Aut}_E(V)$. Soit $s \in E$ tel que $E = F[s]$. On a donc $H = G_s$. On rappelle la construction et les résultats de **[Le 2]**. Fixons une E-base $\{w_k\}$ ($k = 1, \ldots, d$) de V et notons $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}$ la chaîne

$\{L_{\mathrm{m},i}\}_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{O}_E$-réseaux dans V définie par

$$L_{\mathrm{m},dj+k} = \mathcal{P}_E^j(\mathcal{O}_E w_1 + \mathcal{O}_E w_2 + \cdots + \mathcal{O}_E w_{d-k} + \mathcal{P}_E w_{d-k+1} + \cdots + \mathcal{P}_E w_d)$$
$$(j \in \mathbf{Z},\ k \in \{0, \ldots, d-1\})$$

et $\mathcal{L}_\mathrm{M}$ la chaîne $\{L_{\mathrm{M},i}\}_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{O}_E$-réseaux dans V définie par

$$L_{\mathrm{M},i} = \mathcal{P}_E^i(\mathcal{O}_E w_1 + \mathcal{O}_E w_2 + \cdots + \mathcal{O}_E w_d).$$

Ainsi, $\mathcal{B}_\mathrm{m} = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{L}_\mathrm{m})$ est un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire minimal dans B, $\mathcal{B}_\mathrm{M} = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{L}_\mathrm{M})$ est un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire maximal dans B et pour tout $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire $\mathcal{B}$ dans B tel que $\mathcal{B}_\mathrm{m} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\mathrm{M}$, $\{w_k\}$ est une $\mathcal{O}_E$-base de la chaîne de $\mathcal{O}_E$-réseaux attachée à $\mathcal{B}$ (si l'on utilise $\{w_k\}$ pour identifier B à $M(d, E)$, les $\mathcal{O}_E$-ordres héréditaires $\mathcal{B}$ dans B tels que $\mathcal{B}_\mathrm{m} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\mathrm{M}$ s'identifient aux $\mathcal{O}_E$-ordres héréditaires standards dans $M(d, E)$ décrits dans [**BK**] 2.5). Posons $\mathcal{G}_\mathrm{m} = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{L}_\mathrm{m})$ et $\mathcal{G}_\mathrm{M} = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{L}_\mathrm{M})$. Soit W le sous-F-espace vectoriel de V engendré par $w_1, \ldots, w_d$ et soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$. Le choix de W induit une (W, E)-décomposition $\tau_W : A(E) \otimes_E B \overset{\simeq}{\to} A(V)$ (4.3.2). De plus, pour tout $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{G}$ dans $A(V)$ normalisé par $E^\times$ et tel que $\mathcal{G}_\mathrm{m} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_\mathrm{M}$, on a $\mathcal{B}_\mathrm{m} \subset \mathcal{B} = B \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{B}_\mathrm{M}$ et l'application τ_W induit, par restriction pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, un isomorphisme de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodules $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_E} J^i_\mathcal{B} \simeq J^i_\mathcal{G}$ (4.3.3).

Fixons une corestriction modérée $\widetilde{s}_{E/F}$ sur $A(E)$ relative à E/F ([**BK**] Def. 1.3.3) et un élément $\widetilde{x} \in \mathcal{A}$ tel que $\widetilde{s}_{E/F}(\widetilde{x}) = 1$. Comme $\widetilde{s}_{E/F}(J_\mathcal{A}) = \mathcal{P}_E$, on a nécessairement $\nu_\mathcal{A}(x) = 0$. Soit $s_{E/F}$ la corestriction modérée sur $A(V)$ relative à E/F donnée en terme de la (W, E)-décomposition τ_W par $s_{E/F} = \widetilde{s}_{E/F} \otimes_E \mathrm{id}_B$ ([**BK**] Prop. 1.3.9) et soit $x = \tau_W(\widetilde{x} \otimes_E 1)$. Ainsi, on a $x \in \mathcal{G}_\mathrm{m}$ et $s_{E/F}(x) = 1$.

Soit $C = \{sg - gs : g \in A(V)\}$. Comme $A(V) = C \oplus xB$, l'application

$$\delta : G \times xB \to A(V),\ (g, xb) \mapsto g(s + xb)g^{-1}$$

est submersive au point $(1, 0)$. Par suite, si c est un entier suffisamment grand, $s + xJ^c_{\mathcal{B}_\mathrm{M}} \subset G$ et l'application

$$G \times xJ^c_{\mathcal{B}_\mathrm{M}} \to G,\ (g, xb) \mapsto g(s + xb)g^{-1}$$

est partout submersive. Fixons un tel entier $c_0 \geq \max(1, k_F(s) + 1)$. Soient dh la mesure de Haar sur H telle que $\mathrm{vol}(U(\mathcal{B}_\mathrm{M}), dh) = 1$ et db la mesure de Haar sur B telle que $\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}, db) = [U(\mathcal{B}_\mathrm{M}) : U^1(\mathcal{B}_\mathrm{M})]^{-1}$ i.e. la mesure de Haar sur B telle que $\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}, db) = \mathrm{vol}(U^1(\mathcal{B}_\mathrm{M}), dh)$; ainsi, pour $m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, on a $\mathrm{vol}(J^m_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}, db) = \mathrm{vol}(U^m(\mathcal{B}_\mathrm{M}), dh)$. Alors il existe une unique application linéaire surjective ([**HC 1**] Theorem 11)

$$C^\infty_c(G \times xJ^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}) \to C^\infty_c(\delta(G \times xJ^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}})),\ \phi \mapsto \phi^\delta$$

telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G \times xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co})$ et toute fonction $\Psi \in C_c^\infty(\delta(G \times xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}))$,

$$\int_G \int_B \phi(g, xb)\Psi \circ \delta(g, xb) dg db = \int_G \phi^\delta(g)\Psi(g)dg.$$

De plus ([**Le 2**] Lemma 2.3.1), pour toute distribution AdG-invariante T sur G, il existe une unique distribution ϑ_T sur $xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(\delta(G \times xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}))$,

$$\langle \vartheta_T, \phi_\delta \rangle = \langle T, \phi^\delta \rangle$$

où $\phi_\delta \in C_c^\infty(xJ_{\mathcal{B}_M}^{co})$ est la fonction donnée par

$$\phi_\delta(xb) = \int_G \phi(g, xb)dg \quad (b \in J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}).$$

Clairement, si deux distributions AdG-invariantes T_1, T_2 sur G coïncident sur l'ouvert $\delta(G \times xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co})$ de G, alors $\vartheta_{T_1} = \vartheta_{T_2}$. En particulier $\vartheta_T = 0$ pour toute distribution AdG-invariante T sur G telle que $\mathrm{Supp}(T) \cap \delta(G \times xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}) = \varnothing$. La réduction d'une distribution AdG-invariante T sur G à une distribution AdH-invariante sur $\mathrm{Ad}H(J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co})$ est un peu plus délicate. Toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathrm{Ad}H(J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}))$ se décompose en $\varphi = \sum_{b \in H} \varphi_b$ où $\varphi_b \in C_c^\infty(bJ_{\mathcal{B}_M}^{co}b^{-1})$, $\varphi_b = 0$ pour presque tout $b \in H$; on pose alors

$$\langle \widetilde{\vartheta}_T, \varphi \rangle = \sum_{b \in H} \langle \vartheta_T, \mathrm{Ad}^* b^{-1}(\varphi_b) \circ s_{E/F}|_{xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}} \rangle$$

où $\mathrm{Ad}^*b^{-1}(\varphi_b) \in C_c^\infty(J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co})$ est la fonction donnée par

$$\mathrm{Ad}^*b^{-1}(\varphi_b)(b') = \varphi_b(bb'b^{-1}) \quad (b' \in J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co}).$$

La quantité $\langle \widetilde{\vartheta}_T, \varphi \rangle$ ne dépend pas de la décomposition $\varphi = \sum_{b \in H} \varphi_b$ choisie et la distribution $\widetilde{\vartheta}_T$ sur $\mathrm{Ad}H(J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co})$ ainsi définie est AdH-invariante, [**Le 2**] 2.3.

(5.4.1) REMARQUE. — Dans [**Le 2**], on travaille en fait avec l'application $G \times xB \to A(V)$, $(g, xb) \mapsto gs(1 + xb)g^{-1} = g(s + sxs^{-1}sb)g^{-1}$. Or $sxs^{-1} = \tau_W(s\widetilde{x}s^{-1} \otimes_E 1)$, $s\widetilde{x}s^{-1} \in \mathcal{A}$ car $s^{-1}\mathcal{A}s = \mathcal{A}$, et $\widetilde{s}_{E/F}(s\widetilde{x}s^{-1}) = s\widetilde{s}_{E/F}(\widetilde{x})s^{-1} = 1$. On passe donc d'une construction à l'autre en remplaçant $\widetilde{x}$ par $s\widetilde{x}s^{-1}$ et b par sb. Notons aussi que dans [**Le 2**], l'élément $\widetilde{x}$ est supposé inversible dans $A(E)$; nous n'avons pas retenu cette hypothèse puisqu'elle intervient seulement au cours de la preuve du Lemme 4.1 de [**Le 2**], lemme que nous n'utilisons pas ici.

Comme dans [**Le 2**] 2.3, fixons un voisinage ouvert fermé AdH-invariant Ω de 0 dans B tel que $\Omega \subset \mathrm{Ad}H(J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co})$. On a $\Omega = \mathrm{Ad}H(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{co})$. Soit $U_\Omega =$

$1+\Omega \subset H$ et soit η_Ω l'isomorphisme de variétés ϖ-adiques $\Omega \to U_\Omega$, $b \mapsto 1+b$. Pour toute distribution AdG-invariante T sur G, soit θ_T la distribution AdH-invariante sur H définie par

$$\begin{cases} \theta_T|_{H-U_\Omega} = 0 \\ \langle \theta_T, \phi \rangle = \langle \widetilde{\vartheta}_T, \phi \circ \eta_\Omega \rangle \quad \text{si } \phi \in C_c^\infty(U_\Omega) \end{cases}$$

Enfin, si $T = J^G(\cdot, \gamma)$ pour un $\gamma \in G$, on pose $\vartheta_\gamma = \vartheta_T$, $\widetilde{\vartheta}_\gamma = \widetilde{\vartheta}_T$ et $\theta_\gamma = \theta_T$.

(5.4.2) LEMME. — *Soient $b_1 \in J^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}$ et $\gamma_1 = s + xb_1$. Alors $\{s + xbb_1b^{-1} : b \in H,\ bb_2b^{-1} \in J^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}\} \subset O_G(\gamma_1)$.*

Démonstration. — Fixons un élément $b \in H$ tel que $b_2 = bb_1b^{-1} \in J^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}$ et montrons que $s + xb_2 \in O_G(\gamma_1)$. Pour chaque entier $m \geq c_0$, soit $\Lambda_m = J^m_{\mathcal{B}_\mathrm{M}} \cap b^{-1}J^m_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}b$ et soit φ_m la fonction caractéristique du voisinage ouvert compact $b_1 + \Lambda_m$ de b_1 dans B. Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G et soit f_Γ la fonction caractérisique de Γ divisée par vol(Γ, dg). Pour chaque entier $m \geq c_0$, on a

$$\langle \widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}, \varphi_m \rangle = J^G((f_\Gamma \otimes \mathbf{1}_{x(b_1+\Lambda_m)})^\delta, \gamma_1).$$

Pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G \times xJ^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}})$, la fonction ϕ^δ s'obtient localement en intégrant ϕ sur les fibres de la submersion δ ; en particulier, on a $\mathrm{Supp}(\phi^\delta) \subseteq \delta(\mathrm{Supp}(\phi))$ et si $\phi \geq 0$, alors $\mathrm{Supp}(\phi^\delta) = \delta(\mathrm{Supp}(\phi))$ et $\phi^\delta|_{\delta(\mathrm{Supp}(\phi))} > 0$. Puisque $\gamma_1 \in \delta(\Gamma \times x(b_1 + \Lambda_m))$, on a donc

$$J^G((f_\Gamma \otimes \mathbf{1}_{x(b_1+\Lambda_m)})^\delta, \gamma_1) \neq 0.$$

Or $\mathrm{Ad}^*b(\varphi_m) = \mathbf{1}_{b_2+b\Lambda_m b^{-1}} \in C_c^\infty(J^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}})$, par conséquent ([**Le 2**] Lemme 2.3.2)

$$\langle \widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}, \varphi_m \rangle = \langle \widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}, \mathrm{Ad}^*b(\varphi_m) \rangle$$

avec

$$\langle \widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}, \mathrm{Ad}^*b(\varphi_m) \rangle = J^G((f_\Gamma \otimes \mathbf{1}_{x(b_2+b\Lambda_m b^{-1})})^\delta, \gamma_1).$$

Par suite

$$J^G((f_\Gamma \otimes \mathbf{1}_{x(b_2+b\Lambda_m b^{-1})})^\delta, \gamma_1) \neq 0$$

et

$$(s + x(b_2 + b\Lambda_m b^{-1})) \cap O_G(\gamma_1) \neq \varnothing.$$

Par passage à la limite $m \to +\infty$, on obtient que $s + xb_2 \in \overline{O_G(\gamma_1)}$ (fermeture dans G pour la topologie ϖ-adique) donc que $O_G(s + xb_2) \subset \overline{O_G(\gamma_1)}$. Mais puisque $b_2 \in J^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}$ et $b^{-1}b_2b = b_1 \in J^{c_0}_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}$, le même raisonnement entraîne que $O_G(\gamma_1) \subset \overline{O_G(s + xb_2)}$. Donc $O_G(s+xb_2) = O_G(\gamma_1)$ (point (ii) de (2.3.2)). $\square$

Pour $c \in \mathbf{Z}$, soit

$$H_{\mathrm{e}}^{c} = \{b \in H_{\mathrm{e}} : \nu_E(b) \geq c\} \subset H_{\mathrm{e}};$$

c'est un voisinage ouvert AdH-invariant de 0 dans H_{e}. En particulier, si $B = E$ (i.e. si $s \in G_{\mathrm{e}}$), on a $H_{\mathrm{e}}^{c} = \mathcal{P}_E^c - \{0\}$ ($c \in \mathbf{Z}$). Si $b \in H_e \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c}$ pour un $c \in \mathbf{Z}$, alors $\det_{B/E}(b) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_E^{dc}}$ (rappelons que $d = \frac{N}{[E:F]}$) et $\nu_E(b) = \frac{1}{d}\nu_E(\det_{B/E}(b)) \geq c$. Par conséquent

$$\mathrm{Ad}H(H_{\mathrm{e}} \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c}) = H_{\mathrm{e}} \cap \mathrm{Ad}H(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c}) \subset H_{\mathrm{e}}^{c} \quad (c \in \mathbf{Z}).$$

Rappelons que dg désigne la mesure de Haar sur G qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de G. Pour $b \in H_{\mathrm{e}} \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$, on définit comme suit un facteur de normalisation $J_G^H(s,b) > 0$. Soient $E_1 = E[b]$ (c'est un sous-corps maximal de B), $\mathcal{G} \simeq \mathcal{A}(E_1)$ l'unique $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ normalisé par $E_1^\times$ et $\mathcal{B} = B \cap \mathcal{G} \simeq \mathcal{A}_E(E_1)$. Si $B \neq E$, on pose

$$J_G^H(s,b) = \frac{\mathrm{vol}(U^{-\nu_{\mathcal{G}}(s)+k_E(b)+1}(\mathcal{G}), dg)}{\mathrm{vol}(U^{k_E(b)+1}(\mathcal{B}), dh)}$$

(cette définition a un sens car $k_E(b) \geq \nu_{E_1}(b) = e_s(\mathcal{G})\nu_E(b) \geq k_0(s,\mathcal{G}) \geq \nu_{\mathcal{G}}(s)$) ; si $B = E$, on pose

$$J_G^H(s,b) = q^{f(E/F)k_F(s)}(q^{f(E/F)} - 1)\mathrm{vol}(U^{n_F(s)+k_F(s)+1}(\mathcal{G}), dg)$$

(noter que dans ce cas, le facteur de normalisation $J_G^H(s,b)$ ne dépend pas de b). Nous verrons au début de la preuve de la proposition (5.4.3) ci-après que pour $b \in H_{\mathrm{e}} \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$ minimal sur E, on a $s + xb \in G_{\mathrm{e}}$ avec $k_F(s+xb) = \max\{e_s(\mathcal{G})k_F(s), k_E(b)\}$; d'où, pour un tel b, la définition équivalente suivante (unifiant les cas $B \neq E$ et $B = E$) :

$$J_G^H(s,b) = \frac{\mathrm{vol}(U^{e_s(\mathcal{G})n_F(s)+k_F(s+xb)+1}(\mathcal{G}), dg)}{\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}}^{k_F(s+xb)+1}(\mathcal{B}), db)}.$$

Soit $H_{\mathrm{e,m}} = \{b \in H_{\mathrm{e}} : b \text{ minimal sur } E\}$. Si E'/E est une extension non ramifiée de E de degré d contenue dans B, $b \in \mathcal{O}_{E'}^\times$ un générateur de $\mathcal{O}_{E'}$ sur $\mathcal{O}_E$ et ϖ_E une uniformisante de E, alors pour tout $c \in \mathbf{Z}$, $\varpi_E^c b \in H_{\mathrm{e}} \cap \mathrm{Ad}H(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c}) \subset H_{\mathrm{e}}^{c}$ est minimal sur E. Par conséquent, $H_{\mathrm{e,m}} \cap H_{\mathrm{e}}^{c}$ ($c \in \mathbf{Z}$) est une partie non vide, ouverte ([**BK**] 2.2.2, i.e. (5.3.1) avec $r = n-1$) et AdH-invariante de H_{e} dont l'adhérence dans B (pour la topologie ϖ-adique) contient 0.

(5.4.3) PROPOSITION. — *Soit $b_1 \in H_{\mathrm{e,m}} \cap \Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$. La distribution θ_{s+xb_1} sur H coïncide avec l'intégrale orbitale $J_G^H(s,b_1)^{-1}J^H(\cdot, 1+b_1)$.*

Démonstration. — Soient $E_1 = E[b_1]$, $\mathcal{G}_1 \simeq \mathcal{A}(E_1)$ l'unique $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ normalisé par $E_1^\times$ et $\mathcal{B}_1 = B \cap \mathcal{G}_1 \simeq \mathcal{A}_E(E_1)$. Posons

$\gamma_1 = s + xb_1$, $n_1 = -\nu_{\mathcal{G}_1}(s)$, $r_1 = -\nu_{E_1}(b_1)$ et $e_1 = e(E_1/E)$. Comme $\nu_E(b_1) \geq c_0 > k_F(s)$ et $\nu_E(E_1) = \frac{1}{e_1}\mathbf{Z}$, il existe un entier $k \geq 1$ tel que

$$\nu_E(b_1) = k_F(s) + \frac{k}{e_1}.$$

Or $k_0(s, \mathcal{G}_1) = e_s(\mathcal{G}_1)k_F(s)$ avec $e_s(\mathcal{G}_1) = e_1$, d'où $-r_1$ $(= e_1\nu_E(b_1)) = e_1k_F(s) + k > k_0(s, \mathcal{G}_1)$. Soit un élément $b \in H$ tel que $\mathcal{B}_{\mathrm{m}} \subset b\mathcal{B}_1b^{-1} \subset \mathcal{B}_{\mathrm{M}}$ et soient $b_1' = bb_1b^{-1}$, $\mathcal{B}_1' = b\mathcal{B}_1b^{-1}$ et $\mathcal{G}_1' = b\mathcal{G}_1'b^{-1}$. On a $k_0(s, \mathcal{G}_1') = k_0(s, \mathcal{G}_1)$, $\nu_{\mathcal{B}_1'}(b_1') = \nu_{\mathcal{B}_1}(b_1) = -r_1$ et $xb_1' \in J_{\mathcal{G}_1'}^{-r_1}$. Ainsi la strate $[\mathcal{G}_1', n_1, r_1 - 1, s + xb_1']$ est un raffinement de la strate simple $[\mathcal{G}_1', n_1, r_1, s]$ dans $A(V)$ tel que $[\mathcal{B}_1', r_1, r_1 - 1, b_1']$ est une strate simple dans B et $E[b_1'] = bE_1b^{-1}$ est un sous-corps maximal de B. Donc $s + xb_1' \in G_{\mathrm{e}}$ (**[BK]** Prop. 2.2.3) et puisque $-r_1 \geq e_1c_0$, $b_1' \in J_{\mathcal{B}_1'}^{e_1c_0} \subset J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$ donc $\mathcal{O}_G(s + xb_1') = \mathcal{O}_G(\gamma_1)$ (5.4.2). Comme $J^G(\cdot, s + xb_1') = J^G(\cdot, \gamma_1)$ (égalité dans $D(G)$), on a $\theta_{s+xb_1'} = \theta_{\gamma_1}$ et quitte à remplacer b_1 par $b_1' \in H_{\mathrm{e,m}} \cap \Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$, on peut supposer que $\mathcal{B}_{\mathrm{m}} \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_{\mathrm{M}}$.

Montrons tout d'abord qu'il existe une constante $\alpha_1 > 0$ telle que $\theta_{\gamma_1} = \alpha_1 J^H(\cdot, 1 + b_1)$ (égalité dans $D(H)$). Comme θ_{γ_1} est une distribution AdH-invariante sur B et l'espace vectoriel des distributions AdH-invariantes sur $O_H(1 + b_1)$ est engendré par $J^H(\cdot, 1 + b_1)$, il suffit pour cela de montrer que $\mathrm{Supp}(\theta_{\gamma_1}) = O_H(1 + b_1)$ i.e., puisque $O_H(b_1) \subset \Omega$ et $\mathrm{Supp}(J^G(\cdot, \gamma_1)) = O_G(\gamma_1)$ est contenu dans l'ouvert $\delta(G \times x(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}))$ de G, que $\mathrm{Supp}(\widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}) = O_H(b_1)$. Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G et soit f_Γ la fonction caractérisique de Γ divisée par $\mathrm{vol}(\Gamma, dg)$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ décomposée en $\varphi = \sum_{b\in H}\varphi_b$, $\varphi_b \in C_c^\infty(bJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}b^{-1})$, $\varphi_b = 0$ pour presque tout $b \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle\widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}, \varphi\rangle &= \sum_{b\in H} J^G((f_\Gamma \otimes \mathrm{Ad}^*b^{-1}(\varphi_b) \circ s_{E/F}|_{xJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}})^\delta, \gamma_1) \\ &= J^G(\textstyle\sum_{b\in H}(f_\Gamma \otimes \mathrm{Ad}^*b^{-1}(\varphi_b) \circ s_{E/F}|_{xJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}})^\delta, \gamma_1) \end{aligned}$$

puis, par linéarité de l'application $C_c^\infty(G \times xJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}) \to C_c^\infty(\delta(G \times xJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}))$, $\phi \mapsto \phi^\delta$,

$$\langle\widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}, \varphi\rangle = J^G((f_\Gamma \otimes (\textstyle\sum_{b\in H}\mathrm{Ad}^*b^{-1}(\varphi_b)) \circ s_{E/F}|_{xJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}})^\delta, \gamma_1).$$

Si de plus $\varphi \geq 0$, alors $\langle\widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}, \varphi\rangle \neq 0$ si et seulement si

$$\delta(\Gamma \times x\,\mathrm{Supp}(\textstyle\sum_{b\in H}\mathrm{Ad}^*b^{-1}(\varphi_b))) \cap O_G(\gamma_1) \neq 0$$

i.e. si et seulement si

$$\{s + xb' : b' \in \mathrm{Supp}(\textstyle\sum_{b\in H}\mathrm{Ad}^*b^{-1}(\varphi_b))\} \cap O_G(\gamma_1) \neq 0.$$

Ainsi $O_H(b_1) \subseteq \mathrm{Supp}(\widetilde{\vartheta}_{\gamma_1})$ (car $\widetilde{\vartheta}_{\gamma_1}$ est AdH-invariante), avec égalité si et seulement si

$$s + xb_2 \in O_G(\gamma_1) \text{ pour un } b_2 \in J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}} \Rightarrow b_2 \in O_H(b_1).$$

Montrons donc cette implication.

Soit $b_2 \in J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}$ tel que $s + xb_2 \in O_G(\gamma_1)$. Si b_2 est contenu dans une sous-algèbre parabolique propre P_B de B, alors $P = \tau_W(A(E) \otimes_E P_B)$ est une sous-algèbre parabolique propre de $A(V)$ et

$$s + xb_2 = \tau_W(s \otimes_E 1 + \widetilde{x} \otimes_E b_2)$$

appartient à P, ce qui contredit le fait que $s + xb_2 \in O_G(\gamma_1)$ est elliptique dans G. Donc $b_2 \in H_{\mathrm{e}}$. Soient $E_2 = E[b_2]$ (c'est un sous-corps maximal de B), $\mathcal{G}_2 \simeq \mathcal{A}(E_2)$ l'unique $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ normalisé par $E_2^\times$ et $\mathcal{B}_2 = B \cap \mathcal{G}_2 \simeq \mathcal{A}_E(E_2)$. Posons $n_2 = -\nu_{\mathcal{G}_2}(s)$, $r_2 = -\nu_{E_2}(b_2)$ et $e_2 = e(E_2/E)$. Puisque $b_2 \in H_{\mathrm{e}} \cap J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}} \subset H^{c_0}_{\mathrm{e}}$, on a

$$-r_2 = e_2 \nu_E(b_2) \geq e_2 c_0.$$

Soit un élément $b' \in H$ tel que $\mathcal{B}_{\mathrm{m}} \subset b'\mathcal{B}_2 b'^{-1} \subset \mathcal{B}_{\mathrm{M}}$ et soient $b'_2 = b' b_2 b'^{-1}$, $\mathcal{B}'_2 = b'\mathcal{B}_2 b'^{-1}$. Comme $\nu_{\mathcal{B}'_2}(b'_2) = \nu_{\mathcal{B}_2}(b_2) = -r_2$, on a $b'_2 \in J^{-r_2}_{\mathcal{B}'_2} \subset J^{e_2 c_0}_{\mathcal{B}'_2} \subset J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}$, $s + xb'_2$ appartient à $O_G(\gamma_1)$ (5.4.2) et quitte à remplacer b_2 par b'_2, on peut supposer que $\mathcal{B}_{\mathrm{m}} \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_{\mathrm{M}}$. Alors $xb_2 \in J^{-r_2}_{\mathcal{G}_2}$ et puisque $-r_2 \geq e_2(k_F(s)+1) = k_0(s, \mathcal{G}_2) + e_2 > k_0(s, \mathcal{G}_2)$, la strate $[\mathcal{G}_2, n_2, r_2 - 1, s + xb_2]$ est un raffinement de la strate simple $[\mathcal{G}_2, n_2, r_2, s]$ dans $A(V)$ tel que $[\mathcal{B}_2, r_2, r_2 - 1, b_2]$ est une strate pure dans B.

Pour $i = 1, 2$, posons $k_i = k_0(s, \mathcal{G}_i)$ et $\mathcal{N}(\mathcal{G}_i) = \mathcal{N}_{k_i}(s, \mathcal{G}_i)$. Puisque le G-entrelacement formel

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}_G([\mathcal{G}_1, n_1, r_1, s], [\mathcal{G}_2, n_2, r_2, s]) \overset{\text{déf}}{=} \\ &\qquad \{g \in G : g^{-1}(s + J^{-r_1}_{\mathcal{G}_1})g \cap (s + J^{-r_2}_{\mathcal{G}_2})\} \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

coïncide avec

$$(1 + J^{-r_1-k_1}_{\mathcal{B}_1}\mathcal{N}(\mathcal{G}_1))H(1 + J^{-r_2-k_2}_{\mathcal{B}_2}\mathcal{N}(\mathcal{G}_2))$$

([**BK**] 1.5.12), on a $(1+y_2)^{-1}\delta^{-1}(1+y_1)^{-1}(s+xb_1)(1+y_1)\delta(1+y_2) = s + xb_2$ pour des éléments $y_i \in 1 + J^{-r_i-k_i}_{\mathcal{B}_i}\mathcal{N}(\mathcal{G}_i)$ ($i = 1, 2$) et $\delta \in H$. D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} 0 &= (1+y_1)^{-1}(s+xb_1)(1+y_1)\delta - \delta(1+y_2)(s+xb_2)(1+y_2)^{-1} \\ &\equiv (sy_1 - y_1 s + xb_1)\delta - \delta(-sy_2 + y_2 s + xb_2) \pmod{J^{-2r_1-k_1}_{\mathcal{G}_1}\delta + \delta J^{-2r_2-k_2}_{\mathcal{G}_2}}.\end{aligned}$$

En appliquant $s_{E/F}$, on obtient

$$0 \equiv b_1\delta - \delta b_2 \pmod{J^{-2r_1-k_1}_{\mathcal{B}_1}\delta + \delta J^{-2r_2-k_2}_{\mathcal{B}_2}}$$

i.e.

$$\delta^{-1}(b_1 + J_{\mathcal{B}_1}^{-2r_1-k_1})\delta \cap (b_2 + J_{\mathcal{B}_2}^{-2r_2-k_2}) \neq \varnothing.$$

Or pour $i = 1, 2$, on a $-r_i - k_i > 0$, par conséquent δ appartient au H-entrelacement formel $\mathcal{I}_H([\mathcal{B}_1, r_1, r_1-1, b_1], [\mathcal{B}_2, r_2, r_2-1, b_2])$. Soit ϕ_{b_i} $(i = 1, 2)$ le polynôme caractéristique attaché à la strate pure $[\mathcal{B}_i, r_i, r_i - 1, b_i]$ dans B. Comme $[\mathcal{B}_2, r_2, r_2 - 1, b_2]$ est équivalente à une strate simple dans B ([**BK**] Theorem 2.4.1.(i)), on a les relations $\phi_{b_1} = \phi_{b_2}$ et $\frac{r_1}{e_1} = \frac{r_2}{e_2}$ ([**BK**] Remark 2.6.3). Puisque b_1 est minimal sur E et $E[b_1]$ est un sous-corps maximal de B, ϕ_{b_1} se factorise en $\phi_{b_1} = \phi^{e_1}$ pour un polynôme $\phi \in \kappa_E[T]$ irréductible sur κ_E. De l'égalité $\phi_{b_2} = \phi^{e_1}$, on déduit que e_2 divise e_1. Soit $a = \frac{e_1}{e_2}$. Comme $r_1 = e_1\frac{r_2}{e_2} = ar_2$, a divise $(r_1, e_1) = 1$ donc $a = 1$. En définitive $e_1 = e_2$, $r_1 = r_2$ et puisque $\mathcal{B}_{\mathrm{m}} \subset \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{\mathrm{M}}$ $(i = 1, 2)$, on a $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Le Theorem 2.6.1 de [**BK**] assure alors l'existence d'un élément $\delta_1 \in U(\mathcal{B}_1)$ tel que $\delta_1 b_2 \delta_1^{-1} \equiv b_1 \pmod{J_{\mathcal{B}_1}^{-r_1+1}}$.

Désormais, et jusqu'à la fin de la preuve de (5.4.3), on note $r = r_1$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$, $n = n_1$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ et $e = e_1$. Montrons par induction que pour chaque entier $j \geq 1$, il existe un $\delta_j \in U(\mathcal{B})$ tel que $\delta_j b_2 \delta_j^{-1} \equiv b_1 \pmod{J_{\mathcal{B}}^{-r+j}}$. Le cas $j = 1$ ayant déjà été traité, fixons un entier $j \geq 1$ et supposons qu'il existe un $\delta_j \in U(\mathcal{B})$ vérifiant la propriété voulue. Soit $K = F[\gamma_1]$. C'est un sous-corps maximal de $A(V)$ et $[\mathcal{G}, n, r-1, \gamma_1]$ est une strate simple dans $A(V)$ telle que $k_F(\gamma_1) = \max\{ek_F(s), k_E(b_1)\}$ ([**BK**] Theorem 2.2.3). Fixons une corestriction modérée $s_{E_1/E}$ sur $A_E(V)$ relative à E_1/E et (grâce au lemme (5.3.2)) une corestriction modérée $s_{K/F}$ sur $A(V)$ relative à K/F telle que pour tout $i \in \mathbf{Z}$ et tout $g \in J_{\mathcal{G}}^i$,

$$s_{K/F}(g) \equiv s_{E_1/E} \circ s_{E/F}(g) \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i+1}}.$$

Soit $c \in J_{\mathcal{B}}^{-r+j}$ tel que $\delta_j b_2 \delta_j^{-1} = b_1 + c$. Fixons (grâce au lemme (5.4.2)) un $g \in G$ tel que $g^{-1}\gamma_1 g = \gamma_1 + xc$. Soit $t = \nu_{\mathcal{G}}(g)$. Alors

$$\gamma_1 g - g\gamma_1 \equiv 0 \pmod{J_{\mathcal{G}}^{t-r+j}}$$

i.e. $g \in \mathcal{P}_K^t \mathcal{N}_{-r+j}(\gamma_1, \mathcal{G})$ ([**BK**] 2.1.1). Comme $k_F(\gamma_1) = k_0(\gamma_1, \mathcal{G}) \leq -r$ (avec égalité si et seulement si $E_1 \neq E$), on a ([**BK**] 1.4.8)

$$\mathcal{N}_{-r+j}(\gamma_1, \mathcal{G}) = \mathcal{O}_K + \mathcal{P}_K^{-r-k_F(\gamma_1)+j}\mathcal{N}_{k_F(\gamma_1)}(\gamma_1, \mathcal{G}) \subset \mathcal{O}_K + J_{\mathcal{G}}^j.$$

Ecrivons $g = \mu + y$ avec $\mu \in \mathcal{P}_K^t - \mathcal{P}_K^{t+1}$ et $y \in J_{\mathcal{G}}^{t+j}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_1(\mu + y) - (\mu + y)(\gamma_1 + xc) \\ &\equiv \gamma_1 y - y\gamma_1 - \mu xc \pmod{J_{\mathcal{G}}^{t-r+2j}}. \end{aligned}$$

En appliquant $s_{K/F}$, on obtient que $\mu s_{K/F}(xc) \equiv 0 \pmod{\mathcal{P}_K^{t-r+2j}}$ i.e. que $s_{K/F}(xc)$ appartient à $\mathcal{P}_K^{-r+2j} \subset \mathcal{P}_K^{-r+j+1}$. Par conséquent (5.3.2)

$$s_{E_1/E} \circ s_{E/F}(xc) = s_{E_1/E}(c) \equiv 0 \pmod{J_{\mathcal{B}}^{-r+j+1}}$$

et ([**BK**] 1.4.10) il existe un $a \in \mathcal{P}_{E_1}^j \mathcal{N}_{-r}(b_1, \mathcal{B}) = J_{\mathcal{B}}^j$ tel que

$$c \equiv b_1 a - a b_1 \pmod{J_{\mathcal{B}}^{-r+j+1}}.$$

Alors

$$(1+a)^{-1} b_1 (1+a) \equiv b_1 + c \pmod{J_{\mathcal{B}}^{-r+j+1}},$$

et puisque $(1+a) \in U(\mathcal{B})$, $\delta_{j+1} = (1+a)\delta_j \in U(\mathcal{B})$ et

$$\delta_{j+1} b_2 \delta_{j+1}^{-1} \equiv b_1 \pmod{J_{\mathcal{B}}^{-r+j+1}}.$$

L'hypothèse d'induction est donc vraie pour tout entier $j \geq 1$. Puisque l'orbite $O_H(b_1)$ est fermée dans H, par passage à la limite $j \to +\infty$, on obtient que $b_2 \in O_H(b_1)$. On a donc prouvé qu'il existe une constante $\alpha_1 > 0$ telle que $\theta_{\gamma_1} = \alpha_1 J^H(\cdot, 1+b_1)$ (égalité dans $D(H)$). Montrons pour finir que cette constante est précisément $J_G^H(s, b_1)^{-1}$.

Si $B \neq E$, alors $k_E(1+b_1) = k_E(b_1) = -r$ car $\mathcal{N}_k(1+b_1, \mathcal{B}) = \mathcal{N}_k(b_1, \mathcal{B})$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, donc (par définition de la normalisation « J »)

$$J^H(\mathbf{1}_{1+b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1}}, 1+b_1) = 1;$$

si $B = E$, alors pour toute fonction $f \in C_c^\infty(H)$, $J^H(f, 1+b_1) = f(1+b_1)$ donc en particulier

$$J^H(\mathbf{1}_{1+b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1}}, 1+b_1) = 1.$$

Comme

$$\langle \theta_{\gamma_1}, \mathbf{1}_{1+b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1}} \rangle = \langle \vartheta_{\gamma_1}, \mathbf{1}_{x(b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1})} \rangle,$$

il s'agit, dans les deux cas, de prouver l'égalité $\langle \vartheta_{\gamma_1}, \mathbf{1}_{x(b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1})} \rangle = J_G^H(s, b_1)^{-1}$.

Identifions l'espace tangent à $G \times xB$ au point $(1, xb_1)$ à $A(V) \times B$ et l'espace tangent à G au point γ_1 à $A(V)$. Alors l'application linéaire tangente à δ au point $(1, xb_1)$ s'écrit

$$\pi : A(V) \times B \to A(V), \ (g, b) \mapsto -a_s(g) + xb$$

où a_s est l'application $A(V) \to A(V)$, $g \mapsto sg - gs$. Soit

$$\Gamma = 1 + J_{\mathcal{B}}^{-r-k_0(s,\mathcal{G})+1} \mathcal{N}_{k_0(s,\mathcal{G})}(s, \mathcal{G}) \subset U^1(\mathcal{G})$$

et pour $i \in \mathbf{Z}$, soit

$$\Lambda_i = J_{\mathcal{B}}^{i-r-k_0(s,\mathcal{G})+1} \mathcal{N}_{k_0(s,\mathcal{G})}(s, \mathcal{G}) \times J_{\mathcal{B}}^{i-r+1} \subset A(V) \times B.$$

Pour $(y,b) \in \Lambda_0$, on a

$$\delta(1+y, x(b_1+b)) \equiv \gamma_1 + \pi(y,b) + \eta(y,b)$$

avec

$$\eta(y,b) = (sy^2 + [y, x(b_1+b)] - ysy)(1+y)^{-1}$$

où $[\cdot,\cdot]$ désigne le crochet de Lie usuel. Or

$$\pi(\Lambda_i) = (C \cap J_{\mathcal{G}}^{i-r+1}) \oplus x J_{\mathcal{B}}^{i-r+1} = J_{\mathcal{G}}^{i-r+1} \quad (i \in \mathbf{Z})$$

et pour tous (y,b), $(y',b') \in \Lambda_0$, $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$,

$$(y,b) \equiv (y',b') \pmod{\Lambda_i} \Rightarrow \eta(y,b) \equiv \eta(y',b') \pmod{J_{\mathcal{G}}^{i-2r-k_0(s\mathcal{G})+1}}$$

avec $J_{\mathcal{G}}^{i-2r-k_0(s,\mathcal{G})+1} \subset J_{\mathcal{G}}^{(i+1)-r+1} = \pi(\Lambda_{i+1})$. On peut donc appliquer (5.3.4) :

$$\delta(\Gamma \times x(b_1 + J_{\mathcal{B}}^{-r+1})) = \gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1} \ (= \gamma_1 U^{n-r+1}(\mathcal{G}))$$

(rappel : $n = -\nu_{\mathcal{G}}(s) = -\nu_{\mathcal{G}}(\gamma_1)$), et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1})$,

$$\int_{\Gamma \times J_{\mathcal{B}}^{-r+1}} f \circ \delta(g, x(b_1+b)) dg\, db = \int_{\Gamma \times J_{\mathcal{B}}^{-r+1}} f(\gamma_1 + \pi(g-1,b)) dg\, db.$$

D'où l'on déduit, en prenant pour f la fonction caractéristique de $\gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1}$,

$$(\mathbf{1}_\Gamma \otimes \mathbf{1}_{x(b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1})})^\delta = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma, dg)\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}}^{-r+1}, db)}{\mathrm{vol}(U^{n-r+1}(\mathcal{G}), dg)} \mathbf{1}_{\gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1}}.$$

Par suite,

$$\langle \vartheta_{\gamma_1}, \mathbf{1}_{x(b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1})} \rangle = \frac{\mathrm{vol}(U^{-r+1}(\mathcal{B}), dh)}{\mathrm{vol}(U^{n-r+1}(\mathcal{G}), dg)} J^G(\mathbf{1}_{\gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1}}, \gamma_1).$$

Si $B \neq E$, alors (par définition de la normalisation « J ») $J^G(\mathbf{1}_{\gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1}}, \gamma_1) = 1$ donc

$$\langle \vartheta_{\gamma_1}, \mathbf{1}_{b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1}} \rangle = \frac{\mathrm{vol}(U^{-r+1}(\mathcal{B}), dh)}{\mathrm{vol}(U^{n-r+1}(\mathcal{G}), dg)};$$

si $B = E$, alors $\mathcal{N}_{k_F(\gamma_1)}(\gamma_1, \mathcal{G}) = \mathcal{N}_{k_F(s)}(s, \mathcal{G}) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{N}(\mathcal{G})$, $n = n_F(s)$, et puisque (4.3.5)

$$\{g \in G : g^{-1}\gamma_1 g \in \gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1}\} = E^\times \Gamma,$$

on a

$$J^G(\mathbf{1}_{\gamma_1 + J_{\mathcal{G}}^{-r+1}}, \gamma_1) = \mathrm{vol}(E^\times \Gamma, \frac{dg}{dg_s})$$

où dg_s est la mesure de Haar sur $E^\times$ telle que $\mathrm{vol}(E^\times(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G})), \frac{dg}{dg_s}) = 1$. Mais comme

$$\mathrm{vol}(E^\times\Gamma, \frac{dg}{dg_s}) = \frac{[\mathcal{P}_E : \mathcal{P}_E^{-r-k_F(s)+1}]}{[\mathcal{P}_E\mathcal{N}(\mathcal{G}) : \mathcal{P}_E^{-r-k_F(s)+1}\mathcal{N}(\mathcal{G})]} = \frac{[\mathcal{O}_E : \mathcal{P}_E^{-r-k_F(s)}]}{[\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}^{-r-k_F(s)}]},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\langle \vartheta_{\gamma_1}, \mathbf{1}_{b_1+J_{\mathcal{B}}^{-r+1}}\rangle &= \frac{\mathrm{vol}(U^{-r+1}(\mathcal{O}_E), dh)}{\mathrm{vol}(U^{n-r+1}(\mathcal{G}), dg)}\frac{[\mathcal{O}_E : \mathcal{P}_E^{-r-k_F(s)}]}{[\mathcal{G} : J_{\mathcal{G}}^{-r-k_F(s)}]} \\ &= \frac{q^{-f(E/F)k_F(s)}(q^{f(E/F)}-1)^{-1}}{\mathrm{vol}(U^{n+k_F(s)+1}(\mathcal{G}), dg)},\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition (5.4.3). □

(5.4.4) Remarque. — Soit $b_1 \in H_{\mathrm{e,m}} \cap \Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$. Pour tout $b_1' \in O_H(b_1) \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$, le facteur de normalisation $J_G^H(s, b_1')$ coïncidant avec $J_G^H(s,b)$, on a l'égalité $\theta_{1+xb_1'} = \theta_{\gamma_1}$. Mieux, fixons une autre E-base $\{w_1', \ldots, w_d'\}$ de V et soit W' le sous-F-espace vectoriel de V engendré par $\{w_k'\}$. D'où une (W', E)-décomposition $\tau_{W'} : A(E) \otimes_E B \xrightarrow{\simeq} A(V)$ (4.3.2). Fixons aussi un élément $\widetilde{x}' \in \mathcal{A}$ dans la pré-image de 1 par une corestriction modérée $s_{E/F}'$ sur $A(E)$ relative à E/F et posons $x' = \tau_{W'}(\widetilde{x}' \otimes_E 1)$. Notons $\mathcal{B}_{\mathrm{M}}'$ l'$\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire maximal dans B obtenu en remplaçant $\{w_k\}$ par $\{w_k'\}$ dans la définition de $\mathcal{B}_{\mathrm{M}}$ et soit un entier $c \geq \max\{1, k_F(s)+1\}$ tel que $s + x'J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}'}^c \subset G$ et l'application

$$\delta' : G \times x'J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}'}^c \to G,\ (g, x'b) \mapsto g(s+xb)g^{-1}$$

est partout submersive. Quitte à remplacer c par un entier plus grand, on peut supposer que $J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}'}^c \subset J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{c_0}$. Soit Ω' un voisinage ouvert fermé et $\mathrm{Ad}H$-invariant de 0 dans B tel que $\Omega' \subset \mathrm{Ad}H(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}'}^c)$, et pour tout $\gamma \in G$, notons θ_γ' la distribution $\mathrm{Ad}H$-invariante sur H de support contenu dans $U_{\Omega'} = 1 + \Omega'$ obtenue à partir de l'intégrale orbitale $J^G(\cdot, \gamma)$ en remplaçant δ par δ' dans la construction précédente. Alors, si $b_1 \in H_{\mathrm{e,m}} \cap \Omega' \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}'}^c$, la distribution $\theta_{s+x'b_1}'$ coïncide avec $J_G^H(s,b_1)^{-1}J^H(\cdot, b_1)$ donc coïncide avec θ_{s+xb_1}.

On s'intéresse maintenant au cas — nettement plus simple — $b_1 = 0$. On définit le facteur de normalisation $J_G^H(s) = J_G^H(s,0)$ par

$$J_G^H(s) = \frac{\mathrm{vol}(U^{n_F(s)+k_F(s)+1}(\mathcal{G}_{\mathrm{M}}), dg)}{\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{k_F(s)+1}, db)}.$$

(5.4.5) PROPOSITION. — *La distribution θ_s sur H coïncide avec l'intégrale orbitale $J_G^H(s)^{-1}J^H(\cdot,1)$ i.e. la mesure formée d'une masse $J_G^H(s)^{-1}$ au point* 1.

Démonstration. — Il s'agit d'une version simplifiée de la preuve de (5.4.3). Montrons tout d'abord qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\theta_s = \alpha\, J^H(\cdot,1)$ (égalité dans $D(H)$), i.e. (cf. la preuve de (5.4.3)) montrons l'implication

$$s + xb \in O_G(s) \text{ pour un } b \in J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{c_0} \Rightarrow b = 0.$$

Soit $b \in J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{c_0}$ tel que $s + xb \in O_G(s)$ et soit $r = -\nu_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}(b)$. Supposons $b \neq 0$ (i.e. $r > -\infty$). Soit $g \in G$ tel que $s+xb = g^{-1}sg$. Comme $-r \geq c_0 > k_F(s)$, on peut écrire g sous la forme $g = \delta(1+y)$ avec $\delta \in H, y \in J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{-r-k_F(s)}\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_\mathrm{M}) = \mathcal{P}_E^{-r-k_F(s)}\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_\mathrm{M})$ (4.3.5). Alors

$$\begin{aligned} s + xb &= (1+y)^{-1}s(1+y) \\ &= s + (1+y)^{-1}(sy - ys) \equiv s + sy - ys \pmod{J_{\mathcal{G}_\mathrm{M}}^{-2r-k_F(s)}} \end{aligned}$$

En appliquant $s_{E/F}$, on obtient $b \equiv 0 \pmod{J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{-2r-k_F(s)}}$ donc $\nu_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}(b) \geq -2r - k_F(s) > -r$, contradiction. Donc $b = 0$ et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\theta_s = \alpha J^H(\cdot,1)$ (égalité dans $D(H)$).

Fixons un entier $i_0 \geq c_0$. Soit

$$\Gamma = 1 + J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{i_0-k_F(s)}\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_\mathrm{M}) \subset U^1(\mathcal{G})$$

et pour $i \in \mathbf{Z}$, soit

$$\Lambda_i = J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{i+i_0-k_F(s)}\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_\mathrm{M}) \times J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{i+i_0} \subset A(V) \times B.$$

Pour $(y,b) \in \Lambda_0$, on a

$$\delta(1+y, xb) = s + \pi(y,b) + \eta(y,b)$$

avec $\pi(y,b) = [y,s]+xb$ et $\eta(y,b) = (sy^2+[y,xb]-ysy)(1+y)^{-1}$ où $[\cdot,\cdot]$ désigne le crochet de Lie usuel. Or $\pi(\Lambda_i) = J_{\mathcal{G}_\mathrm{M}}^{i+i_0}$ ($i \in \mathbf{Z}$) et pour tous (y,b), $(y',b') \in \Lambda_0$, $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$,

$$(y,b) \equiv (y',b') \pmod{\Lambda_i} \Rightarrow \eta(y,b) \equiv \eta(y',b') \pmod{J_{\mathcal{G}_\mathrm{M}}^{i+2i_0-k_F(s)}}$$

avec $J_{\mathcal{G}_\mathrm{M}}^{i+2i_0-k_F(s)} \subset J_{\mathcal{G}_\mathrm{M}}^{(i+1)+i_0} = \pi(\Lambda_{i+1})$. On peut donc appliquer le corollaire (5.3.4) : $\delta(\Gamma \times xJ_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{i_0}) = s + J_{\mathcal{G}_\mathrm{M}}^{i_0}$ et pour toute fonction $f \in C_c^\infty(s + J_{\mathcal{G}_\mathrm{M}}^{i_0})$,

$$\int_{\Gamma\times J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{i_0}} f\circ\delta(g,xb)dg\,db = \int_{\Gamma\times J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{i_0}} f(s+\pi(g-1,b))dg\,db.$$

D'où l'on déduit, en prenant pour f la fonction caractéristique de $s + J_{\mathcal{G}_{\mathrm{M}}}^{i_0}$,

$$(\mathbf{1}_\Gamma \otimes \mathbf{1}_{xJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0}})^\delta = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma, dg)\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0}, db)}{\mathrm{vol}(U^{n_F(s)+i_0}(\mathcal{G}_{\mathrm{M}}), dg)}\mathbf{1}_{s+J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0}}$$

(puisque $e_s(\mathcal{G}_{\mathrm{M}}) = 1$, on a $n_F(s) = -\nu_{\mathcal{G}_{\mathrm{M}}}(s)$). Par suite

$$\alpha = \langle \theta_s, \mathbf{1}_{1+J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0}} \rangle = \langle \vartheta_s, \mathbf{1}_{xJ_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0}} \rangle = \frac{\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0}, db)}{\mathrm{vol}(U^{n_F(s)+i_0}(\mathcal{G}_{\mathrm{M}}), dg)} J^G(\mathbf{1}_{s+J_{\mathcal{G}_{\mathrm{M}}}^{i_0}}, s).$$

Or (par définition de la normalisation « J »)

$$J^G(\mathbf{1}_{s+J_{\mathcal{G}_{\mathrm{M}}}^{i_0}}, s) = \frac{\mathrm{vol}(H\Gamma, d\mu)}{\mathrm{vol}(H(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_F(s)}(s,\mathcal{G}_{\mathrm{M}})), d\mu)} = \frac{[\mathcal{B}_{\mathrm{M}} : J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0-k_F(s)-1}]}{[\mathcal{G}_{\mathrm{M}} : J_{\mathcal{G}_{\mathrm{M}}}^{i_0-k_F(s)-1}]}$$

où $d\mu$ désigne une (quelconque) mesure invariante sur l'espace homogène $H\backslash G$, d'où

$$\alpha = \frac{\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0}, db)}{\mathrm{vol}(U^{n_F(s)+i_0}(\mathcal{G}_{\mathrm{M}}), dg)} \frac{[\mathcal{B}_{\mathrm{M}} : J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{i_0-k_F(s)-1}]}{[\mathcal{G}_{\mathrm{M}} : J_{\mathcal{G}_{\mathrm{M}}}^{i_0-k_F(s)-1}]} = \frac{\mathrm{vol}(J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{k_F(s)+1}, db)}{\mathrm{vol}(U^{n_F(s)+k_F(s)+1}(\mathcal{G}_{\mathrm{M}}), dg)}.$$

Donc $\alpha = J_G^H(s)^{-1}$ et la proposition (5.4.5) est prouvée. □

(5.4.6) PROPOSITION. — *Soit* $f \in C_c^\infty(\delta(G \times x(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}})))$. *Il existe une fonction* $\phi_f \in C_c^\infty(U_\Omega \cap U^{\mathrm{co}}(\mathcal{B}_{\mathrm{M}}))$ *telle que pour tout* $b_1 \in (H_{\mathrm{e,m}} \cap \Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}}) \cup \{0\}$, *on ait*

$$J^H(\phi_f, 1+b_1) = J_G^H(s, b_1) J^G(f, s + xb_1).$$

Démonstration. — L'application linéaire $\phi \mapsto \phi^\delta$ induit par restriction une application surjective

$$C_c^\infty(G \times x(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}})) \to C_c^\infty(\delta(G \times x(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}}))),\ \phi \mapsto \phi^\delta.$$

Comme $C_c^\infty(G \times x(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}})) = C_c^\infty(G) \otimes C_c^\infty(x(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}}))$ ([**HC 1**] Cor. of Lemma 16), il existe des fonctions $f_i \in C_c^\infty(G)$, $\psi_i \in C_c^\infty(x(\Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}}))$ ($i = 1, \ldots, m$) telles que $f = (\sum_{i=1}^m f_i \otimes \psi_i)^\delta$. On peut supposer que pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i est la fonction caractéristique d'une partie compacte Γ_i de G divisée par $\mathrm{vol}(\Gamma_i, dg)$. Soit alors $\phi_f \in C_c^\infty(U_\Omega \cap U^{\mathrm{co}}(\mathcal{B}_{\mathrm{M}}))$ la fonction définie par

$$\phi_f(1+b) = \sum_i^m \psi_i(xb) \quad (b \in \Omega \cap J_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{co}}).$$

Pour tout $b_1 \in \Omega \cap J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \theta_{s+xb_1}, \phi_f \rangle &= \sum_i^m \langle \vartheta_{s+xb_1}, \psi_i \rangle \\ &= \sum_i^m J^G((f_i \otimes \psi_i)^\delta, s + xb_1) = J^G(f, s + xb_1). \end{aligned}$$

On conclut grâce aux propositions (5.4.3) et (5.4.5). □

5.5. Le lemme-clé

Comme $\widetilde{G}_{\mathrm{r}}$ est dense dans G pour la topologie ϖ-adique, pour tout $s \in G$ semi-simple, les germes $[f]^G_s$ ($f : G \to \mathbf{C}$) au point s dans G induisent des germes $[f]^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}}_s$ au point s dans $\widetilde{G}_{\mathrm{r}}$; si de plus s est irréductible, ils induisent des germes $[f]^{\widetilde{G}_{\mathrm{e}}}_s$ au point s dans $\widetilde{G}_{\mathrm{e}}$.

Soit $\overline{e} : G_{\mathrm{e}} \to \frac{1}{N}\mathbf{Z}$ l'application définie par $\overline{e}(y) = e(F[y]/F)^{-1}$ ($y \in G_{\mathrm{e}}$). Soit dz la mesure de Haar sur $A_G = F^\times$ telle que $\mathrm{vol}(\mathcal{O}^\times, dz) = 1$ et soit $d(\mathrm{St})$ le degré formel de la représentation de Steinberg de G défini par la mesure $\dfrac{dg}{dz}$ sur $A_G \backslash G$. On pose $c(G) = (-1)^{N-1} d(\mathrm{St})^{-1}$.

(5.5.1) LEMME. — *Pour tout $z \in A_G$, le germe $[I_{\{z\}}]^{\widetilde{G}_{\mathrm{e}}}_z$ coïncide avec $c(G)[\overline{e}]^{\widetilde{G}_{\mathrm{e}}}_z$.*

Démonstration. — Soit $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(G)$ l'action de translation à gauche. Pour tout $z \in A_G$, on a $[I_{\{z\}}]^G_z = \lambda^* z([I_{\{1\}}]^G_1)$ et $[\overline{e}]^{G_{\mathrm{e}}}_z = \lambda^* z([\overline{e}]^{G_{\mathrm{e}}}_1)$. Il suffit donc de montrer (5.5.1) pour $z = 1$. Soit $I'(\cdot, \cdot)$ une normalisation des intégrales orbitales sur G telle que $I'(f, 1) = f(1)$ ($f \in C^\infty_c(G)$) et

$$I'^G(f, y) = \int_{A_G \backslash G} f(g^{-1} y g) \frac{dg}{dz} \quad (y \in G_{\mathrm{e}},\ f \in C^\infty_c(G)).$$

Pour $y \in G_{\mathrm{e}}$, on a donc $\overline{e}(y) I'^G(\cdot, y) = I^G(\cdot, y)$ (égalité dans $D(G)$). Or $[I'_{\{1\}}]^{\widetilde{G}_{\mathrm{e}}}_1 = c(G)$ ([**He**] Appendice 3), d'où la conclusion (cf. (3.5.4)). □

5.6. Indépendance linéaire des germes

On peut désormais montrer le résultat principal de cette section :

(5.6.1) PROPOSITION. — *Soit $s \in G$ semi-simple. Soit une famille de nombres complexes $\{c_O\}$ telle que*

$$\sum_O c_O [I_O]^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}}_s = 0$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$. Alors $c_O = 0$ pour chaque O.

De plus, pour toute autre normalisation $I'^G(\cdot,\cdot)$ des intégrales orbitales sur G (donc en particulier pour la Normalisation « J »), l'énoncé ci-dessus reste vrai si l'on remplace les germes $[I_O]_s^G$ par les germes $[I'_O]_s^G$ définis par cette normalisation.

Démonstration. — Soit M' le sous-groupe de Lévi de G associé à s. Si $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert compact de s dans G suffisamment petit, pour tout $g \in M' \cap \mathcal{V}$, le sous-groupe de Lévi de G associé à g est contenu dans M' et donc $\widetilde{M'_{\mathrm{r}}} \cap \mathcal{V} = \widetilde{G}_{\mathrm{r}} \cap \mathcal{V}$. Par conséquent (3.5.5)

$$0 = \sum_{M'\cap O} c_O[I^{M'}_{M'\cap O}]_s^{\widetilde{M'_{\mathrm{r}}}} = \sum_O c_O[I_O]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}}.$$

On peut donc supposer s irréductible dans G.

Fixons une décomposition (standard ou non) $A_G(s) = \coprod_{i=0}^m O_G(x_i)$ et un jeu de fonctions $\{f_{s,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(G)$ vérifiant la condition (2) de (3.5.1) pour cette décomposition. On peut supposer que $O_G(x_0) = O_G(s)$. Pour $i = 0, \ldots, m$, posons $c_i = c_{O_G(x_i)}$. Soit $f \in C_c^\infty(G)$ la fonction définie par

$$f = \sum_{i=0}^m c_i f_{s,i}.$$

On a donc

$$[I^G(f,\cdot)]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}} = \sum_{i=0}^m c_i[I_{O_G(x_i)}(\cdot)]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}} = 0$$

et l'on est ramenés à montrer que $I^G(f,x_i) = 0$ pour $i = 0, \ldots, m$. Comme $\widetilde{G}_{\mathrm{r}}$ est dense dans G_{r} et

$$[I^G(f,\cdot)]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}} = 0 = [J^G(f,\cdot)]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}},$$

la proposition (4.4.2) implique l'égalité

$$[J^G(f,\cdot)]_s^{G_{\mathrm{r}}} = 0 = [I^G(f,\cdot)]_s^{G_{\mathrm{r}}}.$$

En particulier, si $s \in G_{\mathrm{e}}$, alors $m = 0$ et $I^G(f,x_0) = I^G(f,s) = 0$. On peut donc supposer que s n'est pas elliptique. On suppose aussi, dans un premier temps, que $s \notin A_G$. Soient $E = F[s]$, $B = A_E(V)$ et $H = B^\times$.

Commençons par montrer que $I^G(f,x_0) = 0$. Reprenons la construction (et les notations) de 5.4. Fixons une corestriction modérée $\tilde{s}_{E/F}$ sur $A(E)$ relative à E/F et un élément $\tilde{x} \in \mathcal{A}(E)$ tel que $\tilde{s}_{E/F}(\tilde{x}) = 1$. Fixons aussi, via le choix d'une E-base $\{w_k\}$ de V, une (W,E)-décomposition $\tau_W : A(E) \otimes_E B \to A(V)$ (4.3.2) et posons $x = \tau_W(\tilde{x} \otimes_E 1)$,

$$\delta : G \times xB \to, \ (g, xb) \mapsto g(s + xb)g^{-1}.$$

Soit $\mathcal{B}_{\mathrm{M}} = \mathrm{End}^0_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{L}_{\mathrm{M}})$ où $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ est la chaîne $\{L_{\mathrm{M},i}\}_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{O}_E$-réseaux dans V définie par

$$L_{\mathrm{M},i} = \mathcal{P}_E^i(\mathcal{O}_E w_1 + \mathcal{O}_E w_2 + \cdots + \mathcal{O}_E w_d).$$

Soit un entier $c_0 \geq \max\{1, k_F(s)+1\}$ tel que $s + xJ^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}} \subset G$ et l'application

$$G \times xJ^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}} \to G,\ (g, xb) \mapsto g(s+xb)g^{-1}$$

est partout submersive. Soit aussi un voisinage ouvert fermé $\mathrm{Ad}H$-invariant Ω de 0 dans B tel que $\Omega \subset \mathrm{Ad}H(J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}})$ et $\mathcal{O}_E\Omega = \Omega$ (cf. **[Le 2]** 2.3 pour l'existence d'un tel Ω), et posons $U_\Omega = 1 + \Omega$. On peut supposer (3.5.1) que pour chaque $i \in \{0, \ldots, m\}$, $\mathrm{Supp}(f_{s,i}) \subset \delta(G \times x(\Omega \cap J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}))$. Ainsi, $\mathrm{Supp}(f) \subset \delta(G \times x(\Omega \cap J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}))$ et il existe une fonction $\phi_f \in C_c^\infty(U_\Omega \cap U^{c_0}(\mathcal{B}_{\mathrm{M}}))$ telle que pour tout $b_1 \in (H_{\mathrm{e,m}} \cap \Omega \cap J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}}) \cup \{0\}$, on a (5.4.6)

$$J^H(\phi_f, 1+b_1) = J^H_G(s, b_1) J^G(f, s+xb_1).$$

Pour un tel $b_1 \neq 0$ suffisamment proche de 0 dans B, on a donc

$$J^H_G(s, b_1) J^G(f, s+xb_1) = J^H(\phi_f, 1+b_1) = 0 = I^H(\phi_f, 1+b_1)$$

(on rappelle que $b_1 \in H_{\mathrm{e,m}} \cap J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}} \Rightarrow s + xb_1 \in G_{\mathrm{e}}$). Fixons une extension non ramifiée E_1/E de degré d contenue dans B et notons $\Gamma = E_1^\times$ le sous-groupe de H correspondant. Soit $\mathcal{V}_\Gamma = H_{\mathrm{e,m}} \cap \Omega \cap J^{c_0}_{\mathcal{B}_{\mathrm{M}}} \cap \Gamma$; c'est une partie non vide ouverte de $\Gamma \cap H_{\mathrm{r}}$ dont l'adhérence dans E_1 (pour la topologie ϖ-adique) contient 0. Si $b_1 \in \mathcal{V}_\Gamma$ et $t \in \mathcal{O}_E - \{0\}$, alors $E[1+tb_1] = E_1$ et, puisque $k_E(tb_1) = \nu_{E_1}(t) + k_E(b_1) = \nu_{E_1}(tb_1)$, on a $tb_1 \in \mathcal{V}_\Gamma$.

Soit $\{u_i\}_{i=0}^m \subset H$ une famille de représentants des $\mathrm{Ad}H$-orbites unipotentes de H. On peut supposer que $u_0 = 1$. Pour chaque $i \in \{0, \ldots, m\}$, fixons un représentant $a_i : H \to \mathbf{C}$ du germe $[I^H_{O_H(u_i)}]^H_1$. Alors, si $b_1 \in \mathcal{V}_\Gamma$ est suffisamment proche de 0 dans E_1, pour tout $t \in \mathcal{O}_E - \{0\}$, on a le développement ((3.5.2) et (3.6.2))

$$\begin{aligned} 0 = I^H(\phi_f, 1+tb_1) &= \sum_{i=0}^m I^H(\phi_f, u_i) a_i(1+tb_1) \\ &= \sum_{i=0}^m I^H(\phi_f, u_i) |t|_E^{-\frac{1}{2}\dim(O_H(u_i))} a_i(1+b_1) \end{aligned}$$

où $|\ |_E$ est la valeur absolue sur E normalisée par $|\varpi_E|_E = q^{-f(E/F)}$ et $\dim(O_H(u_i))$ est la dimension de $O_H(u_i)$ en tant que variété ϖ_E-adique (pour une uniformisante ϖ_E de E). Soit un entier $c_1 \gg 1$ tel que pour tout $b_1 \in$

$\mathcal{V}_\Gamma \cap J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{c_1}$, on ait le développement ci-dessus. Pour $b \in H_\mathrm{e} \cap J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}$, posons

$$Q(b) = \sum_{i=1}^{m} I^H(\phi_f, u_i) a_i(1+b).$$

Comme $\dim(O_H(u_i)) > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, si le germe $[Q]_0^{\mathcal{V}_\Gamma}$ n'est pas nul, alors pour $b_1 \in \mathcal{V}_\Gamma \cap J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^{c_1}$ tel que $Q(b_1) \neq 0$, $|Q(tb_1)|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 dans $\mathcal{O}_E - \{0\}$. Mais puisque le germe $[a_0]_1^H$ induit le germe constant (5.5.1)

$$[a_i]_1^{\Gamma \cap H_\mathrm{r}} = c(H) \neq 0$$

(où la constante $c(H) \neq 0$ attachée à $H \simeq GL(d, E)$, $d[E : F] = N$ est définie comme en 5.5 en remplaçant F par E et N par d), le germe $[Q]_0^{\mathcal{V}_\Gamma}$ est un germe constant donc est nul. On en déduit que $I^H(\phi_f, 1) = \phi_f(1) = 0$ donc que

$$J_G^H(s)^{-1}\phi_f(1) = J^G(f, s) = 0 = I^G(f, s) = I^G(f, x_0).$$

Ensuite, fixons un $i \in \{1, \ldots, m\}$ et montrons que $I^G(f, x_i) = 0$. Soient P le sous-groupe parabolique de G associé à x_i (cf. 2.8) et U le radical unipotent de P. Fixons une composante de Lévi M de P et un sous-groupe ouvert compact maximal K_P de G en bonne position par rapport à (P, A_M). Soit $\{V_i\}_{i=1}^r$ $(V = \oplus_{i=1}^r V_i)$ la famille de sous-espaces vectoriels de V telle que

$$M = \{g \in G : gV_i \subseteq V_i,\ i = 1, \ldots, r\}$$

et soit $L(M)$ la sous-algèbre de Lévi de $A(V)$ définie par

$$L(M) = \{g \in A(V) : gV_i \subseteq V_i,\ i = 1, \ldots, r\}.$$

Quitte à remplacer x_i par gx_ig^{-1}, donc aussi P par gPg^{-1}, et M par gMg^{-1} pour un $g \in G$, on peut supposer que $L(M) = \tau_W(A(E) \otimes_E B_M)$ pour une sous-algèbre de Lévi standard B_M de B (identifié à $M(d, E)$ via la E-base $\{w_k\}$ de V choisie plus haut). Soit $H_M = B_M^\times$ le groupe multiplicatif de B_M et soit $x_i = x_M x_U$ $(x_M \in M,\ x_U \in U)$ la décomposition de x_i suivant $P = MU$. Comme $x_M \in O_G(s) \cap M$ est irréductible dans G, quitte à remplacer (une nouvelle fois) x_i par mx_im^{-1} pour un $m \in M$, on peut supposer que $x_M = s$. Enfin, quitte à changer (grâce au lemme (3.5.1)) le jeu de fonctions $\{f_{s,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(G)$, on peut supposer que le support du terme K_P-invariant $f^P \in C_c^\infty(M)$ de f suivant P est suffisamment concentré sur s pour qu'il existe une fonction $\phi_{f^P} \in C_c^\infty(M)$ et un entier $c \gg 1$ tels que (5.4.6),

$$\begin{cases} J^{H_M}(\phi_{f^P}, 1) = J_M^{H_M}(s) J^M(f^P, s) \\ J^{H_M}(\phi_{f^P}, 1 + b_1) = J_M^{H_M}(s, b_1) J^M(f^P, s + xb_1) \quad (b_1 \in (H_M)_{\mathrm{e,m}} \cap J_{\mathcal{B}_\mathrm{M}}^c) \end{cases}$$

où la partie $(H_M)_{\mathrm{e,m}} \subset (H_M)_{\mathrm{e}}$ et les facteurs de normalisation $J_M^{H_M}(s)$, $J_M^{H_M}(s, b_1)$ sont définis, via la donnée d'un isomorphisme (de groupes ϖ-adiques) $\varphi : M \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^r GL(n_i, F)$ ($n_i \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, $\sum_{i=1}^r n_i = N$) composante par composante comme en 5.4 (noter que pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $[E : F] \mid n_i$ donc $n_i \geq 2$). On procède alors comme pour le cas $i = 0$. Fixons un sous-groupe Γ de H_M de la forme $\varphi^{-1}(\prod_{i=1}^r E_{k_i}^\times)$ pour des extensions non ramifiées E_{k_i}/E de degré $[E_{k_i} : E] = n_i$ telles que $\prod_{i=1}^r E_{k_i}^\times \subset \varphi(H_M)$. Puisque $[I^G(f, \cdot)]_s^{G_{\mathrm{r}}} = 0$, la proposition (3.4.3) implique que

$$0 = [I^G(f, \cdot)]_s^{\Gamma \cap G_{\mathrm{r}}} = [I^M(f^P, \cdot)]_s^{\Gamma \cap G_{\mathrm{r}}}.$$

Comme on peut approcher 0 d'aussi près que l'on veut dans $(H_M)_{\mathrm{e,m}} \cap \Gamma \cap G_{\mathrm{r}}$, en remplaçant G par M dans le raisonnement effectué pour $i = 0$, on obtient $I^{H_M}(\phi_{f^P}, 1) = \phi_{f^P}(1) = 0$ donc

$$J_M^{H_M}(s)^{-1} \phi_{f^P}(1) = J^M(f^P, s) = 0 = I^M(f^P, s),$$

et finalement (3.4.1)

$$0 = I^M(f^P, s) = I^G(f, x_i).$$

Ainsi, pour $s \notin A_G$, la première assertion de (5.6.1) est prouvée. Pour $s \in A_G$, on procède exactement de la même manière en supprimant toute la partie descente de G à H.

Quant à la seconde assertion de (5.6.1), elle découle directement de la propriété (impliquant la première assertion) montrée ci-dessus : si une fonction $h \in C_c^\infty(G)$ induit le germe trivial $[I^G(h, \cdot)]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}} = 0$, alors $I^G(h, g) = 0$ pour tout $g \in A_G(s)$. Or, pour toute normalisation $I'^G(\cdot, \cdot)$ des intégrales orbitales sur G, si une fonction $h \in C_c^\infty(G)$ induit le germe trivial $[I'^G(h, \cdot)]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}} = 0$, alors $[I^G(h, \cdot)]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}} = 0$ donc $I^G(h, g) = 0 = I'^G(h, g)$ pour tout $g \in A_G(s)$. □

(5.6.2) Remarque. — Pour $s \in G$ absolument semi-simple, on peut reprendre le travail de Rogawski **[R 1]** et montrer que pour chaque orbite O de $A_G(s)$, il existe une constante $I_G^H(O) > 0$ (on note toujours $H = G_s$) telle que le germe $[I_O^H]_s^{H \cap G_{\mathrm{r}}}$ coïncide avec le germe $I_G^H(O)[I_O]_s^{H \cap G_{\mathrm{r}}}$. Indiquons brièvement comment établir ce résultat. On peut, grâce à (3.5.5), supposer s irréductible. Soient $E = F[s]$ et $B = A_E(V)$. La difficulté, nouvelle par rapport à **[R 1]**, consiste à prouver la version « uniforme » (au sens ou l'on ne travaille pas, comme dans **[R 1]**, au voisinage de s dans un sous-groupe de Cartan fixé de H mais au voisinage de s dans H) suivante du Lemma 19 de [HC 1] : il existe des voisinages $\mathcal{V}_H(s)$ et $\mathcal{V}_G(s)$ de s respectivement dans H et G tels que le G-entrelacement formel

$$\{g \in G : g^{-1}\mathcal{V}_H(s)g \cap \mathcal{V}_G(s) \neq \varnothing\}$$

est contenu dans $H\Omega$ pour une partie compacte Ω de G. Notons qu'une telle propriété est fausse pour $s \in G - \widetilde{G}$ irréductible non elliptique. Soit $C = \{sg - gs : g \in A(V)\} \subset A(V)$ et soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans $A(V)$ normalisé par $E^\times$, $\mathcal{B} = B \cap \mathcal{G}$, $k_0 = k_0(s, \mathcal{G})$, $\mathcal{N}(\mathcal{G}) = \mathcal{N}_{k_0}(s, \mathcal{G})$. Puisque $A(V) = C \oplus B$, on peut reprendre la preuve du lemme (4.3.5) et montrer que pour tout entier $n \geq 1 + Sw(E/F)$ où $Sw(E/F)$ désigne l'exposant de Swan de l'extension E/F, on a

$$\{g \in G : g^{-1}(s + J_{\mathcal{B}}^{k_0+n})g \cap (s + J_{\mathcal{G}}^{k_0+n}) \neq \varnothing\} = H(1 + J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G})).$$

Admettons ce résultat et fixons une fonction $\psi \in C_c^\infty(G)$ telle que la fonction $\overline{\psi} \in C_c^\infty(H\backslash G)$ donnée par

$$\overline{\psi}(g) = \int_H \psi(hg)dh \quad (g \in G)$$

où dh est toujours la mesure de Haar sur H qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de H, soit la fonction caractéristique de $H(1 + J_{\mathcal{B}}^n\mathcal{N}(\mathcal{G}))$. Pour $f \in C_c^\infty(s + J_{\mathcal{G}}^{k_0+n})$, on définit la fonction $\phi_f \in C_c^\infty(H)$ par

$$\phi_f(h) = \int_G \psi(g)f(g^{-1}hg)dg \quad (h \in H).$$

Comme dans [**R 1**], on vérifie que

$$\begin{cases} I^G(f, s) = \phi_f(s) \\ I^G(f, y, dg_y) = I^H(\phi_f, y, dg_y) \end{cases}$$

pour tout $y \in s + J_{\mathcal{G}}^{k_0+n}$ tel que $G_y \subset H$ et toute mesure de Haar dg_y sur G_y. En particulier, $I^G(f, y) = I^H(\phi_f, y)$ pour tout $y \in H \cap G_{\mathrm{r}}$. Soit $A_H(s) = \coprod_{i=0}^m O_H(su_i)$ une décomposition (standard ou non) de $A_H(s) = s\mathcal{U}_H$. On peut supposer que $su_i \in s + J_{\mathcal{B}}^{k_0+n}$ $(i = 0, \ldots, m)$. Soit $\{f_{s,i}\}_{i=0}^m \subset C_c^\infty(s + J_{\mathcal{G}}^{k_0+n})$ un jeu de fonctions vérifiant la condition (2) de (3.5.1) pour la décomposition $A_G(s) = \coprod_{i=0}^m O_G(su_i)$. Pour $i = 1, \ldots, m$, soit α_i la constante > 0 définie par

$$\alpha_i\, I^H(\phi_{f_{s,i}}, su_i) = I^G(f_{s,i}, su_i);$$

posant $\phi_i = \alpha_i\phi_{f_{s,i}}$, on a $I^H(\phi_i, su_j) = \delta_{i,j}$ $(0 \leq i,\ j \leq m)$ donc

$$[I^H_{O_H(su_i)}(\cdot)]_s^H = [I^H(\phi_i, \cdot)]_s^H \quad (i = 0, \ldots, m).$$

En définitive, on a montré que

$$[I^H_{O_H(su_i)}]_s^{H\cap G_{\mathrm{r}}} = \alpha_i\, [I^G_{O_G(su_i)}]_s^{H\cap G_{\mathrm{r}}} \quad (i = 0, \ldots, m).$$

En caractéristique nulle, c'est cette propriété qu'utilise Rogawski [**R 1**] pour étendre à $s \in G$ semi-simple le travail d'Harish-Chandra et Shalika pour $s = 1$, [**HC 1**] et [**S**].

En revanche, pour $p > 0$ et $s \in G - \widetilde{G}$ semi-simple irréductible, l'application $O \mapsto H \cap O$ (O orbite de $A_G(s)$, $H = G_s$) ne permet plus d'associer canoniquement les orbites de $A_G(s)$ aux AdH-orbites de $A_H(s)$. Supposons par exemple que $p = 2$ et $N = 4$, et soient $s \in G$ de polynôme minimal $T^2 - \varpi$, $x_1 \in G$ de polynôme minimal $T^4 - \varpi^2$. Soit aussi $u_1 \in \mathcal{U}_H - \{1\}$. Alors on a $A_G(s) = O_G(s) \coprod O_G(x_1)$, $A_H(s) = \{s\} \coprod O_H(su_1)$ mais $H \cap O_G(s) = A_H(s)$ et $H \cap O_G(x_1) = \varnothing$.

CHAPITRE 6

CARACTÉRISATION DES INTÉGRALES ORBITALES SUR G ET THÉORÈME DE DENSITÉ

6.1. Caractérisation

On reprend le plan de l'Appendice 1, 2.e de **[BDKV]**. Rappelons que les techniques développées en caractéristique nulle dans **[V]** utilisant la finitude du nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G, on ne peut les appliquer ici. L'idée consiste à faire jouer aux sous-nappes de G le rôle tenu dans **[V]** par les « couples standards ».

(6.1.1) LEMME. — *Soit $X = X_{\alpha,\beta}$ une sous-nappe de G et soit $\phi : X \to \mathbf{C}$ une application telle que*

(i) $\mathrm{Ad}^*g(\phi) = \phi$ *pour tout* $g \in G$,

(ii) ϕ *est localement constante,*

(iii) il existe une partie compacte $\Omega \subset X$ *telle que* $\mathrm{Supp}(\phi) \subset \mathrm{Ad}G(\Omega)$.

Alors il existe une fonction $\psi \in C_c^\infty(X)$ telle que pour tout $g \in X$ et toute fonction $h \in C_c^\infty(G)$ telle que $\mathrm{Supp}(h|_{\overline{X}}) \subset X$ (où $\overline{X}$ est la fermeture de X dans G pour la topologie ϖ-adique) et $h|_X = \psi$, on ait $\phi(g) = J^G(h,g)$.

Démonstration. — Les conditions (i), (ii), (iii) assurent l'existence d'une partie finie $\mathcal{F} \subset \Omega$ telle que

$$\phi(X) - \{0\} = \phi(\Omega) - \{0\} = \phi(\mathcal{F}).$$

Pour chaque $x \in \mathcal{F}$, soit $\omega_x \subset \mathrm{Ad}G(\Omega)$ le voisinage ouvert, fermé et $\mathrm{Ad}G$-invariant de x dans X défini par $\omega_x = \{g \in X : \phi(g) = \phi(x)\}$; notons Ω_x la partie (compacte) $\Omega \cap \omega_x$ et fixons une fonction $f_x \in C_c^\infty(G)$ telle que

$$f_x|_{\overline{X}} = \mathbf{1}_{\Omega_x}$$

(une telle fonction existe car X est une sous-variété ϖ-adique localement fermée de G). Alors la restriction à X de l'intégrale orbitale $J^G(f_x, \cdot)$ est une fonction localement constante (4.4.2), Ad^*G-invariante et $\mathrm{Supp}(J^G(f_x,\cdot)|_X) \subset \mathrm{Ad}G(\Omega_x) = \mathrm{Ad}G(\Omega) \cap \omega_x$. Par conséquent, pour chaque $x \in \mathcal{F}$, il existe une partie finie $\mathcal{F}_x \subset \Omega_x$ telle que pour tout $g \in \mathrm{Supp}(J^G(f_x,\cdot)|_X)$,

$$J^G(f_x, g) = J^G(f_x, y) \quad (\exists\, y \in \mathcal{F}_x).$$

Soit $x \in \mathcal{F}$. Pour chaque $y \in \omega_x$, soit $\omega_{x,y} \subset \omega_x$ le voisinage ouvert, fermé et $\mathrm{Ad}G$-invariant de y dans X défini par $\omega_{x,y} = \{g \in \omega_x : J^G(f_x,g) = J^G(f_x,y)\}$; notons $\Omega_{x,y}$ la partie (compacte) $\Omega_x \cap \omega_{x,y}$ et fixons une fonction $f_{x,y} \in C_c^\infty(G)$ telle que

$$f_{x,y}|_{\overline{X}} = \mathbf{1}_{\Omega_{x,y}}.$$

Ainsi,

$$J^G(f_x, g) = \sum_{y \in \mathcal{F}_x} J^G(f_{x,y}, g) \quad (g \in X).$$

En particulier, $J^G(f_x,g) = J^G(f_{x,y},g)$ pour tout couple $(y,g) \in \mathcal{F}_x \times \omega_{x,y}$.

Pour chaque $x \in \mathcal{F}$, fixons une famille $\{f_{x,y}\}_{y\in\mathcal{F}_x} \subset C_c^\infty(G)$ comme ci-dessus. Soit alors $f \in C_c^\infty(G)$ la fonction donnée par

$$f = \sum_{x\in\mathcal{F}} \sum_{y\in\mathcal{F}_x} \phi(x) c_{x,y} f_{x,y}$$

où, pour chaque $(x,y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}_x$, $c_{x,y} = (J^G(f_x,y))^{-1} > 0$. Ainsi,

$$J^G(f,g) = \sum_{x\in\mathcal{F}} \phi(x) \sum_{y\in\mathcal{F}_x} c_{x,y} J^G(f_{x,y}, g) = \phi(g) \quad (g \in X).$$

De plus, si $h \in C_c^\infty(G)$ est une fonction telle que $\mathrm{Supp}(h|_{\overline{X}}) \subset X$ et $h|_X = f|_X$, alors $h|_{\overline{X}} = f|_{\overline{X}}$ et

$$J^G(h,g) = J^G(f,g) = \phi(g) \quad (g \in X).$$

Par conséquent, la fonction $\psi = f|_X \in C_c^\infty(X)$ vérifie la propriété voulue. □

Par induction sur le nombre de sous-nappes de G, on prouve grâce à (6.1.1) la caractérisation suivante des intégrales orbitales sur G.

(6.1.2) THÉORÈME. — *Soit $\Phi : G \to \mathbf{C}$ une application telle que*

(i) $\mathrm{Ad}^*g(\Phi) = \Phi$ *pour tout* $g \in G$,

(ii) pour chaque $s \in G$ semi-simple, on a le développement

$$[\Phi]_s^G = \sum_O \Phi(x_O)[J_O]_s^G$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) x_O est un quelconque élément de O,

(iii) il existe une partie compacte $\Omega \subset G$ telle que $\{g \in G : \Phi(g) \neq 0\} \subset \mathrm{Ad}G(\Omega)$.
Alors il existe une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $\Phi(g) = J^G(f,g)$ pour tout $g \in G$.

Réciproquement, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'intégrale orbitale $J^G(f,\cdot)$ satisfait les conditions (i), (ii), (iii) ci-dessus.

Démonstration. — Commençons par la réciproque. Les points (i) et (ii) sont clairs; quant au point (iii), si $f \in C_c^\infty(G)$ alors $\{g \in G : J^G(f,g) \neq 0\} \subset \mathrm{Ad}G(\mathrm{Supp}(f))$.

Soit $x \in G$. Si $s \in G$ est dans l'orbite fermée associée à x, tout voisinage $\mathrm{Ad}G$-invariant de s dans G contient $A_G(s)$ donc contient x. Fixons un tel s et, pour chaque orbite O de $A_G(s)$, fixons une fonction $f_O \in C_c^\infty(G)$ telle que $[J_O(\cdot)]_s^G = [J^G(f_O,\cdot)]_s^G$. Le point (ii) de l'énoncé assure alors l'existence d'un voisinage ω de s dans G, que l'on peut grâce à au point (i) supposer $\mathrm{Ad}G$-invariant, tel que pour tout $g \in \omega$,

$$\Phi(g) = \sum_O \Phi(x_O) J^G(f_O, g)$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) $x_O \in O$. Par suite (4.4.2), la restriction de Φ à chaque sous-nappe X de G est localement constante sur X ; en particulier, $\mathrm{Supp}(\Phi|_X) \subset X \cap \mathrm{Ad}G(\Omega)$.

Soit $G = \coprod_{i=0}^r X_i$ une décomposition standard de G en sous-nappes (cf. 2.7) et pour $i = 1, \ldots, r$, soit N_k la partie fermée de G définie par $N_k = \coprod_{i=0}^k X_i$. Comme le support de la restriction de Φ à la nappe centrale X_0 est contenu dans $X_0 \cap \Omega$, $\phi|_{X_0} \in C_c^\infty(X_0)$ et il existe une fonction $f_0 \in C_c^\infty(G)$ telle que pour tout $z \in X_0$, $\phi(z) = f_0(z) = J^G(f_0, z)$. On procède alors par induction croissante sur l'indice i des sous-nappes de G dans la décomposition $G = \coprod_{i=0}^r X_i$.

Soit $k \in \{0, \ldots, r-1\}$. Supposons qu'il existe une fonction $f_k \in C_c^\infty(G)$ telle que $\Phi(g) = J^G(f_k, g)$ pour tout $g \in N_k$. Soit alors $\Phi_{k+1} : G \to \mathbf{C}$ la fonction définie par

$$\Phi_{k+1}(g) = \Phi - J^G(f_k, g) \quad (g \in G).$$

Il est clair, compte-tenu de la réciproque déjà montrée, que Φ_{k+1} vérifie les conditions (i), (ii), (iii) de l'énoncé. En particulier, la restriction de Φ_{k+1} à la sous-nappe X_{k+1} est localement constante, Ad^*G-invariante et $\mathrm{Supp}(\Phi_{k+1}|_{X_{k+1}})$ est contenu dans $X_{k+1} \cap \mathrm{Ad}G(\Omega')$ pour une partie compacte $\Omega' \subset G$. Montrons, pour pouvoir appliquer (6.1.1), qu'il existe une partie compacte $\Omega_{k+1} \subset X_{k+1}$ telle que $\mathrm{Supp}(\Phi_{k+1}|_{X_{k+1}}) \subset \mathrm{Ad}G(\Omega_{k+1})$.

Soient $s \in G$ semi-simple et $A_G(s) = \coprod_{i=0}^{m_s} O_G(x_{s,i})$ une décomposition standard *compatible* avec la décomposition $G = \coprod_{i=0}^{r} X_i$ au sens suivant : pour $i = 0, \ldots, m_s$, soit $k_{s,i} \in \{0, \ldots, r\}$ l'indice tel que $x_{s,i} \in X_{k_{s,i}}$; on demande que pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $0 \leq i, j \leq m_s$, $i \leq j$ si et seulement si $k_{s,i} \leq k_{s,j}$. Dans ces conditions, reprenant à l'identique la preuve du lemme (3.5.1) en remplaçant les orbites par les sous-nappes et la normalisation « I » par la normalisation « J », on construit un jeu de fonctions $\{f_{s,i}\}_{i=0}^{m_s} \subset C_c^\infty(G)$ tel que

(1) $\mathrm{Supp}(f_{s,i}) \cap N_{k_{s,i}} \subset X_{k_{s,i}}$, $k = 0, \ldots, m_s$,

(2) $J^G(f_{s,i}, x_{s,j}) = \delta_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $0 \leq i, j \leq m_s$. Alors (3.5.2)

$$[J_{O_G(x_i)}(\cdot)]_s^G = [J^G(f_{s,i}, \cdot)]_s^G \quad (i = 0, \ldots, m_s)$$

et il existe un voisinage ouvert $\mathrm{Ad}G$-invariant ω_s de s dans G tel que

$$\Phi_{k+1}(g) = \sum_{i=0}^{m_s} \Phi_{k+1}(x_{s,i}) J^G(f_{s,i}, g) \quad (g \in \omega_s).$$

Pour chaque $s \in G$ semi-simple, fixons comme ci-dessus une décomposition standard $A_G(s) = \coprod_{i=0}^{m_s} O_G(x_{s,i})$ compatible avec la décomposition $G = \coprod_{i=0}^{r} X_i$, un jeu de fonctions $\{f_{s,i}\}_{i=0}^{m_s} \subset C_c^\infty(G)$ et un voisinage ouvert $\mathrm{Ad}G$-invariant ω_s de s (donc de $A_G(s)$) dans G. Ainsi $\mathrm{Ad}G(\Omega') \subset \cup_{s \in \mathcal{F}} \omega_s$ pour une famille finie $\mathcal{F}$ d'éléments semi-simples de G. Pour chaque $s \in \mathcal{F}$, soit $I_s^{k+1} \subset \{0, \ldots, m_s\}$ l'ensemble (non vide car $k \leq r-1$) défini par

$$I_s^{k+1} = \{i \in \{0, \ldots, m_s\} : x_{s,i} \in G - N_k\}.$$

Pour chaque $s \in \mathcal{F}$, on a

$$\Phi_{k+1}(g) = \sum_{i \in I_s^{k+1}} \Phi_{k+1}(x_{s,k}) J^G(f_{s,i}, g) \quad (g \in \omega_s).$$

Soit $S = \mathrm{Supp}(\Phi_{k+1}|_{X_{k+1}})$. Comme S est contenu dans $\mathrm{Ad}G(\Omega')$ donc (par construction) dans $X_{k+1} \cap (\cup_{s \in \mathcal{F}} \omega_s)$, les développements en germes de Φ_{k+1} aux points $s \in \mathcal{F}$ dans G entraînent l'inclusion

$$S \subseteq \bigcup_{s \in \mathcal{F}} \bigcup_{i \in I_s^{k+1}} \{g \in X_{k+1} : J^G(f_{s,i}, g) \neq 0\}.$$

Or, pour chaque $s \in \mathcal{F}$, les conditions (1) et (2) imposées au jeu de fonction $\{f_{s,i}\}_{i=0}^{m_s}$ assurent que le support de la restriction à N_{k+1} des fonctions $f_{s,i}$ ($i \in I_s^{k+1}$) est ou bien vide, ou bien contenu dans la sous-nappe X_{k+1}. Par suite,

$$\Omega_{k+1} = \bigcup_{s\in\mathcal{F}} \bigcup_{i\in I_s^{k+1}} \operatorname{Supp}\left(f_{s,i}|_{X_{k+1}}\right)$$

est une partie compacte de X_{k+1} et $S \subset \mathrm{Ad}G(\Omega_{k+1})$.

On peut donc appliquer (6.1.1) : il existe une fonction $\psi_{k+1} \in C_c^\infty(X_{k+1})$ telle que pour toute fonction $h \in C_c^\infty(G)$ telle que $\operatorname{Supp}(h|_{\overline{X_{k+1}}}) \subset X_{k+1}$ et $h|_{X_{k+1}} = \psi_{k+1}$, on ait

$$\Phi_{k+1} = J^G(h,g) \quad (g \in X_{k+1}).$$

Comme la sous-nappe X_{k+1} est ouverte dans N_{k+1}, il existe une telle fonction h satisfaisant la condition supplémentaire : $\operatorname{Supp}(h|_{N_{k+1}}) \subset X_{k+1}$. Alors la fonction $f_{k+1} \in C_c^\infty(G)$ définie par $f_{k+1} = h + f_k$ vérifie la relation

$$\Phi(g) = J^G(f_{k+1}, g) \quad (g \in N_{k+1}),$$

ce qui achève la preuve du théorème (6.1.2). □

Rappelons qu'on appelle *normalisation* des intégrales orbitales sur G la donnée, pour chaque orbite O de G, d'une mesure $\mathrm{Ad}G$-invariante non nulle sur O.

(6.1.3) THÉORÈME (Variante de (6.1.2)). — *Soit $I'(\cdot,\cdot)$ une normalisation des intégrales orbitales sur G et soient $[I'_O]_s^G$ ($s \in G$ semi-simple, O orbite de $A_G(s)$) les germes définis comme en 3.5 pour cette normalisation. Soit $\widetilde{\Phi} : \widetilde{G}_{\mathrm{r}} \to \mathbf{C}$ une application telle que*

(i) $\mathrm{Ad}^*g(\widetilde{\Phi}) = \widetilde{\Phi}$ pour tout $g \in G$,

(ii) pour chaque $s \in G$ semi-simple et chaque orbite O de $A_G(s)$, il existe une constante $c_O(s) \in \mathbf{C}$ telle que l'on ait le développement

$$[\widetilde{\Phi}]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}} = \sum_O c_O(s)[I'_O]_s^{\widetilde{G}_{\mathrm{r}}}$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$,

(iii) il existe une partie compacte $\Omega \subset G$ telle que $\{g \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}} : \widetilde{\Phi}(g) \neq 0\} \subset \mathrm{Ad}G(\Omega)$.

Alors il existe une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $\widetilde{\Phi}(g) = I'^G(f,g)$ pour tout $g \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}}$.

Réciproquement, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'intégrale orbitale $I'^G(f,\cdot)$ satisfait les conditions (i), (ii), (iii) ci-dessus.

Démonstration. — La réciproque est claire.

Soit $s \in G$ semi-simple. Comme (3.5.2)

$$\mathrm{Ad}^*g\left([I'_O]^G_s\right) = [I'_O]^G_{gsg^{-1}} \quad (O \text{ orbite de } A_G(s),\ g \in G),$$

la proposition (5.6.1) implique que pour chaque orbite O de $A_G(s)$, $c_O(s') = c_O(s)$ pour tout $s' \in O_G(s)$.

Posons $c_O = c_O(s)$ ($s \in G$ semi-simple, O orbite de $A_G(s)$) et soit $\Phi : G \to \mathbf{C}$ la fonction définie par

$$\Phi(x) = \begin{cases} c_{O_G(x)} & \text{si } x \in \mathrm{Ad}G(\Omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est clair que $\Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x)$ pour tout $x \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}}$.

Pour chaque orbite O de G, soit α_O la constante complexe (non nulle) donnée par $I'^G(\cdot, x_O) = \alpha_O J^G(\cdot, x_O)$ (égalité dans $D(G)$) pour tout $x_O \in O$. Soit $\alpha_{J,I'} : G \to \mathbf{C} - \{0\}$ l'application définie par $\alpha_{J,I'}(x) = \alpha_{O_G(x)}$ ($x \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}}$) et soit $\Psi = \alpha_{J,I'}^{-1}\Phi$. Il est clair que Ψ vérifie les conditions (i) et (iii) de (6.1.2). De plus, pour chaque $s \in G$ semi-simple, on a (cf. la remarque (3.5.4))

$$[I'_O]^G_s = \alpha_O^{-1}[\alpha_{J,I'}]^G_s[J_O]^G_s \quad (O \text{ orbite de } A_G(s))$$

donc

$$\begin{aligned} [\Psi]^G_s &= \sum_O \Phi(x_O)[\alpha_{J,I'}^{-1}]^G_s[I'_O]^G_s \\ &= \sum_O \alpha_O^{-1}\Phi(x_O)[J_O]^G_s \\ &= \sum_O \Psi(x_O)[J_O]^G_s \end{aligned}$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) $x_O \in O$. Donc il existe une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $\Psi(x) = J^G(f,x)$ pour tout $x \in G$ (6.1.2). En définitive,

$$\Phi(x) = \alpha_{J,I'}(x)J^G(f,x) = I'^G(f,x) \quad (x \in G)$$

donc $\widetilde{\Phi}(x) = I'^G(f,x)$ ($x \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}}$). □

6.2. Densité

On procède en deux temps. Le lemme suivant découle directement de la proposition (5.6.1).

(6.2.1) LEMME. — *Soit une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $J^G(f,g) = 0$ pour tout $g \in \widetilde{G}_{\mathrm{r}}$. Alors $J^G(f,g) = 0$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. — Soit $s \in G$ semi-simple. Le développement en germes de l'intégrale orbitale $J^G(f,\cdot)$ au point s dans G induit la relation

$$0 = [J^G(f,\cdot)]_s^{\widetilde{G}_r} = \sum_O J^G(f, x_O)[J_O(\cdot)]_s^{\widetilde{G}_r}$$

où O parcourt l'ensemble des orbites de $A_G(s)$ et où (pour chaque O) $x_O \in O$. Par suite, pour chaque orbite O de $A_G(s)$, on a $J^G(f, x_O) = 0$ (5.6.1). Comme $G = \cup_s A_G(s)$, s parcourant l'ensemble des éléments semi-simples de G, $J^G(f,g) = 0$ pour tout $g \in G$. □

De la même manière qu'on a prouvé (6.1.2) grâce à (6.1.1) par induction sur le nombre de sous-nappes, on prouve le théorème (6.2.2) ci-dessous grâce à (6.2.1) par induction sur le nombre de nappes de Dixmier.

(6.2.2) THÉORÈME. — *Soit une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $J^G(f,g) = 0$ pour tout $g \in \widetilde{G}_r$. Alors $T(f) = 0$ pour toute distribution* AdG*-invariante $T \in D(G)$.*

Démonstration. — Soit $G = \coprod_{i=0}^r X_{\alpha_i}$ un décomposition standard de G en nappes de Dixmier et, pour $k = 0, \dots, r$, soit $N_k = \coprod_{i=0}^k X_{\alpha_i}$. Par induction croissante sur l'indice i des nappes X_{α_i}, montrons que $f \in C_0(G)$.

D'après (6.2.1), $J^G(f,g) = 0$ pour tout $g \in G$; en particulier la restriction de f à la nappe centrale $X_{\alpha_0} = N_0$ de G est la fonction nulle sur N_0. Fixons un entier $k \in \{0, \dots, r-1\}$ et supposons que $f|_{N_k} \in C_0(N_k)$. Puisque N_k est fermé dans G, il existe des fonctions $\phi_1, \dots, \phi_m$ dans $C_c^\infty(G)$ et des éléments $g_1, \dots, g_m$ de G tels que

$$\left.\left(f - \sum_{j=0}^m (\phi_j - \mathrm{Ad}^* g_j(\phi_j))\right)\right|_{N_k} \equiv 0.$$

Notant $\psi \in C_c^\infty(G)$ la fonction $\sum_{j=0}^m \phi_j - \mathrm{Ad}^* g_j(\phi_j)$, on a donc

$$\begin{cases} \psi|_{X_{\alpha_{k+1}}} \in C_c^\infty(X_{\alpha_{k+1}}) \\ J^G(\psi, g) = 0 \quad (\forall g \in G) \end{cases}.$$

Les travaux de Gelfand-Kazhdan appliqués au morphisme $\underline{p}_{\alpha_{k+1}} : \underline{X}_{\alpha_{k+1}} \to \underline{Y}_{\alpha_{k+1}}$ (cf. 2.6) entraînent que la restriction de la fonction ψ à la nappe $X_{\alpha_{k+1}}$ appartient à $C_0(X_{\alpha_{k+1}})$ (**[GK]** Prop. 1). Puisque $X_{\alpha_{k+1}}$ est ouvert dans N_{k+1} et N_{k+1} est fermé dans G, il existe des fonctions $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ dans $C_c^\infty(G)$ et des éléments $x_1, \ldots, x_d$ de G tels que

$$\left.\left(\psi - \sum_{j=0}^{d}(\zeta_j - \mathrm{Ad}^* x_j(\zeta_j))\right)\right|_{N_{k+1}} \equiv 0.$$

Donc $f|_{N_{k+1}} \in C_0(N_{k+1})$ et le théorème (6.2.2) est prouvé. □

BIBLIOGRAPHIE

[B] Bourbaki, *Eléments de mathématiques* : Algèbre V, VII et VIII, Hermann, Paris, 1958.

[BDKV] J. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques* in Représentations des Groupes Réductifs sur un Corps Local, Hermann, Col. Travaux en Cours, Paris (1984), 33-117.

[BK] C. Bushnell, P. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Ann. of Math. Studies **129**, Princeton U. Press, Princeton, N.J., 1993.

[BZ] J. Bernstein, A.V. Zelevinsky, *Representations of the group $GL(N,F)$ where F is a local non-archimedean field*, Uspechi Mat. **31** (1976), 5-70.

[C] P. Cartier, *Representations of p-adic groups : a survey*, Proc. Symp. Pure Math. **33**, Part 1, AMS, Providence, R.I. (1979), 111-155.

[DK] P. Deligne, D. Kazhdan, *On representations of local division algebras*, IHES, Tel-Aviv U. and Harvard U., manuscrit.

[GK] I. Gelfand, D. Kazhdan, *Representations of the group $GL(n,K)$ where K is a local field* in Lie Groups and their Representations, Halstead Press, Budapest, 1974.

[He] G. Henniart, *La conjecture de Langlands locale pour GL(3)*, Mém. SMF **11-12** (1984).

[Ho] R. Howe, *The Fourier transform and germs of characters*, Math. Ann. **208** (1974), 305-322.

[HC 1] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lectures Notes in Math. **162**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[HC 2] Harish-Chandra, *A submersion principle and its applications* in Papers dedicated to the memory of V.K. Patodi, Indian Academy of Sciences, Bangalore, and the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1980), 95-102 (Collected papers IV, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984, 439-446).

[J] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, Freeman and Company, San Fransisco, 1974.

[La] G. Laumon, *Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties*, Cambridge U. Press, 1991.

[Le 1] B. Lemaire, Thèse, U. de Paris-Sud, 8 février 1994.

[Le 2] B. Lemaire, *Intégrabilité locale des caractères de $GL(N,F)$ où F est un corps local non archimédien de caractéristique quelconque*, Compositio Math. **100** (1996), 41-75.

[Le 3] B. Lemaire, *Intégrales orbitales sur $GL(N)$ et corps locaux proches*, Ann. Inst. Fourier **46**, (1996), 1027-1056.

[M] I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford U. Press, Oxford, 1979.

[R 1] J. Rogawski, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1980.

[R 2] J. Rogawski, *An application of the building to orbital integrals*, Compositio Math. **42** (1981), 417-423.

[S] Shalika, *A theorem on semi-simple p-adic groups*, Ann. of Math. **95** (1972), 226-262.

[V] M.-F. Vignéras, *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique*, J. Fac. Sci. U. of Tokyo **28** Sec. 14 (1982), 945-961.

[W] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1965.