FRANCIS M. CHOUCROUN

Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 58 (1994)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1994_2_58__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire 58
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 122, 1994, fascicule 3

ANALYSE HARMONIQUE DES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES DE BRUHAT-TITS

Francis M. CHOUCROUN

Résumé.

Ce mémoire traite des groupes d'automorphismes des arbres homogènes ou semi-homogènes, que l'on appelle arbres Bruhat-Tits.

On considérera les sous-groupes doublement transitifs d'automorphismes d'arbre de Bruhat-Tits, ce sont ceux qui sont fermés et opèrent transitivement sur chaque sphère: on en étudie la structure, qui est analogue à celle des groupes réductifs, puis on en fait l'analyse harmonique en termes représentations irréductibles qui admettent un vecteur invariant non nul par le fixateur d'une arête. Cette théorie s'applique, à la fois au groupe de tous les automorphismes de l'arbre et aux groupes p-adiques simples de rang relatif un. Elle a des applications à certains groupes discrets qui opèrent sur ces arbres, notamment aux groupes libres à un nombre fini de générateurs.

Abstract. This memoir is concerned with the automorphism groups of homogeneous and semi-homogeneous, which we call Bruhat-Tits trees.

We call a group doubly transitive, a subgroup which is closed and acts transitively on each sphere: we study its structure, similar to the case for reductive groups, and form harmonic analysis of irreducible representations, tamely ramified in the sense that they admit a non-zero vector, invariant for elements which pointwise fix an edge.

This theory applies both to the group of all automorphisms of the tree, and to the simple p-adic groups of relative rank one.

It has applications to certain discrete groups, which act on these trees, notably to the free groups with a finite number of generators.

Code AMS:20 B 27; 22 E 35; 22 E 40; 22 E 50; 43 A 85; 43 A 90; 60 J 50.

Texte reçu le 24 mars 1993, révisé le 3 juin 1993
Université Paris-Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay-Cedex, France

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire est l'analyse harmonique sur les groupes qui opèrent par automorphismes de façon doublement transitive sur un arbre de Bruhat-Tits.

Suivant la terminologie introduite par Ol'shanskii, on appellera arbre de Bruhat-Tits, soit un arbre semi-homogène[1] de type (q_1, q_2), c'est à dire un arbre bipartite dont au moins la valence d'un sommet est supérieure à 3, soit un arbre homogène de type q avec $q > 1$. Ce dernier cas peut être ramené à un arbre de type $(q, 1)$, grâce à l'artifice qui consiste à rajouter un sommet au "milieu" de chaque arête. Ainsi, ces derniers apparaîtront comme cas particuliers des arbres semi-homogènes.

Pour de tels arbres, on sera amené à étudier l'analyse harmonique du groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes de l'arbre.

Les classes de réseaux de $\mathbb{Q}_p^2$ forment un arbre homogène de type p sur lequel opère $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$, ce qui réalise un analogue non archimédien du demi-plan de Poincaré; cf. [S].

Plus généralement, à un groupe simple G sur un corps local non archimédien est associé par la théorie de Bruhat-Tits un immeuble qui, si le rang relatif de G est un, est un arbre, sur lequel G opère par automorphismes de façon doublement transitive [2]. Dans ce cas, les nombres q_1 et q_2 seront certaines puissances du cardinal du corps résiduel.

Par ailleurs, à certains groupes discrets [3] sont associés des arbres de Bruhat-Tits sur lequels ils opèrent, selon les cas, de façon simplement transitive, sur les sommets (cas des groupes libres), ou sur les sommets de numéro donné, ou sur les arêtes.

L'analyse harmonique de $\mathcal{G}$ permettra d'aider à connaître celle de ces groupes discrets.

Dans ce mémoire on considérera un sous-groupe fermé G du groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes d'un arbre de Bruhat-Tits, qui opère de façon doublement transitive sur les sommets. Ce cadre couvre aussi bien le cas où $G = \mathcal{G}$, que celui des groupes $p-$adique simples de rang un.

Un des objectifs de ce travail sera donc de donner une présentation unifée de résultats concernant ces groupes.

[1] voir définitions 1.1.8 et 1.1.9

[2] voir la définition 1.4.1

[3] voir [Ch-1],[Ch-2],[Ch-3] et [M-W], pour des exemples

L'article d'Ol'shanskii a décrit les représentations de $\mathcal{G}$ en insistant plus précisément sur les représentations des séries discrètes, qui n'apparaissent plus sous cette même forme pour les groupes G que l'on va étudier.

Dans son exposé [Ca-3], Cartier a traité le cas des arbres homogènes et des fonctions sphériques, l'aspect représentation étant sous-jacent. Il a donné la formule de Plancherel pour les fonctions sphériques: j'ai d'ailleurs, dans [Ch-1], utilisé ses résultats pour faire le lien avec le groupe libre. Un des objectifs de ce travail est de donner des démonstrations des résultats annoncés par Cartier dans [Ca-3], qui soient valables dans le cas des arbres semi-homogènes; cependant les méthodes employées seront différentes.

Un des premiers résultats sur les arbres de Bruhat-Tits est que le groupe des automorphismes de l'arbre opère transitivement sur l'espace des bouts[4] de l'arbre. Le théorème 1.6.1, et la proposition 1.6.2 montrent que cette condition caractérise essentiellement, parmi les arbres réguliers numérotés, les arbres homogènes et semi-homogènes.

Enfin, on notera que, pour $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$, la plupart des résultats que nous démontrons sont connus depuis longtemps; voir [G-G-P].

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre, où l'on a rassemblé des résultats classiques sur les arbres de Bruhat-Tits, est consacré ensuite à l'étude de la structure des groupes d'automorphismes doublement transitifs de l'arbre.

Soit $\mathcal{A}$ un arbre de Bruhat-Tits, on désigne par Ω l'ensemble des bouts de $\mathcal{A}$, et par $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{A}$.

On se donne un groupe G d'automorphismes de $\mathcal{A}$ qui est doublement transitif au sens de la définition 1.4.1, c'est à dire un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$ transitif sur chaque sphère.

On remarque qu'on peut choisir en particulier $G = \mathcal{G}$.

On note B_ω le fixateur d'un bout $\omega \in \Omega$; dans le cas où G est un groupe $p-$adique, B est un sous-groupe parabolique propre de G. Il existe un homomorphisme canonique $\nu = \nu_\omega$ de B_ω sur $\mathbb{Z}$, défini par la proposition 1.5.1, dont le noyau N_ω correspond dans le cas du groupe $p-$adique au groupe $B^1 = \cap_{\chi \in X(B)} \ker |\chi|$, où $X(B)$ désignant le groupe des caractères rationnels de B.

On appellera sous-groupe d'Iwahori le fixateur d'une arête de $\mathcal{A}$: pour un tel groupe I, les doubles classes $I \backslash G / I$ sont paramétrées par le groupe diédral infini, d'après la proposition 1.5.4, mais il n'y a pas de système de

[4]voir définition 1.2.1

Tits diédral infini correspondant à I, car, si $q_1 = 1$ ou $q_2 = 1$, le groupe I est d'indice deux dans son normalisateur.

On se fixe une géodésique $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, dont on suppose que le sommet x_0 est de numéro 1, elle définit deux bouts $\pm\infty$, on note $B = B_\infty$ le fixateur du bout ∞, et $N = N_\infty \subset B$, et H le sous-groupe de B qui fixe toute la géodésique, et K le fixateur du sommet x_0, enfin I le sous-groupe d'Iwahori qui fixe l'arête $\{x_0, x_1\}$; on choisit un élément $w \in K$ qui échange les bouts $\pm\infty$, et un élément $\tau \in G$, qui opère sur la géodésique par une translation de pas 2, c'est à dire tel que $\tau(x_n) = x_{n+2}$.

Le théorème 1.5.2 établit les décompositions de Cartan, d'Iwasawa, et de Bruhat pour G : une grande partie de la structure des groupes algébriques de rang un est retrouvée.

On a $G = K\tau^{\mathbb{N}}K = K\tau^{\mathbb{Z}}N = B \cup BwB$, et $H = N \cap wNw^{-1}$.

On ne peut pas décrire en général, un groupe qui soit l'analogue du radical unipotent $R_u(B)$ de B, défini quand G est un groupe $p-$adique; dans ce cas $H = B^1 \cap B^1_-$, pour $B_- = B^w$ qui est un parabolique opposé à B, et $N = HR_u(B)$.

N'ayant pas de sous-groupe distingué de B qui soit un facteur direct de H dans N, on ne pourra pas généraliser la théorie du foncteur de Jacquet pour les représentations de G que nous allons construire. L'espace homogène N/H reste un analogue du corps $p-$adique k, identifié à un sous-groupe unipotent de $PGL_2(k)$.

La proposition 1.5.5 donne une relation explicite entre les décompositions de Cartan et d'Iwasawa, et la proposition 1.5.6 décrit en terme de cocycle sur l'arbre les éléments donnés par la décomposition d'Iwasawa.

La relation fondamentale des groupes de rang un a un analogue donné par la proposition 1.5.7. Elle permettra de définir une transformation sur N/H analogue à l'application définie dans le cas $PGL_2(k)$, sur le corps $p-$adique k par $x \mapsto -x^{-1}$: on déterminera même son Jacobien. Enfin le groupe N admet néanmoins une valuation, définie en fait sur N/H, et la transformation de N/H satisfait à des conditions analogues à celles des valuations des données radicielles des groupes $p-$adiques de rang un.

On détermine, au 1.7, les mesures de Haar, et étudie ensuite les formes linéaires $G-$invariantes sur l'espace des fonctions sur G qui vérifient la condition $f(gb) = f(g)\delta^{-1}(b)$, pour $b \in B$ et δ^{-1} le module de B. Ceci permettra de donner des réalisations différentes des séries de représentations étudiées au chapitre 2. On aborde l'aspect probabilités et martingales au 1.9, et on montre que l'espérance conditionnelle relativement à la tribu $\mathcal{B}^n$, qui est naturellement définie sur l'espace des bouts, se décrit (voir corollaire 1.9.3) par une convolution par la fonction caractéristique renormalisée d'un sous-groupe compact $\mathcal{K}^n$. L'espace des bouts est naturellement un espace homogène sous K. La proposition 1.9.5, qui sera utilisée au chapitre 4, décrit cette convolution à gauche, comme convolution à droite par la fonction caractéristique renormalisée d'un groupe $\Gamma_0(p^n)$, qui est l'analogue d'un groupe de congruences.

Un énoncé de ce type met en valeur le caractère central dans les mathématiques, des objets étudiés dans ce mémoire, des considérations de nature combinatoire ayant un sens tant du point de vue arithmétique que probabiliste.

Les idées issues des probabilités seront encore utilisées pour donner une décomposition de $L^2(\Omega)$ adaptée aux opérateurs d'entrelacements.

L'analogue de la fonction c d'Harish-Chandra, qui intervient en de nombreuses occasions dans la théorie, est donnée ici par

$$c_{q_1,q_2}(\lambda) = \frac{1 + \frac{q_2-1}{\sqrt{q_1 q_2}}\lambda^{-1} - \frac{1}{q_1}\lambda^{-2}}{1-\lambda^{-2}}.$$

Le chapitre 2 est consacré à la définition et à l'étude de représentations généralisant ici les séries principales non ramifiées des groupes $p-$adiques.

On donnera trois réalisations de ces représentations et le dictionnaire qui décrit leur relation.

La première réalisation est obtenue comme représentation induite à partir d'un caractère de B. A un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on associe les caractères λ^ν et $\chi_\lambda = \delta^{\frac{1}{2}}\lambda^\nu$de B, et la représentation Π^λ est l'induite unitaire de B à G du caractère λ^ν, c'est à dire l'induite de χ_λ. Cette représentation sera naturellement unitaire si $|\lambda| = 1$. La $\Pi-$réalisation ainsi décrite est attachée à un bout.

L'espace de la deuxième réalisation est un espace de fonctions sur Ω, sur lequel le groupe G opère de façon canonique. On définit les représentations Ω^s de G, via cette action naturelle de G, par une torsion d'une puissance du noyau de Poisson, c'est la $\Omega-$réalisation qui dépend du choix d'une origine dans l'arbre.

Enfin, l'espace de la troisième réalisation est un espace de fonctions sur N/H, dont la description est inspirée de l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré, généralisée par Gelfand à $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. C'est le $N/H-$modèle. Bien qu'il soit tout simplement l'image sur N des restrictions à Nw des fonctions Π^λ, il est intéressant à étudier.

On montre, voir théorème 2.4.6, que ces représentations sont toujours de longueur au plus 2, et irréductibles si et seulement si $c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}) \neq 0$.

La méthode, pour démontrer ces résultats, est d'utiliser un sous-groupe ouvert compact J, pour lequel le G—module V ainsi que son contragrédient V' possèdent une droite de vecteurs J—invariants cycliques, car cela impliquera l'irréductibilité de la représentation V.

Si $\lambda = (\sqrt{q_1 q_2})^{\pm 1}$, on montrera que ces représentations sont de longueur deux, comportant d'une part la représentation unité, d'autre part une représentation que l'on appelera représentation de Steinberg, dont on a deux variantes. Ces deux représentations ont une droite de vecteurs invariants par I.

Si $\lambda = -(\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^{\pm 1}$, d'après la proposition 2.4.7, ces représentations sont de longueur deux: chacune des représentations est associée à un numéro, celle de numéro i possède, pour tout sous-groupe compact fixant un sommet de numéro i, des vecteurs invariants non nuls, mais n'admet aucun vecteur non nul invariant par le fixateur d'un sommet dont le numéro est différent de i.

Dans le cas des arbres homogènes, pour lesquels on a par exemple $q_2 = 1$, le groupe G possède un homomorphisme ε d'ordre 2, de sorte que la représentation de Steinberg coïncide avec une des représentations du type ci-dessus, tordue par ε; ainsi l'étude de la représentation de Steinberg sera un corollaire de l'étude des représentations sphériques qui sera faite au chapitre 3, le sous-groupe compact maximal choisi sera le normalisateur $N(I)$ du groupe d'Iwahori.

L'étude des propriétés de la représentation de Steinberg dans le cas général est un peu plus délicate, et nécessite une étude approfondie, qui sera faite ici. Les représentations de Steinberg possèdent une droite de vecteurs invariants par le sous-groupe d'Iwahori I. La démonstration de leur irréductibilité fait l'objet de la proposition 2.6.1, le calcul du coefficient de ces représentations est fait dans la section 2.7; d'où on en déduira que les représentations de Steinberg sont de carré intégrable, mais non intégrables, enfin on pourra préciser les équivalences entre les diverses réalisations.

Une description plus géométrique de la représentation de Steinberg, dans le cas homogène, sera donnée, en 3.7.1, en utilisant la formule de Plancherel.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des représentations et des fonctions K—sphériques, pour un sous-groupe compact maximal K de G.

On s'écartera, pour décrire la mesure de Plancherel de $L^2(K\backslash G/K)$, de la méthode initiée par Cartier dans [Ca-3], qui utilise la relation entre la resolvante et la décomposition spectrale attachée à un opérateur de moyenne, cette méthode a été réutilisée par [Fa-P] dans une situation analogue.

Le rôle essentiel dans ce chapitre est joué par la transformation de Satake.

C'est un homomorphisme de l'algèbre $L^1(K\backslash G/K)$, pour la convolution sur G, dans une algèbre de fonctions symétriques sur $\mathbb{Z}$, pour la convolution usuelle du groupe $\mathbb{Z}$, dont les caractères sont bien connus.

Cette transformation de Satake est définie en 3.1.1, par

$$\tilde{f}(\tau^p) = \delta^{\frac{1}{2}}(\tau^p) \int_N f(\tau^p n)\, dn = (q_1 q_2)^{\frac{p}{2}} \int_N f(\tau^p n)\, dn,$$

on démontre qu'elle est donnée, d'après le théorème 3.1.5, à l'aide de la fonction C_{q_1,q_2} dont c_{q_1,q_2} est la transformée de Laplace par

$$\tilde{f}|_{\tau^{\mathbb{N}}} = (\delta^{\frac{1}{2}} f) \star C_{q_1,q_2}.$$

La fonction c_{q_1,q_2} a aussi une interprétation simple en termes d'intégrales d'entrelacement, d'après le lemme 3.1.3.

On calcule alors facilement les fonctions sphériques élémentaires, voir la proposition 3.2.1, et on montre que si $q_1 < q_2$, il existe une représentation T^0 qui est $K-$sphérique de carré intégrable obtenue comme complétée d'un des facteurs de π^λ pour $\lambda = -(\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^{\pm 1}$; on notera qu'en général le degré formel de T^0 n'est pas un multiple entier de celui de la représentation de Steinberg. Les fonctions sphériques permettent aussi de décrire les équivalences entre représentations (corollaire 3.2.3).

On décrit ensuite pour $L^2(K\backslash G/K)$ puis pour $L^2(G/K)$ la formule de Plancherel et la décomposition spectrale.

Les sections suivantes sont consacrées à expliciter le cas homogène: on obtiendra même la décomposition spectrale de $L^2(G/I)$, en utilisant la théorie pour le compact $N(I)$, et dans le cas où le groupe G n'a qu'une seule orbite sur l'arbre, on sera amené à utiliser une théorie des fonctions $\varepsilon - N(I)-$sphériques, qui est une facile extension de la précédente.

Ce chapitre se termine en spécialisant les résultats aux groupes $p-$adiques de rang un, dont on décrit certains, puis par des applications esquissées à certains produits libres de groupes, qui ont beaucoup interéssé des mathématiciens italiens, voir [M-W].

La chapitre 4 est consacré aux opérateurs d'entrelacement, qui sont définis par une intégrale qui converge pour $|\lambda| > 1$, et qui admet des prolongements analytiques. Il faut signaler que ces opérateurs d'entrelacement sont donnés par des noyaux de convolution dans le $N/H-$modèle, voir la proposition 4.2.1, ainsi que dans le $\Pi-$modèle, quand on considère la restriction à K des fonctions de π^λ. Ce dernier modèle, ou sa traduction comme $\Omega-$modèle, permettra une diagonalisation des opérateurs d'entrelacement donnée au théorème

4.3.7. La détermination des séries complémentaires est alors très simple, voir théorème 4.6.1.

Ce chapitre se termine par la détermination de représentations uniformément bornées. Le résultat, qui fait l'objet du théorème 4.6.1, utilise des méthodes d'analyse fine faisant appel aux espaces de Lorentz. Le lecteur attaché à l'étude des fonctions spéciales pourra trouver des résultats nouveaux et intéressants en explicitant les résultats de ce chapitre. L'analogue pour $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$ est bien connu.

Le dernier chapitre fait l'étude des restrictions à B des représentations définies précédemment.

Dans le cas où G est triplement transitif, inspiré par la théorie de Kirillov, nous avons obtenu des résultats simples: les représentations unitaires restent irréductibles si l'arbre est homogène, et si le groupe, comme dans le cas de PGL_2, y a une seule orbite; sinon elles sont somme directe de deux représentations unitaires irréductibles, qui sont orthogonales pour un produit scalaire quasi-invariant par B.

Enfin, on décrit la décomposition spectrale sous B de $L^2(S)$, quand S est l'ensemble des sommets de numéro donné: le résultat est plus intéressant si l'arbre est homogène et s'il n'y a qu'un seul numéro.

Remarque Ces résultats ont déjà été présentés, du moins en partie, lors des exposés faits à Iowa-City en juillet 1986, à Nancy en janvier 1987, au séminaire "groupes réductifs et formes automorphes" à Paris 7, en janvier-février 1988.

Chapitre I: Arbres de Bruhat-Tits et groupes opérant sur ces arbres

Dans ce chapitre, on va étudier la structure de groupes qui opèrent sur un arbre de Bruhat-Tits, et essayer de retrouver sur ces groupes, une partie des propriétés des groupes p-adiques de rang relatif un.

On appliquera ces résultats à l'analyse harmonique de ces groupes, et de certains groupes discrets liés aux arbres, dans les chapitres suivants.

1.1 Arbres

Nous allons donner quelques définitions classiques.

Définition 1.1.1 *On appelle graphe (S, A) la donnée d'un ensemble S dont les éléments sont appelés sommets, et d'un sous-ensemble A de $\mathcal{P}(S)$ formé de parties à deux éléments appelées arêtes.*

Les graphes ainsi définis ne sont pas orientés, et ne possèdent pas d'arêtes multiples.

Définition 1.1.2 *On appelle chemin sur un graphe (S, A), une suite finie, ou infinie, de sommets x_i reliés par une suite, éventuellement vide, d'arêtes, et sans aller et retour, c'est à dire $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$ et $x_i \neq x_{i+2}$ pour tout i.*
On appelle circuit, un chemin $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ avec $x_0 = x_n$ $(n > 2)$.

On dira que le graphe (S, A) est connexe si, pour tout couple de sommets (x, y) de A, il existe au moins un chemin qui les joint, c'est à dire un chemin de la forme $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ tel que $x_0 = x$ et $x_n = y$.

Définition 1.1.3 *On appelle arbre, un graphe connexe et sans circuit.*

Pour un arbre $\mathcal{A}$, il y a une notion naturelle de distance géodésique. La distance géodésique $d_{\mathcal{A}}(x, y)$, notée aussi $d(x, y)$, définie pour $x, y \in S$ est la plus petite longueur des chemins joignant x à y. Pour tout sommet $x \in S$, on a $d(x, x) = 0$.

Pour cette distance d, on notera $B(a, r)$ (resp. $S(a, r)$) la boule fermée (resp. la sphère) de centre $a \in \mathcal{A}$ et de rayon r.

Définition 1.1.4 *Un chemin* $(x_i)_{i\in I}$*, paramétré par un intervalle* I *de* $\mathbb{Z}$*, sur un arbre* $\mathcal{A}$*, sera appelé chemin géodésique, si pour tout* i, j *on a* $d(x_i, x_j) = |i-j|$.

On appelle chemin géodésique infini (resp. doublement infini), un chemin géodésique paramétré par $\mathbb{N}$ *(resp.* $\mathbb{Z}$*).*

On considère un arbre $\mathcal{A} = (S, A)$. Etant donnés deux éléments $x, y \in S$, on vérifie qu'il existe un chemin unique géodésique $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ avec $x_0 = x$, et $x_n = y$: on dira qu'il joint x à y. On peut vérifier que tout chemin fini sur un arbre peut être transformé en géodésique en supprimant des allers et retours (on appelle aller et retour un chemin de la forme (a, b, a) avec $d(a, b) = 1$).

Définition 1.1.5 *On appelle segment, l'ensemble* $\{x_i | i = 0, \dots, n\}$ *des sommets d'un chemin géodésique joignant* x *à* y*, et on le notera* $[x, y]$.

On appelle géodésique (resp. demi-géodésique) l'ensemble $\{x_i | i \in I\}$ *avec* $I = \mathbb{Z}$ *(resp.* $I = \mathbb{N}$*) des sommets d'un chemin géodésique doublement infini (resp. infini).*

Le sommet x_0*, dans le cas d'une demi-géodésique, s'appelle l'origine de la demi-géodésique.*

Proposition 1.1.1 *1) On a pour tout couple de sommets* x, y

$$[x, y] = \{z \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}.$$

2) L'intersection des trois segments $[x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$ *est un ensemble réduit à un sommet* $\{c\}$*, appelé carrefour des trois sommets.*

Corollaire 1.1.2 *La relation "*$d(x, y)$ *est pair" est une relation d'équivatlence.*

Démonstration: En effet 1) est conséquence de l'unicité de la géodésique joignant x à y, elle même conséquence de l'absence de circuit sur un arbre.

Pour 2) on notera (x_i) (resp. (x'_i)) les géodésique partant de x, (resp. y) vers z ; on définit $c = x_j$ où $j = \max(i | x_i = x'_i)$.

Le chemin obtenu en joignant y à c le long de $[x, y]$ composé avec le chemin joignant c à z le long de $[y, z]$ est une géodésique, car il n'y a pas d'aller retour entre y et c, ni entre c et z, et que $x_{i+1} \neq x'_{i+1}$ si $x_i \neq y$ ou $x'_i \neq z$ (autrement ce serait trivial).

Comme sur une géodésique tous les sommets sont distincts, on voit que c est l'unique sommet commun au trois segments.

On voit de plus que l'on a $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z) + 2d(y, c)$, ce qui démontre le corollaire. ∎

Définition 1.1.6 *On appellera automorphisme d'un arbre $\mathcal{A}$ une bijection de l'ensemble des sommets de $\mathcal{A}$ qui est une isométrie pour la distance géodésique.*

Comme les arêtes d'un arbre sont les couples de sommets à distance 1, un automorphisme d'un arbre respecte sa structure, c'est à dire induit une bijection sur l'ensemble de ses arêtes; on pourrait prendre ceci comme définition d'automorphisme, et il ne serait pas difficile de prouver que c'est une définition équivalente.

Définition 1.1.7 *On appelle arbre numéroté, un arbre $\mathcal{A} = (S, A)$ muni d'une application de S sur un ensemble à deux éléments, et pour un tel arbre, on appellera automorphisme un automorphisme de $\mathcal{A}$ qui conserve la numérotation.*

Pour un tel arbre l'ensemble des sommets S s'écrit comme réunion disjointe $S = S_1 \sqcup S_2$, les éléments de S_i étant appelés sommets de numéro i.

On va s'intéresser à une famille particulière d'arbres les arbres homogènes et semi-homogènes.

Pour cela, on se donne deux entiers strictement positifs (q_1, q_2) non tous deux égaux à 1.

Définition 1.1.8 *On appelle arbre semi-homogène de type (q_1, q_2), un arbre (S, A) numéroté par $\{1, 2\}$, et dont l'ensemble des arêtes $A \subset S_1 \times S_2$, c'est à dire que les arêtes ne joignent que des sommets de numéro différents, et tel que tout sommet de $S_i (i = 1, 2)$ appartient à $q_i + 1$ arêtes.(Le cas $q_1 = q_2$ est admis.)*

On peut vérifier que deux arbres de même type sont isomorphes.

On désignera dans la suite $\mathcal{A}_{q_1,q_2}$ un arbre homogène de type (q_1, q_2).

Dans le cas où $q_1 \neq q_2$ une isométrie de l'arbre $\mathcal{A}_{q_1,q_2}$ respecte nécessairement la numérotation: en effet une sphère de rayon 1 centrée en un sommet de numéro i contient $q_i + 1$ éléments, le cardinal d'une sphère de rayon 1 détermine alors le numéro de son centre. Ainsi le numéro d'un sommet devient donc invariant par isométrie.

Définition 1.1.9 *Etant donné un entier $q \geq 2$, on appelle arbre homogène de type q, un arbre dans lequel tout sommet appartient à $q + 1$ arêtes.*

Comme pour les arbres semi-homogènes, les arbres homogènes de même type sont isomorphes.

On notera $\mathcal{A}_q$ un arbre homogène de type q.

L'arbre homogène $\mathcal{A}_q = (S, A)$ peut être considéré comme arbre numéroté, en choisissant un sommet x_0 et en définissant S_1 (resp. S_2), comme l'ensemble des sommets à distance paire (resp. impaire) de x_0 .

Compte tenu de ce que $d(x,y) + d(y,z) + d(x,z) \equiv 0 \bmod 2$, la partition de S obtenue ne dépend pas du sommet x_0 choisi, par contre la numérotation dépend d'un choix supplémentaire.

Comme les arêtes sont de longueur 1, il est évident qu'elles sont composées de deux sommets de numéros différents, on voit donc $\mathcal{A}_q$ devient un arbre de type (q_1, q_2) avec $q_1 = q_2 = q$.

A partir d'un arbre $\mathcal{A}_q = (S, A)$ (non numéroté) nous allons construire un arbre de type $(q, 1)$ en posant $S' = S \sqcup A$, les éléments de S étant de numéro 1 et ceux de A de numéro 2 ; $A' = \{(s, a) \mid s \in a\} \subset S \times A$.

En langage imagé, on ajoute comme sommets les "milieux" des arêtes. Il est clair qu'un sommet s de S appartient aux $q+1$ arêtes $a' = (s, a)$ obtenues en faisant varier a dans l'ensemble des arêtes de $\mathcal{A}_q$ qui contiennent s; de même un sommet a de A appartient aux deux arêtes $a' = (a, s)$ pour $s \in a$.

Les sommets de S se plongent naturellement comme sommets de numéro 1, dans le graphe $G' = (S', A')$. Tout chemin de $\mathcal{A}_q$ se plonge naturellement dans un chemin (de longueur double) dans G': entre deux sommets voisins dans $\mathcal{A}$, on rajoute dans G' le sommet de G' correspondant à l'arête de $\mathcal{A}$ qui les joint .

On vérifie ainsi que G' est connexe, car les sommets de numéro 1 sont connectés, et tout sommet de numéro 2 est lié à un sommet de numéro 1.

Pour montrer qu'il est sans circuit, on remarque qu'un chemin de G', quitte à rajouter une ou deux arêtes (a, s) aux extrémités, provient, sauf des allers et retours du type $s, (a, s), s$ où $s \in S$, d'un chemin de $\mathcal{A}_q$, ce qui exclut l'existence de circuit dans G' .

Ceci montre que G' est un arbre, d'où la proposition

Proposition 1.1.3 *Les sommets d'un arbre $\mathcal{A}_q = (S, A)$ se plongent canoniquement sur les sommets de numéro* 1 *d'un arbre $\mathcal{A}_{q,1}$, et on a*

$$d_{\mathcal{A}_{q,1}}(x, y) = 2 d_{\mathcal{A}_q}(x, y).$$

Définition 1.1.10 *On appellera arbre de Bruhat-Tits un arbre homogène, numéroté ou non, de type fini, ou un arbre semi-homogène de type (q_1, q_2), où (q_1, q_2) sont des entiers positifs dont au moins un est différent de* 1.

Nous conservons cette définition d'arbre de Bruhat-Tits, introduite par Ol'shanski, en hommage "au" mathématicien Bruhat-Tits, bien qu'il n'ait considéré que la réalisation géométrique de ces arbres, qui sont des cas particuliers d' immeubles affines, que les entiers q_1 et q_2 obtenus soient particuliers; voir les tables dans [T-2].

1.2 Arbre achevé

Désormais on se fixera un arbre de Bruhat-Tits $\mathcal{A}$, bien qu'une partie des résultats de cette section soient encore vrais plus généralement pour des arbres localement finis.

Définition 1.2.1 *On appelle bout de l'arbre $\mathcal{A}$, une classe d'équivalence de demi-géodésiques, pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$*

$$(x_i)\mathcal{R}(y_j) \iff (\exists k,\ p \mid x_i = y_{i+k}\ \forall i > p)$$

On note Ω l'ensemble des bouts de $\mathcal{A}$, et $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \bigcup \Omega$ que l'on appelle arbre achevé.

Etant donné un sommet $x \in \mathcal{A}$ et un bout ω, on vérifie qu'il existe une unique demi-géodésique partant de x appartenant à la classe ω. Elle sera notée $[x, \omega]$.

Etant donnés deux bouts ω, ω', on voit qu'il existe des chemins doublement infinis $(x_i \mid i \in \mathbb{Z})$ géodésiques tels que $(x_i|i \in \mathbb{N}) \in \omega$ et que $(x_{-i}|i \in \mathbb{N}) \in \omega'$. En effet on considère les demi-géodésiques $[a, \omega]$ et $[a, \omega']$, que l'on écrit $[a, \omega] = (y_{-i}|i \in \mathbb{N})$ et $[a, \omega'] = (y_{-}|i \in \mathbb{N})$. On considère alors le chemin (y_i paramétré par $\mathbb{Z}$, obtenu en joignant la demi-géodésique $[a, \omega']$ à la demi-géodésique $[a, \omega']$, dont on a changé le sens. On supprime ensuite les allers et retours du chemin (y_i), et on obtient le chemin $(x_i|i \in \mathbb{Z})$. Un tel chemin est dit joindre ω à ω'.

On vérifie ensuite que deux tels chemins doublement infinis géodésiques diffèrent par le paramétrage. Il est clair vu la définition que $[\omega, \omega'] = [\omega', \omega]$ et que les paramétrages ne diffèrent que par le sens et le choix d'une "origine" x_0.

D'une façon générale, pour $a, b \in \overline{\mathcal{A}}$, on appelle segment $[a, b]$, soit le segment déjà défini si $a, b \in S$, soit la demi-géodésique complétée $[a, \omega] \bigcup \{\omega\}$ dans le cas où $a \in S$ et $\omega \in \Omega$, soit la géodésique complétée $[\omega, \omega'] \bigcup \{\omega, \omega'\}$ quand ω et ω' sont des bouts distincts. Enfin, on pose $[\omega, \omega] = \{\omega\}$.

Définition 1.2.2 *Soit X une partie non vide de $\mathcal{A}$ ou de $\overline{\mathcal{A}}$. On dira qu'elle est convexe si elle vérifie*

$$a, b \in X \implies [a, b] \subset X \ .$$

Proposition 1.2.1 *Soit X une partie convexe (non vide) de $\mathcal{A}$ et $y \in \overline{\mathcal{A}}$; on suppose, dans le cas où $y \in \Omega$, que X ne contient pas de demi-géodésique appartenant à y.*

Alors il existe un unique sommet $z \in X$, appelé projection de y sur X, qui vérifie $z \in [x, y]$ pour tout $x \in X$.

Si de plus $y \in \mathcal{A}$, $d(y, z) = \min_{x \in X} d(y, x)$, et pour tout sommet $x \in X$, on a $d(y, x) = d(y, z) + d(z, x)$.

Corollaire 1.2.2 *Soient α, β deux arêtes distinctes, la projection d'un sommet d'une arête sur l'autre arête ne dépend pas du sommet choisi; de plus il existe deux sommets $s \in \alpha, t \in \beta$ tels que le segment $[s, t]$ contient les deux arêtes α et β.*

Démonstration: Supposons d'abord que y est un sommet; la fonction $d(x, y)$ étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet un minimum sur X.

Supposons que ce minimum soit atteint en plusieurs points x et x' de X; on considère le carrefour c des trois sommets y, x, x', on a $c \in [x, x']$, et comme X est convexe, $c \in X$.

Des propriétés des carrefours, on déduit les relations $d(x, c) = d(x, y) - d(y, c)$, $d(x', c) = d(x', y) - d(y, c)$, ainsi que $d(x, x') = d(x, c) + d(c, x')$, ce qui, compte tenu de la minimalité de $d(x, y)$, donne $d(x, x') = 0$ d'où l'unicité de x.

On voit ensuite que le carrefour c des trois sommets y, z, x est z, car $c \in [x, z] \subset X$ et $d(y, c) \leq d(y, z)$, ce qui prouve la relation demandée.

Dans le cas où y est un bout, on choisit un sommet x_0 de X, on considère $[x_0, \omega]$ et sa numérotation (x_n); son intersection avec X est de la forme $[x_0, x_k]$. On vérifie que $x_n \notin X$ pour $n > k$ et que la projection de x_n sur X ne dépend pas de n et est égale à x_k. La démonstration prouve en plus que, pour tout $x \in X$, z appartient à la demi-géodésique $[x, y]$.

Pour démontrer le corollaire, on écrit provisoirement $\alpha = [u, v]$, et l'on note u' la projection de u sur α, et v' celle de v. On considère l'ensemble $[u, u'] \cap [v, v']$, il est non vide, sinon u, u', v', v, u serait un circuit, c'est un segment, comme intersection de segments.

On vérifie ensuite, que la projection d'un sommet w de cette intersection sur β est à la fois u', et v'; en effet $[w, u']$ et $[w, v']$ sont des géodésiques.

Ceci prouve que $u' = v'$. On note $\alpha = [s, s_0]$, et $\beta = [t, t_0]$, où s_0 désigne la projection des sommets de β sur α, et t_0 désigne la projection des sommets de α sur β.

Les propriétés des projections donnent pour $x \in \alpha$, $d(x,t) = d(x,t_0) + 1$, et pour $y \in \beta$, $d(y,s) = d(y,s_0) + 1$.

D'où on en déduit que $[t, t_0] \cup [t_0, s_0] \cup [s_0, s]$ est égal au segment $[t, s]$. On appellera s et t sommet extrémal d'une arête par rapport à l'autre. On remarque enfin que le corollaire que l'on vient d'établir est un cas particulier d'un résultat sur les immeubles, qui s'énonce ainsi: deux chambres sont toujours contenues dans un même appartement. ∎

Corollaire 1.2.3 *Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ trois bouts distincts, alors la projection d'un bout ω_i sur la géodésique $[\omega_j, \omega_k]$ joignant les deux autres est l'unique élément de l'intersection $\bigcap_{j<k}[\omega_j, \omega_k]$, et ne dépend donc pas du sommet projeté*

On l'appelle carrefour des trois bouts $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Démonstration: Ceci se démontre en choisissant $X = [\omega_1, \omega_2]$ et $y = \omega_3$, et en considérant la projection c de y sur X; par construction $c \in X$. Les demi-géodésiques issues d'un sommet de X et allant vers y contiennent c, car les géodésiques $[\omega_i, \omega_3]$, $(i = 1, 2)$ rencontrent $[\omega_1, \omega_2]$, donc contiennent des demi-géodésiques $[c, \omega_3]$.

Ainsi $c \in [\omega_1, \omega_3]$ et $c \in [\omega_2, \omega_3]$, et dans l'intersection des trois géodésiques contient c.

Il reste à montrer que cette intersection est réduite à c : si d est un autre point de cette intersection, comme $d \in [\omega_1, \omega_2]$, $c \in [d, \omega_3]$, d'après la proposition 1.2.1, et comme $d \neq c$, $d \notin [c, \omega_3]$. Comme $d \in [\omega_i, \omega_3]$, pour $i = 1, 2$, on en déduirait que $d \in [\omega_i, c]$ pour $i = 1, 2$.

Le lemme suivant, presque évident, exprime que si ω, ω' sont deux bouts d'un arbre, et x un sommet de cet arbre, tel que $x \in [\omega, \omega']$, alors $[\omega, \omega'] = [\omega, x] \cup [x, \omega']$, et $[\omega, x] \cap [x, \omega'] = x$.

En l'appliquant à c, ω_i, pour $i = 1, 2$, on obtiendrait $d \in [\omega_1, c] \cap [c, \omega_2] = c$, ce qui est absurde.

∎

L'arbre $\mathcal{A}$ est naturellement muni de la topologie discrète.

On va munir $\overline{\mathcal{A}}$ d'une topologie définie par la base d'ouverts constituée des $\{x\}_{x \in \mathcal{A}}$ et des $O_{x,y}$ pour $x, y \in \mathcal{A}$, , qui sont définis par

$$O_{x,y} = \{\alpha \in \overline{\mathcal{A}} |\ y \in [x, \alpha]\}.$$

Pour $x = y$, on a $O_{x,x} = \overline{\mathcal{A}}$. On notera $\Omega_{x,y} = \Omega \cap O_{x,y}$ la trace de cet ouvert sur Ω.

On remarque que si $x' \in [x, y]$ et $x' \neq y$ on a $O_{x',y} = O_{x,y}$. L'égalité $O_{x',y} = O_{x,y}$ est encore vraie si le carrefour des trois sommets x, x', y est différent de y.

Ceci montre, que pour la définition de la topologie, on peut se limiter aux ouverts $O_{x_0,y}$ avec x_0 fixé et aux $\{x\}_{x\in\mathcal{A}}$(ces derniers définissant la topologie discrète sur $\mathcal{A}$).

On remarque que pour tout $n \geq 0$, et x_0 fixé, on a

$$\Omega = \bigsqcup_{d(x_0,y)=n} \Omega_{x_0,y} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{A}} = B(x_0, n) \sqcup \bigsqcup_{d(x_0,y)=n} O_{x_0,y}.$$

On rappelle que $B(a, r)$ désigne la boule fermée de centre a et de rayon r.

On montre [Ca-2]

Proposition 1.2.4 *L'arbre achevé $\overline{\mathcal{A}}$, muni de la topologie décrite ci-dessus, est un espace topologique compact totalement discontinu. L'arbre $\mathcal{A}$ est ouvert dense, et est discret pour la topologie induite. De plus, l'ensemble Ω des bouts est compact.*

Remarques Pour une demi-géodésique $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \omega$ avec $\omega \in \Omega$, la suite x_n de ses sommets converge vers ω dans Ω; ceci permet d'interpréter les bouts comme l'ensemble des points à "l'infini" de S.

Enfin, on remarque que le plongement d'un arbre homogène non numéroté $\mathcal{A}_q$ dans l'arbre semi-homogéne $\mathcal{A}_{q,1}$ associé précédemment, se prolonge continûment aux arbres achevés, et induit un homéomorphisme de l'espace des bouts de $\mathcal{A}_q$ sur celui de $\mathcal{A}_{q,1}$, une demi-géodésique de $\mathcal{A}_q$ définissant naturellement (en rajoutant les sommets traversés de type arête) une demi-géodésique de $\mathcal{A}_{q,1}$.

1.3 Automorphismes de l'arbre

Soit $\mathcal{A} = (S, A)$ un arbre homogène ou semi-homogène, on considère l'ensemble $\mathcal{G}$ des automorphismes de $\mathcal{A}$.

Proposition 1.3.1 *Si $g \in \mathcal{G}$, l'action de g se prolonge naturellement à l'ensemble des bouts Ω et fait opérer continûment $\mathcal{G}$ sur Ω et sur $\overline{\mathcal{A}}$.*

Lemme 1.3.2 *Si $g \in \mathcal{G}$ et $x, y \in S$ on a $gO_{x,y} \cap S = O_{gx,gy} \cap S$.*

Démonstration: Comme g est une isométrie, l'image d'une demi-géodésique $g(x_n) = (gx_n)$ est une demi-géodésique, et deux demi-géodésiques appartenant a un même bout ω ont une image appartenant a un même bout, que l'on note $g\omega$. On voit ainsi que $\mathcal{G}$ opère sur Ω, donc sur $\mathcal{A} \cup \Omega$.

On a clairement l'équivalence $z \in [x, y] \iff gz \in [gx, gy]$, car les segments dans un arbre sont caractérisés de façon métrique, ce qui démontre le lemme.

On remarque que pour un bout $\omega \in \Omega$, on a $\omega \in O_{x,y}$ si et seulement s'il existe dans $O_{x,y}$ une demi-géodésique de la classe ω contenue dans $O_{x,y}$.

Ceci permet de montrer que $gO_{x,y} = O_{gx,gy}$, d'où la continuité de l'action de g sur Ω. ■

L'ensemble $\mathcal{G}$ des automorphismes de l'arbre est un groupe que l'on munit de la topologie de la convergence simple de fonctions de S à valeurs dans S. Le résultat suivant pour les arbres localement finis est classique.

Proposition 1.3.3 *$\mathcal{G}$ est un groupe localement compact dans lequel les stabilisateurs de sous-ensembles finis sont des sous-groupes ouverts et compacts.*

Démonstration: Les sous-groupes $\mathcal{G}_X = \{g \in \mathcal{G} | \ \forall x \in X, \ g(x) = x\}$, pour X fini, sont des ouverts et forment une base de voisinages de l'origine dans $\mathcal{G}$, d'après la définition de la topologie de la convergence simple.

Pour démontrer la proposition, il suffira de prouver que le fixateur d'un sommet est compact, ce que l'on verra dans la proposition suivante, en prouvant que c'est un groupe profini. ■

Lemme 1.3.4 *Soient S l'ensemble des sommets d'un arbre homogène $\mathcal{A}_q$ ou semi-homogène $\mathcal{A}_{q_1,q_2}$, et f une application conservant la distance géodésique de l'ensemble S dans lui même.*

Si $q_1 \neq q_2$ ou si l'arbre est homogène non numéroté, f est un isomorphisme.

Démonstration: On remarque que dans tous les cas f est injective.

Nous allons montrer que f est bijective. Dans le premier cas on choisit un sommet a de numéro i, de valence maximale, sinon un sommet quelconque. Comme, pour tout n, on a $f(S(a,n)) \subset S(f(a),n)$, le numéro de $f(a)$ est le même que celui de a, les sphères de rayon 1 centrées en un sommet de numéro i ayant $q_i + 1$ éléments.

Dans tous les cas, les sphères centrées en a et $f(a)$ de même rayon ont même cardinal, on a ainsi l'égalité $f(S(a,n)) = S(f(a),n)$, d'où la surjectivité de f.

Comme d est conservée par f, les numéros des sommets le sont sous l'hypothèse du lemme. ■

Pour x, y deux sommets de l'arbre ayant même numéro, on note $\mathcal{G}(x,y)$ l'ensemble des automorphismes f tels que $f(x) = y$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}^n(x,y)$, l'ensemble des isométries de $B(x,n)$ sur $B(y,n)$.

Proposition 1.3.5 *1) L'application canonique de restriction de $\mathcal{G}^n(x,y)$ sur $\mathcal{G}^{n-1}(x,y)$ est surjective.*

2) $\mathcal{G}(x,y)$ est la limite projective des $\mathcal{G}^n(x,y)$. En particulier $\mathcal{G}_x$ est un groupe profini.

3) Soient X et Y deux sous-ensembles finis isomorphes de S, c'est à dire tels qu'il existe un paramétrage (x_i) de X et un un paramétrage (y_i) de Y par le même ensemble d'indices I, tels x_i et y_i ait même numéro, et que pour tout $i, j \in I$,$d(x_i, x_j) = d(y_i, y_j)$.

Alors il existe un automorphisme de l'arbre f qui vérifie $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in I$.

On va tout d'abord établir un lemme.

Lemme 1.3.6 *Soient $n \in \mathbb{N}$, x, y deux sommets, de même numéro si l'arbre est numéroté, et f une isométrie de $B(x,n)$ sur $B(y,n)$, et pour tout $z \in S(x,n)$, une bijection g_z de $S(x,n+1) \cap S(z,1)$ dans $S(y,n+1) \cap S(f(z),1)$.*

Alors f prolongée par les g_z définit une isométrie de $B(x,n+1)$ sur $B(y,n+1)$.

Démonstration: On note F l'application ainsi définie; il s'agit de montrer que pour tout couple $u, v \in B(x,n+1)$ on a $d(u,v) = d(F(u),F(v))$. Le cas $u, v \in B(x,n-1)$ est trivial.

On supposera donc d'abord que l'un des sommets $u \in S(x,n+1)$ et que l'autre $v \in B(x,n)$, et on considérera z la projection de u sur $B(x,n)$. On a $d(u,v) = d(z,v) + 1$, de même on a $d(g_z(u), f(v)) = d(f(z), f(v)) + 1$, d'où l'égalité cherchée.

On supposera ensuite que $u, v \in S(x,n+1)$, et on considèrera les projections z (resp. z') de u (resp.v) sur $B(x,n)$. On utilise alors les propriétés de la projection sur les convexes $B(\star,n)$: les géodésiques qui joignent u à v (resp. $F(u)$ à $F(v)$) sont $[u,z'] \cap [z',v]$ (resp. $[F(u), f(z')] \cap [f(z'), F(v)]$, car v (resp. $F(v)$) est extérieur à $[u, z']$ (resp. $[F(u), f(z')]$). On a donc $d(u, v) = d(u, z') + 1$ et $d(F(u), F(v)) = d(F(u), f(z')) + 1$. On utilise alors le cas précédent pour conclure. Le lemme est ainsi démontré.

Dans tous les cas, il y a $(r!)^{\mathrm{card}(S(x,n))}$ extensions possibles de f, où la valence d'un sommet de $S(x, n)$ est égale à $r + 1$.

Il reste à démontrer la proposition.

Le 1) est clairement établi.

Le 2) est conséquence de 1); on peut remarquer que la topologie de la convergence simple coïncide sur l'ensemble profini $\mathcal{G}(x, y)$ avec celle qui est définie par la limite projective des ensembles finis $\mathcal{G}^n(x, y)$.

Pour établir 3) on suppose d'abord X et Y convexes. On remarque d'abord que la projection des x_i sur la boule $B(x_0, r)$ est dans X, car l'intersection de convexes est convexe: soit $x_{j(i,r)}$ cette projection. Comme elle est définie de façon métrique, la projection de y_i sur la boule $B(y_0, r)$ est $y_{j(i,r)}$.

On partira de x_0 et on démontrera par récurrence qu'il existe, pour tout k, un isomorphisme f_k de $B(x_0, k)$ dans $B(y_0, k)$ telle que $f_k(x_j) = y_j$ si $d(x_0, x_j) \leq k$.

Pour cela, on suppose f_p défini, on appliquera le lemme, en choisissant des g_z, $z \in X \cap S(x_0, p)$, qui vérifient $g_z(x_j) = y_j$ pour $x_j \in S(x_0, p+1) \cap S(z, 1)$. Ceci est possible, car si $z = x_m$ l'ensemble des éléments de $X \cap S(x_0, p + 1)$ qui se projettent en x_m sur $B(x_0, p)$ a le même cardinal et est paramétré par le même ensemble d'indices que l'ensemble des $Y \cap S(y_0, p + 1)$ qui se projettent en y_m sur $B(y_0, p)$.

Par ce procédé on peut prolonger f_p à tout $X \cup B(x_0, p + 1)$, ce qui démontre l'hypothèse de récurrence.

On prolonge ensuite f_n en un automorphisme à l'aide de 2). On se ramènera au cas convexe en remplaçant les ensembles par leurs enveloppes convexes, et en utilisant le lemme suivant. ∎

Lemme 1.3.7 *1) Si X est un ensemble fini dans S, l'ensemble $\bigcup_{x,y \in X}[x, y]$ est convexe, et il est donc l'enveloppe convexe de X.*
2) Si deux ensembles finis X et Y sont isomorphes, alors leurs enveloppes convexes le sont.

Démonstration: Le premier point se démontre en utilisant la propriété suivante des arbres. Etant donnés trois points a, b, c, on a $[a, b] \subset [a, c] \cup [b, c]$. On part de $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$, on voit en itérant la remarque précédente que x, y sont dans l'enveloppe convexe de trois sommets, et ensuite que le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans l'un des trois segments liant ces trois sommets.

Le deuxième point s'établit de proche en proche. On part de $X = X_0$ isomorphe à $Y = Y_0$ par g, on suppose X_i isomorphe à Y_i par g_i prolongeant g. On considère $X_{i+1} = X_i \cup [a,b]$ et $Y_{i+1} = Y_i \cup [g(a), g(b)]$, pour deux sommets $a, b \in X$. On vérifie qu'il existe un et un seul isomorphisme, noté g_{i+1}, qui prolonge g_i et l'isométrie naturelle des intervalles $[a,b]$ sur $[g(a), g(b)]$ qui envoie a sur $g(a)$. ∎

Remarque Les résultats précédents montrent la grosseur du groupe $\mathcal{G}$. La description de $\mathcal{G}$ donnée dans [Ch-4] permet aussi de s'en convaincre.

Proposition 1.3.8 *Soit K un sous-groupe compact d'automorphismes d'un arbre semi-homogène. Alors K a un point fixe dans l'arbre.*

Démonstration: On va démontrer que K a une orbite réduite à un point.

On commence par remarquer que si x est un sommet, alors l'ensemble Kx est fini. En effet K_x le fixateur dans K du sommet x est un sous-groupe ouvert, comme trace sur K du groupe $\mathcal{G}_x$ qui est ouvert, l'ensemble K/K_x est donc fini. Comme il paramètre l'orbite sous K du sommet x, on en déduit que Kx est fini.

La proposition sera démontrée, si on prouve qu'une orbite de diamètre minimal est réduite à un point. Pour cela, à une orbite finie X non réduite à un point, on va associer une orbite X' de diamètre strictement inférieur. On considère l'ensemble Y des couples de sommets de X à distance maximum, et Z l'ensemble des milieux des arêtes de Y. On remarque tout d'abord, que Y est stable sous l'action de K. En effet si $x, y \in X$ avec $d(x,y) = \mathrm{diam}(X)$, clairement $k(x), k(y)$ vérifient les mêmes conditions. Comme X est une orbite sous K, ses sommets sont de même numéro. Deux sommets de X sont à distance paire, ainsi le milieu du segment défini par ces sommets est bien défini. On notera Z l'ensemble des milieux des segments de Y. On remarque K stabilise Z, car si deux couples de Y sont transformés par un élément K, les segments le sont aussi, de même que leur milieux, car ces objets sont définis de façon métrique. Il ne reste plus qu'à choisir X' une orbite contenue dans Z, et à vérifier que $\mathrm{diam}(Z) < \mathrm{diam}(X)$.

On pose $\mathrm{diam}(X) = 2n$. Soient $(x,y), (x',y') \in Y$, m le milieu de $[x,y]$ et m' celui de $[x',y']$. Montrons que l'on a $[x,y] \cap [x',y'] \neq \emptyset$. Supposons le contraire, alors la projection d'un sommet de $[x,y]$ sur $[x',y']$ ne dépend pas du sommet choisi. Notons $p \in [x,y]$ la commune projection des sommets de $[x',y']$, de même $q \in [x',y']$ celle des sommets de $[x,y]$. (Les deux segments jouent des rôles symétriques.) On vérifie sans peine que si $u = x$ ou $u = y$, et $v = x'$ ou $v = y'$, on a $d(u,v) = d(u,p) + d(p,q) + d(q,v)$, d'où l'on déduit que l'une des quatre distances $d(u,v) \geq 2n + d(p,q)$, ce qui serait absurde, car $d(u,v) \leq \operatorname{diam}(X)$.

Il existe donc un sommet s commun aux deux segments. Ce sommet s peut être choisi différent des extrémités. Sinon les deux segments seraient deux segments contigus, et deux extrémités seraient à distance $4n$, plus grande que le diamètre de X.

Clairement $d(m,s) \leq n$, $d(m',s) \leq n$, et au moins une de ces expressions est différente de n, car l'égalité $d(m,s) = n$ est équivalente à ce que s est une extrémité du segment, de même avec m'. Comme on a $d(m,m') \leq d(m,s) + d(m',s)$, on en déduit que $\operatorname{diam}(Z) < 2n$. ∎

Remarque Ce résultat est manifestement faux sur un arbre homogène, car il existe dans $\mathcal{G}$ des éléments involutifs qui échangent deux sommets voisins, et qui ne fixent aucun sommet.

En considérant l'arbre $\mathcal{A}_{q,1}$, on obtient

Proposition 1.3.9 *Soit K un sous-groupe compact d'automorphismes d'un arbre homogène. Alors, ou bien K a un point fixe dans l'arbre, ou bien K stabilise un arête et permute ses sommets.*

On notera désormais $\mathcal{G}_{q_1,q_2}$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{A}_{q_1,q_2}$, $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_{q,1}$ celui de l'arbre homogène non numéroté $\mathcal{A}_q$, et $\mathcal{G}_q^+ = \mathcal{G}_{q,q}$ le sous-groupe des automorphisme de $\mathcal{A}_q$ qui conservent la numérotation.

Retour aux arbres homogènes.

On se donne un arbre homogène $\mathcal{A}_q$, avec ou sans numérotation, on a vu que l'ensemble des bouts est le même dans les deux situations, et que c'est encore le même pour $\mathcal{A}_{q,q}$ et $\mathcal{A}_{q,1}$. La proposition précédente montre que $\mathcal{G}_q^+$, qui s'identifie à $\mathcal{G}_{q,q}$, est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{G}_q$, qui s'identifie à $\mathcal{G}_{q,1}$.

Exemples.

On va donner des exemples de groupes qui opèrent naturellement sur des arbres homogènes, ou semi-homogènes qui sont définis de manière "concréte", ce qui donnera des exemples de sous-groupes d'un groupe des automorphismes d'un arbre.

Exemple 1. On considère un corps local non archimédien k, dont on note $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers, et $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel. On considère un espace vectoriel V de dimension 2 sur k, et le groupe linéaire $GL(V)$, dont le centre Z est formé des homothéties par les scalaires de $k^\star$. On considère le groupe quotient $G = GL(V)/Z$.

On appelle réseau un sous-$\mathfrak{O}-$module de rang 2 de V. Le groupe $GL(V)$ opère sur l'ensemble des réseaux de V. On considérera l'ensemble S des classes de réseaux sous l'action de Z. Alors S sera l'ensemble des sommets d'un graphe, dont les arêtes sont les couples Λ, Λ' dont deux représentant $L \in \Lambda$ $L' \in \Lambda'$ vérifient

$$[L : L \cap L'] = [L' : L \cap L'] = q.$$

On peut encore exprimer que les sommets voisins de Λ sont ceux dont un représentant L' vérifie

$$L \supset L' \supset \varpi L,$$

où ϖ est une uniformisante, c'est-à-dire un générateur de l'idéal maximal de l'anneau d'entiers $\mathfrak{O}$. Ainsi les sphères unité ont une structure de droite projective sur $\mathbb{F}_q$; chaque sommet est donc lié à $q + 1$ sommets. On obtient ainsi un arbre homogène de type q.

On vérifie que l'ensemble des bouts est l'ensemble des droites vectorielles de V, c'est une droite projective sur k, l'action de G étant l'action canonique induisant les homographies.

Les demi-géodésiques se décrivent ainsi: étant donné un réseau L et une droite vectorielle D, il existe toujours une base (e_1, e_2) de V telle que $L = \mathfrak{O}e_1 + \mathfrak{O}e_2$ et $D = ke_1$. La suite de réseaux $L_n = \mathfrak{O}e_1 + \mathfrak{P}^n e_2$, où $\mathfrak{P} = \varpi\mathfrak{O}$, est la demi-géodésique issue de la classe de L allant vers le bout D. Une classe de réseau Λ sera sur la géodésique reliant D à D', s'il a un représentant L qui s'écrit $\mathfrak{O}e_1 + \mathfrak{O}e_2$ avec $D = ke_1$ et $D' = ke_2$.

On sait que $PGL(2, k)$ est triplement transitif sur $\mathbb{P}^1(k)$, il l'est sur Ω: on remarque ensuite qu'un automorphisme de l'arbre est déterminé par son action sur l'ensemble des bouts, car tout sommet de l'arbre x est le carrefour de trois bouts distincts $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Les trois bouts $g(\omega_1), g(\omega_2), g(\omega_3)$ restent distincts et leur carrefour est le sommet $g(x)$.

On peut ainsi caractériser les éléments de $PGL(V)$: parmi tous les automorphismes de l'arbre, ce sont ceux qui opèrent par homographie sur l'espace des bouts quand on le munit de sa structure de droite projective sur k. Par ailleurs, compte tenu de ce qu'une homographie qui fixe trois bouts est l'identité, on voit que le groupe des automorphismes de l'arbre est beaucoup plus gros que $PGL(V)$. Cet énoncé est précisé dans [Ch-4].

Exemple 1'. On considère une algèbre à division D de dimension finie d^2 sur son centre un corps local non archimédien k, dont on note q le cardinal du corps résiduel.

On note $\mathfrak{O}$ l' ordre maximal de D, et on considère un D-espace vectoriel (à droite par exemple) V de dimension 2. On fait opérer le groupe linéaire $GL(V)$ à gauche, et l'on considère le groupe $G = PGL(V)$, quotient du groupe linéaire $GL(V)$ par son centre, constitué des homothéties par les éléments de k^*. On a une situation analogue à celle de l'exemple 1.

Pour définir les sommets de l'arbre, qui sera homogène de type q^d, on considère l'ensemble des $\mathfrak{O}$-réseaux, sur lequel le groupe $GL(V)$ opère naturellement à gauche, le corps D^* y agit par multiplication à droite, mais de façon non $D-$linéaire. Cependant l'action de k^* est la même si on la considère comme une homothétie agissant à gauche, ou comme une multiplication à droite par un élément (central) de D^*.

L'ensemble des sommets de l'arbre est l'ensemble quotient de l'ensemble des $\mathfrak{O}$-réseaux par l'action droite de D^*, et on vérifie que le groupe quotient $PGL(V)$ y opère simplement transitivement. On vérifie que l'ensemble des bouts s'identifiera à l'ensemble des droites vectorielles de V. Ce groupe sera noté $PGL_2(D)$, quand V est l'espace vectoriel canonique D^2.

A la fois dans les cas des exemples 1 et $1'$, on peut considérer dans $PGL_2(D)$ (resp. $PGL_2(k)$) le sous-groupe $PGL_2^\circ(D)$ (resp. $PGL_2^\circ(k)$) image des éléments de $GL_2(D)$ (resp. $GL_2(k)$) dont la valuation du déterminant de Dieudonné est paire (la valuation étant triviale sur les commutateurs passe à l'abélianisé). Ce groupe opère sur un arbre semi-homogène de type (q^d, q^d) (resp. (q, q).) Enfin on peut considérer le groupe $PSL_2(D)$ (resp. $PSL_2(k)$) qui est un sous-groupe du précédent.

Exemple 2. On considère un groupe G simple ou quasi-simple, défini sur un corps local non archimédien, de rang relatif 1: la théorie de Bruhat-Tits lui associe un immeuble, qui est ici un arbre semi-homogène, sur lequel G opère, d'où un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de l'arbre, qui est un plongement, quand le groupe G est simple. On va expliciter cinq nouveaux cas, les groupes $SU(3)$, qui seront des groupes quasi-déployés, les groupes $SU(4)$ de rang un, dans ces cas les arbres associés dépendent de la ramification de l'extension quadratique considérée, enfin un groupe $SO(Q)$, pour une forme quadratique Q d'indice 1 dans un espace de dimension 5, ce qui donnera un groupe qui n'est pas quasi-déployé.

Exemple 3. On se donne Γ un groupe libre à un nombre fini de générateurs muni d'une présentation, ou plus généralement un produit libre

$$\Gamma = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ldots * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 * \ldots * \mathbb{Z}/2$$

avec r facteurs $\mathbb{Z}$ et s facteurs $\mathbb{Z}/2$; (le cas du groupe libre correspond à $s = 0$). On se donne pour chacun des facteurs $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/2$) un générateur ε_i $(i = 0, \ldots, r\ )$ (resp. σ_j $(j = 1, \ldots, s)$).

Γ est engendré comme monoïde par

$$T = \{\varepsilon_i, \varepsilon_i^{-1}, \sigma_j\ ,\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s\},$$

avec les seules relations $\varepsilon_i \varepsilon_i^{-1} = \varepsilon_i^{-1} \varepsilon_i = \sigma_j^2 = 1$.

On note $|\gamma|$ la longueur de l'élément $\gamma \in \Gamma$ dans le monoïde, et pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on note $d(\gamma_1, \gamma_2) = |\gamma_1^{-1}\gamma_2|$.

L'ensemble Γ apparait comme l'ensemble des sommets d'un graphe, le graphe de Cayley relatif à T, qui est ici un arbre homogène de type $2r + s - 1$, et pour lequel la distance géodésique est la distance d définie ci-dessus. Le groupe Γ y opére de façon isométrique par la translation à gauche $(\gamma, x) \mapsto \gamma x$ et de façon simplement transitive. (Cette remarque a été exploitée dans ma note [Ch-1]).

Enfin les bouts correspondent aux mots réduits infinis.

Dans [Ch-2], on construit des groupes comme ci-dessus, dont on donne des plongements comme sous-groupes discrets à quotients compacts de groupes $PGL(2)$, compatibles avec les structures d'arbre homogène.

Ces résultats se généralisent partiellement dans le cas des groupes dont l'arbre est homogène. Voir[Ch-3].

Exemple 4. Soit Γ un produit libre de $k + 1$ groupes H_i d'ordre $r + 1$, par exemple des groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/(r + 1)\mathbb{Z}$, avec k et r non tous deux égaux à 1.

Contrairement à ce qui a été fait pour le produit libre des groupes cycliques par l'école italienne, voir dans [M-W] des références, il ne faut pas considérer le graphe de Cayley de Γ (qui n'est pas en général un arbre), mais le graphe suivant, dont l'ensemble des sommets est

$$S = S_1 \sqcup S_2 \text{ avec } S_1 = \Gamma,\ S_2 = \bigsqcup_{i=1,\ldots,k} \Gamma/H_i,$$

et dont l'ensemble des arêtes

$$A = \{(g, g'H_i) \mid i = 1, \ldots, r + 1,\ g \in g'H_i\} \subset S_1 \times S_2.$$

Chaque sommet de type 1 est de valence $k + 1$, et chaque sommet de type 2 est de valence $r + 1$; comme le groupe Γ est le produit libre des groupes

H_i, le graphe obtenu est un arbre semi-homogène de type (k, r), sur lequel Γ opère, via la multiplication à gauche, par des isométries, de façon simplement transitive sur les sommets de type 1.

On va expliciter les géodésiques de longueur paire issue de l'origine e. On se donne un élément $g = h_1 \dots h_n$ où $h_i \in H_{j_i} - \{e\}$, et où le mot $(h_1, \dots, h_n)$ est réduit, c'est à dire que $j_i \neq j_{i+1}$. On considère la suite (x_k), pour $k = 1, \dots, 2n$ et où $x_0 = e$,$x_{2k} = h_1 \dots h_k$, et $x_{2k+1} = x_{2k} H_{j_{k+1}}$: c'est une géodésique.

On peut encore exprimer le fait qu'une suite d'éléments (g_i) de Γ est la suite des sommets d'ordre pair d'une géodésique sous la forme suivante. Soit l'ensemble $B = \cup H_i - \{e\}$, les éléments de Γ sont les mots en B, un mot $(h_1, \dots, h_n)$ sera réduit de longueur n, si on a $h_k h_{k+1} \notin B \cap \{e\}$. Dans ce cas, la suite $g_k = h_1, \dots, h_k$, pour $k = 1, \dots, n$, est formée des sommets de numéro 1 d'une géodésique.

Exemple 5. Soit Γ un produit libre $G_1 * G_2$ de deux groupes finis, G_1 d'ordre $k_1 + 1$ et G_2 d'ordre $k_2 + 1$. On considère le graphe dont l'ensemble des sommets est la réunion $S = S_1 \sqcup S_2$ avec $S_1 = \Gamma/G_1$, et $S_2 = \Gamma/G_2$, et dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble Γ, identifié aux couples (gG_1, hG_2), avec $gG_1 \cap hG_2 \neq \emptyset$.

On vérifie, que c'est un arbre semi-homogène de type (k_1, k_2), que Γ y opère, via la multiplication à gauche, par des automorphismes, et que cette action est simplement transitive sur les arêtes de l'arbre. Dans cette situation, on peut considérer le sous-groupe Γ_0 de Γ, qui est le noyau de l'homomorphisme de Γ dans G_1 qui prolonge l'identité de G_1 et qui vaut l'élément neutre pour tout élément de G_2. On vérifie que Γ_0 est le produit libre des $k_2 + 1$ groupes hG_1h^{-1} pour $h \in G_2$, et que $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes G_2$. Ainsi, les arbres construits dans les exemples 4 et 5 coïncident.

Remarque Dans ces trois exemples, le groupe Γ est discret à quotient compact dans le groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes de l'arbre, et comme ensemble peut s'identifier à un $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est le fixateur d'un sommet ou d'une arête, et la multiplication à gauche dans Γ s'interprète comme la restriction à Γ, de l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Dans [Ch-3], on a généralisé les résulats qui ont été établis dans le cas de l'arbre homogène, et on a construit, pour un certains nombres de groupes $\mathfrak{p}$-adiques de rang un, à qui sont associés des arbres, des sous-groupes qui opèrent simplement transitivement sur les sommets d'un numéro donné, et dans de meilleurs cas des sous-groupes qui opèrent simplement transitivement sur les arêtes.

1.4 Groupes faiblement doublement transitifs

Les conditions de la proposition suivante seront satisfaites pour une large classe de groupes, qui seront l'objet de ce mémoire.

Proposition 1.4.1 *Pour un sous-groupe G de $\mathcal{G}$, il y a équivalence entre* (1) *et* (2)*:*
(1) *Etant donnés deux couples de sommets $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathcal{A}^2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$ et que x_1 et y_1 soient de même numéro, alors il existe un élément $g \in G$ tel que $g(x_1) = y_1$ et $g(x_2) = y_2$.*
(2) *G est transitif sur chaque sphère, c'est à dire, étant donnés trois sommets x, y, z qui satisfont à $d(x, y) = d(x, z)$, alors il existe $g \in G$ tel que $g(x) = x$, $g(y) = z$.*

Si de plus G est fermé dans $\mathcal{G}$ ces conditions sont équivalentes à (3):
(3) *Etant données deux géodésiques pointées par des sommets de même type $x_0 \in [\omega_1, \omega_2]$, et $x'_0 \in [\omega'_1, \omega'_2]$, il existe $g \in G$ avec $g(x_0) = x'_0$ et $g(\omega_i) = \omega'_i$ pour $i = 1, 2$.*

Démonstration: Comme 1) implique trivialement 2), on va montrer la réciproque: on se donne deux couples de sommets vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Comme x_1 et y_1 sont de même numéro, leur distance est paire, le milieu z de $[x_1, y_1]$ existe. D'après la condition 2), il existe $g \in G$ tel que $g(x_1) = y_1$ et $g(z) = z$. Pour $y'_2 = g(x_2)$ on a $d(y_1, y'_2) = d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$. Donc y_2 et y'_2 étant sur une même sphère centrée en y_1, il existe $g' \in G$ tel que $g'(y_1) = y_1$ et $g'(y'_2) = y_2$. L'élément $g'g$ va convenir, car $g'g \in G$ et $g(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2$.

Pour démontrer que (1) implique (3), on écrit les géodésiques $[\omega_1, \omega_2] = \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $[\omega'_1, \omega'_2] = \{x'_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. La condition (1) s'applique aux deux couples $(x_{-n}, x_n), (x'_{-n}, x'_n)$, car x_n et x'_n sont de même numéro, chacun étant à distance n d'un sommet de même numéro, et puisque l'on a $d(x_{-n}, x_n) = 2n + 1 = d(x'_{-n}, x'_n)$.

Il existe donc $g_n \in G$ tel que $g_n(x_n) = x'_n$ et $g_n(x_{-n}) = x'_{-n}$. Comme les sommets des intervalles $[x_{-n}, x_n]$ et $[x'_{-n}, x'_n]$ sont définis par les distances aux extrémités, on a encore $g_n(x_k) = y_k$ pour $|k| \leq n$.

On sait que $\mathcal{G}(x_0, x'_0)$ est une sous-ensemble compact de $\mathcal{G}$; la suite g_n a donc une valeur d'adhérence g, et pour un tel g on a $g(x_k) = x'_k$. Comme G

est fermé, $g \in G$, d'où (3).

Il est clair que (3) implique (2), car deux couples de sommets peuvent se plonger dans deux géodésiques pointées. ∎

Définition 1.4.1 *Soit G un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}$.*

On dira que G est faiblement 2-transitif, ou faiblement doublement transitif, s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition précédente.

Plus généralement, on dira que G est faiblement k-transitif, si étant donnés deux ensembles de k sommets X et Y isomorphes et donc paramétrés par $(1, \ldots, k)$, il existe un élément $g \in G$ tel que $g(x_i) = y_i$, pour $1 \leq i \leq k$.

Dans ce mémoire, l'adverbe "faiblement" pourra être omis, les $n-$uplets pouvant se correspondre par automorphismes étant nécessairement isomorphes.
Remarque La proposition 1.3.5 montre que le groupe $\mathcal{G}$ est, pour k aussi grand que l'on veut, $k-$faiblement transitif.

Proposition 1.4.2 *Un sous-groupe fermé G est faiblement triplement transitif si et seulement si, étant donnés deux triplets de bouts distincts dont les carrefours sont de même numéro, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et $(\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$, il existe $g \in G$ tel que $g(\omega_i) = \omega'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.*

Démonstration: Soient c (resp. c') le carrefour des trois bouts $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (resp. $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$), on notera x_n, y_n, z_n (resp.x'_n, y'_n, z'_n) des paramétrisations des demi-géodésiques $[c, \omega_1], [c, \omega_2], [c, \omega_3]$ (resp. $[c, \omega'_1], [c, \omega'_2], [c, \omega'_3]$), telles que $x_0 = y_0 = z_0 = c$ (resp. $x'_0 = y'_0 = z'_0 = c'$).

On considère des isométries f_n telles que $f(x_n) = x'_n, f(y_n) = y'_n, f(z_n) = z'_n$. Par convexité, on a $f(x_k) = x'_k, f(y_k) = y'_k, f(z_k) = z'_k$ pour $k \leq n$. On conclut comme dans le cas des groupes faiblement 2-transitifs.

Si deux triplets sont isométriques, leurs carrefours sont de même numéro, et ces triplets pourront être chacun sur les demi-géodésiques issues du carrefour de ces triplets, allant vers trois bouts distincts, et en même position. Ceci permet de montrer la réciproque. ∎

Remarque Un groupe opérant sur un arbre homogène non numéroté $\mathcal{A}_q$ peut être considéré comme sous-groupe d'un groupe $\mathcal{G}_q$, ou comme sous-groupe d'un groupe $\mathcal{G}_{q,1}$ correspondant à l'arbre numéroté $\mathcal{A}_{q,1}$ canoniquement associé.

Proposition 1.4.3 *Pour un groupe G opérant sur un arbre homogène non numéroté de type q, il est équivalent d'être faiblement 2-transitif considéré comme sous-groupe de $\mathcal{G}_q$ ou comme sous-groupe de $\mathcal{G}_{q,1}$*

Démonstration: L'égalité des groupes $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}_{q,1}$ est claire, donc pour G, être fermé, ne dépend pas du point de vue adopté. Il en est de même pour la transitivité sur les géodésiques pointées. Car si un groupe est transitif sur géodésiques pointées par des sommets de numéro 1, il l'est pour l'ensemble des géodésiques pointées par des sommets de même numéro: en effet, si le sommet n'est pas de numéro 1, choisir le sommet voisin dans la direction du premier bout sur chacune des deux géodésiques. On se contentera alors, dans le cas de l'arbre de type $(q, 1)$, de ne considérer que les géodésiques pointées par des sommets provenant de l'arbre homogène $\mathcal{A}_{q}$,, et il est clair qu'elles correspondent bijectivement aux géodésiques pointées de l'arbre homogène $\mathcal{A}_q$. ■

On a

Proposition 1.4.4 *Pour qu'un sous-groupe G de $\mathcal{G}$ soit fermé il faut et il suffit que $G \cap \mathcal{G}_x$ soit compact pour un sommet x de l'arbre.*

Démonstration: La condition nécessaire est triviale. Montrons la condition suffisante. On remarque que les groupes $G \cap \mathcal{G}(x,y)$, s'ils ne sont pas vides, sont compacts comme translatés de $G \cap \mathcal{G}_x$. Ceci entraînera, vu la topologie de $\mathcal{G}$, la fermeture de G. En effet soit g adhérent à G et $y = g(x)$. L'intersection $G \cap \mathcal{G}(x,y) \neq \emptyset$, soit h un élément de cette intersection. On vérifie que $G \cap \mathcal{G}(x,y) = G \cap h(\mathcal{G}(x))$, qui est compact comme image continue d'un compact. Ainsi, g qui est adhérent à l'ensemble compact $G \cap \mathcal{G}(x,y)$, y appartient, d'où la proposition. ■

Les groupes considérés dans les exemples vérifient cette propriété.

Dans le cas des produits libres considérés dans les exemples $1, 2, 3$, le fixateur d'un sommet est fini.

Dans le cas des groupes sur les corps locaux, le fixateur d'un sommet spécial est, d'après la théorie de Bruhat-Tits, l'ensemble des points à valeurs dans l'anneau des entiers $\mathfrak{O}$ d'un groupe algébrique, et est donc compact pour la topologie induite par le corps local; il l'est encore pour la topologie de $\mathcal{G}$. Par exemple, dans le cas $PGL_2(k)$, on pourra obtenir $PGL_2(\mathfrak{O})$.

Dans les exemples $1, 2, 3$ de produits libres, le fixateur d'un sommet est fini: ainsi ces groupes ne peuvent être doublement transitifs.

Par contre, dans le cas des groupes quasi-simples de rang un sur un corps local, l'immeuble, qui est ici un arbre simplicial (dont les arêtes sont des intervalles réels), mais dont on considère l'arbre combinatoire sous-jacent, est une réunion d'appartements qui sont les transformés par G d'un appartement, ici réduit à une géodésique: ainsi le groupe G est transitif sur les géodésiques non orientées. Par ailleurs, le centralisateur d'un tore déployé maximal agit transitivement par des "translations" sur les sommets d'un type donné situés sur la géodésique qui lui est associée, et le normalisateur de ce même tore peut permuter les bouts de cette géodésique.

Ainsi, les groupes quasi-simples de rang un sur un corps local non archimédien ont une image faiblement doublement transitive dans le groupe des automorphismes de l'arbre de Bruhat-Tits associé.

Il est bien connu que le groupe $PGL_2(k)$ est triplement transitif sur la droite projective; comme l'arbre associé est non numéroté, on en déduit que $PGL_2(k)$ est triplement transitif sur l'arbre qui lui est associé.

On a vu plus haut qu'un automorphisme est déterminé par son action sur l'espace des bouts, qui dans le cas des groupes ci-dessus, s'identifie à l'immeuble sphérique des paraboliques, qui est ici réduit à l'ensemble des paraboliques propres de G, qui peut se décrire comme G/P, avec P un de ces paraboliques propres.

Donc pour que l'homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de l'arbre associé soit un plongement, il suffira que G opère librement sur G/P, ce qui sera le cas si et seulement si $\bigcap_{g\in G} gPg^{-1}$ est réduit à l'identité.

Ceci se vérifiera pour $PGL(2)$, les groupes $SU(3)$ dans le cas général et des formes de $SO(5)$ que l'on va décrire ci-dessous. Ceci ne sera pas le cas pour $SL(2)$, pour $SU(3)$ dans certains cas, et pour les formes de rang un de $SU(4)$ considérées, car ces groupes ont alors un centre fini non trivial formé de matrices scalaires.

Pour définir un groupe $SU(3)$ ou $SU(4)$, on considère une extension quadratique séparable L de k: on notera $\overline{z}$ l'action de élément non trivial du groupe de Galois de $L|k$ sur z.

On considère un espace vectoriel V de dimension 3 sur L, sur lequel on choisira une forme hermitienne $<,>$, qui s'exprime dans une base (e_{-1}, e_0, e_1) de V par la formule

$$< x, y >= x_1 \bar{y}_{-1} + x_0 \bar{y}_0 + x_{-1} \bar{y}_1,$$

où $x = \sum x_i e_i$ et $y = \sum y_i e_i$.

On considère le sous-groupe des éléments $g \in SL(3, L)$ tels que pour tout couple $(x, y) \in V^2$, on ait $< g(x), g(y) >=< x, y >$.

Ce groupe est un groupe $SU(3)$.

Ce groupe admet des sous-groupes de Borel, qui sont les stabilisateurs des droites isotropes, et dont on montre qu'ils sont conjugués dans G .

Soit $B = \{g \in SU(3)\ |g(e_{-1}) \in Le_{-1}\}$, on a $B = TU$, où T est un tore défini par

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}\lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}^{-1} \end{pmatrix} |\lambda \in L^* \right\},$$

et U est le radical unipotent de B,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & -\overline{u} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u, v \in L\ ,\ u + \overline{u} + v\overline{v} = 0 \right\}.$$

On remarquera que U est non abélien, et on vérifie que l'intersection des conjugués de B est triviale, sauf quand L est l'extension $k(\mu_3)$, où μ_3 est l'ensemble des racines troisièmes de l'unité, et dans ce cas il est constitué par les homothéties par μ_3; cette situation se produisant si et seulement si L/k est non ramifiée et si 3 divise $q^2 - 1$ et ne divise pas $q - 1$, ou encore si q est impair et $q = -1 \bmod 3$.

On considérera aussi un espace vectoriel W de dimension 4 sur L, que l'on écrit $W = Le_{-1} \oplus H \oplus Le_1$, avec un espace vectoriel H de dimension 2 sur L, dont (e_{-1}, e_1) est une base d'un supplémentaire.

On se donne sur H une forme hermitienne q_0 anisotrope, dont on notera A_0 la matrice dans une base donnée. On pourra, par exemple se donner H une algèbre de quaternions choisie comme espace vectoriel sur L, la forme q_0 provenant de la norme quaternionique. On considère la forme hermitienne sur W définie par

$$< x, y >= x_1 \overline{y_{-1}} + q_0(x_0 y_0) + x_{-1}\overline{y_1},$$

où $x = x_{-1}e_{-1} + x_0 + x_1 e_1$ et $y = y_{-1}e_{-1} + y_0 + y_1 e_1$, avec $x_0, y_0 \in H$.

On considère le sous-groupe des éléments $g \in SL(4, L)$, qui vérifient, pour tout couple $(x, y) \in W^2$, $< g(x), g(y) >=< x, y >$

Ce groupe est une forme de rang un du groupe $SU(4)$, que l'on notera ainsi.

Il admet des sous-groupes paraboliques minimaux, ce sont les stabilisateurs des droites isotropes, dont on montre qu'ils sont conjugués dans G.

Soit $B = \{g \in SU(4)\ |g(e_{-1}) \in Le_{-1}\}$. Il s'écrit $B = MU$ où M est un groupe de Levi, qui contient un tore déployé T isomorphe à k^* et U est le radical unipotent de P. Ecrits comme matrices par blocs $(1, 2, 1)$, on a

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}^{-1} \end{pmatrix} |\lambda \in L^*, h \in U(q_0), \det h\, \lambda\overline{\lambda}^{-1} = 1 \right\} \supset T$$

$$\text{où } T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda \in k^* \right\}, \text{ et}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & I & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid {}^t u, w \in H,\ {}^t u = -A_0 \overline{w},\ v \in L\ ,\ v + \overline{v} + q_0(w) = 0 \right\}.$$

On remarquera que U est non abélien.

Enfin, ce groupe $SU(4)$ a toujours un centre non trivial, qui est formé de matrices scalaires. ce centre est en général égal à $\pm I$ et donc d'ordre 2, sauf si $L = k(\sqrt{-1})$, alors il est constitué des matrices scalaires λI avec $\lambda \in L$, $\lambda^4 = 1$, alors il est d'ordre 4. Ce dernier cas se produit si l'extension est non ramifiée, et si $q = 3 \bmod 4$.

De même, on considère un espace vectoriel V de dimension 5 sur k, que l'on supposera pour simplifier, de caractéristique différente de 2.

On écrira l'espace $V = ke_{-1} \oplus V_0 \oplus ke_1$, avec V_0 un espace de dimension 3 qui est anisotrope pour une forme quadratique q_0, dont on note $<,>_0$ la forme bilinéaire symétrique associée: on définit la forme q sur V, associée à la forme $<,>$ qui est égale à

$$< x, y >= x_1 y_{-1} + < x_0, y_0 >_0 + x_{-1} y_1,$$

pour $x = x_1 e_1 + x_0 + x_{-1} e_{-1}, y = y_1 e_1 + y_0 + y_{-1} e_{-1}$, et $x_0, y_0 \in X_0$.

On peut remarquer que ces formes existent; en effet, il suffit de prendre $\alpha \notin k^2$, et $\beta \notin N[k(\alpha)]$, où N est la norme de l'extension $k(\alpha)|k$, ce qui est toujours possible sur un corps local, et de considérer la forme

$$q_0(u, v, w) = u^2 - \alpha v^2 - \beta w^2.$$

On peut aussi penser aux quaternions, et restreindre la norme quaternionique à un sous-espace de dimension 3. Ayant une base de V_0, on notera Q_0 la matrice de q_0 dans cette base.

On considère alors le sous-groupe de $SL(5, k)$ qui conserve cette forme, c'est un groupe $SO(5)$ non déployé, de rang relatif un, que l'on note $SO(q)$.

Dans ce groupe, on considère les sous-groupes stabilisant une droite isotrope; on montre qu'ils sont conjugués à l'un d'eux,

$$B = \{ g \in SO(q) \mid g(e_{-1}) \in ke_{-1} \}.$$

C'est un sous-groupe parabolique propre de G, qui admet une décomposition $B = MU$, où M est le centralisateur d'un tore et U le radical unipotent de B.

Ecrits comme ensembles de matrices par blocs $(1,3,1)$, on a

$$M=\left\{\begin{pmatrix} t & 0 & 0\\ 0 & h & 0\\ 0 & 0 & t^{-1}\end{pmatrix} \mid t\in k^*,\ h\in SO(q_0)\right\}\supset T=\left\{\begin{pmatrix} t & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & t^{-1}\end{pmatrix} \mid t\in k^*\right\}$$

$$\text{et } U=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -{}^t(Q_0v) & -\frac{1}{2}q_0(u)\\ 0 & I_{V_0} & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid {}^tv\in V_0\right\}.$$

On remarque que U est isomorphe à V_0 comme groupe, donc est abélien.

Pour ces trois types de groupes, que l'on note G, il y a un élément non trivial dans le groupe de Weyl, c'est l'élément

$$w=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & J & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

où, dans le cas $SU(3)$ c'est une matrice $(3,3)$ avec $J=-1$, dans le cas $SU(4)$ c'est une matrice $(4,4)$ écrite par blocs $(1,2,1)$ avec J matrice de la conjugaison dans l'espace des quaternions, et dans le cas SO c'est une matrice $(5,5)$ écrite par blocs $(1,3,1)$ avec $J=-I$, où I est la matrice identité.

Pour ces groupes, on a la décomposition de Bruhat $G=B\cup BwB$.

Cette décomposition de G est équivalente à la double transitivité de G sur la variété des droites isotropes. En effet, G est transitif sur l'ensemble Ω des bouts. Désignons ∞ le bout fixé par B : la décomposition de Bruhat est alors équivalente à la transitivité de B sur $\Omega-\{\infty\}$. On note que, pour montrer que G est doublement transitif sur Ω, il suffit de vérifier qu'étant donnés deux bouts ω et ω', distincts de ∞, il existe un élément $g\in G$ tel que $g(\infty)=\infty$, et $g(\omega)=\omega'$. D'où, l'équivalence annoncée.

Pour ces groupes "orthogonaux", en général les sommets de l'arbre ne peuvent être définis avec un seul réseau.

Alors que dans le cas $PGL(2)$, à un réseau est associé une norme dont c'est la boule unité et dont les autres boules sont homothétiques, dans le cas général les boules de rayon 1 et $q^{\frac{1}{2}}$ ne sont pas homothétiques (q désigne le cardinal du corps résiduel de k.)

On sera donc amener à considérer l'espace des normes sur V, c'est à dire des fonctions définies sur $V^*=V-\{0\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant l'inégalité triangulaire ultramétrique, et la condition $\nu(\lambda x)=|\lambda|\nu(x)$, pour λ dans le corps de base.

A une telle norme ν, on peut associer ν^* définie par

$$\nu^*(x) = \sup_{y \in V^*} \frac{|< x, y >|}{\nu(y)}.$$

C'est une norme, appellée la norme duale de ν. On dira que la norme ν est autoduale,ou encore maximinorante dans la terminologie de [B-T 2], si elle égale à sa duale.

L'arbre simplicial est l'ensemble des normes autoduales.

Pour cet arbre, l'ensemble des bouts est l'ensemble des droites isotropes, et les géodésiques, correspondent aux couples de droites isotropes distinctes; ces droites peuvent être déterminées par deux vecteurs (e_{-1}, e_1) isotropes, tels que $< e_1, e_{-1} >= 1$.

En désignant par V_0 l'orthogonal de $\{e_1, e_{-1}\}$, on obtient une décomposition de V de la forme $V = Ke_{-1} + V_0 + Ke_1$.

Dans le cas SO, on a $K = k$ et V_0 anisotrope avec une forme q_0, et dans le cas SU on a $K = L$ et $V_0 = Le_0$ ou $V_0 = H$ et $q_0(x_0e_0) = q(e_0)x_0\overline{x}_0$, ou q_0 une forme anisotrope sur V_0 qui peut coïncider avec la la norme quaternionique.

On montre, cf.[B-T 1& 2], que, pour toute norme autoduale, il existe une décomposition de ce type, dite base scindante, dans laquelle elle s'écrit:

$$\nu_\alpha(x_{-1}e_{-1} + v_0 + x_1e_1) = \sup(|x_{-1}|q^{-\alpha}, |q_0(v_0)|^{\frac{1}{2}}, |x_1|q^{\alpha}) .$$

On montre qu'une norme autoduale ν est sur une géodésique définie par deux droites isotropes, si on peut choisir sur chaque droite un vecteur appartenant à une une base scindante pour ν. Si on prend la base canonique et la norme ν_0 correspondant, elle correspond à un sommet dont le fixateur dans le groupe G est l'intersection avec $GL(n, \mathfrak{O})$ ($n = 3, 4, 5$ suivant le cas).

L'arbre combinatoire est constitué des points de l'arbre simplicial qui sont points de ramification.On note q le cardinal du corps résiduel de k.

Dans le cas $SO(q)$, qui est aussi une forme d'un groupe $PSU_2(D)$, où D est un corps de quaternions, on obtient un arbre semi-homogène de type (q^2, q), constitués des ν_α dans une base scindante avec $\alpha \in q^{\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$.

Dans le cas $SU(3)$ cela dépend de la ramification de $L|k$.

Si l'extension $L|k$ est ramifiée, on obtient un arbre de type (q, q).

Si $L|k$ est ramifiée on obtient, un arbre de type (q^3, q).

De même pour $SU(4)$, cela dépend de la ramification.

Si l'extension $L|k$ est non ramifiée, on obtient un arbre de type (q^3, q^3).

Si $L|k$ est ramifiée, on obtient un arbre de type (q^2, q).

Dans le cas $L|k$ non ramifiée, le groupe $PGU(4)$, quotient du groupe des similitudes de la forme par son centre, échange les sommets de numéro distincts et opère avec une seule orbite sur l'arbre homogène de type q^3. En effet, il est facile de voir que le rapport de similitude $\lambda_g = \frac{<gx,gy>}{<x,y>}$ est défini modulo NL^*, les éléments conservant ou non la numérotation selon que cette classe de k^*/NL^* est ou non triviale. (On rappelle que le groupe k^*/NL^* est d'ordre 2, et qu'ici les éléments se distinguent suivant la parité de la valuation.)

Par contre dans le cas $SU(3)$ avec $L|k$ ramifiée, les deux sommets jouent des rôles différents, et leurs fixateurs ne sont pas isomorphes, comme on peut le voir dans le diagrame de [T-2].

Dans tous les cas on obtient des groupes faiblement 2-transitifs. En effet, il y a un fixateur d'un sommet qui est l'intersection de G avec $GL(n, \mathfrak{O})$, ainsi G est fermé dans $\mathcal{G}$.

On a vu que G est doublement transitif sur l'espace des bouts identifié à la variété des droites isotropes.

Pour montrer la double transitivité faible de G, il suffira de montrer que G est transitif sur les sommets de même numéro d'une géodésique; on pourra prendre celle définie à partir de la base canonique, que l'on appellera standard. On vérifie alors qu'il y a un sous-groupe de M, isomorphe à L^* dans le cas unitaire, et à k^* dans le cas orthogonal, qui contient des éléments g_λ, pour $\lambda \in L^*$ ou k^* selon les cas, tels que

$$g_\lambda(e_1) = \lambda e_1, \; g_\lambda(e_{-1}) = \overline{\lambda^{-1}} e_{-1} \text{ ou } \lambda^{-1} e_{-1},$$

et dont la restriction à V_0 est unitaire ou orthogonale. Ce groupe est opère transitivement sur les sommets d'un numéro donné de la géodésique standard.

On rappelle enfin que, pour tout n, le groupe $\mathcal{G}$ de tous les automomorphismes est faiblement-n-transitif.

1.5 Propriétés et structure des groupes (faiblement) doublement transitifs

On considère un arbre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{q_1,q_2}$ et on se donne un sous-groupe faiblement doublement transitif G du groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes de l'arbre $\mathcal{A}$, ce groupe pouvant être égal à $\mathcal{G}$.

Soit un bout $\omega \in \Omega$, on considère le fixateur de ω dans $\mathcal{G}$ que l'on note $\mathcal{B}_\omega = \{g \in \mathcal{G} \mid g(\omega) = \omega\}$ et $B_\omega = \mathcal{B}_\omega \cap G$.

Si (x_n) est une demi-géodésique de la classe de ω, et si $g \in B_\omega$ on a pour n assez grand $g(x_n) = x_{n+k}$. L'entier k ne dépend pas de la demi-géodésique choisie dans la classe de ω et est pair, car x_n et $g(x_n)$ sont de même numéro. On définit $\nu_\omega(g) = \frac{k}{2}$.

Proposition 1.5.1 *L'application $\nu = \nu_\omega$ est un homomorphisme de $\mathcal{B}_\omega$ sur $\mathbb{Z}$.*

Démonstration: ν est un homomorphisme de façon triviale, et on voit que son image contient 1 en utilisant les propriétés de double transitivité de $\mathcal{G}$.■

On notera $\mathcal{N}_\omega$ le noyau de ν_ω, c'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{B}_\omega$.

On notera $N_\omega = \mathcal{N}_\omega \cap G$.

On choisit une géodésique pointée, notée $[\omega', \omega] = (x_n)$, et on suppose que x_0 est de numéro 1.

On notera $B = B_\omega$, $B' = B_{\omega'}$, $N = N_\omega$, et $\mathcal{K} = \mathcal{G}_{x_0}$, $K = G \cap \mathcal{K}$, ainsi que $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{x_0} \cap \mathcal{G}_{x_1}$ et $I = G \cap \mathcal{I}$.

On désigne enfin par $N_k = \{n \in N \mid n|_{[x_k, \omega]} = Id\}$ et

$$H = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} N_k = \{n \in N \mid \forall k \; n(x_k) = x_k\};$$

On voit aisément que N_k est un groupe, et on désigne pour $n \in N - H$,

$$v(n) = \inf\{k \mid n \in N_k\} = \inf\{k \mid n(x_k) = x_k\}.$$

Théorème 1.5.2 *1) Il existe dans G des éléments w, τ tels que*

$$\forall n \; , \; w(x_n) = x_{-n} \; , \tau(x_n) = x_{n+2}$$

2) On a la décomposition de Cartan

$$G = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} K\tau^n K$$

$g \in K\tau^n K \iff d(g(x_0), x_0) = 2n$ et les classes KgK sont invariantes par $g \mapsto g^{-1}$.

3) On a

$$B = \tau^{\mathbb{Z}} N \text{ et } K \cap N = N_0$$

4) On a la décomposition d'Iwasawa

$$G = KB = K\tau^{\mathbb{Z}} N$$

5) On la décomposition $K = I \sqcup IwI$, et la décomposition de d'Iwasawa peut être précisée en $G = IB \sqcup IwB$.

6) Le groupe d'Iwahori admet une décomposition $I = (I \cap B).(I \cap B')$, dont l'intersection $(I \cap B) \cap (I \cap B') = H$.

7) On a la décomposition de Bruhat

$$G = NwB \sqcup B$$

et on a : $n_1wB \cap n_2wB \neq \emptyset \iff n_1H = n_2H$.

8) L'indice $[N_k : N_{k-1}] = q_i$, où i est le numéro de x_k, $i = 1$ si k est pair, $i = 2$ sinon.

Corollaire 1.5.3 *La paire (G, K) est une paire de Gelfand, et l'algèbre des fonctions K-sphériques $C_c(K\backslash G/K)$ est une algèbre commutative pour la convolution relative à une mesure de Haar.*

Démonstration: L'existence de w résulte de la 2-transitivité faible de G appliquée aux géodésiques $[\omega, \omega']$ et $[\omega', \omega]$ pointées par x_0 et celle de τ résulte de la même propriété appliquée à la géodésique $[\omega, \omega']$ pointée par x_0 et par x_2, d'où 1).

Si $d(g(x_0), x_0) = 2n$, d'après la transitivité de G sur la sphère de centre x_0 et de rayon $2n$, il existe $k \in K$ tel que $g(x_0) = k(x_{2n}) = k\tau^n(x_0)$, d'où $g^{-1}k\tau^n \in K$; ce qui permet de conclure que $g \in K\tau^nK$.

Réciproquement, si $g \in K\tau^nK$ il existe $k \in K$ tel que $g \in k\tau^nK$, ainsi $d(g(x_0), x_0) = d(k^{-1}g(x_0), x_0) = d(\tau^n(x_0), x_0) = 2n$, car la distance géodésique est invariante par isométrie.

Enfin, $d(g(x_0), x_0) = d(x_0, g^{-1}(x_0))$, car g^{-1} est une isométrie, d'où 2).

Le 3) est trivial, et pour montrer 4), on prouve d'abord que K est transitif sur Ω. Pour cela on se donne $\omega_1 \in \Omega$ et on considère les demi-géodésiques $[x_0, \omega]$ et $[x_0, \omega_1]$. D'après la double transitivité de G, il existe $g \in G$ tel que $g(x_0) = x_0$ et $g(\omega) = \omega_1$. Un tel $g \in K$, d'où la transitivité de K sur Ω. On considère alors $g \in G$, et le bout $g(\omega)$: d'après ce que l'on vient de voir, il existe $k \in K$, avec $k(\omega) = g(\omega)$. L'élément $k^{-1}g$ fixe ω, donc il existe $b \in B$ tel que $k^{-1}g = b$, d'où $g = kb$. Ceci prouve donc 4).

Pour démontrer le premier point de 5), on considère un élément $k \in K$ et le sommet $k(x_1)$; s'il est égal à x_1, alors par définition $k \in I$. Sinon, il existe un élément $i \in I$ tel que $i(x_{-1}) = k(x_1)$, on applique la 2-transitivité aux segments $[x_{-1}, x_1]$ et $[k(x_1), x_1]$ qui contiennent tous deux x_0. Il est alors clair que iw et k ont même image sur x_0 et x_1, donc que $k \in iwI$.

Pour établir le second point de 5), on remarque qu'étant donnés les sommets x_0 et x_1 et le bout $\omega_1 = g(\omega)$ on a l'alternative: $x_1 \in [x_0, \omega_1]$ ou $x_0 \in [x_1, \omega_1]$.

Dans le premier cas, on considère un élément $h \in G$ qui vérifie $h(x_0) = x_0$ et $h(\omega) = \omega_1$. Cet élément existe bien, car K est transitif sur Ω. Comme x_1 est sur les deux demi-géodésiques $[x_0, \omega]$ et $h([x_0, \omega])$, on en déduit que $h \in I$. Comme g et h ont même image sur ω, ils ne diffèrent donc que par un élément de B, d'où $g \in IB$.

Dans l'autre cas, on se donne $h \in G$ qui vérifie $h(x_1) = x_1$ et $h(\omega') = \omega_1$; cet élément existe, car $G \cap \mathcal{G}_{x_1}$ est transitif sur Ω pour la même raison que K. On remarque que x_0 est sur les deux demi-géodésiques $[x_1, \omega']$ et $h([x_1, \omega']) = [x_1, \omega_1]$, on en déduit que $h \in I$. Enfin on remarque que g et hw ont même image sur ω, ils ne diffèrent donc que par un élément de B, d'où $g \in IwB$, ce qui établit le second point de 5).

Soit $g \in I$, par définition g fixe x_0 et x_1, on pose alors $\omega_1 = g(\omega)$. On considère l'image par g de la demi-géodésique $[x_0, \omega]$, c'est la demi-géodésique $[x_0, \omega_1]$ qui contient x_1. On sait qu'il existe dans un élément $h \in G$ qui envoie la géodésique $[\omega', \omega]$ pointée par x_0 sur $[\omega', \omega_1]$ pointée par x_0. On remarque que cet élément $h \in I$, car il fixe les sommets communs aux deux géodésiques, en particulier x_0 et x_1; de plus par construction $h(\omega') = \omega'$, donc $h \in B' \cap I$. On considère alors l'élément gh^{-1} : clairement $gh^{-1} \in I$, et $gh^{-1}(\omega) = \omega$, donc $gh^{-1} \in I \cap B$, d'où la décomposition énoncée.

Vérifier que $B \cap B' \cap I = H$ est facile, car $B \cap B'$ est le groupe qui stabilise les bouts de la géodésique $[\omega', \omega]$, son intersection avec I fixant un sommet, il s'en suit que cette intersection fixe la géodésique $[\omega', \omega]$, donc est contenu dans le groupe H. Ce groupe H est manifestement contenu dans les groupes B, B', I, d'où l'égalité annoncée.

Pour démontrer 7), il suffira de prouver que si ω_1 est un bout différent de ω, il existe $n \in N$ tel que $n(\omega') = \omega_1$. Pour cela, soit $\omega_1 = \omega'$ et alors l'identité convient, sinon on considère le carrefour x_k des trois bouts $\omega, \omega', \omega_1$, on choisit $g \in G$, qui envoie la géodésique $[\omega', \omega]$ pointée par x_k sur la géodésique $[\omega_1, \omega]$ pointée par x_k .Comme $g(\omega) = \omega$, et comme $g(x_k) = x_k$, g fixe une demi-géodésique $[x_k, \omega]$, d'où $g \in N$.

Enfin, $n_1 wB \cap n_2 wB \neq \emptyset \iff n_1(\omega') = n_2(\omega') \iff n_1^{-1} n_2(\omega') = \omega'$, ce qui est équivallent à $n = n_1^{-1} n_2$ stabilise la géodésique $[\omega', \omega]$ et la fixe, car $n \in N$. Or le fixateur de $[\omega', \omega]$ est H : d'où l'équivalence avec $n_1 H = n_2 H$.

Pour montrer que $[N_k : N_{k-1}] = q_i$, on remarque que le sommet $n(x_{k-1}) \in S(x_k, 1) - \{x_{k+1}\}$ pour $n \in N_k$ et représente la classe nN_{k-1}; il suffira de montrer que N_k est transitif sur $S(x_k, 1) - \{x_{k+1}\}$, car lson cardinal est q_i.

Et pour cela, on considère pour $u \in S(x_k, 1) - \{x_{k+1}\}$ les demi-géodésiques $[x_{k-1}, \omega]$ et $[u, \omega]$, d'après la double transitivité de G, on voit qu'il existe $g \in G$ qui envoie la première sur la seconde, c'est à dire telle que $g(x_{k-1}) = u$

et $g(\omega) = \omega$. Or nécessairement on a $g(x_k) = x_{k}$,, d'où $g \in N_k$. Ainsi le point 8) est démontré.

Pour démontrer le corollaire, il suffit de remarquer que l'involution $f \mapsto \check{f}$, définie par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$, est triviale sur $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, et vérifie pour $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, l'égalité $\check{f}_1 \star \check{f}_2 = (f_2 \star f_1)\check{}$, ce qui montre la commutativité de la convolution sur ces fonctions. ∎

On posera $N_k^* = N_k - N_{k-1}$: c'est l'ensemble des éléments $n \in N$ dont la valuation $v(n) = k$. Ces ensembles ne sont pas vides, sauf si $N_k = N_{k-1}$, ce qui se produit uniquement si q_1 ou q_2 est égal à 1 ; ce sera le cas pour k impair si $q_1 = 1$ et k pair si $q_2 = 1$.

Enfin on remarque que

$$v(n) = k \Longleftrightarrow p(n(\omega') : [\omega', \omega]) = x_k.$$

On a désigné par $p(\omega_1 : [\omega_2, \omega_3])$ la projection du bout ω_1 sur la géodésique $[\omega_2, \omega_3]$, qui est aussi le carrefour des trois bouts $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Proposition 1.5.4 *Soit*

$$\widetilde{W} = \tau^{\mathbb{Z}} \cup \tau^{\mathbb{Z}} w.$$

Cet ensemble stabilise $[-\infty, \infty]$, y induit la même action que le stabisateur dans G de $[-\infty, \infty]$, et y opère comme le groupe diédral. On a

$$G = \bigsqcup_{g \in \widetilde{W}} IgI.$$

Démonstration: On considère un élément $g \in G$, et l'arête $\alpha = g([x_0, x_1])$. On a $\alpha = [x_0, x_1]$ si et seulement si $g \in I$, car le stabilisateur de $[x_0, x_1]$ est son fixateur.

On supposera donc que $g \notin I$. On va montrer qu'il existe $i \in I$ tel que $i(\alpha) \subset [-\infty, \infty]$. Les arêtes α et $[x_0, x_1]$ sont différentes, on sait d'après le corollaire 1.2.2 qu'il existe $s \in \alpha$ et $j \in \{0, 1\}$ tel que $\alpha \cup [x_0, x_1] \subset [s, x_j]$. On distinguera les cas suivant les valeurs de j.

Si $j = 0$, on pose $n = d(x_0, s)$, alors il existe dans G un élément h qui vérifie $h(x_0) = x_0$, et $h(s) = x_n$. Comme $x_1 \in [x_0, s]$, on en déduit que $h(x_1) = x_1$. Comme par hypothèse h fixe x_0, on en déduit que $h \in I$.

Si $j = 1$, on pose $n = d(x_1, s)$, alors il existe dans G un élément h qui vérifie $h(x_1) = x_1$, et $h(s) = x_{1-n}$.Comme $x_0 \in [x_1, s]$, on en déduit que $h(x_0) = x_0$. Comme par hypothèse h fixe x_1, on en déduit que $h \in I$.

On considère alors une arête $\alpha = [x_n, x_{n+1}]$.

Si $n = 2m$, alors $\alpha = \tau^m[x_0, x_1]$ et $d(x_0, y)$, pour $y \in \alpha$, prend les valeurs $|2m|, |2m+1|$ tandis que $d(x_1, y)$ prend les valeurs $|2m|, |2m-1|$.

Si $n = 2m-1$, alors on vérifie que $\alpha = (\tau^m w)[x_0, x_1]$ et $d(x_0, y)$, pour $y \in \alpha$, prend les valeurs $|2m|, |2m-1|$ tandis que $d(x_1, y)$ prend les valeurs $|2m+2|, |2m-1|$.

Ceci prouve que $G = I\widetilde{W}I$.

La considération des valeurs prises par $d(x_i, y)$ pour $i = 0, 1$ quand $y \in \alpha$, et que α décrit l'ensemble des arêtes, montre que les classes $IwI \cap Iw'I = \emptyset$ pour des $w \neq w'$. ∎

Remarque L'énoncé précédent montre que la position relative de deux arêtes dans l'arbre est décrite par le groupe diédral infini induit par $\widetilde{W}$, ce groupe décrivant déjà la position d'une arête $[x_n, x_{n+1}]$) contenu dans la géodésique standard par rapport à l'arête de base $[x_0, x_1]$.

Cas de l'arbre homogène

Soit $\mathcal{A}_q$ un arbre homogène, dont on note S l'ensemble des sommets, et A l'ensemble des arêtes. Soit $\mathcal{A}_{q,1}$ l'arbre semi-homogène associé, dont on rappelle que l'ensemble des sommets $S' = S \cup A$, et que l'ensemble des arêtes A' est formé des couples (a, s), où $a \in A, s \in S$ qui vérifient $s \in a$.

Il faut donc distinguer entre les arêtes de l'arbre homogène $\mathcal{A}_q$, et les arêtes de l'arbre semi-homogène associé $\mathcal{A}_{q,1}$: ces dernières sont les arêtes pointées, ou orientées de l'arbre homogène.

Ainsi, comme le fixateur d'une arête de $\mathcal{A}_q$ dans G est le fixateur d'un sommet de valence $1+1$, la position relative de deux arêtes (non orientées) est donnée par la décomposition de Cartan, donc dépend d'un entier positif, qui est la distance dans l'arbre $\mathcal{A}_q$ des "milieux" des arêtes.

Par contre, la proposition précédente décrit la position relative de deux arêtes orientées de l'arbre homogène $\mathcal{A}_q$, paramétrée par le groupe diédral infini.

La relation entre les décompositions de Cartan et d'Iwasawa, qui sera à la base du calcul de la transformation de Satake des fonctions sphériques, est donnée par

Proposition 1.5.5 *Soit $n \in N$, avec $v(n) = k$. On a*

$$\tau^l n \in K\tau^{m(k,l)}K$$

où

$$m(k,l) = \begin{cases} |l| & k \leq \max(0,-2l) \\ l+k & k \geq \max(0,-2l) \end{cases}$$

Démonstration: On notera $O = x_0$. On suppose d'abord que $k \leq 0$, dans ce cas $n \in K$, et alors $\tau^l n \in K\tau^l K = K\tau^{|l|}K$.

On supposera désormais que $k > 0$, donc $n(O) \neq O$, et $n(O) \notin [\omega, \omega']$, et $n(O)$ se projette en x_k sur $[\omega, \omega']$.

En particulier pour tout $y \in [\omega', \omega]$, on a

$$d(n(O), y) = d(y, x_k) + d(n(O), x_k).$$

Comme τ^l stabilise la géodésique $[\omega', \omega]$, et est une isométrie, on déduit que si z est la projection de x sur $[\omega'\omega]$, alors $\tau^l z$ est la projection de $\tau^l x$ sur cette géodésique, car $\tau^l x \in [\omega', \omega]$, et que si $y \in [\omega', \omega]$, $\tau^{-l}y$ est encore sur cette géodésique; on a donc $d(\tau^{-l}y, x) = d(\tau^{-l}y, z) + d(z, x)$, d'où $d(y, \tau^l x) = d(y, \tau^l z) + d(\tau^l z, \tau^l x)$.

On en déduit que la projection de $\tau^l n(O)$ sur $[\omega', \omega]$ est x_{k+2l}, d'où $d(\tau^l n(O), O) = d(\tau^l n(O), x_{k+2l}) + d(x_{2k+l}, O)$. Or

$$d(\tau^l n(O), x_{k+2l}) = d(n(O), x_k) = d(O, n^{-1}(x_k)) = d(O, x_k) = k,$$

comme par ailleurs $d(x_{k+2l}, O) = |k+2l|$, on a $m(k,l) = k + |k+2l|$, ce qui démontre la proposition. ■

Exemple. On considère le groupe $G = PGL_2(k)$, où k est un corps local non archimédien dont on désigne par $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers, par ϖ une uniformisante et par $\mathfrak{p} = \varpi\mathfrak{O}$ l'idéal de valuation. On suppose que le corps résiduel $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ a q éléments, et que la valeur absolue vérifie $|\varpi| = \frac{1}{q}$.

On considère l'arbre semi-homogène de type $(q, 1)$, construit à partir de l'arbre homogène, et dont les sommets de numéro 1 sont les classes de réseaux dans k^2.

On choisit alors la géodésique (x_n), où x_{2n} est la classe du réseau $\mathfrak{O} \times \mathfrak{p}^n$, le bout ω correspond à la droite $k \times \{0\}$, le bout ω' à $\{0\} \times k$, et le groupe B_ω à l'image du groupe triangulaire supérieur. On pose $N = N_\omega$ et on a

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; |\frac{a}{d}| = 1 \right\} \supset N_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}; |\frac{a}{d}| = 1, |\frac{b}{d}| \leq q^{-m} \right\},$$

pour $m = [\frac{n}{2}]$, et on a $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, |\frac{a}{d}| = 1 \right\} = \cap_{n \in \mathbb{Z}} N_n$.

On vérifie que $G_{x_0} = PGL_2(\mathfrak{O})$, et que $q^{\frac{v(n)}{2}} = |b|$ pour $n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$.

Enfin, on pourra choisir $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Revenons à l'étude de la structure de G.

Tout d'abord, on remarque que dans un arbre il n'y a pas de notion canonique de distance d'un sommet à un bout. Néanmoins, on peut comparer les distances de deux sommets à un bout.

Définition 1.5.1 *Etant donnés deux sommets $x, y \in \mathcal{A}$ et un bout $\omega \in \Omega$, on définit la position de x, y par rapport à ω par*

$$< x, y; \omega >= d(y, z) - d(x, z), \ \textit{pour } z \in [x, \omega] \cap [y, \omega].$$

On vérifiera dans la proposition suivante que la différence $d(y, z) - d(x, z)$ ne dépend pas du sommet z choisi dans $[x, \omega] \cap [y, \omega]$, et que la relation $\mathcal{R}_\omega$ sur $\mathcal{A}$ définie par

$$x \mathcal{R}_\omega y \Longleftrightarrow < x, y; \omega >= 0,$$

est une relation d'équivalence, dont les classes sont appelées horicycles issus de ω.

La proposition suivante qui établit une relation entre les $<, ; \omega>$ qui interviendront dans le noyau de Poisson et la décomposition d'Iwasawa de G, permettra d'établir un dictionnaire entre les réalisations des séries principales définies au chapitre II, en terme de représentations induites, et celles qui le sont à l'aide du noyau de Poisson sur Ω.

Proposition 1.5.6 1) *Soient $x, y \in \mathcal{A}$ et $\omega \in \Omega$, on a pour tout $u \in [x, \omega] \cap [y, \omega]$ l'égalité*

$$< x, y; \omega >= d(y, u) - d(x, u)$$

En particulier les horicycles sont des classes pour la relation

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow < x, y; \omega >= 0,$$

qui est une relation d'équivalence.

2) *Si $z \in \mathcal{A}$, on a $< x, y; \omega > + < y, z; \omega >=< x, z; \omega >$ (relation de cocycle).*

3) *Pour tout $g \in G$ on a $< g(x), g(y); g(\omega) >=< x, y; \omega >$.*

4) *La relation* $< x, y; \omega >= 0$ *équivaut à* $\exists n \in N_\omega$ *tel que* $y = n(x)$. *Ainsi les horicycles issus de* ω *sont les orbites de* N_ω *dans l'arbre.*

5) *Plus généralement, si* $b \in B_\omega$ *on a* $< b(x), x; \omega >= 2\nu_\omega(b)$.

6) *On choisit un sommet* O *dont on désigne par* K *le fixateur dans* G, *on sait que* $G = KB_\omega$. *Soit un élément* $g \in G$ *écrit sous la forme* $g = kb$, *avec* $k \in K$ *et* $b \in B_\omega$, *on a l'égalité*

$$< g(O), O; g(\omega) >=< O, g^{-1}(O); \omega >= 2\nu_\omega(b).$$

Démonstration: Le 1) est clair car si $u \in [z, \omega] = [x, \omega] \cap [y, \omega]$, on a $d(x, u) = d(x, z) + d(z, u)$ et $d(y, u) = d(y, z) + d(z, u)$.

Le 2) s'obtient en utilisant 1) avec $u \in [x, \omega] \cap [y, \omega] \cap [z, \omega]$.

Un élément $g \in G$ respecte les demi-géodésiques et les distances, donc si $[z, \omega] = [x, \omega] \cap [y, \omega]$, on a $[g(z), g(\omega)] = [g(x), g(\omega)] \cap [g(y), g(\omega)]$ et $d(g(y), g(z)) - d(g(x), g(z)) = d(y, z) - d(x, z)$, d'où 3).

Pour montrer 4), on remarque que si $y = n(x)$ avec $n \in N_\omega$, comme il y a des éléments z qui vérifient $n(z) = z$, on a la relation $< x, z; \omega >=< y, z; \omega >$ en appliquant 3) à n. Ceci entraine, d'aprés 2), l'égalité demandée.

Réciproquement, si $< x, y; \omega >= 0$ les sommets x, y ont le même numéro car leur distance est paire, il existe donc dans G un élément g qui envoie la demi-géodésique $[x, \omega]$ sur $[y, \omega]$. Un tel g vérifie $g(x) = y$ et $g(\omega) = \omega$. Donc $g \in B_\omega$. Pour montrer que $g \in N_\omega$, on remarque que tout sommet de $[x, \omega] \cap [y, \omega]$ est équidistant de x et de y, donc est fixé par g.

Pour démontrer 5), on se donne une géodésique (x_k) avec $x_0 = O$ et $[x_n | n \geq 0] \in \omega$, et un élément $\tau \in G$ tel que $\tau(x_k) = x_{k+2}$.

Tout élément $b \in B_\omega$ s'écrit alors $b = n\tau^l$ avec $n \in N_\omega$ et $l = \nu_\omega(b)$, d'où

$$< b(O), O; \omega >=< n\tau^l(O), O; \omega >=< \tau^l(O), O; \omega >=< x_{2l}, x_0; \omega >= 2l.$$

Enfin si $g = kb$, on a

$$< g(O), O; g(\omega) >=< b(O), O; k^{-1}g(\omega) >=< b(O), O; \omega >;$$

les égalités annoncées s'en déduisent. ∎

On part d'une géodésique $[\omega', \omega]$ pointée par un sommet $O = x_0$, on considère le groupe $K = G_O$, il opère transitivement sur l'espace des bouts Ω, qui s'identifie à l'espace quotient K/N_0. En effet $K \cap B$, qui est le fixateur de ω dans K, est aussi le fixateur de O dans B, d'où $N_O = K \cap B$.

Comme dans le cas de $PGL_2(k)$, où l'espace des bouts a une structure de droite projective sur k, on peut essayer d'étudier le complémentaire du point à l'infini qui généraliserait la droite affine.

L'ensemble Ω s'identifie à G/B comme espace homogène sous G, une fois choisi le bout ω.

Partant de la décomposition de Bruhat de $G = B \sqcup BwB$, on déduit la décomposition

$$G/B = Nw/H \sqcup B/B,$$

la classe B/B correspond au point à l'infini, et comme w normalise H, l'ensemble $G/B - B/B$ correspond à N/H.

Ainsi, à tout bout $\omega_1 \neq \omega$ on associe un élément $n \in N$, tel que $n(\omega') = \omega_1$. On remarque ensuite que H est le stabilisateur dans N de la géodésique $[\omega', \omega]$, donc le bout $n(\omega')$ définit nH. Ceci explicite la bijection de $\Omega - \{\omega\}$ avec N/H.

Dans le cas de $PGL_2(k)$, bien que N/H n'ait pas de structure de groupe, on peut l'identifier à k . La proposition suivante vise à généraliser la formule

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.5.7 1) *Soit $n \in N - H$, il existe $n' \in N - H$ tel que*

$$wnw = n'wb \text{ avec } b \in B.$$

De plus n étant donné, la classe $n'H$ est unique et ne dépend que de nH.

On désignera par φ l'application de $N/H - H$ dans $N/H - H$, définie par $\varphi(nH) = n'H$.

2) *On a $\varphi^2(nH) = w^2 nH$, et $v(n') = -v(n)$.*

De plus si $v(n) = k$, pour tout $l > 0$, on a $\varphi(nN_{k-l}) = \varphi(n)N_{-k-l}$.

3) *Enfin, pour un b vérifiant $wnw = n'wb$, on a $\nu_\omega(b) = v(n)$*

Corollaire 1.5.8 *Pour tout $n \in N - H$, il existe $n', n'' \in N - H$ tels que*

$$wn'wnwn'' = \tau^k$$

avec $k = v(n) = -v(n') = -v(n'')$

Corollaire 1.5.9 *Si $q_2 \neq 1$ le groupe $< N, w >$ est égal à G.*

Si $q_2 = 1$, ce qui correspond à un arbre homogène non numéroté, le groupe $< N, w >$ est le sous-groupe d'indice deux des éléments de G qui conservent la numérotation de l'arbre homogène sous-jacent.

Démonstration: Pour cette démonstration, le lecteur aura intêret à faire une figure. Soit $n \in N - H$, alors $n(\omega) = \omega$ et $n(\omega') \neq \omega'$. On pose $k = v(n)$, on sait que x_k est la projection de $n(\omega')$ sur la géodésique $[\omega', \omega]$.

On vérifie que $wnw(\omega') = \omega'$ et que $wnw(\omega) = wn(\omega')$. Donc l'image par wnw de la géodésique $[\omega', \omega]$ est la géodésique $[\omega', wn(\omega')]$. On choisit $n' \in N$ tel que $n'(\omega') = wn(\omega')$, ceci est possible car $wnw(\omega) \neq \omega$, n étant choisi par hypothèse en dehors de H.

Ainsi $n'w(\omega) = wnw(\omega)$, et l'élément $g \in G$ défini par $wnw = n'wg$ vérifie $g(\omega) = \omega$, donc $g \in B$.

On a vu plus haut, que le bout $n(\omega')$ est défini par nH, ainsi son image par w, qui est le bout $n'(\omega')$, définit $n'H$. Ceci prouve que φ est une application de N/H sur N/H, d'où 1).

Pour vérifier 2), on remarque que le carrefour de $(\omega, \omega', n(\omega'))$ est x_k, on en déduit que le carrefour de $(\omega', \omega, wn(\omega'))$ est $w(x_k) = x_{-k}$. Comme $wn(\omega') = n'(\omega')$, on en déduit que la projection de $n'(\omega')$ sur la géodésique $[\omega', \omega]$ est x_{-k}, d'où $v(n') = -k$.

On part de $wnw = n'wb$, de même on écrit $wn'w = n''wb'$, d'où $w^2nw = n''wb'b$; on remarque que $w^2 \in H$ donc $wb'bw^{-1} \in N$, ce qui n'est possible que si $b'b \in H = N \cap B_{\omega'}$. D'où $w^2n = n''H$. Ainsi $\varphi^2(n) = w^2nH$.

On choisit $n_1 \in nN_{k-l}$. On écrit $wnw = n'wb$ et $wn'w = n'_1wb_1$ avec des notations évidentes. On a $n_1(x_k) = n(x_k) = x_k$ et $n_1(x_{k-l}) = n(x_{k-l})$.

Donc les géodésiques $[n(\omega'), \omega]$ et $[n_1(\omega'), \omega]$ ont en commun la demi-géodésique $[n(x_{k-l}), \omega]$.

En considérant leur image par w on voit que les géodésiques $[\omega', n'(\omega')]$ et $[\omega', n'_1(\omega')]$ ont en commun la demi-géodésique $[\omega', wn(x_{k-l})]$.

Le point $wn(x_{k-l})$ est à distance l de x_{-k} qui est à la fois le carrefour de $(\omega, \omega', wn(\omega'))$ et celui de $(\omega, \omega', wn_1(\omega'))$.

Les géodésiques $[\omega, n_1(\omega')]$(resp. $[\omega, n'_1(\omega'))$ sont donc la réunion des demi-géodésiques $[\omega, -k]$ et $[-k, wn(\omega'])$ (resp.$[-k, wn_1(\omega')]$), la partie extérieure à $[\omega', \omega]$ étant l'image par n' (resp. n'_1) de la demi-géodésique $[\omega', x_{k-1}]$.

On en déduit que $wn(x_{k-l}) = n'(x_{-k-l})$, et que $wn_1(x_{k-l}) = n'_1(x_{-k-l})$.

D'où $n'(-k-l) = n'_1(-k-l)$, c'est à dire que $n'_1 \in n'N_{-k-l}$.

On considère φ^{-1} et on obtient l'égalité $\varphi(nN_{k-l}) = \varphi(n)N_{k-l}$.

Enfin on va montrer que $\nu_\omega(b) = v(n)$. En effet $b = w^{-1}n'^{-1}wn$.

On suppose d'abord $k > 0$, alors $n(x_0) = x_0$, d'où $b(x_0) = w^{-1}n'_{-1}(x_0)$. Comme $v(n'^{-1}) = -k$, $n'^{-1}(x_0)$ se projette en x_k sur $[\omega', \omega]$ et est à distance $|k|$ de sa projection. On en déduit que $b(x_0)$ se projette en x_{-k} sur cette géodésique et est à distance $|k|$ de sa projection.

Donc $< b(x_0), x_0; \omega >= 2k$, d'où $\nu_\omega(b) = k$, car $b(\omega) = \omega$.

Dans le cas où $n \notin N_0$, on part de $wnw = n'wb$ et que l'on écrit sous la forme $wn'w = (w^2n)wb^{-1}$. On remarque que $w^2n \in N$, car $w^2 \in H$ et que $v(n') = -k < 0$. D'où $\nu(b^{-1}) = -k$, ceci implique $\nu(b) = k$.

Pour démontrer le premier corollaire, on part de $wnw = n'wb$ et on écrit $b = \tau^k n''$, avec $n'' \in N$ d'où $w^{-1}n'^{-1}wnwn''^{-1} = \tau^k$. On sait que $n'H$ est déterminé et que $k = v(n) = -v(n')$.

On effectue la transformation $g \mapsto w^{-1}g^{-1}w$, on remarque que l'on a $w^{-1}\tau^{-k}w = \tau^k h$, avec $h \in H$, et on obtient la relation

$$\tau^k = w^{-1}n''w^{-1}n^{-1}w^{-1}n'w^2h^{-1}.$$

Ceci donne une décomposition de $wn^{-1}w$ du type cherché, ainsi l'on a $v(n''w^{-2}) = -v(n^{-1}) = -v(n) = -k$. De plus on voit que $n''H$ est déterminé par n^{-1}, d'où le corollaire. On aurait pu utiliser ce corollaire pour préciser par le calcul $\varphi(nN_{k-l})$.

Le deuxième corollaire se démontre en constatant que si $q_2 \neq 1$, l'élément $\tau \in < N, w >$, car il existe des éléments dans N dont la valuation v est égale à 1, et on applique le premier corollaire. Comme, d'après la décomposition de Bruhat, G est engendré par w, τ, N, on en déduit le corollaire dans ce cas.

Dans le cas où $q_2 = 1$, le groupe $< N, w >$, qui est engendré par des éléments qui fixent un sommet de numéro 1, sera contenu dans le sous-groupe de G qui conserverait la numérotation de l'arbre homogène sous-jacent à l'arbre de type $(q_1, 1)$ considéré.

Comme il existe des éléments dans N de valuation 2, l'élément τ^2 sera dans $< w, N >$, et la décomposition de Bruhat appliquée à G^+, qui est le groupe des éléments qui conservent la parité, $G^+ = B^+ \sqcup B^+wB^+$, avec $B^+ = G^+ \cap B = \tau^{2\mathbb{Z}}N$, montrera alors que $G^+ =< w, N >$. ∎

Remarque Dans le cas de PGL_2, il y a une section naturelle de N/H égale à k réalisé comme groupe des matrices unipotentes supérieures: on peut choisir la presque-involution φ, définie sur k^*, $\varphi(x) = x^{-1}$. Dans tous les cas le 2) prouve qu'elle est continue sur N/H et permettra même de déterminer son jacobien.

De manière analogue la proposition suivante donne une décomposition de K liée à l'action de K sur Ω.

Proposition 1.5.10 *On rappelle qu'on a choisi un sommet* 0, *une géodésique dont* B *est le fixateur du bout* ∞, *un élément* w *qui fixe* 0, *et échange les* *bouts de la géodésique, on a*

$$K = N_0 w N_0 \sqcup w N_{-1} w N_0.$$

Pour $k \in K$, on désigne par $x_{p(k)}$ la projection de $k(\omega)$ sur $[\omega', \omega]$, qui est le carrefour des trois bouts $(k(\omega), \omega, \omega')$, et qui est définie s'ils sont distincts.

Dans cette décomposition, on a

$$\begin{array}{ll} p(k) = \ v(n) \geq O & \text{si } k \in nwN_0 \\ p(k) = -v(n) < 0 & \text{si } k \in wnwN_0. \end{array}$$

Démonstration: On a $k(\omega) \neq \omega$, sauf si $k \in N_0$, d'où $k(\omega) \in Nw(\omega)$, et on peut écrire $k = nwb$. Si $n \in N_0$ alors $b = w^{-1}n^{-1}k \in K$, d'où $b \in B \cap K = N_0$. On désigne par $l = v(n) \geq 0$.

On sait que x_l est la projection de $n(\omega')$ sur $[\omega', \omega]$. Comme $k(\omega) = n(\omega')$, on a ici $p(k) = l$, d'où l'égalité $p(k) = v(n)$.

Le cas où $k(\omega) = \omega'$ correspond à $k \in HwN_0$ qui est le seul cas où $v(n)$ n'est pas défini. On pourrait poser $\omega' = x_{-\infty}$ et $v(H) = -\infty$.

Dans le cas où $n \notin N_0$, on écrit $nw = wn'wb$, avec $v(n') = -v(n) \geq 1$. D'où $k = wn'wb'$ avec $b' \in B$ et $n' \in N_1$. Or $b' \in B \cap K = N_0$. Ceci montre que $k \in wN_1wN_0$. C'est encore vrai si $k \in N_0 = wHwN_0$.

D'où la décomposition de K.

On a $w^{-1}k(\omega) = n'w(\omega)$, on en déduit que $x_{-p(k)} = w^{-1}(x_{p(k)})$ est le carrefour des bouts $(n'(\omega'), \omega', \omega)$, d'où $-p(k) = v(n')$ si $n' \notin H$.

Dans le cas où $k(\omega) = \omega$, alors $k \in N_0 = wHwN_0$, on peut poser $p(k) = \infty = -v(H)$.

La caractérisation donnée ci-dessus des éléments de K, par leur projection, précise l'unicité dans cette décomposition, et prouve en tout cas que la réunion est disjointe. ∎

On remarque aisément que $v(n)$ ne dépend que de la classe HnH; en effet H est un sous-groupe des groupes N_k, ceux-ci sont donc des réunions de classes bilatères modulo H, il en est de même des différences N_k^* qui définissent v.

On peut s'intéresser à la réciproque, à savoir si les valuations paramétrisent les doubles classes de $H \backslash N / H$.

La réponse à cette question qui dépend du groupe G, qui est positive dans le cas de $\mathcal{G}$, est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.5.11 *Soit G un groupe doublement transitif.*

Il y a équivalence entre 1) *et* 2), *où*

1) *Pour $n, n' \in N$, l'égalité $v(n) = v(n')$ implique $HnH = Hn'H$.*

2) *Le groupe G est faiblement triplement transitif.*

Démonstration: Pour montrer que 2) implique 1), on se donne n, n' comme dans l'énoncé, et on pose $k = v(n) = v(n')$. Les deux triplets de bouts $(\omega, \omega', n(\omega))$ et $(\omega, \omega', n'(\omega))$ ont même carrefour x_k, d'après 1.4.2, il existe $g \in G$ qui envoie la première situation sur la seconde, à savoir g qui fixe ω, ω', x_k et tel que $g(n(\omega')) = n'(\omega')$. On voit donc que $g \in H$, on considère ensuite $n'^{-1}gn$, et on voit que cet élément fixe ω, ω', x_k, d'où $n'^{-1}gn \in H$, ce qui prouve que $n' \in HnH$.

Pour montrer que 1) implique 2), on se ramène, en faisant agir G sur la situation à la donnée suivante, deux bouts ω_1, ω_2 distincts de ω, ω' tels que les carrefours x_k de $(\omega,\ \omega',\ \omega_1)$ et x_l de $(\omega,\ \omega',\ \omega_2)$ soient de même numéro, ce qui signifie que k et l ont même parité.

Ceci est toujours possible, car le groupe G étant transitif sur les géodésiques, on peut, étant donnés trois bouts distincts, envoyer par un élément de G les deux premiers sur ω et ω'. Par cette action, les carrefours des trois bouts conservent leur numéro. On peut supposer ensuite que $x_k = x_l$, quitte à faire agir une puissance de τ, à savoir $\frac{k-l}{2}$.

On considère alors $n \in N$ et $n' \in N$ tels que $n(\omega') = \omega_1$ et $n'(\omega') = \omega_2$. Comme $v(n) = k = l = v(n')$, d'après 1) $n' \in hnH$ avec $h \in H$. L'élément h envoie donc ω_1 sur ω_2 et fixe ω et ω'. D'où 2). ∎

Avant de passer à la section suivante on remarquera que

$$\tau^l N_k \tau^{-l} = N_{k+2l}.$$

la démonstration est presque évidente une fois que l'on a remarqué que

$$N_k = G_{x_k} \cap B, \text{ que } \tau \in B, \text{ et que } \ gG_x g^{-1} = G_{g(x)}.$$

1.6 Autres arbres numérotés et réguliers

Définition 1.6.1 *On dit qu'un arbre numéroté* [5] *par un ensemble fini I, et sans sommet pendant* [6]*, est régulier, si pour tout $i \in I$ et pour tout sommet de numéro i, le nombre d'arêtes le contenant et contenant un sommet de numéro j est une constante, notée $m(i,j)$.*

Définition 1.6.2 *On appelle arbre épais un arbre dans lequel tout sommet appartient à au moins 3 arêtes.*

Remarque[7] On peut vérifier aisément qu'un arbre numéroté est régulier si et seulement le groupe des automorphismes de cet arbre qui respectent la numérotation est pour chaque numéro transitif sur l'ensemble des sommets de ce numéro. En particulier un arbre régulier est épais, si et seulement si $\sum_{j \in I} m(i,j) > 2$ pour tout $i \in I$.

On remarque que dans un arbre épais, tout chemin fini $[x_0, \dots, x_n]$ qui est géodésique peut être prolongé dans les deux sens par un chemin le contenant $[x_{-1}, \dots, x_{n+1}]$ qui est géodésique, car x_n (resp. x_0) est lié par une arête à un sommet $y \neq x_{n-1}$, (resp. $z \neq x_0$) et on choisit alors $x_{n+1} = y$ (resp. $x_{-1} = z$).

Ainsi tout chemin géodésique est contenu dans une géodésique maximale qui est doublement infinie.

Soit $\mathcal{A}$ un arbre régulier épais numéroté par l'ensemble I. On considère la matrice $M = (m(i,j))$. La matrice M permet de définir une structure de graphe (orienté) sur I. Deux éléments i,j sont liés, si et seulement si $m(i,j) \neq 0$. On appelle chemin sur I une suite de sommets liés. Comme les arêtes de $\mathcal{A}$ ne sont pas orientées, la condition $m(i,j) \neq 0$ implique $m(j,i) \neq 0$. Comme $\mathcal{A}$ est un arbre, il existe des chemins liant tout couple des sommets. Ainsi la matrice M est irréductible[8].

L'application de numérotation de l'ensemble des sommets de $\mathcal{A}$ dans I, définit une application de l'ensemble des demi-géodésiques dans $I^{\mathbb{N}}$, et induit une application de l'ensemble Ω des bouts de $\mathcal{A}$ dans un ensemble quotient de $I^{\mathbb{N}}$, à savoir l'image par la relation d'équivalence sur les demi-géodésiques définissant les bouts:

$$(i_n) \equiv (i'_n) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \mid n > p \rightarrow i_n = i'_{n+k}.$$

[5] On rappelle qu'un arbre est numéroté, ou colorié, par I, s'il existe une surjection de l'ensemble des sommets de l'arbre dans I.

[6] Un sommet de numéro i sera dit pendant, ou extrémal, s'il n'est lié qu'a un seul sommet.

[7] Remarque suggérée par G.Rousseau

[8] Une matrice M est dite irréductible, si pour tout couple d'indices $i,j \in I$, il existe une puissance de M dont le coefficient d'indice (i,j) est non nul.

On appelle encore "numérotation", ou coloration d'un bout, la classe ainsi définie, cette "numérotation" est clairement invariante par les automorphismes de l'arbre.

On vérifie qu'un chemin $(i_p)_{0\leq p\leq m}$ sur I, sans aller et retour, se relève toujours dans $\mathcal{A}$ en un chemin géodésique issu de n'importe quel sommet de numéro i_0.

Deux chemins sur I, $(i_p)_{0\leq p\leq m}$ et $(i'_p)_{0\leq p\leq m'}$, tels que $i_m = i'_0$ et satisfaisant à $i_{m-1} \neq i'_0$ ou à $m(i_m, i_{m-1}) > 1$ si $i_{m-1} = i'_0$, se composent et leur composé est l'image d'une géodésique issue d'un sommet donné de numéro i_0.

Montrons que si l'arbre $\mathcal{A}$ est régulier et épais, et si les bouts sont dans la même classe, c'est à dire ont tous le même "numéro", on a, pour tout $i \in I$, un et un seul $j \in I$, avec $m(i,j) \neq 0$. Ce qui est la définition d'une matrice monômiale.

Ceci impliquera, compte tenu de ce que $m(i,j) = 0 \Longleftrightarrow m(j,i) = 0$, et de ce que que M est irréductible, que I a au plus deux éléments: ainsi on aura montré que l'arbre est homogène ou semi-homogène.

Supposons donc l'ensemble $J_i = \{j|\, m(i,j) \neq 0\}$, pour un $i \in I$ donné, ne soit pas réduit à un élément.

Ou bien $\mathrm{Card}(J_i) \geq 3$, on note alors j, k, l trois éléments distincts de J_i.

Ou bien $\mathrm{Card}(J_i) = 2$, la relation $\sum m(i,j) > 2$, montre qu'il existe $k \in J_i$ avec $m(i,k) \geq 2$; on note alors $j \in J_i$ l'autre élément de J_i; et on pose $l = k$, pour unifier l'écriture avec le cas précédent.

On considère deux lacets sur I allant de i à i; le premier $C = (i_p)_{o<p\leq m}$, avec $i_0 = i, i_1 = k, \ldots, i_{m-1} = l, i_m = i$, le second $C' = (i'_p)_{o<p\leq m}$, avec $i'_0 = i, i'_1 = j, \ldots, i'_{m-1} = l, i'_m = i$, ces lacets étant supposés minimaux pour ces propriétés. L'hypothèse de minimalité implique que ne peut avoir à la fois $j \in C$ et $k \in C'$; on voit qu'on ne peut constituer un chemin géodésique sur I en composant C ou C' de façon arbitraire et obtenir ainsi une infinité de demi-géodésiques issues d'un sommet donné de numéro i: ces demi-géodésiques sont paramétrées par les $2^{\mathbb{N}}$ suites à valeurs C ou C', car au moins un des cycles C ou C' est repéré par un couple de sommets consécutifs (i,j) ou (i,k).

Comme chaque bout ne contient qu'un ensemble dénombrable de demi-géodésiques issues d'un sommet donné, on en déduirait l'existence d'une infinité non dénombrable de "numérotations" de bouts. On a donc démontré le théorème suivant.

Théorème 1.6.1 *Les seuls arbres numérotés réguliers et épais, dont le groupe d'automorphismes est transitif sur l'ensemble des bouts, sont les arbres* *homogènes et semi-homogènes.*

Montrons maintenant, comment dans le cas d'un arbre $\mathcal{A}$ régulier non épais, mais dont au moins un sommet a une valence supérieure strictement à 2, et dont le groupe des automorphismes est transitif sur l'espace des bouts, on peut construire un sous-arbre $\mathcal{A}_0$ régulier épais, pour lequel l'injection canonique va induire un isomomorphisme de l'espace des bouts de $\mathcal{A}_0$ sur ceux de $\mathcal{A}$, et un isomorphisme canonique des groupes d'automorphismes des deux arbres.

Supposons que pour un i_0 donné on ait $\sum m(i_0, j) \leq 2$.

On supposera d'abord que $\sum m(i_0, j) = 2$. Le cas où $\sum m(i_0, j) = 1$, correspond à un sommet pendantet sera discuté plus loin.

Ainsi tout sommet de numéro i_0 est donc de valence 2; ce qui se produit dans l'un des deux cas suivants.

1) Pour un j_0, on a $m(i_0, j_0) = 2$.

On va vérifier qu'alors $m(j_0, j_0) = 0$, en montrant, par l'absurde, qu'il y aurait des géodésiques correspondant au cycle (j_0, i_0, j_0). Ceci qui est impossible, compte tenu des hypothèses, car on est dans l'une des deux situations suivantes.

a) $|I| > 2$. On peut vérifier que, pour tout numéro $j \in I$, il existe des géodésiques comportant une infinité de sommets de numéro j. Ainsi, il y aurait plusieurs "numéros" de bouts.

b) $I = \{i_0, j_0\}$. Deux cas sont à envisager.

Ou bien, $m(j_0, j_0) \geq 2$, alors il existe des géodésiques composées exclusivement de sommet de numéro j_0. D'où au moins deux "numéros" de bouts, donc à exclure.

Ou bien $m(j_0, j_0) = 1$. On a $m(i_0, j_0) \geq 1$, car il n'y a pas de sommet pendant.s Si $m(i_0, j_0) = 1$, chaque sommet de l'arbre serait de valence 2, c'est à dire l'arbre non numéroté sous-jacent serait $\mathbb{Z}$, hypothèse éliminée. Ainsi $m(i_0, j_0) \geq 2$; il y a donc des géodésiques correspondant au cycle (i_0, j_0), d'où au moins deux "numéros" de bouts.

On a ainsi montré que $m(j_0, j_0) = 0$.

On pose alors $I' = I - \{i_0\}$, et on considère l'arbre $\mathcal{A}'$ dont les sommets ceux de $\mathcal{A}$ qui sont numérotés par I'. Ainsi par construction $\mathcal{A}'$ est numéroté par I'. Les arêtes de $\mathcal{A}'$ sont, d'une part les restrictions à $\mathcal{A}'$ d'arêtes de $\mathcal{A}$, d'autre part celles liant deux sommets de numéro j_0, ainsi décrites: un couple de sommets de numéro j_0 définit une arête, si et seulement si ils sont à distance 2 dans $\mathcal{A}$, et si la géodésique de longueur 2 qui les joint contient un sommet de numéro i_0.

2) Il existe $j, k \in J_{i_0}$, avec $m(i_0, j) = m(i_0, k) = 1$. Montrons qu'alors $m(j, k) = 0$, sauf dans le cas où $|I| = 3$, et $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, numéroté par les classes modulo 3, cas éliminé par les hypothèses.

En effet, si $m(j, k) \neq 0$, il y aurait deux sortes de géodésiques minimales liant des sommets de numéro j et de numéro k, les unes de longueur 1, les autres de longueur 2, passant par des sommets de numéro i_0. Et on pourrait construire des géodésiques infinies correspondant à une suite de cycles (j, i_0, k). On va vérifier que cela implique que $|I| = 3$: on sait que si $l \in I, l \neq i_0, j, k$, il existe une géodésique comportant une infinité de sommets de numéro l, d'où au moins deux "numéros" des bouts. De plus on doit avoir, $m(j, k) = m(k, j) = 1$, et $m(j, i_0) = m(k, i_0) = 1$, car, si par exemple $m(j, k) > 1$, il y aurait des géodésiques correspondant au cycle (j, i_0, k, j, k) donc plus qu'un "numéro" de bout. De même, si $m(j, i_0) \geq 2$, il y aurait des géodésiques corespondant au cycle (j, i_0, k, i_0, k) donc plus qu'un "numéro" de bout. Le même argument montre enfin que $m(j, j) = m(k, k) = 0$.

Mais le cas $|I| = 3$, et $m(u, v) = 1$, pour $u, v \in I$, $u \neq v$ est justement le cas d'un arbre isomorphe à $\mathbb{Z}$, numéroté par les classes modulo 3, cas qui a été exclus.

Ainsi $m(j, k) = 0$, on définit alors un nouvel arbre $\mathcal{A}'$. Il est numéroté par $I' = I - \{i_0\}$, les sommets de $\mathcal{A}'$ sont ceux de $\mathcal{A}$ dont le numéro est différent de i_0, les arêtes de $\mathcal{A}'$ sont, d'une part les arêtes de $\mathcal{A}$ composées de sommets de $\mathcal{A}'$, d'autre part les couples de sommets de numéro j, k à distance 2 dans $\mathcal{A}$.

On vérifie que c'est un arbre régulier numéroté par I' avec $m'(p, q) = m(p, q)$, sauf si $\{p, q\} = \{j, k\}$, où $m'(j, k) = m(j, i)$ et $m'(k, j) = m(i, j)$. On vérifie, bien que les distances géodésiques soient modifiées en passant de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}'$, que le groupe des automorphismes de $\mathcal{A}'$ et de $\mathcal{A}$, ainsi que l'espace des bouts de $\mathcal{A}'$ et de $\mathcal{A}$ sont naturellement isomorphes.

En itérant ce procédé, on aboutit à un arbre de Bruhat-Tits. On a ainsi montré

Proposition 1.6.2 *Soit $\mathcal{A}$ un arbre numéroté régulier, sans sommet pendant, et avec au moins un sommet dont la valence est supérieure ou égale à* 3*. On suppose que le groupe d'automorphismes de $\mathcal{A}$ est transitif sur l'ensemble de ses bouts.*

Alors, il existe un sous-arbre $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$, qui est un arbre de Bruhat-Tits et l'injection de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ induit un isomorphisme canonique de l'espace des bouts de $\mathcal{A}$ sur celui de $\mathcal{A}'$ et du groupe des automorphismes de $\mathcal{A}$ sur celui de $\mathcal{A}'$.

Remarques

1) Dans le cas où tous les sommets sont de valence 2, l'arbre non numéroté est isomorphe à $\mathbb{Z}$ qui a deux bouts. Le groupe des automorphismes de l'arbre est le sous-groupe du groupe diédral infini qui respecte la numérotation, il contient des translations, et peut contenir ou non, des symétries, il en contient si et seulement, il est transitif sur l'ensemble de deux bouts.

2) Dans le cas où il y a des sommets pendants, toute demi-géodésique maximale ne définit pas forcément un bout, car elle peut se terminer par un sommet pendant; on peut encore supprimer ces sommets, et en supposant l'arbre initial $\mathcal{A}$ infini, obtenir une projection de $\mathcal{A}$ sur un arbre $\mathcal{A}'$, homogène ou semi-homogène, induisant un isomorphisme des ensembles de bouts, mais seulement un épimorphisme du groupe des automorphismes de $\mathcal{A}$ sur celui de $\mathcal{A}'$.

1.7 Mesures sur G, K, mesure quasi-invariante sur G/B

On remarque que le groupe G, dans le cas de l'arbre semi-homogène, est engendré par les fixateurs des sommets. En effet, étant donnés $g \in G$ et un sommet x, on sait qu'on peut choisisir un sommet z équidistant de x et de $y = g(x)$ car x et y sont de même numéro. On choisit $h \in G_z$ avec $h(x) = y$, ce qui est toujours possible.

D'où $g \in G_y h G_x \subset G_y G_z G_x$, ainsi G est engendré par des groupes compacts, d'où on déduit qu'il est unimodulaire pour une mesure de Haar.

Pour définir une mesure de Haar μ sur G, on va choisir un sommet $O = x_0$, on désigne par $K = G_O$ et on va normaliser la mesure μ par $\mu(K) = 1$. Comme $G = KB$, on sait d'après [W], qu'en choisissant une mesure de Haar à droite $d_r b$ sur B, normalisée par $\int_{K\cap B} d_r b = 1$, et

$$d\mu(kb) = dk d_r b$$

définit la mesure de Haar sur G telle que $\mu(K) = 1$.

Le groupe $B = \sqcup_{l\in\mathbb{Z}} \tau^l N$ est donc une réunion de translatés de N. Pour déterminer une mesure sur B, on commence par déterminer une mesure dn sur N, qui est unimodulaire, car c'est une réunion de groupes compacts (les N_k). Comme $B \cap K = N_0$, on doit avoir $m(N_0) = 1$, où m désigne le volume pour cette mesure.

On utilise ensuite que $[N_{2k} : N_{2k-1}] = q_1$ et que $[N_{2k+1} : N_{2k}] = q_2$, démontré dans la proposition 14.

Il s'ensuit que $m(N_{2k}) = (q_1q_2)^k$ et $m(N_{2k+1}) = (q_1q_2)^k q_2$, ceci simplement par itération de la formule précédente quand k est positif, et pour k négatif, on utilise $\frac{1}{m(N_{2k})} = [N_0 : N_{2k}] = (q_1q_2)^{|k|}$.

On considère ensuite sur B la mesure d_lb définie par

$$\int_B f(b)d_lb = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_N f(\tau^l n)dn.$$

Cette mesure est invariante à gauche, car elle l'est trivialement par multiplication à gauche par τ, et qu'elle l'est aussi par multiplication à gauche par un élément de N, car $N \lhd B$, et dn est une mesure de Haar sur N.

Donc d_lb est une mesure de Haar à gauche pour B.

Pour déterminer une mesure de Haar à droite, il faut déterminer l'inverse δ du module[9] de B. Ce module δ^{-1} est trivial sur N, car il est une réunion de compacts, il reste à déterminer $\delta(\tau)$. Or on a la formule suivante $\tau_l N_k \tau^{-l} = N_{k+2l}$ et comme $\frac{m(N_{k+2l})}{m(N_k)} = (q_1q_2)^l$, on en déduit que $\delta(\tau^l) = (q_1q_2)^l$, d'où

$$\delta(b) = (q_1q_2)^{\nu(b)}.$$

On en déduit que la mesure de Haar μ ainsi normalisée est donnée par

$$\int_G f(g)d\mu(g) = \int_K \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_N f(k\tau^l n)(q_1q_2)^l dkdn.$$

Une des conséquences de la théorie de la mesure de Haar est que la forme

$$\oint_{G/B} f = \int_K f(k)dk$$

est une forme linéaire, invariante par translation à gauche par les éléments de G, sur l'espace des fonctions vérifiant

$$f(gb) = \delta^{-1}(b)f(g)$$

et dont la restriction à K est intégrable, et toute forme G-invariante sur le même espace lui est proportionnelle.

Remarque Pour ce choix de la mesure de Haar sur G, il est intéressant de connaître le volume des sous-groupes compacts maximaux de G, qui sont les fixateurs des sommets.

---

[9]On rappelle que le module de B est l'homomorphisme défini sur B par $x \mapsto \frac{d(x^{-1}bx)}{db}$, lorsque db est mesure de Haar à droite ou à gauche de B.

Soit x un sommet de numéro 1, comme G est transitif sur les sommets de numéro donné, il existe $g \in G$ tel que $x = g(O)$, alors $G_x = gKg^{-1}$ d'où $\mu(G_x) = \mu(K) = 1$, car μ est invariante à droite et à gauche.

Pour des sommets de numéro 2, dont les fixateurs sont conjugués, il suffira de connaître $\mu(G_{x_1})$, où x_1 est un sommet voisin de O. Pour déterminer son volume, on considère le groupe $I = K \cap G_{x_1}$, qui est le fixateur de l'arête $[O, x_1]$, et on vérifie aisément, vu la transitivité du groupe G sur les sphères, que les ensembles quotients K/I (resp. G_{x_1}/I), s'identifient aux sphères de rayon 1, centrées en O (resp. x_1). D'où

$$[K : I] = \frac{1}{q_1 + 1}, \text{ et } [G_{x_1} : I] = \frac{1}{q_2 + 1}.$$

Ceci prouve que si y est un sommet de numéro 2, le volume de G_y est donné par

$$\mu(G_y) = \frac{q_2 + 1}{q_1 + 1}.$$

Au passage on a prouvé que celui de I est donné par

$$\mu(I) = \frac{1}{q_1 + 1}.$$

Il en sera de même pour les fixateurs des arêtes, qui sont conjuguées de I par G, car G est transitif sur les arêtes.

Avant de continuer la détermination des mesures, il est nécessaire de connaître le cardinal des sphères.

Lemme 1.7.1 *Soit x un sommet de numéro i, alors le cardinal des sphères centrées en x est donné par:*

$$|S(x,n)| = \begin{cases} (1 + \frac{1}{q_i})(q_1 q_2)^k & si\ n = 2k \\ (q_i + 1)(q_1 q_2)^k & si\ n = 2k + 1 \end{cases}$$

Démonstration: La démonstration se fait par récurrence, on commence par remarquer que la sphère unité a $q_i + 1$ éléments, ensuite pour passer de la sphère de rayon n à celle de rayon $n + 1$, on remarque que tout sommet de la sphère $S(x, n)$ est situé sur q_j segments liant x à un sommet de la sphère $S(x, n+1)$, où j est le numéro d'un sommet à distance n de x, ce qui entraîne que $|S(x, n + 1)| = q_j |S(x, n)|$. Comme pour n pair $j = i$ et pour n impair $j = 3 - i$, on en déduit le lemme. ∎

Il est intéressant et utile de connaître la décomposition de la mesure de Haar liée à la décomposition de Cartan.

Comme les classes dans cette décomposition sont ouvertes et compactes, la mesure μ, notée aussi dg, est donnée par la formule :

$$\int_G f(g)dg = \sum_{l=0}^{\infty} \mu(K\tau^l K) \int_{K\times K} f(k_1\tau^l k_2)dk_1dk_2.$$

Cette formule est évidente, et il ne reste qu'à préciser la valeur de $\mu(K\tau^l K)$.

Pour $l = 0$, on a seulement $\mu(K) = 1$.

Sinon on remarque que $K\tau^l K$ s'identifie au quotient de $K \times K$ par $I_l = K \cap \tau^l K\tau^{-l} = G_{[x_0,x_{2l}]}$.

Donc $\mu(K\tau^l K) = [K : I_l]$, et cet indice est le cardinal de l'ensemble quotient $K/G_{[x_0,x_{2l}]}$, qui s'identifie aux orbites de x_{2l} sous K, donc à la sphère de centre O et de rayon $2l$, car K y opère transitivement. Comme

$$|S(O, 2l)| = (1 + \frac{1}{q_1})(q_1q_2)^l,$$

on obtient ainsi la formule

$$\int_G f(g)dg = \int_K f(k)dk + \sum_{l=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{q_1})(q_1q_2)^l \int_{K\times K} f(k_1\tau^l k_2)dk_1dk_2.$$

On va dans cette partie étudier une autre forme de $\oint_{G/B}$. On considère sur l'espace des fonctions, vérifiant

$$f(gb) = \delta^{-1}(b)f(g), \text{ pour } g \in G,\ b \in B,$$

la forme linéaire

$$J(f) = \int_N f(nw)dn$$

définie au moins pour les fonctions positives.

On va montrer que cette forme est invariante par les translations à gauche par les éléments de G, et pour cela, on le vérifiera pour des générateurs de G, à savoir N,τ et w.

On désigne par f_h le translaté défini par $f_h(g) = f(h^{-1}g)$.

Il est évident que si $n \in N$ on a $J(f_n) = J(f)$, car la mesure dn est une mesure de Haar.

On va expliciter f_τ, on a $f_\tau(nw) = f(\tau^{-1}n\tau\tau^{-1}w)$.

Or $n' = \tau^{-1} n \tau \in N$, et l'application $n \mapsto n'$ est une bijection mesurable de N dont le module

$$\frac{dn'}{dn} = \delta(\tau)^{-1}.$$

On en déduit que $f_\tau(nw) = f(n'w)\delta(\tau)$, ce qui en intégrant donne $J(f_\tau) = J(f)$.

On remarque que pour les fonctions vérifiant $f(gb) = \delta^{-1}(b)f(g)$, on a $f(nhw) = f(nw(w^{-1}hw)) = f(nw)$, car $w^{-1}hw \in H \subset N$.

Ainsi dans l'intégrale définissant J, on peut écrire $J(f) = \int_{N/H} f(nw)dn$.

Pour prouver l'invariance par w, on établira un lemme donnant le jacobien de la transformation φ définie dans la proposition 1.5.5.

Lemme 1.7.2 *On pose pour $n \in N/H - H$, $\varphi(n) = n'H$, où $wnw = n'wb$.*

Pour une fonction positive h définie, ou une fonction de $C_c^\infty(N/H - H)$ continue à support compact sur $N/H - H$, on a:

$$\int_{N/H} f(\varphi(n))(q_1q_2)^{-v(n)}dn = \int_{N/H} f(n)dn$$

Démonstration: On va démontrer cette formule pour une famille génératrice de $C_c^\infty(N/H)$, les fonctions $f_{n,k+l}$ caractéristiques des ensembles nN_{k+l}, avec $v(n) = k$ et $l > 0$.

Dans ce cas, on a $f_{n,k+l} \circ \varphi = f_{n',-k+l}$, d'après le 2) de la proposition 17, et la première intégrale vaut $m(N_{-k+l})(q_1q_2)^k$, car $f \circ \varphi$ a comme support $n'N_{-k-l} \subset N^*_{-k}$.

La deuxième intégrale vaut donc $m(N_{k+l})$. Ces deux expressions sont égales, car on sait que $m(N_{r+2s}) = (q_1q_2)^s m(N_r)$.

Ceci démontre le lemme pour les fonctions continues à support compact sur N/H nulles en H, et pour les fonctions positives sur N/H. ■

Pour montrer l'invariance de J, il reste encore à étudier $J(f_w)$, et comme $w \in w^{-1}H$, on va considérer $f_{w^{-1}}$.

On a $f_{w^{-1}}(nw) = f(wnw) = f(n'wb) = f(n'w)\delta^{-1}(b)$.

Or $\nu(b) = v(n) = -v(n')$, et comme $\delta(b) = (q_1q_2)^{\nu(b)}$,
on a $f_{w^{-1}}(nw) = f(\varphi(n)w)(q_1q_2)^{-v(n)}$,
et on en déduit que
$J(f_{w^{-1}}) = J(f)$.

On a ainsi montré

Proposition 1.7.3 *La forme linéaire J sur l'espace des fonctions f vérifiant*

$$f(gb) = \delta^{-1}(b)f(g), \quad \textit{pour } g \in G, \ b \in B,$$

est invariante par translations à gauche par les éléments de G.

Il ne reste plus qu'à comparer J et $\oint_{G/B}$. D'après [W], on sait que ces deux formes sont proportionnelles, donc $J = c\oint_{G/B}$. Pour déterminer la constante c, on choisira la fonction f qui vérifie $f(gb) = \delta^{-1}(b)f(g)$ dont la restriction $f|_K$ à K est la fonction caractéristique de N_0wN_0.

Ceci donne $1 = J(f) = c\oint_{G/B} f = m(N_0wN_0)$.

On sait par ailleurs que $m(K) = m(N_0wN_0 + m(wN_{-1}wN_0)$, or comme la mesure est invariante, on a $m(wN_{-1}wN_0) = m(N_{-1}wN_0)$, et il ne reste plus qu'à comparer les ensembles N_0wN_0 et $N_{-1}wN_0$.

Le premier contient le second, et si k décrit N_0wN_0, le sommet $k(x_1)$ décrit l'ensemble $N_0(x_{-1})$ qui est l'ensemble des sommets de la sphère $S(x_0, 1)$ autre que x_1, alors que si $k \in N_{-1}wN_0$, on a $k(x_1) = x_{-1}$.

Donc N_0wN_0 est une réunion de translatés de $N_{-1}wN_0$ paramétrée par les sommets de $S(x_0, 1)$ autre que x_1, d'où $m(N_0wN_0) = q_1m(wN_{-1}wN_0)$.

On en déduit que $m(N_0wN_0) = \frac{q_1}{q_1+1}$.

On a ainsi montré

Proposition 1.7.4 *On a*

$$J = (1 + \frac{1}{q_1})\oint_{G/B} .$$

On va utiliser cette proposition pour décrire la mesure de K exprimée sous la forme $wN_{-1}wN_0 \cap N_0wN_0$.

Corollaire 1.7.5 *On a pour la mesure de Haar sur K*

$$\int_{N_0\times N_0} f(nwn')dndn' + \int_{N_{-1}\times N_0} f(wnwn')dndn' = (1 + \frac{1}{q_1})\int_K f(k)dk .$$

Démonstration: On notera $I(f)$ la somme des deux intégrales figurant à gauche dans la formule ci-dessus. On commence par une fonction f dont le support est N_0wN_0. On suppose f positive et on la rend invariante à droite par N_0, ce qui définit $f'(k) = \int_{N_0} f(kn)dn$.

Soit F la fonction définie sur G qui vérifie, pour $g \in G$ et $b \in B$, la relation $F(gb) = \delta^{-1}(b)F(g)$, et dont la restriction à K est égale à f'.

On compare alors $J(F) = \int_N f'(nw)dn$ et $\oint_{G/B} F = \int_K f'(k)dk$.

On a

$$J(F) = \int_N f'(nw)dn = \int_{N\times N_0} f(nwn')dndn'.$$

Or le support de f est N_0wN_0, donc dans l'intégrale ci-dessus on peut limiter à N_0 l'intégration par rapport à dn, ce qui montre dans ce cas $J(F) = I(f)$, car le support de f ne rencontre pas $wN_{-1}wN_0$.

Par ailleurs on remarque, en appliquant le théorème de Fubini, que l'on a $\int_K f'(k)dk = \int_K f(k)dk$, d'où le corollaire pour f en appliquant la proposition précédente à F.

· On suppose ensuite que le support de f est $wN_{-1}wN_0$. On considère alors la fonction $g = f_w$, son support est $N_{-1}wN_0$, et on a l'égalité

$$(1 + \frac{1}{q_1}) \int_K g(k)dk = \int_{N_0 \times N_0} g(nwn')dndn'.$$

On en déduit l'égalité recherchée pour f, en remarquant que, d'une part l'intégrale sur K de f et g sont égales car dk est une mesure de Haar, d'autre part que le support de g est $N_{-1}wN_0$, donc dans l'intégrale de gauche on peut limiter à $N_{-1} \times N_0$ l'ensemble d'intégration.

Le cas général s'en déduit, car toute fonction sur K est trivialement une somme de fonctions de deux types précédents. ∎

1.8 Mesures sur Ω, noyau de Poisson

Soit x un sommet, on sait que le groupe G_x opère continûment et de façon transitive sur Ω. On choisit un bout ω; comme le groupe B_ω est fermé, l'espace des bouts s'identifie à $K/K \cap B_\omega$ comme espace homogène sous K_x.

D'où une mesure ν_x sur Ω invariante par K_x, unique si on la suppose normalisée par $\nu_x(\Omega) = 1$.

Cette mesure vérifie, pour $d(x, y) = n$,

$$\nu_x(\Omega_{x,y}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathrm{S_{x,n}})}.$$

En effet on a $g(\Omega_{x,y}) = \Omega_{g(x),g(y)}$, ceci entraîne que $\nu_x(\Omega_{x,y}) = \nu_x(\Omega_{x,z})$, si $d(x, y) = d(x, z)$, car G_x est transitif sur les sphères de centre x, et on sait que Ω est la réunion disjointe des $\Omega_{x,y}$ quand y parcourt $S(x, n)$.

Enfin, comme les ensembles $\Omega_{x,y}$ quand y parcourt l'arbre, forment une base de la topologie de Ω, on en déduit que la mesure ν_x est caractérisée par ses valeurs sur ces ensembles. On a ainsi prouvé, en reportant les résultats du lemme 1.7.1

Proposition 1.8.1 *Soit x un sommet de l'arbre, dont on notera i le numéro. Il existe une unique mesure ν_x sur Ω vérifiant l'une des propriétés suivantes qui sont équivalentes.*

1) *La mesure* ν_x *est invariante par le groupe* G_x.

2) *La mesure* ν_x *vérifie, pour tout* y *tel que* $d(x,y) = n$, *la relation*

$$\nu_x(\Omega_{x,y}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(S_{x,n})} = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{1}{q_i}}(q_1q_2)^{-k} & si\ n = 2k \\ \frac{1}{q_i+1}(q_1q_2)^{-k} & si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

On désigne par T_g, où $g \in G$, la représentation régulière gauche sur $L(\Omega)$ définie par

$$T_gf(\omega) = f(g^{-1}\omega).$$

Proposition 1.8.2 *On a la formule*

$$\int_\Omega T_gf(\omega)d\nu_{g(x)}(\omega) = \int_\Omega f(\omega)d\nu_x(\omega).$$

Démonstration: Pour établir cette égalité, on se contentera de considérer la famille génératrice de $\mathcal{C}(\Omega)$ constituée des $f_{x,y}$, qui sont les fonctions caratéristiques des ensembles $\Omega_{x,y}$, quand y parcourt l'arbre.

Pour $f = f_{x,y}$, on a $T_gf_{x,y} = f_{g(x),g(y)}$, car ces deux fonctions ne prennent que la valeur 1 ou 0, et on a

$$T_gf_{x,y}(\omega) = 1 \Longleftrightarrow g^{-1}(\omega) \in \Omega_{x,y} \Longleftrightarrow \omega \in g(\Omega_{x,y}) = \Omega_{g(x),g(y)}.$$

L'intégrale de gauche, qui est égale à $\int_\Omega f_{g(x),g(y)}d\nu_{g(x)}(\omega)$, vaut donc

$$\nu_{g(x)}(\Omega_{g(x),g(y)}) = \frac{1}{|S(g(x),g(y))|}.$$

Comme g est une isométrie, $|S(g(x),g(y))| = |S(x,y)|$, et comme cette dernière expression est égale à la seconde intégrale, on obtient ainsi l'égalité des deux intégrales, d'où la proposition. ■

Corollaire 1.8.3 *On a la propriété de moyenne suivante*

$$\frac{1}{|S(x,n)|}\sum_{y\in S(x,n)} \nu_y = \nu_x.$$

Démonstration: On se donne un entier n, et on choisit un sommet y sur la sphère $S(x,n)$, on considère alors la forme $\int_{G_x\times\Omega} T_kf(\omega)dkd\nu_y(\omega)$ définie pour $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, la mesure sur G_x étant supposée normalisée.

Par construction, cette forme sur $\mathcal{C}(\Omega)$ est invariante par G_x, elle vaut 1 si f est la fonction constante égale à 1 sur Ω, donc elle est égale à $\nu_x(f)$.

On obtient, en intégrant d'abord sur Ω, et en utilisant la formule précédente appliquée à k^{-1} la relation

$$\int_{G_x} \nu_{k(y)}(f)dk = \nu_x(f).$$

On en déduit la formule demandée en remarquant que $S(x,n)$ est l'orbite de y sous G_x. ■

Il est donc naturel d'étudier le quotient des mesures ν en des points distincts.

Définition 1.8.1 *On appelle noyau de Poisson K la dérivée de Radon-Nikodym*

$$K(x,y;\omega) = \frac{d\nu_y(\omega)}{d\nu_x(\omega)}.$$

On a

Proposition 1.8.4 *Le noyau de Poisson est donné par la formule*

$$K(x,y;\omega) = \frac{(1+\frac{1}{q_i})\sqrt{q_i}}{(1+\frac{1}{q_j})\sqrt{q_j}} \sqrt{q_1 q_2}^{<x,y;\omega>},$$

où i est le numéro de x, et j celui de y.

En particulier si x et y sont de même numéro, on a

$$K(x,y;\omega) = \sqrt{q_1 q_2}^{<x,y;\omega>}.$$

De plus $K(x,y;.)$ est continu.

Corollaire 1.8.5 *Le noyau de Poisson est harmonique, c'est à dire qu'il vérifie la propriété de moyenne suivante*

$$\frac{1}{|S(x,n)|} \sum_{y \in S(x,n)} K(x,y;\omega) = 1.$$

Démonstration: Pour démontrer la formule donnant K, on va poser

$$\mu_x = \nu_x(1+\frac{1}{q_i})\sqrt{q_i},$$

où i est le numéro de x, et dans ces conditions la formule à démontrer se ramène à

$$\frac{d\mu_y(\omega)}{d\mu_x(\omega)} = \sqrt{q_1q_2}^{<x,y;\omega>},$$

compte tenu de la formule de cocycle de $<,;>$, il suffira de démontrer cette formule pour deux sommets x, y voisins, et pour cela d'évaluer $\nu_x(\Omega_{x,z})$ et $\nu_y(\Omega_{x,z})$, pour des z à distance paire de x : soit $d(x,z) = 2n$.

Deux cas peuvent se produire, soit $x \in [y,z]$ et alors $d(x,z) = d(y,z) - 1$, soit $y \in [x,z]$ et alors $d(x,z) = d(y,z) + 1$.

Dans le premier cas, $d(y,z) = 2n+1$, on a donc, pour $\omega \in \Omega_{x,z}$, la relation $< x, y; \omega >= d(x,z) - d(y,z) = -1$, d'où

$$\nu_x(\Omega_{x,z}) = \frac{1}{1+\frac{1}{q_i}}(q_1q_2)^{-n} \ , \ \nu_y(\Omega_{x,z}) = \frac{1}{1+q_j}(q_1q_2)^{-n}.$$

d'où

$$\mu_x(\Omega_{x,z}) = \frac{\sqrt{q_i}}{(q_1q_2)^n} \ , \ \mu_y(\Omega_{x,z}) = \frac{1}{\sqrt{q_j}(q_1q_2)^n}$$

Et dans ce cas, on a $\frac{\mu_y(\Omega_{x,z})}{\mu_x(\Omega_{x,z})} = \sqrt{q_1q_2}^{-1}$.

Dans l'autre cas, on a $< x, y; \omega >= 1$ pour $\omega \in \Omega_{x,z}$ et

$$\nu_y(\Omega_{x,z}) = \frac{1}{1+q_j}(q_1q_2)^{n-1} \ , \ \mu_y(\Omega_{x,z}) = \frac{1}{\sqrt{q_j}(q_1q_2)^{n-1}},$$

on a alors $\frac{\mu_y(\Omega_{x,z})}{\mu_x(\Omega_{x,z})} = \sqrt{q_1q_2}$.

Ceci prouve que les mesures μ_x et $\mu_y\sqrt{q_1q_2}^{<x,y;.>}$ coïncident sur les ensembles $\Omega_{x,z}$ avec $d(x,z)$ pair qui, comme on le voit aisément, forment une base de la topologie de Ω; il s'ensuit que ces mesures coïncident sur $\mathcal{C}(\Omega)$.

Ceci établit la formule demandée dans le cas de deux sommets voisins. Elle s'en déduit donc dans tous le cas.

La formule donnant K montre, de façon triviale, que $K(x,y;.)$ est continue sur Ω.

Enfin, pour démontrer le corollaire, on part du corollaire de la proposition précédente, qui donne $\frac{1}{|S(x,n)|}\sum_{y\in S(x,n)} K(x,y;\omega)d\nu_x(\omega) = d\nu_x(\omega)$, quand on a remplacé $d\nu_y(\omega)$ par sa valeur $K(x,y;\omega)d\nu_x(\omega)$; on conclut, en utilisant la continuité de $K(x,y;\omega)$, et le fait qu'une fonction continue sur Ω, ν_x-presque partout nulle, est nulle partout. ∎

1.9 Probabilités et martingales

On peut, étant donné le sommet x, considérer la marche aléatoire X_n sur l'arbre qui s'éloigne de x, de façon "isotrope", c'est à dire associée au processus de Markov, donné par

$$P_x(X_{n+1} = z \mid X_n = y) = p_x(y,z) = \begin{cases} \frac{1}{q_{n(y)}} & \text{si } d(y,z) = 1 \text{ et } y \in [x,z] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(où $n(y)$ désigne le numéro du sommet y)

Dans ce conditions, l'ensemble des bouts s'identifie aux chemins infinis (X_n) issus de x, et la mesure sur cet ensemble, obtenue à l'aide du théorème de Carathéodory, coïncide avec ν_x, car on vérifie sans peine que les ensembles $\Omega_{x,y}$ sont ceux pour lesquels $X_n = y$ pour $n = d(x,y)$, et que l'on a alors $P(X_n = y) = \frac{1}{|S(x,n)|}$.

Cette façon de procéder est différente de celle de [Ca 2], où l'on considère des marches aléatoires sur l'arbre avec des probabilités

$$p(y,z) = \frac{1}{q_{n(y)} + 1} \text{ si } d(y,z) = 1, \text{ et } p(y,z) = 0 \text{ sinon.}$$

Le théorème à démontrer est que X_n va à l'infini, c'est à dire vers un bout. Ceci peut se voir en évaluant la fonction de Green, et en remarquant que les chemins non géodésiques se ramènent aux chemins géodésiques en retirant des chemins fermés. Comme il n'y a qu'une mesure normalisée sur Ω invariante par G_x, la mesure obtenue coïncidera avec ν_x.

Mais seule la première interprétation est facilement généralisable dans le cas d'un immeuble.

On choisi un sommet x_0, et la mesure $\nu = \nu_{x_0}$ sur Ω.

En liaison avec la marche X_n, on va considérer sur Ω la tribu $\mathcal{B}^n$ définie par X_n, c'est à dire engendrée par les ensembles $\Omega_{x_0,y}$ avec $d(x_0,y) = n$.

On considérera le sous-groupe $\mathcal{K}^n$ de $\mathcal{G}$, qui est le fixateur de la sphère $S(x_0,n)$. Il fixe aussi la boule $B(x_0,n)$.

Proposition 1.9.1 *Il y a équivalence pour une fonction $f \in L^2(\Omega)$ entre les assertions* 1) *et* 2) : 1) *La fonction f est $\mathcal{B}^n$-mesurable.*
2) *On a $T(k)f = f$, pour tout $k \in \mathcal{K}^n$.*

Démonstration: Il est évident que 1) implique 2). Pour montrer la réciproque, on utilisera le lemme suivant:

Lemme 1.9.2 *Soit $\mathcal{K}_y^n$ l'ensemble des restrictions k_y des éléments $k \in \mathcal{K}^n$ à $\Omega_{x_0,y}$.*

L'application canonique $k \mapsto (k_y)$ de $\mathcal{K}^n$ dans $\prod_{y \in S(x_0,n)} \mathcal{K}_y^n$ est un isomorphisme.

Ce lemme se démontre en utilisant le lemme 1.3.6 et la proposition 1.3.5, qui montrent que l'identité sur $S(x_0, n)$ se prolonge en un automorphisme de l'arbre, et que les prolongements à partir d'un sommet sur la sphère se font de façon totalement indépendante, contrairement à ce qui se passerait dans le cas de PGL_2. Ceci prouve donc la surjectivité de l'application. Le reste est trivial.

La proposition s'en déduit, car $\mathcal{K}_y^n$ est clairement transitif sur $\Omega_{x_0,y}$. ∎

Corollaire 1.9.3 *Soit ε_n la fonction caractéristique de $\mathcal{K}^n$ normalisée par sa mesure.*

Alors l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{B}^n}$ est donnée par la

$$E^{\mathcal{B}^n}(f) = \int_{\mathcal{K}^n} T(k)(f)dk = \varepsilon_n * f,$$

où $*$ est la convolution à gauche dans le $\mathcal{K}$-espace Ω.

Ce corollaire est trivalement une conséquence du 2) de la proposition.

On rappelle, pour le lecteur qui l'aura oublié, que l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{B}^n}$ est la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}^n)$.

On peut aussi considérer Ω comme quotient de $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{x_0}$ par le fixateur du bout ω.

On choisira la demi-géodésique (x_n) partant de x_0 supposé de numéro 1, et allant vers ω et on supposera que la mesure de $\mathcal{N}_0 = \mathcal{K} \cap \mathcal{B}_\omega$ a été choisie égale à 1.

Dans ces conditions, à une fonction f sur Ω on associe une fonction F sur $\mathcal{K}$, invariante par $\mathcal{N}_0$ définie par $F(k) = f(k(\omega))$.

Ce procédé établit une bijection entre les deux espaces de fonctions, et est compatible avec les mesures de Haar sur $\mathcal{K}$ et ν_{x_0} sur Ω.

Lemme 1.9.4 *Les espaces suivants sont en bijection:*

$$\mathcal{K}^n \backslash \mathcal{K} / \mathcal{N}_0 \sim S(x_0, n) \sim \mathcal{K} / \mathcal{G}_{[x_0,x_n]},$$

où $\mathcal{G}_{[x_0,x_n]}$ est le fixateur dans $\mathcal{G}$ des sommets $\{x_0, x_n\}$, donc du segment $[x_0, x_n]$.

Démonstration: A une classe à droite $k\mathcal{N}_0$, on associe le bout $k(\omega)$, et à un tel bout on associe sa projection $p(k(\omega))$ sur la sphère $S(x_0, n)$. Cette projection ne dépend que de la double classe $\mathcal{K}^n k\mathcal{N}_0$, et on obtient tous les éléments de la sphère, d'où la première bijection.

On remarque ensuite que $p(k(\omega))$ qui est l'unique sommet sur la demi-géodésique $[x_0, k(\omega)]$ à distance n de x_0, n'est rien d'autre que $k(x_n)$, car k est une isométrie qui fixe x_0. On en déduit le deuxième isomorphisme. ∎

On peut donc donner une autre description de l'espérance conditionnelle.

On rappelle que ε_n la fonction caractéristique normalisée de $\mathcal{K}^n$, et on note α_n la fonction caractéristique normalisée de $\mathcal{G}_{[x_0,x_n]}$. On a

Proposition 1.9.5 *Soit f est une fonction définie sur $\mathcal{K}$ invariante à droite par $\mathcal{N}_0$, on a l'égalité*

$$\varepsilon_n * f = f * \alpha_n.$$

La démonstration de cette proposition est immédiate à l'aide du lemme précédent.

Remarque Cette proposition met en relation différents aspects liés aux arbres: d'une part, le point de vue martingales et probabilités qui y est naturellement associé, d'autre part le point de vue arithmétique: on considère l'arbre de $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$, décrit précédement, le sommet origine est fixé par $K = PSL_2(\mathbb{Z}_p)$, et $G_{[x_0,x_n]}$ est l'image du groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}_p)$, avec $c \in p^n\mathbb{Z}_p$, groupe qui est l'adhérence de l'image du groupe $\Gamma_0(p^n)$ constitué des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, avec $c \in p^n\mathbb{Z}$.

On remarque que $\cup\mathcal{B}^n$ est l'ensemble des ouverts de Ω, donc que la tribu engendrée par $\cup\mathcal{B}^n$ est la tribu des boréliens de Ω.

D'autre part si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on remarque qu'il existe n tel que $f = E^{\mathcal{B}^n} f$.

On notera enfin $\Delta_n f = E^{\mathcal{B}^n} f - E^{\mathcal{B}^{n-1}} f$, pour $n \geq 1$ et $\Delta_0 f = E^{\mathcal{B}^0} f$. On posera aussi $\delta_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $\delta_0 = \varepsilon_0$.

On a la proposition suivante classique dans les martingales

Proposition 1.9.6 *Les projecteurs Δ_n forment une famille de projecteurs orthogonaux de $L^2(\Omega)$, c'est à dire que pour $f, g \in L^2(\Omega)$ on a*

$$< f, g >= \sum_{n=0}^{\infty} < \Delta_n f, \Delta_n g >,$$

et si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on a

$$f = \sum_{n=0}^{n<<\infty} \Delta_n f.$$

Démonstration: La démonstration est classique, et ici sera encore plus facile, quand on aura remarqué que Δ_n est la convolution par δ_n, où

$$\delta_n = (\delta - \varepsilon_{n-1}) * \varepsilon_n = \varepsilon_n * (\delta - \varepsilon_{n-1}),$$

pour δ la mesure de Dirac sur $\mathcal{K}$, que la convolution par δ est l'identité, et que

$$\varepsilon_m * \varepsilon_n = \varepsilon_m * \varepsilon_n = \varepsilon_n, \text{ si } n \leq m,$$

car $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{K}^m$. ∎

Cette décomposition de l'espace $L^2(\Omega)$ sera utilisée pour diagonaliser les intégrales d'entrelacement.

Chapitre II: Séries principales

Dans ce chapitre, on va définir et commencer l'étude des séries principales de repésentations de G, qui généralisent les séries principales non ramifiées des groupes p-adiques de rang un.

2.1 Définition des séries principales

On va donner trois modèles des séries principales, et expliciter le dictionnaire (entrelaceur) qui fait passer de l'un à l'autre.

La première définition consiste à les définir comme représentations induites. On se fixe un bout noté ∞ et on désigne par B son fixateur dans G. On rappelle la définition de l'homomorphisme $\nu = \nu_\infty$ de B sur $\mathbb{Z}$, voir page 40, l'entier pair $2\nu(b)$ est l'ordre du germe de translation qu'induit $b \in B$ sur les demi-géodésiques du bout ∞.

Définition 2.1.1 *Soit λ un nombre complexe non nul, on définit le caractère χ_λ de B par*

$$\chi_\lambda(b) = (\sqrt{q_1 q_2}\lambda)^{\nu(b)}.$$

Soit $\mathcal{C}^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes localement constantes sur G. On définit alors

$$V^\lambda = \{f \in \mathcal{C}^\infty(G) \mid f(gb) = f(g)\chi_\lambda^{-1}(b) \text{ pour } g \in G,\ b \in B\ \}.$$

On se donne un sommet x de l'arbre, dont on considère K le fixateur dans G, et on notera dk la mesure de Haar normalisée de K. On notera R_K l'application qui à une fonction sur G associe sa restriction à K. L'image $R_K V^\lambda = V_K$ est un sous-espace de l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(K)$ des fonctions localement constantes sur K. Il est constitué de celles qui sont invariantes à droite par $K \cap B$, et s'identifie naturellement à $\mathcal{C}^\infty(K/K \cap B)$. Il ne dépend donc pas de λ.

Dans le cas où le sommet est fixé, et qu'il n'y a de risque d'ambiguïté, on notera $R = R_K$ et $V = V_K$.

La décomposition de Cartan $G = KB$ implique que R_K est une bijection.

On considère sur V^λ, la forme hermitienne $< f, g >_K = \int_K f(k)\bar{g}(k)dk$.

On a le lemme suivant, dont la démonstration sera apportée plus loin, au corollaire 2.2.2

Lemme 2.1.1 *Soient $(x_i)_{i=1,2}$ deux sommets de l'arbre, dont on note K_i les fixateurs dans G, et λ un nombre complexe non nul. Les formes hermitiennes $<>_{K_1}$ et $<>_{K_2}$ construites sur l'espace V^λ sont équivalentes.*

On suppose donné un sommet x.

On notera $\mathcal{H}^\lambda$ le complété de V^λ, c'est un espace de Hilbert, que l'on peut réaliser comme espace des classes de fonctions vérifiant $f(gb) = f(g)\chi_\lambda^{-1}(b)$, pour $g \in G$ et $b \in B$, et dont la restriction à K est de carré sommable. L'application R se prolonge en un isomorphisme d'espace de Hilbert de $\mathcal{H}^\lambda$ sur $L^2(K/K \cap B)$, considéré comme sous-espace de $L^2(K)$. Le lemme précédent permet de voir que l'espace $\mathcal{H}^\lambda$ ne dépend pas du sommet choisi pour définir la forme hermitienne.

On fait opérer le groupe G par translations à gauche sur V^λ.

Définition 2.1.2 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

Pour $f \in V^\lambda$ et $g \in G$, on pose $\pi^\lambda(g)f(h) = f(g^{-1}h)$,

Proposition 2.1.2 1) *Pour $g \in G$, l'opérateur $\pi^\lambda(g)$ de V^λ est borné. Il se prolonge donc en un unique opérateur borné de $\mathcal{H}^\lambda$, noté $\Pi^\lambda(g)$. On obtient ainsi des représentations π^λ et Π^λ de G.*

2) *La représentation Π^λ admet comme contragrédiente $\Pi^{\lambda'}$, où $\lambda' = \bar{\lambda}^{-1}$. Les représentations Π^λ sont unitaires si $|\lambda| = 1$.*

Démonstration: Soit $g \in G$ et $\lambda \neq 0$, on va majorer la norme de π^λ.

La décomposition d'Iwasawa de g^{-1} permet d'écrire g sous la forme $g = bh$, avec $b \in B$ et $h \in K$.

Soit $f \in V^\lambda$, on a

$$\|\pi^\lambda(g)f\|^2 = \int_K |f(g^{-1}k)|^2 dk.$$

Comme $f(g^{-1}k) = f(b^{-1}h^{-1}kbb^{-1}) = f(b^{-1}h^{-1}kb)\chi_\lambda(b)$, on obtient en posant $u = b^{-1}h^{-1}kb$

$$\|\pi^\lambda(g)f\|^2 = |\chi_\lambda(b)|^2 \int_{K'} |f(u)|^2 du,$$

où $K' = b^{-1}Kb$ est le fixateur du sommet $x' = b^{-1}x$. D'après le lemme 2.1.1, il existe une constante $C(K, K', \lambda)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in V^\lambda$ on ait

$$\int_{K'} |\varphi(u)|^2 du \leq C(K, K', \lambda)^2 \int_K |\varphi(k)|^2 dk;$$

on vient de prouver que la norme de $\pi^\lambda(g)$ est majorée par $C(K, K', \lambda)|\chi_\lambda(b)|$.

Pour démontrer 2), on note δ l'inverse du module de B, et on remarque χ_λ a été défini pour vérifier $\chi_\lambda \overline{\chi_{\lambda'}} = \delta$, avec $\lambda' = \bar{\lambda}^{-1}$ et on a l'égalité $|\chi_\lambda|^2 = \delta$ si $|\lambda| = 1$. On sait que l'intégrale $\int_K \varphi(k)dk$ est une forme invariante par translations à gauche sur l'espace des fonctions vérifiant $\varphi(gb) = \varphi(g)\delta^{-1}(b)$ pour $b \in B$.

On en déduit sans peine les résultats du 2), en introduisant pour $f \in V^\lambda$ et $g \in V^{\lambda'}$ $\varphi = f\bar{g}$, et en posant $< f, g >= \int_K \varphi(k)dk$. ■

L'espace G/B s'identifie naturellement à l'espace des bouts Ω, car c'est l'orbite de ∞ sous G qui est transitif sur Ω et que B est le stabilisateur de ∞.

Il est donc naturel de chercher une autre réalisation de ces représentations comme espace de fonctions définies sur Ω.

On rappelle que G opère naturellement sur Ω, et qu'étant donné un sommet x de l'arbre, dont on note K_x le stabilisateur dans G, il y a sur Ω, que l'on identifie à un espace homogène sous K_x, une unique mesure invariante ν_x par K_x sur Ω de masse totale 1.

On sait que G opère sur Ω, on en déduit une action sur les fonctions sur Ω par $g.f(\omega) = f(g^{-1}\omega)$, et on a

$$\int_\Omega f(g^{-1}\omega)d\nu_{g(x)}(\omega) = \int_\Omega f(\omega)d\nu_x\omega.$$

A un sommet x de l'arbre est associé la forme hermitienne sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ des fonctions localement constantes sur Ω égale à

$$< f, g >_x = \int_\Omega f(\omega)\overline{g(\omega)}d\nu_x(\omega).$$

Comme pour deux sommets distincts x et y la dérivée de Radon

$$K(x, y; \omega) = \frac{d\nu_y(\omega)}{d\nu_x(\omega)}$$

est une fonction continue non nulle sur le compact Ω, le noyau de Poisson ainsi obtenu est borné inférieurement et supérieurement dans $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que les formes $<,>_x$ et $<,>_y$ sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sont équivalentes.

L'espace $L^2(\Omega)$ pour la mesure $d\nu_x$ est donc le séparé complété de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ pour l'une quelconque de ces formes, et ne dépend pas du sommet choisi pour définir la mesure.

On se fixe un sommet x_0, et on note $K = K_{x_0}$.

Soit s un nombre complexe, il est alors naturel de considérer les opérateurs $\omega^s(g)$ sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et $\Omega^s(g)$ sur $L^2(\Omega)$ que l'on définit comme suit.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on pose

$$\omega^s(g)f(\omega) = K^s(g(x_0), x_0; \omega)f(g^{-1}(\omega)),$$ [10]

on vérifie aisément que l'on a ainsi défini un opérateur continu sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et même borné en norme par $\sup_\Omega |K^{s-\frac{1}{2}}(g(x), x; \omega)|$. Il se prolonge donc, de façon unique, par continuité à $L^2(\Omega)$: on notera $\Omega^s(g)$ ce prolongement.

Proposition 2.1.3 *La représentation Ω^s admet Ω^{1-s} comme contragrédiente.*

Pour $\Re(s) = \frac{1}{2}$, les représentations Ω^s sont unitaires.

Ces résultats se démontrent sans peine directement. On pourra aussi les déduire de l'étude faite au numéro suivant.

Remarque La construction de Ω^s et de ω^s, définie en termes géométriques, montre que ces représentations sont naturellement définies comme représentations de $\mathcal{G}$.

Par ailleurs, comme le noyau de Poisson $K(x, y; \omega) = \sqrt{q_1q_2}^{<x,y;\omega>}$ pour deux sommets de même numéro, et que $< g(x), x; \omega >$ décrit les entiers pairs, les facteurs $K^s(.,.;.)$ ne dépendent que de $(q_1q_2)^s$.

Les représentations Ω^s et ω^s ne dépendent donc que de s mod $\frac{2i\pi}{\log q_1q_2}\mathbb{Z}$.

2.2 Equivalence de modèles Π et Ω.

On se donne un sommet x, dont on note K le fixateur dans G et un bout noté ∞ dont on désigne B le fixateur dans G.

Les espaces $K/K \cap B$ et Ω sont des K-espaces homogènes isomorphes. On désignera par u l'application de $K/K \cap B$ dans Ω induite de celle de K dans Ω définie par

$$k \mapsto k(\infty).$$

[10] $K^s(.,.;.)$ désigne, bien entendu, la puissance s−ième de K(.,.;.)

On vérifie sans peine que u est bicontinue et commute à l'action de K.

De plus comme $K/K\cap B$ et Ω sont formés d'une seule orbite sous K, et sont compacts, on a l'égalité $\int_\Omega \varphi(\omega)d\nu_x(\omega) = \int_K U\varphi(k)dk$, qui est une conséquence de l'unicité des mesures de Haar de masse 1 sur $K/K\cap B$.

On considère ensuite R l'application de restriction à K définie sur les éléments de $\mathcal{H}^\lambda$ et de V^λ; on remarque qu'en notant $V = RV^\lambda$ et $\mathcal{H} = R\mathcal{H}^\lambda$ on a $V = \mathcal{C}^\infty(K/K\cap B)$, et $\mathcal{H} = L^2(K/K\cap B)$. Ces espaces ne dépendent pas de λ, et la restriction à K des représentations Π^λ et π^λ est la représentation régulière de K sur ces espaces. On a la proposition.

Proposition 2.2.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'application $U = R\circ u^{-1}$ de V^λ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est une bijection isométrique pour les produits hermitiens $<,>_K$ et la forme hermitienne sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ provenant de la norme $L^2(\Omega,\nu_x)$. Elle se prolonge en une isométrie de $\mathcal{H}^\lambda$ sur $L^2(\Omega)$.*

Soit s vérifiant $\lambda = (q_1q_2)^{s-\frac{1}{2}}$, on a

$$U\circ\Pi^\lambda = \Omega^s\circ U \text{ et } U\circ\pi^\lambda = \omega^s\circ U.$$

L'opérateur U est donc un opérateur d'entrelacement de ω^s et de π^λ, qui sont ainsi équivalentes, de même que Ω^s et de Π^λ.

Démonstration: Soit $f\in V^\lambda$ et $\varphi = Uf$. On vérifie d'abord que $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

On détermine l'action du groupe G sur f

Soient $g\in G$, et $h\in K$, on a $\pi^\lambda(g)f(h) = f(g^{-1}h) = f(k')\chi_\lambda^{-1}(b')$ si $g^{-1}h = k'b'$, avec $k'\in K$, $b'\in B$.

On remarque dans cette formule que $k'(\infty) = g^{-1}h(\infty)$, donc que $f(k') = \varphi(g^{-1}h(\infty))$.

D'autre part $\chi_\lambda^{-1}(b') = (\sqrt{q_1q_2}\lambda)^{-\nu(b')}$, d'après la formule établie dans 1.5.6, on a

$2\nu(b') =< g'(x), x; g'(\infty) >$. On a ici

$$2\nu(b') =< g^{-1}(x), x; g^{-1}(\omega) >=< x, g(x); \omega >,$$

pour $\omega = h(\infty)$.

Cette formule est à comparer à l'expression du noyau de Poisson donnée à la proposition 1.8.4, dont on rappelle la valeur pour des sommets x, y de même numéro

$$K(x,y;\omega) = \sqrt{q_1q_2}^{<x,y;\omega>};$$

on en déduit que, pour la valeur de s choisie, on a

$$U\pi^\lambda(g)f(h) = \omega^s(g)\varphi(h(\infty)),$$

c'est à dire que U vérifie la relation $U\pi^\lambda = \omega^s U$.

Par continuité, en déduit que le prolongement de U, que l'on notera encore U vérifie $U\Pi^\lambda = \Omega^s U$, car U est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens. ∎

Le corollaire suivant est une simple traduction pour les représentations induites π et Π des résultats établis pour ω et Ω.

Corollaire 2.2.2 *Les différentes structures d'espace de Hilbert définissant $\mathcal{H}^\lambda$ associées à des sommets distincts sont équivalentes.*

Les opèrateurs $\Pi^\lambda(g)$ sont bornés et continus sur $\mathcal{H}^\lambda$, de même que $\pi^\lambda(g)$ sur V^λ.

Démonstration: Pour démontrer ce corollaire et le lemme 2.1.1, il suffit étant donné un sommet y et son stabilisateur K', de montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de (K, K', λ), telle que pour $f \in V^\lambda$, on ait $< f, f >_{K'} \leq C < f, f >_K$.

On remarque que la fonction $|f|^2 \in V^\mu$, avec $\mu = \sqrt{q_1 q_2}|\lambda|^2$, on note $t = s + \bar{s}$ qui est l'exposant correspondant à μ, et $\varphi = R|f|^2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

On a $< f, f >_K = \int_\Omega \varphi(\omega) d\nu_x(\omega)$, et

$$< f, f >_{K'} = \int_{K'} |f|^2(u) du = \int_{K'} \pi^\mu(u^{-1})|f|^2(1) du$$

$$= \int_{K'} \omega^t(u^{-1})\varphi(\infty) du = \int_{K'} K^t(u^{-1}(x), x; \infty)\varphi(u(\infty)) du.$$

L'expression $K^t(x, u(x), u(\infty))$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, car les sommets $u(x)$ sont situés sur la sphère de centre y qui contient x, et que les noyaux de Poisson associés à deux sommets fixés ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. On pose alors $M = \sup_{u \in K'} K^t(x, u(x), u(\infty))$.

On en déduit que $< f, f >_{K'} \leq$

$$M \int_{K'} \varphi(u(\infty)) du = M \int_\Omega \varphi(\omega) d\nu_y(\omega) = M \int_\Omega \varphi(\omega) K(x, y; \omega) d\nu_x(\omega).$$

On conclut en posant $C = M \sup_{\omega \in \Omega} K(x, y; \omega)$. ∎

Remarque La définition des représentations π et Π ne dépend, outre λ, que du choix d'un bout, même si en apparence la forme hermitienne permettant de définir $\mathcal{H}^\lambda$ fait intervenir un sommet, mais on vient de voir que l'espace de Banach n'en dépend pas.

La définition des représentations ω et Ω ne dépend que du seul choix d'un sommet.

La proposition précédente montre enfin, qu'à équivalence près, ces représentations ne dépendent en fait, ni du choix d'un sommet, ni de celui d'un bout.

Ce résultat montre, qu'à défaut d'une définition intrinsèque, les représentations que nous avons définies sont naturellement définies sur le groupe à équivalence près.

2.3 Le modèle sur N/H.

On va définir dans cette section une nouvelle réalisation des représentations précédentes.

On remarque qu'étant donné un bout ω, le groupe N_ω opère sur Ω et y a deux orbites l'une est réduite au bout ω, l'autre étant $\Omega - \{\omega\}$.

Ceci se voit sans peine: en effet étant donnés deux bouts ω_1 et ω_2, tous deux distincts de ω, on considère les deux géodésiques $[\omega_1, \omega]$ et $[\omega_2, \omega]$, dont l'intersection est une demi-géodésique du bout ω, donc de la forme $\{x_n\}_{n \geq k}$. Il existe donc un élément g du groupe qui envoie la géodésique $[\omega_1, \omega]$ pointée par x_k sur la géodésique $[\omega_2, \omega]$ pointée par x_k.

Cet élément $g \in N_\omega$, car il fixe la demi-géodésique $[x_k, \omega]$. On a trivialement $g(\omega_1) = \omega_2$.

Cette situation généralise celle de PGL_2, où Ω est une droite projective, dont le complémentaire d'un point appelé point à l'infini, est une droite affine.

Pour simplifier l'étude, on va rigidifier la situation, en se fixant une géodésique pointée, c'est à dire une suite de sommets $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, dont on désigne les bouts $(\infty, -\infty)$, la classe des demi-géodésiques $(x_n)_{n\geq k}$ étant ∞.

On notera $B = B_\infty$ le fixateur du bout ∞, le noyau de ν sera noté N, enfin on notera H le fixateur de la géodésique, $H = N \cap B_{-\infty}$.

On choisit alors un élément $w \in G$ qui échange les bouts ∞ et $-\infty$, et qui fixe x_0. Il vérifie $w(x_n) = x_{-n}$ pour tout n. Cet élément est unique modulo H.

Les représentations ω^s et Ω^s sont définies sur des espaces de fonctions soit continues, soit intégrables, et sont donc déterminées par leur restrictions à l'ensemble Ω privé d'un bout.

On va examiner ces restrictions à l'aide du modèle π^λ.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on définit une application T de $\mathcal{H}^\lambda$ ou de V^λ dans l'ensemble des fonctions sur N par

$$T(f) = \varphi \text{ où } \varphi(n) = f(nw) \text{ pour } n \in N \ .$$

On pose $W^\lambda = T(V^\lambda)$; soit $f_\lambda \in V^\lambda$ la fonction égale à 1 sur K, donc vérifiant $f_\lambda(kb) = \chi_\lambda^{-1}(b)$.

Pour déterminer $\varphi_\lambda = T(f_\lambda)$, on rappelle la proposition 1.5.7, qui étant donné $n \in N$ permet d'exprimer $wnw = n'wb$, avec $n' \in N$ et $b \in B$, en précisant $v(n') = -v(n)$ et $\nu(b) = v(n)$.

On trouve alors que

$$\varphi_\lambda(n) = (\sqrt{q_1 q_2}\lambda)^{-w(n)},$$

où

$$w(n) = \sup(0, v(n)), \text{ avec } v(n) = \inf\{k \mid n(x_k) = x_k\},$$

et on a $w(n) = 0$ si $n \in N_0 = N \cap K$.

Comme une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est localement constante, si elle est nulle en ∞ elle est encore nulle au voisinage de ce bout, on a

Proposition 2.3.1 *On a*

$$W^\lambda = \mathcal{C}_c^\infty(N/H) \oplus \mathbb{C}\varphi_\lambda,$$

où on a désigné par $\mathcal{C}_c^\infty(N/H)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur N/H.

On sait que sur l'espace des fonctions F sur G qui vérifient les relations $F(gb) = F(g)\delta^{-1}(b)$ pour $b \in B$, ce qui est le cas des fonctions $|f|^2$ pour $f \in \mathcal{H}^\lambda$, avec $|\lambda| = 1$, il existe une forme invariante par translations, à savoir $\int_K F(k)dk$; on a vu dans la proposition 1.7.4 que l'on peut choisir aussi $\int_{N/H} F(nw)dn = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_K F(k)dk$. On a donc établi.

Lemme 2.3.2 *Pour $|\lambda| = 1$, l'image de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^\lambda$ par T est l'espace $L^2(N/H)$ pour une mesure de Haar convenablement choisie.*

On considère ensuite pour $\mu \in \mathbb{C}^*$ la fonction $\alpha_\mu(kb) = \mu^{-\nu(b)}$.

Cette fonction $\alpha_\mu = f_\rho \in V^\rho$, avec $\sqrt{q_1 q_2}\rho = \mu$. Si $f \in V^\tau$ alors $\alpha_\mu f \in V^{\tau'}$, avec $\tau' = \tau\mu$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on considère $f \in V^\lambda$, on remarque $|f|^2 \in V^\tau$, où on a posé $\tau = \sqrt{q_1 q_2}|\lambda|^2$, la fonction $F = |f|^2\alpha_\mu$ avec $\mu = |\lambda|^{-2}$ coïncide avec $|f|^2$ sur K, et vérifie $F(gb) = F(g)\delta^{-1}(b)$ pour $b \in B$.

On en déduit que $\int_{N/H} F(nw)dn = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_K F(k)dk$.

On remarque ensuite que $F(nw) = |\varphi(n)|^2\varphi_\rho(n)$, où $\varphi = T(f)$ car $\varphi_\rho = T(f_\rho) = T(\alpha_{-\mu})$. On a $\varphi_\rho(n) = |\lambda|^{2w(n)}$. On en déduit

$$(1 + \frac{1}{q_1}) \int_K |f(k)|^2 dk = \int_{N/H} |\varphi(n)|^2 |\lambda|^{-2w(n)} dn.$$

Ce qui prouve.

Proposition 2.3.3 *Soient* $w(n) = \sup(v(n), 0)$, *et dn la mesure de Haar sur* N/H *pour laquelle le volume* $N \cap K$ *est* 1. *On pose*

$$d_\lambda n = (1 + \frac{1}{q_1})^{-1} |\lambda|^{-2w(n)} dn.$$

L'espace $L^2(N/H, d_\lambda n)$ *est l'image isomorphe par* T *de* $\mathcal{H}^\lambda$.

Soit U_λ la représentation de G sur $L^2(N/H, d_\lambda n)$, et u_λ celle sur W^λ. On vérifie trivialement que la restriction $U_\lambda | N$ de U_λ à N est la représentation régulière gauche.

Soit $f \in \mathcal{H}^\lambda$, et $\varphi = T(f)$, on a

$$\varphi(\tau n w) = f(\tau n w) = f(n^\tau \tau w) = f(n^\tau w) \chi_\lambda^{-1}(w^{-1} \tau w) = \varphi(n^\tau) \sqrt{q_1 q_2} \lambda.$$

Ceci permet de décrire la représentation $U_\lambda(\tau^{-1})$ pour un élément τ qui agit comme la translation $x_n \mapsto x_{n+2}$ sur la géodésique. L'application qui intervient ici, $n \mapsto n^\tau$, est une sorte de dilatation.

Enfin pour décrire $u_\lambda(w^{-1})$, on utilise la relation $wnw = n'wb$. L'application $n \mapsto n'$ est une sorte d'involution de $N/H - H$ qui provient de l'action $\omega \mapsto w(\omega)$ sur $\Omega - \{\infty, -\infty\}$. On obtient

$$U_\lambda(w^{-1}) \varphi(n) = f(wnw) = f(n'w) \chi_\lambda^{-1}(b) = \varphi(n') (\sqrt{q_1 q_2} \lambda)^{v(n')}.$$

On voit qu'au facteur $(\sqrt{q_1 q_2} \lambda)^{-v(n)}$ près, $u_\lambda(w^{-1})$ ne fait intervenir que l'application $n \mapsto n'$.

Remarque La dépendance du N−modèle par rapport aux choix faits est facile à voir.

Changer de bout, c'est à dire remplacer $-\infty$ par un bout ω°, tout en gardant bien entendu ∞, revient à conjuguer la situation par un élément $n \in N$ qui vérifie $\omega^\circ = n(-\infty)$, car $N \cap B_{\omega^\circ} = H^n$.

Changer d'origine sur la géodésique revient à remplacer w par $w_1 = wt$ avec un élément t qui stabilise la géodésique $[-\infty, \infty]$, donc qui y agit par translation. Pour $f \in V^\lambda$, la comparaison de $\varphi(n) = f(nw)$, et de $\varphi_1(n) = f(nw_1)$ est très simple, car $\varphi_1(n) = f(nw_1) = f(nwt) = f(nw)\chi_\lambda(t)$.

On voit ainsi que φ_1 s'obtient à partir de φ par une multipliation par le facteur constant $\chi_\lambda(t)$.

L'exemple de PSL_2.

On se donne un corps $\mathfrak{p}$-adique k, dont on note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{p} = \varpi\mathfrak{o}$ l'idéal premier, q le cardinal du corps résiduel, et val la valuation associée.

On considère le groupe $G = PSL_2(k)$.

Son arbre est l'ensemble des classes de réseaux de k^2, c'est un arbre semi-homogène de type (q, q). On désigne x_n la classe de $\mathfrak{o} \times \mathfrak{p}^n$. On a ainsi défini une géodésique pointée, dont note $\infty, -\infty$ les bouts, le premier correspond à la droite ke_1, l'autre à ke_2.

L'élément w image de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ échange x_n et x_{-n}.

Le groupe B est formé des images des matrices triangulaires supérieures, le groupe N (resp. H) des images de

$$\{\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} |\mathrm{val}(a) = 0\}, \quad (\text{resp. } \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} |\mathrm{val}(a) = 0\}).$$

Le groupe $\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |x \in k\}$, isomorphe à k, est une section de N/H.

On vérifie que $v(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \inf\{k| \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_k\} = \mathrm{val}(x)$.

On considère $\tau = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix}$, et plus généralement $d = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$, on a $\nu(\tau) = 1$, et $\nu(d) = \mathrm{val}(t)$.

On voit ainsi que si $f \in V^\lambda$ et $\varphi = T(f)$, en écrivant par abus, $\varphi(x) = \varphi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$, et en posant $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a

$$u_\lambda(g)\varphi(x) = f(g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w) = \varphi(y)\chi_\lambda^{-1}(b),$$

On trouve

$$g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w(e_1) = (ax+b, cx+d), \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} t & * \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}(e_1) = (ty, t),$$

d'où $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $t = cx+d$, $\nu(b) = \mathrm{val}(t)$, et $\chi_\lambda^{-1}(b) = (q\lambda)^{-\mathrm{val}(t)}$.

Ayant posé $q\lambda = q^{2s}$, avec l'exposant s qui correspond à λ dans l' équivalence de ω^s et de π^λ, on obtient alors la formule

$$u_\lambda(g^{-1})\varphi(x) = |cx+d|^{2s}\varphi(\frac{ax+b}{cx+d}).$$

Après avoir identifié N/H à k et noté dx la mesure de Haar sur k de volume 1 sur l'anneau des entiers, la mesure dm_λ s'explicite en

$$dm_\lambda(x) = (1 + \frac{1}{q})|\lambda|^{-2w(x)}dx.$$

Dans cette formule on a noté $w(x) = \sup(0, v(x)) = \sup(0, \mathrm{val}(x))$.

Cette présentation est bien classique, voir par exemple [G-G-P].

2.4 Irréductibilité

L'objet de cette section est de discuter l'irréductibilité des représentations π^λ et Π^λ, et de décomposer en facteurs irréductibles celles qui ne le sont pas.

On considèrera un sous-groupe J ouvert compact de G, dont on sait, d'après la proposition 1.3.8, qu'il fixe un sommet de l'arbre, et une représentation $\mathcal{V}$ de G. On étudiera $\mathcal{V}^J$ ensemble des éléments de $\mathcal{V}$ invariants par J.

On va expliciter $\mathcal{V}^J$ dans un certain nombre de cas.

Soit $J = K_x$ le fixateur d'un sommet x, et $\mathcal{V}$ l'un des G-modules V^λ ou $\mathcal{H}^\lambda$.

Une conséquence de la décomposition d'Iwasawa est que $\mathcal{V}^{K_x}$ est un espace de dimension un, constitué des multiples de la fonction $\varphi \in V^\lambda$ égale à 1 sur K_x.

On se fixe une géodésique infinie pointée (x_n), et un élément w qui vérifie $w(x_n) = x_{-n}$; on considère $J = I$ le groupe d'Iwahori fixateur de l'arête $[x_0, x_1]$, et $K = K_{x_0}$.

On considère les fonctions φ_I^+, φ_I^- de V^λ déterminées par leurs restrictions à K, qui sont égales aux fonctions caractéristiques de I pour $\varphi_I^+|_K$, et de wI pour $\varphi_I^-|_K$.

La décomposition $K = I \sqcup wI$, montre que ces fonctions forment une base de $\mathcal{V}^I$, qui est donc de dimension 2.

Ω est réunion disjonte des deux I-orbites $\Omega^+ = I(\infty)$ et $\Omega^- = I(-\infty)$, et on a

$$\Omega^+ = \{\omega|\ x_1 \in [x_0, \omega]\} = \Omega_{x_0,x_1} \text{ et } \Omega^- = \{\omega|\ x_0 \in [x_1, \omega]\} = \Omega_{x_1,x_0}.$$

Intuitivement, cette partition de Ω classe les bouts à "droite" ou à "gauche" de l'arête, suivant la valeur de la projection du bout sur l'arête.

Pour obtenir des résultats d'irréductibilité, on utilisera la dualité G-invariante entre représentations obtenue à partir de celle de V^λ et $V^{\lambda'}$ ainsi que celle de $\mathcal{H}^\lambda$ et $\mathcal{H}^{\lambda'}$, pour $\lambda\overline{\lambda'} = 1$.

On considère $\mathcal{V} = V^\lambda$ (resp. $\mathcal{V} = \mathcal{H}^\lambda$) et $\mathcal{V}' = V^{\lambda'}$ (resp. $\mathcal{V}' = \mathcal{H}^{\lambda'}$), avec λ et λ' comme ci-dessus, on suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels V et W fermés invariants par G de $\mathcal{V}$ qui vérifient $V \subset W$.

On désigne, pour un sous-espace U de $\mathcal{V}$, par

$$U^\perp = \{g \in \mathcal{V}' \mid \forall f \in U\ \ < g, f >= 0\}.$$

On a une définition analogue pour $\mathcal{V}'$, les rôles de λ et λ' étant symétriques, et on vérifie sans peine, que si U est fermé, on a $(U^\perp)^\perp = U$. On vérifie ensuite que $W^\perp \subset V^\perp$ sont deux sous-espaces invariants par G, et que la dualité entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ induit une dualité G-équivariante entre V/W et $W^\perp/V^\perp$.

Le lemme suivant, conséquence de ce qui précède, et qui est classique, sera utile.

Lemme 2.4.1 *On garde les notations précédentes.*

Le G-module $\mathcal{V}$ est irréductible (ne contient pas de sous-module invariant fermé) si et seulement si le G-module $\mathcal{V}'$ est irréductible.

Soit V un sous-espace invariant fermé de $\mathcal{V}$. Alors V est un G-module irréductible, si et seulement le module quotient $\mathcal{V}'/V^\perp$ est irréductible.

Et dualement, soit W un sous-espace invariant fermé de $\mathcal{V}$. Alors $\mathcal{V}/W$ est un G-module irréductible, si et seulement le sous-module $W^\perp$ est irréductible.

Le lemme suivant donnera un critère d'irréductibilité.

Lemme 2.4.2 *Soit J un sous-groupe ouvert compact de G fixant un sommet x_0 de l'arbre, et $K = G_{x_0}$. Soit $V \subset \mathcal{V}$ un sous-espace invariant fermé, on suppose que V^J est de dimension un, et engendre le G-module V (topologiquement si $\mathcal{V} = \mathcal{H}^\lambda$, algébriquement si $\mathcal{V} = V^\lambda$). On considère dans $\mathcal{V}'$ la fonction f_J dont la restriction à K est la fonction caractéristique de J, et on suppose que f_J engendre le G-module $\mathcal{V}'$.*

Alors le G-module V est irréductible.

Démonstration: On notera π la représentation de G dans $\mathcal{V}$, ainsi que la contragrédiente dans $\mathcal{V}'$. On désigne par m le volume pour la mesure de Haar dg, et on considère le projecteur

$$P^J = \frac{1}{m(J)} \int_J \pi(g)dg,$$

et sa restriction à V.

On a $V^J = P^J(V)$. Il suffit de montrer que $P^J(V) \subset V$, ce qui se prouve en distinguant les cas. Si $\mathcal{V} = V^\lambda$, la restriction à K d'un élément $f \in V^\lambda$ est localement constante, il existe donc un sous-groupe ouvert $H \subset K$ tel que pour tout $h \in H, g \in G$ on ait $f(hg) = f(g)$; comme $J \cap H$ est d'indice fini dans J, $P^J f \in \mathcal{V}$ comme moyenne finie de translatés de f. Si $\mathcal{V} = \mathcal{H}^\lambda$, le sous-espace V est supposé invariant et fermé, donc $P^J(V) \subset V$, car P^J est une limite de moyennes finies de translations.

Pour montrer que V est irréductible, on considère un sous-espace invariant (fermé) W non nul de V : il faut vérifier qu'il est égal à V.

Pour cela, on montrera que $P^J(W) = V^J$, car alors W contiendra le sous-espace $P^J(W)$ cyclique dans V. Et pour l'établir, il suffira de vérifier que $W^J \neq \{0\}$, car V^J est un espace vectoriel de dimension un. Ceci se prouve par l'absurde, car si $P^J(W) = 0$, pour tout $f \in W$ et tout $g \in G$, on a $\pi(g)(f) \in W$, d'où $P^J(\pi(g)f)(1) = 0$. On remarque ensuite que

$$P^J(\pi(g)f)(1) = \frac{1}{m(J)} \int_J \pi(g)f(k)dk = \frac{1}{m(J)} \int_K \frac{1}{m(J)} (f_J\pi(g)f)(k)dk$$

$$= \frac{1}{m(J)} < f_J, \pi(g)f >= \frac{1}{m(J)} < \pi(g)f_J, f > .$$

On conclut en utilisant le fait que l'orthogonal de l'espace engendré par $\pi(G)f_J$ est nul, car, par hypothèse, cet espace est dense dans $\mathcal{V}'$. ∎

Le lemme suivant décrit les vecteurs K_y invariants dans les représentations étudiées.

Lemme 2.4.3 *On fixe λ, et on pose $\alpha = \sqrt{q_1q_2}\lambda = (q_1q_2)^s$. On fixe une racine carrée $\alpha^{\frac{1}{2}}$, et ses puissances entières. On notera $\mathcal{V}$ l'espace du G-module ω^s. Soit la fonction ψ_y égale à*

$$\psi_y(\omega) = \alpha^{\frac{1}{2}<y,x_0;\omega>}.$$

On a $\omega^s(g)\psi_y(\omega) = \psi_{g(y)}$. En particulier $\mathcal{V}^{K_y} = \mathbb{C}\psi_y$, et $g(\mathcal{V}^{K_y}) = \mathcal{V}^{K_{g(y)}}$.

Démonstration: On rappelle que

$$\omega^s(g)f(\omega) = \alpha^{\frac{1}{2}<g(x_0),x_0;\omega>} f(g^{-1}\omega).$$

qui est égal à

$$\alpha^{\frac{1}{2}<g(x_0),x_0;\omega>}\alpha^{\frac{1}{2}<y,x_0;g_{-1}(\omega>} = \alpha^{\frac{1}{2}<g(y),x_0;\omega>},$$

qu'on obtient en remarquant que $< g(y), x_0; g^{-1}(\omega) >=< y, g(x_0); \omega >$, comme conséquence de l'invariance de $<,;>$ par G, et en utilisant l'additivité du cocycle $< y, x; \omega >=< y, z; \omega > + < z, x; \omega >$. ∎

On a

Lemme 2.4.4 *On suppose que $\lambda\sqrt{q_1q_2} \neq 1$ et que $\mathcal{V} = V^\lambda$.*

L'espace engendré par les $\mathcal{V}^{K_x}$, quand x parcourt l'arbre, est égal à $\mathcal{V}$.

Démonstration: On se place dans modèle Ω, c'est à dire, on suppose que $\mathcal{V} = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On se donne une origine x_0 dans l'arbre, on considère $V_y = \{\omega \in \Omega \mid y \in [x_0, \omega]\}$, dont on note φ_y la fonction caractéristique. On sait que $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est engendré par $\{\varphi_y\}$.

Soit $V = \sum_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{V}^{K_x}$, il est engendré par les ψ_x pour $x \in \mathcal{A}$.

Nous établirons, que $\varphi_y \in V$. Pour $y = x_0$, on a $\varphi_{x_0} = \psi_{x_0}$. Supposons que $y \neq x_0$, soit $z \in [x_0, y]$, avec $d(y,z) = 1$. Comparons $\psi_y(\omega)$ et $\psi_z(\omega)$. On note $p(\omega)$ (resp. $p'(\omega)$) la projection de ω sur le segment $[x_0, y]$ (resp.$[x_0, y]$). On remarque que $V_y = p^{-1}(y)$, et que p et p' coïncident sur le complémentaire de V_y. Sur V_y on a $p(\omega) = y$ et $p'(\omega) = z$.

On pose pour simplifier $p(\omega) = u$ et $p'(\omega) = v$, et on a

$$< y, x_0; \omega > - < z, x_0, \omega >= d(x_0, u) - d(y, u) - d(x_0, v) + d(z, v).$$

Cette expression est donc égale à -1 si $\omega \notin V_y$, et à 1 si $\omega \in V_y$.

On considère $\psi_y - \alpha^{-\frac{1}{2}}\psi_z$. L'expression ci-dessus montre que cette fonction est nulle sur le complémentaire de V_y, et vaut $c_\alpha(y) = \alpha^{\frac{1}{2}d(x_0,y)}(1 - \alpha^{-1})$ sur V_y.

Comme $\alpha \neq 1$, $c_\alpha(y) \neq 0$, on peut écrire $\varphi_y = c_\alpha(y)^{-1}(\psi_y - \alpha^{-\frac{1}{2}}\psi_z)$, d'où le lemme. ∎

Lemme 2.4.5 1) *Soit* $\lambda \neq -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, *c'est à dire* $\lambda\sqrt{q_1 q_2} \neq -q_2$.

Soit y un sommet de numéro 2 voisin de x_0, alors

$$\int_{K_y} \pi^\lambda(g)\psi_{x_0} dg = c\psi_y,$$

avec une constante c non nulle.

En particulier ψ_{x_0} engendre $V = \sum_{x \in \mathcal{A}} \mathcal{V}^{K_x}$ comme G-module.

2) *Soit* $\lambda = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, *c'est à dire* $\lambda\sqrt{q_1 q_2} = -q_2$.

Pour tout sommet y de numéro 2, on a

$$\int_{K_y} \pi^\lambda(g)\psi_{x_0} = 0.$$

Démonstration: Soit y un sommet, d'après les propriétés de la mesure de Haar, l'intégrale suivant K_y de ψ_{x_0} est une fonction K_y-invariante de V^λ. Comme les éléments de V^λ invariants par K_y forment un espace de dimension un, cette intégrale est un multiple de ψ_y.

Pour voir si ce multiple est nul ou non, comme la fonction ψ_y n'est jamais nulle, il suffira d'évaluer le membre de gauche sur un bout ω bien choisi pour établir 1) ou 2). La fonction ψ_{x_0} est la fonction égale à 1 sur Ω, la valeur du membre de gauche évalué en ω est égale, à un facteur non nul près qui dépend des mesures, à

$$\sum_{d(z,y)=d(x_0,y)} (\lambda\sqrt{q_1q_2})^{\frac{1}{2}<z,x_0;\omega>}.$$

Soit S la valeur de cette somme sur un bout ω qui vérifie $x_0 \in [y,\omega]$. On posera $\alpha = \lambda\sqrt{q_1q_2}$

Etablissons le 1) : $< z, x_0; \omega >= d(x_0,x_0) - d(z,x_0)$ prend la valeur 0 pour $z = x_0$ et prend q_2 fois la valeur -2 pour $z \in B(y,1), z \neq x_0$. On a donc $S = 1 + q_2\alpha^{-1}$, qui est nulle si et seulement si $\alpha = -q_2$. D'où le premier point de 1). L'espace engendré par ψ_{x_0} comprend des vecteurs invariants non nüls pour des fixateurs de sommets de chaque numéro. D'après la formule $\pi(g)\psi_y = \psi_{g(y)}$, on voit qu'on les engendre tous.

Etablissons le 2) : on pose $2n+1 = d(x_0,y)$, et on note $q(z)$ la projection d'un sommet $z \in B(y, 2n+1)$ sur le segment $[x_0, y]$.

On a pour un tel sommet $< z, x_0; \omega >= -d(z,x_0) = -2d(x_0, q(z))$, parce que $q(z)$ est aussi la projection de y sur $[x_0, z]$ et que x_0 et z sont une sphère de centre y. La somme S s'écrit

$$\sum_{z\in B(y,2n+1)} (-q_2)^{-d(x_0,q(z))} = (-q_2)^{-2n-1}S', \text{ avec } S' = \sum_{z\in B(y,2n+1)} (-q_2)^{d(y,q(z))}.$$

On note y_k le sommet de $[x_0, y]$ qui vérifie $d(y_k, y) = k$, et c_k le cardinal de $Q_k = \{z \in B(y, 2n+1) \mid q(z) = y_k\}$, pour $k = 0, \ldots, 2n+1$.

On a $S' = \sum c_k(-q_2)^k$.

On a $c_{2n+1} = 1$, car $Q_{2n+1} = \{x_0\}$.

Calculons c_k pour $k = 1, \ldots, 2n$. Un sommet $z \in B(y_k, 2n+1-k)$ est dans Q_k si et seulement si $[z, y_k] \cap S(y_k, 1) \cap \{y_{k-1}, y_{k+1}\} = \emptyset$. Soit j le numéro de y_k, on a $q_j - 1$ choix possibles dans $S(y_k, 1)$, ces choix ayant étés effectués, on prend tous les éléments de la boule $B(y_k, 2n+1-k)$ qui se projettent sur la sphère $S(y_k, 1)$ sur ces $q_j - 1$ sommets.

On distingue suivant la parité de k.

Si $k = 2l \neq 0$ est pair, on a $j = 2$, et il y a $(q_1q_2)^{n-l}$ choix possibles, comme on l'a déjà vu en calculant la cardinal des sphères. On obtient

$$c_{2l} = (q_2 - 1)(q_1q_2)^{n-l} = q_2(q_1q_2)^{n-l} - (q_1q_2)^{n-l}.$$

Si $k = 0$, on a $q(z) = y$, on obtient tous les éléments $z \in B(y, 2n+1)$ tels que $y_1 \notin [z, y] \cap S(y, 1)$. Ceci donne q_2 projections possibles, et pour chaque sommet obtenu, il y aura $(q_1q_2)^n$ choix possibles, d'où

$$c_0 = (q_2)(q_1q_2)^n.$$

Si $k = 2l+1$ est impair, on a $j = 1$, et il y a $q^2(q_1q_2)^{n-l-1}$ choix possibles, comme on l'a déjà vu en calculant la cardinal des sphères. On obtient

$$c_{2l+1} = (q_1 - 1)q_2(q_1q_2)^{n-l-1} = (q_1q_2)^{n-l} - q_2(q_1q_2)^{n-l-1}.$$

On obtient

$$S' = c_0 + \sum_{l=1}^{n} c_{2l}(q_2)^{2l} - \sum_{l=0}^{n-1} c_{2l+1}(q_2)^{2l+1} - (q_2)^{2n+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} q_2(q_1q_2)^{n-l}q_2^{2l} - \sum_{l=1}^{n}(q_1q_2)^{n-l}q_2^{2l} - \sum_{l=0}^{n}(q_1q_2)^{n-l}q_2^{2l+1} + \sum_{l=0}^{n-1} q_2(q_1q_2)^{n-l-1}q_2^{2l+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} q_2(q_1q_2)^{n-l}q_2^{2l} - \sum_{l=1}^{n}(q_1q_2)^{n-l}q_2^{2l} - \sum_{l=0}^{n} q_2(q_1q_2)^{n-l}q_2^{2l} + \sum_{l=0}^{n-1}(q_1q_2)^{n-l-1}q_2^{2l+2},$$

d'où $S' = 0$. ∎

Des lemmes précédents on déduit

Théorème 2.4.6 *Si $\lambda \neq (\sqrt{q_1q_2})^{\pm 1}$, et si $\lambda \neq (-\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^{\pm 1}$, les représentations π^λ et Π^λ sont irréductibles.*

Démonstration: On choisit un sommet de numéro 1, dont on note J le fixateur. On considère $\mathcal{V} = V^\lambda$ ou $\mathcal{H}^\lambda$, on pose $\lambda' = \overline{\lambda}^{-1}$.

Alors $\mathcal{V} = V^{\lambda'}$ ou $\mathcal{H}^{\lambda'}$ est la contragrédiente de $\mathcal{V}$. Les espaces $\mathcal{V}^J$ et $\mathcal{V}'^J$ sont de dimension 1.

Si $\lambda \neq -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, $\mathcal{V}^J$ engendre $V = \sum_{x\in\mathcal{A}} \mathcal{V}^{K_x}$, qui si $\lambda \neq (\sqrt{q_1q_2})^{-1}$ engendre $\mathcal{V}$.

De même, si $\lambda' \neq -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$ et $\lambda' \neq (\sqrt{q_1q_2})^{-1}$, alors $\mathcal{V}'^J$ engendre $\mathcal{V}'$, qui est donc engendré par la fonction $f_J \in \mathcal{V}'$ égale à 1 sur J. D'où l'irréductibilité de $\mathcal{V}$ sous les hypothèses du théorème. ∎

Proposition 2.4.7 *Soit $\lambda = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, alors Π^λ (resp. π^λ) est de longueur deux. Il contient un sous-espace invariant fermé T^1, (resp. t^1).*

Ce sous-espace T^1 (resp. t^1) possède pour tout sous-groupe compact K_x fixateur d'un sommet $x \in S_1$ une droite de vecteurs invariants par K_x et aucun vecteur non nul invariant par le fixateur K_y d'un sommet $y \in S_2$.

Plus précisément, si on note $P^{K_y} = \frac{1}{m(K_y)} \int_{K_y} \Pi^\lambda(g)dg$ le projecteur sur les vecteurs K_y-invariants, on a $T^1 = \cap_{y \in S_2} \ker P^{K_y}$ et $t^1 = T^1 \cap V^\lambda$.

Si $q_1 \neq q_2$, il n' y a pas d'autre sous-espace invariant fermé (resp. invariant).

On note T_2' l'espace quotient de $\mathcal{H}^\lambda$ par T_1, (resp. t_2' l'espace quotient de V^λ par t_1. Les représentations T_1 et T_2' (resp. t_1 et t_2') sont topologiquement (resp. algébriquement) irréductibles.

Les représentations T_2' et t_2' possèdent, pour tout sous-groupe compact K_y fixateur d'un sommet $y \in S_2$, une droite de vecteurs invariants par K_y et aucun vecteur non nul invariant par un K_x pour $x \in S_1$.

Si $q_1 = q_2$, alors $\lambda = -1$, il existe dans $\mathcal{H}^{-1}$ (resp. V^{-1}) deux sous-espaces invariants fermés T^1 et T^2 (resp. t^1 et t^2) non triviaux.

La représentation Π^{-1} (resp. π^{-1}) est somme directe $T_1 \oplus T_2$ (resp. $t_1 \oplus t_2$), chaque T^i (resp. t^i), pour $i = 1, 2$, possède pour tout compact K_x fixateur d'un sommet $x \in S_i$, une droite de vecteurs invariants par K_x et aucun vecteur non nul invariant par un K_y pour y de l'autre numéro.

Il n'y a pas d'autre sous-espace invariant fermé (resp. invariant) non trivial.

Démonstration: On remarque d'abord que si $\lambda = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, la contragrédiente de π^λ est $\pi^{\lambda'}$ avec $\lambda' = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$. Donc, le passage à la contragrédiente échange les rôles de q_1 et de q_2.

On notera, provisoirement V_1 le sous-espace engendré par par les fonctions K_x-invariantes pour $x \in S_1$, et $V_2 = \cap_{y \in S_2} \ker P^{K_y}$.

Soit V un sous-espace invariant non nul de V_2, montrons qu'il contient V_1. En effet il existe $x \in S_1$ tel que $V^{K_x} \neq 0$. Sinon l'orthogonal de V contiendrait l'espace engendré dans $V^{\lambda'}$ par les fonctions K_x-invariantes pour $x \in S_1$, tout en contenant l'espace engendré par les fonctions K_y-invariantes pour $y \in S_2$, car $V \subset \cap_{y \in S_2} \ker P^{K_y}$. On déduirait,que l'orthogonal de V est $V^{\lambda'}$, car ces fonctions l'engendrent, d'où $V = \{0\}$. D'où $V_1 \subset V$, car V_1 est engendré par la droite de fonctions K_x-invariantes pour un $x \in S_1$ donné, puisque la représentation π^λ permute les droites de fonctions K_x-invariantes pour le différents sommets $x \in S_1$.

Montrons ensuite que $V_1 = V_2$. Comme d'après le 2) du lemme 2.4.5,on a $V_1 \subset V_2$, il suffit de montrer que le module quotient V_2/V_1 est nul. Son orthogonal, qui est contenu dans un sous-quotient $V^{\lambda'}$, est contenu dans la contragrédiente de V_2 engendré les images des vecteurs invariants par les K_y pour $y \in S_2$, et étant orthogonal à V_1, il contient les images des vecteurs invariants par les K_y pour $y \in S_1$, donc contient l'image de $V^{\lambda'}$ d'après le lemme 2.4.4.

Ce qui démontre l'irréductibilité de T^1.

On considère d'abord le cas $q_1 \neq q_2$.

Il n'y a pas d'autre sous-espace invariant non trivial fermé que T^1. En effet soit W un tel espace, comme $W \not\subset T^1$, il existe un sommet $y_0 \in S_2$ tel que $W^{K_{y_0}} \neq \{0\}$. Comme $\lambda \neq -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$, l'espace V^λ est engendré par les vecteurs invariants par les K_y pour $y \in S_2$ qui sont proportionnels aux transformés par π^λ des éléments K_{y_0}-invariants de V^λ. On en déduit que $V = V^\lambda$ ou $V = \mathcal{H}^\lambda$. Ceci prouve en particulier que T'^2 qui est le quotient par T^1 est irréductible, ne possède pas de vecteur non nul invariant par K_x pour $x \in S_1$, et en possède une droite par K_y pour $y \in S_2$.

Enfin, on vérifie aisément que la contragrédiente de T^1 est T'^1, celle de T^2 est T'^2.

On considère ensuite le cas $q_1 = q_2 (= q)$.

On remarque que $\lambda = -1$, donc la représentation Π^λ dans $\mathcal{H}^\lambda$ est unitaire, car elle est sa contragrédiente.

On a $\mathcal{H}^\lambda = T^1 \oplus T^2$, et $\mathcal{H}^\lambda$ ne possède pas de sous-espace invariant fermé non trivial autre que T^i.

En effet, les espaces T^1 et T^2 sont les orthogonaux l'un de l'autre. L'orthogonal de $T^1 \cap T^2$ est un espace invariant fermé qui contient $T^1 + T^2$, donc les vecteurs K_x-invariants pour tous les sommets: il est donc égal à $\mathcal{H}^\lambda$, d'où $T^1 \cap T^2 = \{0\}$.

Par dualité, on voit que l'orthogonal de $T^1 + T^2$ est l'espace invariant fermé qui contient $T^1 \cap T^2 = \{0\}$: d'où $T^1 + T^2 = \mathcal{H}^\lambda$.

Soit V un sous-espace invariant, et posons $V^i = V \cap T^i$. Comme T^i est irréductible $V^i = T^i$ ou $V^i = 0$.

Si $V^1 = V^2 = \{0\}$, alors V est orthogonal à T^1 et à T^2 donc à la somme $T^1 + T^2$, d'où $V = \{0\}$.

Si $V^i = \{0\}$, alors V est contenu dans l'orthogonal de T^i donc dans T^j (j étant le numéro différent de i). Il est donc égal à T^j ou à $\{0\}$. Enfin, si $V^i \neq \{0\}$, pour $i = 1, 2$, alors l'égalité $V = \mathcal{H}^\lambda$, est triviale, car $T^1 + T^2 \subset V$. Les énoncés pour π^λ se déduisent trivialement des résultats démontrés pour Π^λ, quand on aura remarqué que les vecteurs de $\mathcal{H}^\lambda$ invariants par un sous-groupe ouvert compact sont dans V^λ. ∎

La question de l'équivalence des représentations ainsi construites sera discutée au chapitre 4 en utilisant une analyse approfondie des opérateurs d'entrelacement.

L'utilisation des fonctions (zonales) sphériques permet de comparer deux représentations.

Le lemme suivant est classique, cf. [G].

Lemme 2.4.8 *On considère (π, V), (π', V') deux représentations algébriquement irréductibles de G, dont on note $\check{V}$ (resp. $\check{V}'$) les contragrédientes de V (resp. V').*

Soit J un sous-groupe compact de G, et on suppose que $\dim V^J = 1$ *et que* $\dim V'^J = 1$.

On se donne des vecteurs $e \in V^J, e' \in V'^J$ et $\check{e} \in \check{V}^J, \check{e}' \in \check{V}'^J$ qui vérifient $< e, \check{e} >=< e', \check{e}' >= 1$, et on considère alors les fonctions sphériques

$$\varphi_J =< \pi(.)e, \check{e} >, \text{ et } \varphi'_J =< \pi'(.)e', \check{e}' >,$$

alors les représentations π et π' sont équivalentes si et seulement si $\varphi_J = \varphi'_J$.

On suppose, de plus que V et V' sont des espaces normés, et que les opérateurs $\pi(g)$ et $\pi'(g)$ sont bornés. On note $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$) le complété de V (resp. V') pour cette norme, et Π (resp. Π') la représentation de G dans $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}'$), prolongeant par continuité π. (resp.π'.) On suppose que pour tout $g \in G$ on a l'égalité $\|\Pi(g)\| = \|\Pi'(g)\|$. L'égalité $\varphi_J = \varphi'_J$ implique alors l'équivalence de Π avec Π'.

Démonstration: La condition nécessaire est évidente, la condition suffisante se démontre en remarquant l'espace V est engendré par les translatés d'un vecteur J-invariant non nul, que l'on décrit à l'aide de φ_J. Le passage au cas topologique est trivial, sous les hypothèses de l'énoncé. Enfin, si V et V' sont des espaces préhilbertiens, et si π et π' sont unitaires, la condition $\|\Pi(g)\| = \|\Pi'(g)\|$ est trivialement vérifiée. ∎

On appliquera, pour commencer, ces résultats au cas où $J = K$ est le fixateur d'un sommet. On a $g^{-1} \in KgK$, dans la décomposition de Cartan, d'où $\varphi_K(g) = \varphi_K(g^{-1})$.

On calcule φ_K dans le cas où V est un sous-module, ou un module quotient d'un V^λ.

Soit f_K^λ défini par $f_K^\lambda(kb) = \chi_\lambda^{-1}(b)$: on a

$$\varphi_K^\lambda(g) = \frac{1}{m(k)} \int_K f_K^\lambda(k^{-1}g)dk.$$

Cette fonction sphérique définie, à partir de V^λ est en fait définie sur V, pourvu que $\dim V^K = \dim \check{V}^K = 1$.

On vérifie sans peine, que cette intégrale est en fait une somme finie, indexée par $K/K \cap gKg^{-1}$, de termes $m(K \cap gKg^{-1})\chi_\lambda^{-1}(b_g)$, avec $b_g \in B$. C'est donc un polynôme à coefficients réels en λ.

Pour φ la fonction sphérique de V, et $\check{\varphi}$, celle de la contragrédiente $\check{V}$ de V, on a $\check{\varphi}(g) = \overline{\varphi}(g^{-1})$. D'où

Proposition 2.4.9 *Si $\lambda \neq (\sqrt{q_1 q_2})^{\pm 1}$ et $\lambda \neq -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}^{\pm 1}$ les représentations π^λ et $\pi^{\lambda^{-1}}$ sont équivalentes.*

Si de plus $|\lambda| = 1$, les représentations Π^λ et $\Pi^{\lambda^{-1}}$ sont unitairement équivalentes.

Démonstration: Il suffit de remarquer que, pour $\lambda' = \overline{\lambda^{-1}}$, on a

$$\varphi^{\lambda^{-1}}(g) = \overline{\varphi^{\lambda'}(g)} = \varphi^\lambda(g^{-1}) = \varphi^\lambda(g),$$

car la représentation $\pi^{\lambda'}$ est la contragrédiente de π^λ. ∎

Ces raisonnements s'appliquent aussi pour $\lambda = -(\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^{\pm 1}$. Pour chaque $i = 1, 2$, on choisit comme compact $K = K_i$ le fixateur d'un sommet donné de numéro i. Les G-modules t^i et t'^i sont contragrédients, les fonctions K_i-sphériques calculées dans $V^\lambda, V^{\lambda^{-1}}$ et dans t^i, t'^i sont les mêmes. On obtient.

Proposition 2.4.10 *La représentation t^i considérée comme sous-représentation de V^λ est équivalente à la représentation t'^i considérée comme quotient de la représentation de $V^{\lambda^{-1}}$.*

Une réciproque à ces propositions sera donnée dans le corollaire à la proposition 3.2.2, où on donne la valeur explicite des fonctions sphériques.

Soit $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}$, alors le caractère χ_λ est $\delta = \delta_B$ l'inverse du module de B, il existe donc sur $\mathcal{H}^\lambda$ une forme linéaire invariante par l'action de G. Cette forme $\oint_{G/B} f$ est égale, pour tout fixateur d'un sommet K, à un multiple non nul de $\int_K f(k)dk$.

Définition 2.4.1 *Soit $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}$, on appelle représentation de Steinberg l'un des sous–G-module*

$$St = \{f \in \mathcal{H}^\lambda \mid \oint_{G/B} f = 0\} \text{ ou } st = \{f \in V^\lambda \mid \oint_{G/B} f = 0\}.$$

On remarquera que dans $\mathcal{H}^\lambda$ l'intégrale $\oint_{G/B}$ est bien définie, car elle peut être interprétée comme le produit scalaire dans $L^2(K)$ de la restriction à K de f et de la fonction constante 1, qui est de carré intégrable sur le compact K.

De même, pour $\lambda^{-1} = \sqrt{q_1 q_2}$, le caractère χ_λ est trivial, les G-espaces V^λ et $\mathcal{H}^\lambda$ sont les espaces $\mathcal{C}^\infty(G/B)$ et $L^2(G/B)$, où G opère par la représentation régulière, dans lequel les fonctions constantes forment un sous-espace invariant.

Définition 2.4.2 *Pour $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}^{-1}$, on appelle représentation de Steinberg l'un des G-modules quotients $St' = \mathcal{H}^\lambda/\mathbb{C}1$ ou $st' = V^\lambda/\mathbb{C}1$.*

On notera que St et St' sont les contragrédientes l'une de l'autre, de même que st et st'.

2.5 Cas des arbres homogènes

Soit $\mathcal{A}_q = (S, A)$ un arbre homogène de type q. On considère G un sous-groupe d'automorphisme de fermé de $\mathcal{A}_q$ doublement transitif.

On désignera par ϵ le caractère d'ordre 2 de G, défini par

$$\epsilon(g) = (-1)^{d(x,g(x))}$$

pour un sommet $x \in S$. On considérera $G^+ = \ker \epsilon$, qui est un sous-groupe d'indice deux.

Proposition 2.5.1 *L'application $f \mapsto \epsilon f$ induit un isomorphisme de $\pi^{-\lambda}$ avec $\epsilon \otimes \pi^\lambda$, ainsi que de $\Pi^{-\lambda}$ avec $\epsilon \otimes \Pi^\lambda$.*

Les représentations π^λ et Π^λ sont irréductibles sauf si $\lambda = \pm\sqrt{q}^{\pm 1}$. Dans ce cas, elles sont de longueur deux, avec un facteur de dimension un.

Pour $\lambda = \sqrt{q}^{\pm 1}$, on obtient en outre le module st ou st' qui est irréductible. Les modules st et st' sont équivalents, et on verra, au chapitre suivant, qu'ils sont de carré intégrable.

Il en est de même pour $\lambda = -\sqrt{q}^{\pm 1}$, on obtient alors les modules $\epsilon \otimes st$ et $\epsilon \otimes st'$.

Enfin, les modules St et St' sont irréductibles.

Démonstration: Si $f(gb) = f(g)\chi_\lambda^{-1}(b)$, la fonction $F = f\epsilon$ vérifie $F(gb) = F(g)\epsilon(b)\chi_\lambda^{-1}(b)$, or $\epsilon(b)\chi_\lambda^{-1}(b) = \chi_{-\lambda}^{-1}(b)$.

On considère ensuite l'arbre $\mathcal{A}_{q,1}$, dont les sommets de numéro 1 sont les sommets de l'arbre homogène, ceux de numéro 2 sont les arêtes.

Les compacts maximaux de numéro 1, sont les fixateurs des sommets de l'arbre $\mathcal{A}_q$, et sont dans le noyau du caractère ϵ.

Un compact associé à sommet de numéro 2, qui est une arête de l'arbre $\mathcal{A}_q$, est le stabilisateur de cette arête; c'est aussi le normalisateur du groupe d'Iwahori qui fixe cette arête. Il contient des éléments sur lesquels ϵ vaut -1.

En particulier pour $\lambda = -q$ la représentation T^2 est définie dans l'espace des fonctions qui vérifient $\int_K F(g)dg$ pour tout fixateur de sommet de numéro 1, c'est à dire fixateur d'un sommet de l'arbre $\mathcal{A}_q$, et comme on a pour $F = \epsilon f$, l'égalité $\int_K F(g)dg = \int_K f(g)dg$, pour ces compacts K considérés, on a $st = T^2$. De même, on prouverait $st' = T'^2$. Dans ce cas on vérifie que $T^1 = T'^1 = \epsilon$. ∎

On désigne par $G^+ = \ker \epsilon \cap G$. C'est un groupe qui opère sur l'arbre homogène avec deux orbites; il est doublement transitif sur l'arbre $\mathcal{A}_{q,q}$ obtenu à partir de l'arbre homogène en choisissant un sommet x_0 décrété de numéro 1 ainsi que ceux qui sont à distance paire de x_0, les autres étant de numéro 2. Les compacts maximaux de G^+, qui sont répartis en deux classes de conjugaison dans G^+, sont les compacts maximaux de numéro 1 de G.

Si on écrit $B = \tau^{\mathbb{Z}}N$, alors $B^+ = B \cap G^+ = \tau^{2\mathbb{Z}}N = \tau_+^{\mathbb{Z}}N$, avec $\tau_+ = \tau^2$. On note χ_μ^+ le caractère associé à G^+, et π_+^μ et Π_+^μ les représentations induites de G^+ obtenues. On a

$$\chi_\mu^+(\tau_+) = \sqrt{q^2}\mu = q\mu, \quad \text{et} \quad \chi_\lambda(\tau_+) = (\sqrt{q}\lambda)^2 = q\lambda^2 = \chi_{\lambda^2}^+(\tau_+).$$

Ce calcul, et la remarque que les compacts maximaux de G_+ sont des compacts maximaux de G prouve

Proposition 2.5.2 *La restriction des représentations à G^+ est donnée par*

$$\pi^\lambda|_{G^+} = \pi_+^{\lambda^2}, \quad \text{et} \quad \Pi^\lambda|_{G^+} = \Pi_+^{\lambda^2}.$$

Elle sont irréductibles, sauf si $\lambda^2 = -1$, $\lambda^2 = q^{\pm 1}$.

Si $\lambda^2 = -1$, la représentation

$$\Pi^\lambda|_{G^+} = \Pi_+^{\lambda^2} = T^1 \oplus T^2,$$

où T^1, T^2 sont deux représentations unitaires orthogonales, et il existe un opérateur unitaire U, et un automorphisme extérieur α de G^+, restriction à G^+ d'un automorphisme intérieur, qui vérifient pour tout $g \in G^+$:

$$UT^1(g) = T^2(\alpha(g))U \quad \text{et} \quad UT^2(g) = T^1(\alpha(g))U.$$

Démonstration: Le premier point est déjà connu.

L'opérateur U est facile à définir. On choisit un élément $h \in G, h \notin G^+$. Comme le sous-groupe G^+ est d'indice deux dans G, il est distingué, d'où l'automorphisme $\alpha(g) = hgh^{-1}$, et l'application $U = \Pi^\lambda(h)$.

La formule suivante $\Pi^\lambda(h)\Pi^\lambda(g) = \Pi^\lambda(\alpha(g))\Pi^\lambda(h)$, est évidente, il reste à vérifier que $\Pi^\lambda(h)$ échange les espaces V^1 de T^1 et V^2 de T^2.

Soient $W^1 = \Pi^\lambda(h)V^1$, et $W^2 = \Pi^\lambda(h)V^2$. Comme

$$\Pi^\lambda(\alpha(g))\Pi^\lambda(h)V^i = \Pi^\lambda(g)\Pi^\lambda(h)V^i,$$

les espaces W^i sont des espaces invariants par G^+, fermés non triviaux, ils ne peuvent être égaux qu'à V^1 ou à V^2. L'égalité $V^i = W^i$, impliquerait la stabilité de cet espace par l'action du groupe $G = G^+ \cup hG^+$. Ceci contredirait l'irréductibilité de Π^λ. Donc $W^1 = V^2$ et $W^2 = V^1$. ∎

Remarque L'irréductibilité des représentations de Steinberg, qui sera démonstrée dans la section suivante, montrera que les représentations de Steinberg, et les représentations de Steinberg tordues par le caratère ϵ de G, qui ont d'ailleurs même restriction à G^+, et apparaîssent comme les sous-modules ou modules quotients, de dimension différente de un, des Π^λ et π^λ pour $\lambda^2 = q^{\pm 1}$, restreints à G^+ restent irréductibles.

Ainsi, $\Pi^{\pm i}$ et $\pi^{\pm i}$ seront les seuls sous-quotients irréductibles des séries principales de G, dont la restriction à G^+ n'est plus irréductible.

Remarque Dans de nombreux cas, un groupe d'automorphismes H doublement transitif d'un arbre $\mathcal{A}_{q,q}$ provient d'un groupe d'automorphisme G d'un arbre homogène, pour lequel on a $H = G^+$.

C'est le cas de PSL_2, d'un groupe $SU(4)$ associé à une extension non ramifiée, et bien entendu du groupe $\mathcal{G}_q^+$. Par contre, il n'en est pas ainsi dans le cas où $H = SU(3)$ associé à une extension ramifiée, car même si les compacts maximaux des deux classes de conjugaison ont même volume, les uns sont hyperspéciaux, pas les autres. Voir [T-2].

L'exemple de $\mathcal{G}_q^+$ permet de comprendre les représentations T^i dans les cas d'un sous-groupe $G \subset \mathcal{G}_{q,q}$.

Enfin, les cas d'arbres homogènes que l'on vient d'étudier, donnent des cas extrêmes pour les facteurs t^i. Dans un cas on obtient un module de dimension un et un module de codimension un, dans l'autre deux modules presque isomorphes, sans être isomorphes, car ils ne possèdent pas de sous-module invariant non trivial par les mêmes compacts maximaux.

2.6 Représentation de Steinberg

Le lecteur, dont l'intérêt se réduit aux groupes d'automorphismes d'arbres homogènes, peut se dispenser de cette section, les résultats qui y figurent ont déjà été établis, ou le seront comme conséquence de l'étude des fonctions sphériques, qui sera faite au chapitre suivant.

Proposition 2.6.1 *Les représentations St et St', ainsi que st, et st', sont irréductibles.*

Démonstration: On se donne une géodésique pointée $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, et on considère le fixateur K de x_0, et le fixateur I de l'arête $[x_0, x_1]$.

Soit $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}$. On appliquera le lemme 2.4.2 à $J = I$, et au module st qui est égal à $V = \{f \in V^\lambda \mid \oint_{G/B} f(g)dg = 0\}$.

On a dejà vu que $\dim V^I = 1$. Il s'agira, pour prouver l'irréductibilité de St, de montrer qu'un générateur de V^I engendre V, et que la fonction $f_I \in V^{\lambda^{-1}}$ définie par sa restiction à K, égale à la fonction caractéristique de I engendre $V^{\lambda^{-1}}$. Ce sera l'objet des deux lemmes suivants, qui seront établis en utilisant le modèle Ω de représentations dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et en utilisant le lemme 2.4.1, on en déduira l'irréductibilité de st'. Enfin, de l'irréductibilité algébrique de st et de st', on déduit l'irréductibilité toplogique de St et de St', car ces deux modules sont engendrés par la droite des éléments invariants par I. ∎

Nous allons introduire quelques notations.

Pour $y \in \mathcal{A}$, on note $V_y = \{\omega \mid y \in [x_0, \omega]\}$, qui est égal à Ω si $y = x_0$, et φ_y sa fonction caractéristique, et on rappelle la notation $\Omega_{a,b} = \{\omega \mid b \in [a, \omega]\}$, pour $a, b \in \mathcal{A}$, qui est égal à Ω si $a = b$.

Lemme 2.6.2 *Soit $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}$. L'élément $f_I \in V^{\lambda^{-1}}$, dont la restriction à K est la fonction caractéristique de I, engendre le G-module $V^{\lambda^{-1}}$.*

Démonstration: L'espace $V^{\lambda^{-1}}$ est simplement l'ensemble des fonctions localement constantes sur G invariantes à droite par B sur lequel G opère par la représentation régulière gauche. Son image dans le modèle sur Ω, est l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, sur lequel G opère par translations; il est engendré par les φ_y. On notera que l'image de f_I dans le modèle sur Ω, est la fonction caractéristique de $I(\infty) = V_{x_1}$. On en déduit que $\pi^{\lambda^{-1}}(g)f_I$ a comme image la fonction caractéristique de $gV_{x_1} = \Omega_{g(x_0),g(x_1)}$.

On considère $y \in \mathcal{A}$ tel que $d(x_0, y)$ soit impair, on note x le sommet $x \in [x_0, y]$ qui vérifie $d(x, y) = 1$: on a l'égalité $V_y = \Omega_{x,y}$.

Soit $g \in G$ avec $g(x_1) = y$ et $g(x_0) = x$, comme $\Omega_{x,y} = gV_{x_1}$, on en déduit que l'image de l'espace engendré par f_I contient tous les φ_y, avec $d(x_0, y)$ impair. Les fonctions φ_y, avec $d(x_0, y)$ impair, engendrent $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, car si $d(x_0, z) = 2n > 0$, l'ensemble V_z est la réunion disjointe de V_y avec $d(0, y) = 2n + 1$ et $z \in [x_0, y]$, donc la fonction φ_z est la somme de ces φ_y quand y décrit ce même ensemble. ∎

Proposition 2.6.3 *Soit $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}$. On considère $h_I \in V^\lambda$ défini par sa restriction à K, donnée par $h_I(k) = q_1$ si $k \in I$, et $h_I(k) = -1$ si $k \in Iw$.*

L'élément $h_I \in st^I$, il engendre algébriquement le G-module st, et topologiquement St.

Démonstration: Pour démontrer cette proposition, nous allons considérer le Ω–modèle, et nous noterons φ_I l'image de h_I, égale à $\varphi_I(\omega) = q_1$ pour $\omega \in V_{x_1}$ et $\varphi_I(\omega) = -1$ sinon.

On remarque, eu égard à la décomposition en martingales de 1.9.6, que si on désigne par $V_n = \{f \,|E^{\mathcal{B}_n} f = f\}$ pour $n \geq 0$, $W_0 = V_0$, et pour $n \geq 1$, $W_n = \{f \in V_n \text{ et } E^{\mathcal{B}_{n-1}} f = 0\}$, on a

$$\mathcal{C}(\Omega) = \bigoplus_{n \geq 0} W_n \quad \text{et} \quad L^2(\Omega) = \hat{\bigoplus}_{n \geq 0} W_n,$$

dans ces décompositions les espaces sont orthogonaux, dans le premier cas c'est une somme directe algébrique, dans le deuxième cas il s'agit d'une somme hilbertienne. On vérifie ensuite que l'on a

$$st = \bigoplus_{n \geq 1} W_n, \quad \text{et} \quad St = \hat{\bigoplus}_{n \geq 1} W_n,$$

avec la même signification que ci-dessus.

Soient a, b deux sommets voisins, tels que $d(x_0, a) + 1 = d(x_0, b)$, on note $n = d(x_0, b)$. Soit $S'(a) = S(x_0, n) \cap S(a, 1)$, et $q + 1 = \text{Card } S'(a)$; on a $q = q_1$ si $n = 1$, $q = q_2 - 1$ si $n = 2k > 0$, et $q = q_1 - 1$ si $n = 2k + 1$.

On considère la fonction de $\varphi_{a,b} \in W_n$, dont le support est V_a, qui est égale à -1 sur $V_a - V_b$ et à q sur V_b.

On remarquera que $\varphi_I = \varphi_{x_0, x_1}$.

Lemme 2.6.4 *L'espace W_n, pour $n \geq 1$, est engendré linéairement par les $\varphi_{a,b}$ avec $d(x_0, a) + 1 = d(x_0, b) = n$*

Démonstration: On remarque que ces fonctions sont dans W_n.

Pour $d(x_0, a) = n-1$, soit $W_{n,a}$ l'ensemble des $f \in W_n$, dont le support est contenu dans V_a.

On a $W_n = \oplus_{a \in S(x_0,n-1)} W_{n,a}$: en effet la fonction $\mathbb{I}$ qui est égale à 1 sur Ω, se décompose sous la forme $\mathbb{I} = \sum_{a \in S(x_0,n-1)} \varphi_a$, et toute fonction f définie sur Ω s'écrit alors $f = \sum_{a \in S(x_0,n-1)} \varphi_a f$.

Comme $E^{\mathcal{B}_{n-1}} \varphi_a = \varphi_a$, on en déduit que, pour $p \geq n-1$, on a l'égalité $E^{\mathcal{B}_p}(f\varphi_a) = E^{\mathcal{B}_p}(f)\varphi_a$, d'où $W_n = \oplus_{a \in S(x_0,n-1)} W_{n,a}$.

Toute fonction $f \in W_{n,a}$ s'écrit $f = \sum_{c \in S'(a)} f(c)\varphi_c$, avec $\sum_{c \in S'(a)} f(c) = 0$. Il s'agit de montrer que f s'écrit aussi $\sum_{b \in S'(a)} g(b)\varphi_{a,b}$. On remarque que $\varphi_{a,b} = (q+1)\varphi_b - \varphi_a$, on vérifie ainsi que le système à résoudre admet comme solution $g(b) = \frac{1}{q+1} f(b)$, d'où le lemme. ∎

Le lemme précédent permet donc de conclure que l'ensembles des $\varphi_{a,b}$ définis ci-dessus est une famille génératrice de st : on notera ici ϖ la représentation st dans le modèle Ω.

Clairement, il suffit de vérifier que $\varphi_{a,b} \in \mathbb{R}\varpi(G)\varphi_I + \oplus_{0<p<n} W_p$ pour démontrer, par récurrence sur $d(x_0, b) = n$, la proposition. Etablissons ce point.

Le calcul de $\varpi(g)\varphi_I$ est facile, car

$$\varpi(g)\varphi_I(\omega) = \frac{d\nu_{g(x_0)}(\omega)}{d\nu_{x_0}(\omega)} \varphi_I(g^{-1}(\omega)),$$

le premier membre $\frac{d\nu_{g(x_0)}(\omega)}{d\nu_{x_0}(\omega)} = (q_1 q_2)^{-\frac{1}{2}<g(x_0),x_0;\omega>}$ ne dépend que de la projection de ω sur le segment $[x_0, g(x_0)]$, l'autre expression prend deux valeurs, à savoir q_2 sur $g(\Omega_+) = \Omega_{g(x_0),g(x_1)}$, et -1 sur $g(\Omega_-) = \Omega_{g(x_1),g(x_0)}$.

On a pour $k \in K$, $\varpi(k)\varphi_I = \varphi_{x_0,k(x_1)}$; on sait que K est transitif sur la sphère $S(x_0, 1)$, donc si $d(x_0, b) = 1$, et $a = x_0$, on obtient $\varphi_{a,b} \in \mathbb{R}\varpi(G)\varphi_I$. L'assertion est ainsi démontrée pour $n = 1$.

Pour démontrer l'assertion pour $n > 1$, c'est à dire que a, b vérifiant les hypothèses, $\varphi_{a,b} \in \mathbb{R}\varpi(G)\varphi_I + \oplus_{0<p<n} W_p$, on considère un élément $g \in G$ qui envoie le couple (x_0, x_1) sur le couple (a, b).

On pose $\varphi = \varpi(g)\varphi_I$, on remarque que $E^{\mathcal{B}_n}\varphi = \varphi$, car c'est le produit d'un noyau de Poisson qui ne dépend que de la projection de ω sur $[x_0, a]$ et de $\varphi_{a,b}$.

Soit alors $\psi = \varphi - E^{\mathcal{B}_{n-1}}\varphi$: on vérifie que $E^{\mathcal{B}_{n-1}}\varphi \in \oplus_{0<p<n} W_p$, car $E^{\mathcal{B}_0} E^{\mathcal{B}_n} \varphi = E^{\mathcal{B}_0}\varphi = 0$, puisque $\varphi \in st$.

On vérifie ensuite que le support de ψ est $\Omega_{x_0,a}$, et qu'elle n'y prend que deux valeurs, suivant que $b \in [x_0, \omega]$ ou que $b \notin [x_0, \omega]$. Ceci prouvera que

ψ est proportionel à $\varphi_{a,b}$ car $\psi \in W_n$. Pour vérifier l'assertion, il suffira de prouver que ψ n'est pas nulle. Ceci se vérifie aisément, car la restriction de φ à $\Omega_{x_0,a}$ est le produit de deux fonctions, l'une qui est un noyau de Poisson, toujours strictement positif, et prend deux valeurs distinctes sur $\Omega_{x_0,a}$, suivant que $b \in [x_0, \omega]$ ou que $b \notin [x_0, \omega]$, et l'autre, qui est $\varpi(g)\varphi_I$, prend deux valeurs de signes opposées sur les ensembles $g(\Omega_+)$ et $g(\Omega_-)$, qui réalisent une partition de Ω.

On a $\Omega_{x_0,b} = \Omega_{x_0,a} \cap g(\Omega_-)$ si n est pair et $\Omega_{x_0,b} = \Omega_{x_0,a} \cap g(\Omega_+)$ si n est impair.

Ceci prouve que la restriction de φ à $\Omega_{x_0,a}$ est une fonction qui prend deux valeurs non nulles de signe opposées sur $\Omega_{x_0,b}$ et son complémentaire.

Ainsi ψ n'est pas nulle sur $\Omega_{x_0,a}$, donc $\varphi_{a,b} \in \mathbb{R}\psi$, d'où l'assertion. ∎

2.7 Coefficent de la représentation de Steinberg

L'objet de ce numéro est de calculer le coefficient de la représentation de Steinberg

$$c(g) = \frac{< \varpi(g)h_I, f_I >}{< h_I, f_I >},$$

où h_I (resp. f_I) est le vecteur non nul de st^I, (resp de st'^I.) Le produit scalaire $<,>$ est la dualité entre représentations contragrédientes, défini par le produit scalaire des restrictions à K.

On a aussi $c(g) = \frac{<h_I, \check{\varpi}(g^{-1})f_I>}{<h_I, f_I>}$, ce qui prouve que le coefficient c est bi-invariant par I, sa valeur sera ainsi déterminée sur les doubles classes $I\backslash G/I$, dont on connait un système de représentants,

$$I\backslash G/I = \tau^{\mathbb{Z}} \sqcup \tau^{\mathbb{Z}} w.$$

Le calcul de c sera effectué dans le modèle Ω, dans lequel on a

$$c(g) = \frac{1}{m(\Omega_+})\int_{\Omega_+} \varpi(g)(\varphi_I)(\omega)d\omega.$$

Proposition 2.7.1 *Le coefficient c de la représentation de Steinberg st est donné par*

$$c(g) = \begin{cases} \frac{1}{(q_1q_2)^{|n|}} & si\ g = \tau^n \\ \frac{-q_1}{(q_1q_2)^n} & si\ g = \tau^n w,\ avec\ n > 0 \\ \frac{-1}{q_1(q_1q_2)^{|n|}} & si\ g = \tau^n w,\ avec\ n \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration: En effet, pour simplifier les notations, nous allons paramétrer par $\mathbb{Z}$ la géodésique engendrée $\tau^{\mathbb{Z}}x_0$, que l'on appelera standard, à savoir $\tau^n x_0 = 2n$, $\tau^n x_1 = 2n+1$. L'action de τ est la translation d'ordre 2, et $w(n) = -n$.

On rappelle que $\Omega = \Omega_+ \sqcup \Omega_-$, où $\Omega_+ = \Omega_{0,1}$ et que

$$c(g) = c\int_{\Omega_+} \varphi_I(g^{-1}\omega)\, d\nu_{g(0)}\omega = -c\int_{\Omega_-} \varphi_I(g^{-1}\omega)\, d\nu_{g(0)}\omega,$$

la deuxième expression étant conséquence de ce que $\int_\Omega \varpi(g)\varphi_I(\omega)d\omega = 0$, pour une constante c telle que $c(1) = 1$, donc $1 = c\int_{\Omega_+} q_1 = c\frac{q_1}{q_1+1}$, ce qui donne $c = 1 + \frac{1}{q_1}$.

Traitons d'abord le cas de $g = \tau^n$. Le cas $n = 0$ est trivial, car alors $c(1) = 1$. On remarque ensuite que $\omega \mapsto \varphi_I(g^{-1}\omega)$ vaut q_1 sur $\Omega_{2n,2n+1}$ et -1 sur son complémentaire, à savoir $\Omega_{2n+1,2n}$. Le calcul sera explicité en fonction du signe de n.

Remarquons d'abord que l'on a $\tau^{-n}\omega \in \Omega_+$, si et seulement si on a $1 \in [0, \tau^{-n}(\omega)]$, qui, comme on le voit en transformant par τ^n, est équivalent à $2n+1 \in [2n, \omega]$.

On vérifie de même que $\tau^{-n}\omega \in \Omega_-$, si et seulement si on a $2n \in [2n+1, \omega]$.

Donc pour $n > 0$, si $\omega \in \Omega_-$ alors $\varphi_I(\omega) = -1$, et alors

$$c(\tau^n) = (1+\frac{1}{q_1})\int_{\Omega_-} d\nu_{2n}(\omega) =$$

$$= (1+\frac{1}{q_1})\frac{d\nu_{2n}(\omega)}{d\nu_(\omega)}|_{\Omega_-}\nu(\Omega_-) = (1+\frac{1}{q_1})\frac{1}{(q_1q_2)^n}\frac{q_1}{q_1+1} = \frac{1}{(q_1q_2)^n}.$$

De même si $n < 0$, on voit que si $\omega \in \Omega_+$ alors $\varphi_I(\omega) = q_1$, et

$$c(\tau^n) = (1+\frac{1}{q_1})\int_{\Omega_+} q_1\, d\nu_{2n}(\omega) =$$

$$= (1+\frac{1}{q_1})q_1\frac{d\nu_{2n}(\omega)}{d\nu_(\omega)}|_{\Omega_+}\nu(\Omega_+) = (1+\frac{1}{q_1})q_1(q_1q_2)^n\frac{1}{q_1+1} = (q_1q_2)^n.$$

Pour calculer $c(\tau^n w)$ on étudie $\varphi_I((\tau^n w)^{-1})$, et on vérifie qu'il vaut -1 si $(\tau^n w)^{-1}(\omega) \in \Omega_+$, c'est à dire si $\omega \in \Omega_{\tau^n w(0), \tau^n w(1)} = \Omega_{2n,2n-1}$, et q_1 sur son complémentaire qui est $\Omega_{2n-1,2n}$. On remarque ensuite que $\Omega_- \subset \Omega_{2n,2n-1}$ si $n \geq 1$, et $\Omega_+ \subset \Omega_{2n-1,2n}$ si $n \leq 0$.

Le calcul est alors simple, pour $n \geq 1$ on a

$$c(\tau^n w) = -(1+\frac{1}{q_1})\int_{\Omega_-} q_1\, d\nu_{2n}(\omega) = -(1+\frac{1}{q_1})q_1\frac{1}{(q_1q_2)^n}\nu(\Omega_-) = \frac{-q_1}{(q_1q_2)^n}.$$

De même, pour $n \leq 0$, on a

$$c(\tau^n w) = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{\Omega_+} (-1)\, d\nu_{2n}(\omega) = -(1 + \frac{1}{q_1}) \frac{1}{(q_1 q_2)^{|n|}} \nu(\Omega_+) = \frac{-1}{q_1 (q_1 q_2)^{|n|}}.$$

Ceci termine la démonstration. ∎

Proposition 2.7.2 *Les représentations st et st′ ont mêmes coefficients.*

Démonstration: Nous allons montrer que le coefficient de st est le même que celui de la contragrédiente st'. En effet, il est réel et on vérifie que $c(g) = c(g^{-1})$, car on voit que $c(\tau^n) = c(\tau^{-n})$, et on note que les classes $I\tau^n w I$ sont involutives, l'action de $(\tau^n w)^2$ étant triviale sur la géodésique standard. Ainsi $\overline{c(g^{-1})} = c(g)$.

Le coefficient de la contragrédiente est donné par

$$c'(g) = \frac{1}{< f_I, h_I >} < \varpi'(g) f_I, h_I >= \frac{1}{f_I, h_I >} < f_I, \varpi(g^{-1}) h_I >= \overline{c(g^{-1})}.$$

d'où le résultat annoncé. ∎

Corollaire 2.7.3 *Les représentations st et st′ sont (algébriquement) équivalentes.*

Démonstration: En effet ces représentations sont irréductibles, et équivalentes à la sous-représentation engendrée par c dans la représentation régulière droite de G. ∎

Remarque Le coefficient c peut aussi s'interpréter comme un caractère de l'algèbre de Hecke, pour la convolution, $C_c(I\backslash G/I)$, en associant à une fonction $\varphi \in C_c(I\backslash G/I)$ l'opérateur $\varpi(\varphi) = \int_G \varpi(g)\varphi(g)\, dg$, qui est de rang un, et qui agit sur st^I par l'homothétie de rapport $c(\varphi) = \int_G c(g)\varphi(g)\, dg$, et vérifie $c(\varphi * \psi) = c(\varphi)c(\psi)$.

Le lemme suivant servira à étudier l'intégrabilité de c.

Lemme 2.7.4 *Les mesures des doubles classes de $I\backslash G/I$, pour une mesure de Haar m sur G, sont données par*

$$m(IgI) = \begin{cases} (q_1 q_2)^{|n|} m(I) & si\ g = \tau^n \\ q_2 (q_1 q_2)^{(n-1)} m(I) & si\ g = \tau^n w,\ avec\ n > 0 \\ q_1 (q_1 q_2)^{|n|} m(I) & si\ g = \tau^n w,\ avec\ n \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration: On a pour $g \in G$, $m(IgI) = [I : (gIg^{-1} \cap I)]m(I)$, car IgI est une réunion de classes à gauche Igx indexées par $I/(gIg^{-1} \cap I)$. Comme $gIg^{-1} = K_{\{g(0),g(1)\}}$, on a $gIg^{-1} \cap I = K_{\{0,1,g(0),g(1)\}}$, la notation K_X désignant ici le fixateur de l'ensemble X dans G. Il ne reste plus qu'à expliciter les différents cas.

Si $g = \tau^n$, alors $gIg^{-1} \cap I = K_{\{0,1,2n,2n+1\}}$.

Si $n > 0$, on a $gIg^{-1} \cap I = K_{\{0,2n+1\}}$, et $I/K_{\{0,2n+1\}}$ s'identifie à l'image par I du sommet $2n + 1$, qui est égale à l'ensemble de sommets

$$\{a \mid d(0,a) = 2n + 1,\ 1 \in [0,a]\};$$

Cet ensemble a $(q_1q_2)^n$ éléments, d'où $m(I\tau^nI) = (q_1q_2)^n m(I)$.

Si $n < 0$, on a $gIg^{-1} \cap I = K_{\{1,2n\}}$, et $I/K_{\{1,2n\}}$ s'identifie à l'image par I du sommet $2n$, qui est égale à l'ensemble de sommets

$$\{a \mid d(0,a) = 2n,\ 1 \notin [0,a]\};$$

Cet ensemble a $(q_1q_2)^{|n|}$ éléments, d'où $m(I\tau^nI) = (q_1q_2)^{|n|}m(I)$.

Si $g = \tau^n w$, alors $gIg^{-1} \cap I = K_{\{0,1,2n,2n-1\}}$.

Si $n > 0$, on a $gIg^{-1} \cap I = K_{\{0,2n\}}$, et $I/K_{\{0,2n\}}$ s'identifie à l'image par I du sommet $2n$, qui est égale à l'ensemble de sommets

$$\{a \mid d(0,a) = 2n,\ 1 \in [0,a]\};$$

cet ensemble a $q_2(q_1q_2)^{(n-1)}$ éléments, d'où $m(I\tau^n wI) = q_2(q_1q_2)^{(n-1)}m(I)$.

Si $n \leq 0$, on a $gIg^{-1} \cap I = K_{\{1,2n-1\}}$, et $I/K_{\{1,2n-1\}}$ s'identifie à l'image par I du sommet $2n - 1$, qui est égale à l'ensemble de sommets

$$\{a \mid d(0,a) = 2n,\ 1 \notin [0,a]\};$$

cet ensemble a $q_1(q_1q_2)^{|n|}$ éléments, d'où $m(I\tau^n wI) = q_1(q_1q_2)^{|n|}m(I)$; d'où le lemme. ∎

Proposition 2.7.5 *La fonction c est de carré intégrable sur G, mais n'y est pas intégrable.*

Les représentations st et st′ peuvent être considérées comme plongées dans l'espace engendrée par c dans $L^2(G)$, muni de la représentation régulière gauche.

Cet espace est en fait un sous-espace invariant à droite par I. Ainsi ces représentations peuvent être réalisées comme sous-représentations de la représentation régulière de G dans $L^2(G/I)$.

Elles restent algébriquement irréductibles, et sont unitarisables.

Soit ST l'adhérence de ces représentations: c'est la représentation de Steinberg (unitaire).

Son degré formel, donné par $d_{ST} = \frac{1}{\|c\|^2}$, est égal à

$$d_{ST} = \frac{1}{m(I)} \frac{1 - \frac{1}{q_1 q_2}}{(1 + \frac{1}{q_1})(1 + \frac{1}{q_2})}.$$

Démonstration: La non intégrabilité de c est évidente, vu les valeurs calculées de c et des mesures des doubles classes.

Par contre on a

$$\|c\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(\tau^n) m(I\tau^n I) + \sum_{n>0} c(\tau^n w) m(I\tau^n w I) + \sum_{n \leq 0} c(\tau^{-n} w) m(I\tau^{-n} w I),$$

qui s'explicite en

$$m(I)[1 + 2\sum_{n>0} \frac{1}{(q_1 q_2)^n} + \sum_{n>0} \frac{q_1}{(q_1 q_2)^n} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{q_1 (q_1 q_2)^n}],$$

qui donne la valeur annoncée.

On interprète la fonction c comme un coefficient $< L(g)e, e >$, où e est le vecteur unitaire, invariant par I dans la représentation st réalisée comme sous représentation de $L^2(G)$, pour la représentation régulière gauche L. En fait $e = \frac{c}{\|c\|}$. Ce coefficient c devient la fonction I sphérique associée à ST. Ainsi, la théorie des représentations unitaires de carré intégrable, exposée dans [D], s'applique ici. ■

Remarque Comme G/I s'identifie à l'ensemble A des arêtes de l'arbre, $L^2(G/I)$ s'identifie à $L^2(A)$, pour la mesure de décompte (éventuellement multipliée par la valeur de $m(I)$.)

L'énoncé précédent montre que la représentation de Steinberg ST est un sous$-\mathcal{G}-$module invariant fermé dans $L^2(A)$, celui qui est engendré par l'image de la fonction c. Ceci permet une nouvelle définition plus géométrique de ST, qui ne fait pas intervenir le groupe G choisi.

L'image de c est très facile à expliciter, car les classes $I\backslash G/I$ décrivent les positions de deux arêtes.

Les propositions 3.7.2 et 3.7.3 donneront une description géométrique de la représentation de Steinberg dans le cas homogène.

Chapitre III: Représentations sphériques, transformation de Satake, décompositions spectrales

Ce chapitre est consacré aux représentations sphériques associées à un compact maximal K, à la transformation de Satake de ces fonctions sphériques, à la détermination des fonctions sphériques élémentaires, à la formule de Plancherel, puis à la décomposition spectrale de $L^2(G/K)$.

Dans le cas d'un arbre homogène, on en déduira la formule de Plancherel pour les fonctions bi-invariantes par un groupe d'Iwahori I, puis la décomposition spectrale de $L^2(G/I)$.

Enfin, comme application, on démontrera une formule de Plancherel pour certains groupes discrets, tels les groupes libres, à qui on peut associer des arbres.

3.1 Transformation de Satake

Comme dans le chapitre précédent, on s'est fixé un sommet x_0 que l'on suppose de numéro 1, et on a noté K son fixateur dans G. On choisira la mesure de Haar sur G pour laquelle le volume de K est égal à un.

On considère les algèbres $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$ et $L^1(K\backslash G/K)$. Ce sont des algèbres commutatives pour la convolution, car l'involution $g \mapsto g^{-1}$ fixe les doubles classes de $K\backslash G/K$ et induit un anti-isomorphisme de ces algèbres.

Définition 3.1.1 *Soit $f \in L^1(K\backslash G/K)$, on appelle transformée de Satake de f la fonction $\tilde{f}$ sur $K\backslash G/N = \tau^{\mathbb{Z}}$, définie par*

$$\tilde{f}(\tau^p) = \delta^{\frac{1}{2}}(\tau^p) \int_N f(\tau^p n)\, dn = (q_1 q_2)^{\frac{p}{2}} \int_N f(\tau^p n)\, dn,$$

où δ^{-1} est le module[11] *d'une mesure de Haar de B.*

[11] défini sur B par $d(x^{-1}bx) = \delta(x)^{-1}db$, db étant une mesure de Haar de B.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $f \in L^1(K\backslash G/K)$, on considère l'opérateur

$$\Pi^\lambda(f) = \int_G \Pi^\lambda(g) f(g)\, dg.$$

Il est de rang un, et opère par un scalaire, noté $c_\lambda(f)$, sur la droite des vecteurs invariants par K, portée par la fonction $f_{K,\lambda} \in \mathcal{H}^\lambda$ définie par sa restriction à K égale à 1.

Proposition 3.1.1 *L'application c_λ est un cararactère de $L^1(K\backslash G/K)$, il est donné par la formule*

$$c_\lambda(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda^{-p}\tilde{f}(\tau^p).$$

Démonstration: On vérifie que c_λ est donné par la formule $c_\lambda(f) =$

$$\int_G f(g) f_{K,\lambda}(g^{-1})\, dg = \int_G f(g^{-1}) f_{K,\lambda}(g)\, dg = \int_G f(g) f_{K,\lambda}(g)\, dg$$

$$= \int_{K\times\mathbb{Z}\times N} f(k\tau^p n)(\sqrt{q_1q_2})^p \chi_\lambda^{-1}(\tau^p)\, dkdn = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda^{-p}\tilde{f}(\tau^p).$$

Comme π^λ est une représentation, on a pour $f_1, f_2 \in L^1(K\backslash G/K)$, l'égalité $\pi^\lambda(f_1 \star f_2) = \pi^\lambda(f_1)\pi^\lambda(f_2)$; d'où $c_\lambda(f_1 \star f_2) = c_\lambda(f_1)c_\lambda(f_2)$. ∎

Comme $c_\lambda(f)$ est la transformation de Laplace de $\tilde{f}$, l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est un homomorphisme entre l'algèbre $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, munie de la convolution sur le groupe G et son image dans l'algèbre, pour la convolution sur $\mathbb{Z}$. On peut montrer à priori qu'on obtient l'ensemble des fonctions symétriques à support fini, sur $\mathbb{Z}$. Ce résultat est démontré dans le cadre des groupes p-adiques par Satake dans [Sa].

Redémontrons le ici.

Proposition 3.1.2 *Soit f une fonction de $\mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, sa transformée de Satake $\tilde{f}$ vérifie $\tilde{f}(\tau^{-p}) = \tilde{f}(\tau^p)$.*

Elle est donnée, pour $p \geq 0$ par la formule suivante

$$\tilde{f}(\tau^p) = \varphi(\tau^p) + (1 - \frac{1}{q_2})\sum_{l=1}^{\infty} \varphi(\tau^{p+2l}) + \frac{q_1 - 1}{\sqrt{q_1q_2}}\sum_{l=0}^{\infty} \varphi(\tau^{p+2l+1}),$$

où on a posé $\varphi(\tau^p) = (q_1q_2)^{\frac{p}{2}} f(\tau^p)$; en particulier elle est à support fini.

Démonstration: On rappelle les résultats de la proposition 1.5.5, où il est montré que si $v(n) = k$, alors $\tau^l n \in K\tau^{m(k,l)}K$ avec un entier $m(k,l) = l + k$ si $k \geq \max(0, -2l)$, et $m(k,l) = |l|$ sinon.

La mesure de $N_k^* = \{n \in N \mid v(n) = k\}$ est facile à déterminer.

On a vu que $m(N_{2p}) = (q_1q_2)^p$ et $m(N_{2p+1}) = q_2(q_1q_2)^p$; d'où on déduit que

$$m(N_{2p}^*) = m(N_{2p}) - m(N_{2p-1}) = (q_1q_2)^p - q_2(q_1q_2)^{p-1} = (1 - \frac{1}{q_1})(q_1q_2)^p.$$

De même, on a

$$m(N_{2p+1}^*) = m(N_{2p+1}) - m(N_{2p}) = q_2(q_1q_2)^p - (q_1q_2)^p = (q_2 - 1)(q_1q_2)^p.$$

Le calcul de la transformation de Satake est alors très facile.

On suppose que $p \geq 0$.

On voit trivialement que si $n \in N_0$, on a $\tau^p n \in K\tau^p K$.

Si $v(n) = k > 0$, alors la formule ci dessus montre que

$$\tau^p n \in K\tau^{p+k}K.$$

Comme $N = N_0 \sqcup \bigsqcup_{q>0} N_q^*$, on en déduit que

$$(q_1q_2)^{-\frac{p}{2}}\tilde{f}(\tau^p) = f(\tau^p)m(N_0) + \sum_{k=1}^{\infty} f(\tau^{p+2k})m(N_{2k}^*) + \sum_{k=0}^{\infty} f(\tau^{p+2k+1})m(N_{2k}^*)$$

$$= f(\tau^p) + (1 - \frac{1}{q_1})\sum_{k=1}^{\infty}(q_1q_2)^k f(\tau^{p+2k}) + (q_2 - 1)\sum_{k=0}^{\infty}(q_1q_2)^k f(\tau^{p+2k+1}),$$

ce qui démontre la proposition dans le cas $p \geq 0$.

Supposons maintenant $p < 0$, on a $\tau^p n \in K\tau^{|p|}K$ pour $n \in N_{2|p|}$, et on a $\tau^p n \in K\tau^{p+k}K$ pour $n \in N_k^*$ avec $k > -2p$.

La série donnant $\tilde{f}(\tau^p)$ s'écrit alors sous la forme $(q_1q_2)^{-\frac{p}{2}}\tilde{f}(\tau^p) =$

$$f(\tau^p)m(N_{2|p|}) + \sum_{k=2|p|+1}^{\infty} f(\tau^{p+2k})m(N_{2k}^*) + \sum_{k=2|p|}^{\infty} f(\tau^{p+2k+1})m(N_{2k}^*)$$

$$= f(\tau^{|p|})m(N_{2|p|}) + \sum_{k=1}^{\infty} f(\tau^{|p|+2k})m(N_{2k+2|p|}^*) + \sum_{k=0}^{\infty} f(\tau^{|p|+2k+1})m(N_{2k+2|p|}^*)$$

$$= (q_1q_2)^{|p|} f(\tau^{|p|})m(N_0) + \sum_{k=1}^{\infty} f(\tau^{|p|+2k})m(N_{2k}^*) + \sum_{k=0}^{\infty} f(\tau^{|p|+2k+1})m(N_{2k}^*).$$

On en déduit que $(q_1q_2)^{-\frac{p}{2}}\tilde{f}(\tau^p) = (q_1q_2)^{\frac{p}{2}}\tilde{f}(\tau^{-p})$, d'où $\tilde{f}(\tau^p) = \tilde{f}(\tau^{|p|})$. ∎

Il est naturel de définir une fonction c à la Harish-Chandra, qui permet de reformuler la transformation de Satake comme convolution.

Définition 3.1.2 *On note c_{q_1,q_2} la fonction méromorphe suivante*

$$c_{q_1,q_2}(\lambda) = \frac{1 + \frac{q_2-1}{\sqrt{q_1q_2}}\lambda^{-1} - \frac{1}{q_1}\lambda^{-2}}{1-\lambda^{-2}}.$$

Cette fonction est liée aux opérateurs d'entrelacements, qui seront étudiés dans le chapitre suivant. On notera que les zéros de c_{q_1,q_2} sont $\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}$ et $-\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, et les pôles sont ± 1, sauf dans le cas où $q_1 = q_2$, où il y a simplification, la fonction $c_{q,q}$ n'ayant qu'un zéro égal $\frac{1}{q}$ et qui est simple, et qu'un pôle égal à 1 et qui est simple.

On notera que les zéros de $c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$ correspondent aux valeurs de λ pour lesquelles π^λ n'est pas irréductible.

Néanmoins nous pouvons donner une formule qui établit partiellement ce lien; voir ausi la proposition 4.1.1.

Lemme 3.1.3 *Soit $f_{K,\lambda} \in V^\lambda$ le vecteur normalisé invariant par K dans l'espace de la représentation π^λ.*

On suppose $|\lambda| > 1$, alors on a $\int_N f_{K,\lambda}(nw)\,dn = c_{q_1,q_2}(\lambda)$.

Démonstration: On a $f_{K,\lambda}(kb) = \chi_\lambda^{-1}(b)$, où $\chi_\lambda^{-1}(\tau^p n) = (\sqrt{q_1q_2}\lambda)^p$.

Clairement si $n \in N_0 = N \cap K$ on a $f_{K,\lambda}(nw) = 1$.

Par contre si $v(n) = k > 0$, d'après la proposition 1.5.7 on a $nw = w^{-1}n'wb$, avec $v(n') = -k$, et $\nu(b) = k$. On a $f_{K,\lambda}(nw) = (\sqrt{q_1q_2}\lambda)^k$, car $w^{-1}n'w \in K$. Le calcul de cette intégrale se ramène donc à

$$1 + \sum_{p=1}^{\infty} m(N_p^*)(\sqrt{q_1q_2}\lambda)^{-p}$$

$$= 1 + (1-\frac{1}{q_1})\sum_{k=1}^{\infty}(q_1q_2)^k(\sqrt{q_1q_2}\lambda)^{-2k} + (q_2-1)\sum_{k=0}^{\infty}(q_1q_2)^k(\sqrt{q_1q_2}\lambda)^{-2k-1}$$

$$= 1 + (1-\frac{1}{q_1})\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-2k} + (q_2-1)\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda)^{-2k-1}.$$

Cette série est essentiellement la somme de séries géométriques de raison λ^{-2}, cette intégrale convergera donc si $|\lambda^{-2}| < 1$, c'est à dire $|\lambda| > 1$. Sa valeur est alors égale à

$$1+(1-\frac{1}{q_1})\frac{\lambda^{-2}}{1-\lambda^{-2}}+\frac{(q_2-1)}{\sqrt{q_1q_2}}\frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-2}}=\frac{1+\frac{q_2-1}{\sqrt{q_1q_2}}\lambda^{-1}-\frac{1}{q_1}\lambda^{-2}}{1-\lambda^{-2}}=c_{q_1,q_2}(\lambda).$$

Ce qui démontre le lemme. ■

Il est possible de reformuler la formule donnant la transformée de Satake. A la série donnant $c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n$, on peut associer une série formelle.

Soit σ le décalage défini sur les fonctions sur $\tau^{\mathbb{N}}$ par

$$\sigma\varphi(\tau^p)=\varphi(\tau^{p+1}),$$

et $c_{q_1,q_2}(\sigma)$ l'opérateur défini par

$$c_{q_1,q_2}(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sigma^n.$$

Les calculs précédents démontrent

Proposition 3.1.4 *La restriction à $\tau^{\mathbb{N}}$ de la transformée de Satake $\tilde{f}$ d'une fonction f de $C_c(K\backslash G/K)$ est donnée par*

$$\tilde{f}|_{\tau^{\mathbb{N}}}=c_{q_1,q_2}(\sigma)(\delta^{\frac{1}{2}}f),$$

où δ^{-1} est le module de B.

Cette formule peut aussi être interprétée comme une convolution sur le groupe $\mathbb{Z}$.

Notons C_{q_1,q_2} la fonction sur $\mathbb{Z}$, dont $\lambda\mapsto c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$ est la transformée de Laplace. On notera que la série associée $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Cette fonction admet $-\mathbb{N}$ comme support, on a $C_{q_1,q_2}(n)=a_{-n}$, pour $n\leq 0$. Ayant identifié $\mathbb{Z}$ et $\tau^{\mathbb{Z}}$, on note encore C_{q_1,q_2} la fonction obtenue sur $\tau^{\mathbb{Z}}$, de sorte que la transformation de Satake s'interprète comme une convolution, d'après

Théorème 3.1.5 *La restriction à $\tau^{\mathbb{N}}$ de la transformée de Satake $\tilde{f}$ d'une fonction f de $C_c(K\backslash G/K)$ est donnée par*

$$\tilde{f}|_{\tau^{\mathbb{N}}}=(\delta^{\frac{1}{2}}f)\star C_{q_1,q_2}.$$

où $\star$ désigne la convolution sur le groupe $\tau^{\mathbb{Z}}$, et δ^{-1} le module de B.

On désignera par $[\frac{1}{C_{q_1,q_2}}]$, la fonction sur le groupe $\mathbb{Z}$ dont la transformée de Laplace est égale à $\lambda \mapsto \frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})}$, c'est à dire que $[\frac{1}{C_{q_1,q_2}}]$ admet $-\mathbb{N}$ comme support, et que pour $n \leq 0$ on a $[\frac{1}{C_{q_1,q_2}}](n) = b_{-n}$, les coeficients b_n étant définis par $\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$.

Il est facile de déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$. Il est égal à $\inf(|\lambda_i^{-1}|)$, où λ_i désigne le ou l'un des deux zéros de c_{q_1,q_2}.

Des propriétés de la transformation de Laplace, on déduit

Proposition 3.1.6 *Soit $f \in C_c(K\backslash G/K)$, alors $\tilde{f}$ est à support fini, et on a*

$$f|_{\tau^{\mathbb{N}}} = \delta^{-\frac{1}{2}}.(\tilde{f} \star [\frac{1}{C_{q_1,q_2}}]).$$

Démonstration: La démonstration consiste à vérifier que le produit de convolution $\tilde{f} \star [\frac{1}{C_{q_1,q_2}}]$ est bien défini, ce qui est clair car $\tilde{f}$ est à support fini: on utilise l'associativité de la convolution, on remarque que la transformée de Laplace de $C_{q_1,q_2} \star [\frac{1}{C_{q_1,q_2}}]$ est égale à 1, puis on conclut en utilisant la proposition précédente. ∎

Cas des arbres homogènes

Deux cas sont à considérer.

Le cas d'un arbre homogène non numéroté correspond à $q_1 = q$ et $q_2 = 1$. Dans ce cas, on pose $c_q(\lambda) = c_{q,1}(\lambda)$ et on a

$$c_q(\lambda) = \frac{1 - \frac{1}{q}\lambda^{-2}}{1 - \lambda^{-2}}.$$

Le cas $q_1 = 1$ et $q_2 = q$ correspond aux fonctions sphériques pour l'autre compact maximal, celui qui est le stabilisateur d'un sommet de valence 2, dans l'arbre de type $(q, 1)$. C'est aussi le stabilisateur d'une arête de l'arbre homogène sous-jacent, qui est encore le normalisateur du sous-groupe d'Iwahori fixant cette arête.

Le cas d'un arbre homogène numéroté correspond à $q_1 = q_2 = q$. Dans ce cas, on pose $c_q^+(\lambda) = c_{q,q}(\lambda)$ et on a

$$c_q^+(\lambda) = \frac{1 - \frac{1}{q}\lambda^{-1}}{1 - \lambda^{-1}}.$$

On remarque qu'alors $c_q(\lambda) = c_q^+(\lambda^2)$. Le passage au carré est simplement dû au fait que le générateur τ de l'un est le carré de l'autre.

3.2 Fonctions sphériques élémentaires

Les fonctions sphériques élémentaires sont les coefficients des séries principales. Elles sont définies par

$$\varphi_\lambda(g) = < \pi^\lambda(g) f_{K,\lambda}, f_{K,\lambda^{-1}} > = \int_K f_{K,\lambda}(g^{-1}k)\, dk.$$

Ce sont des fonctions bi-invariantes par K, et sont associées aux caractères de l'algèbre pour la convolution $L^1(K\backslash G/K)$ définis pour $f \in L^1(K\backslash G/K)$ par

$$\varphi_\lambda(f) = < \pi^\lambda(f) f_{K,\lambda}, f_{K,\lambda^{-1}} > = \int_G f(g)\varphi_\lambda(g)\, dg = \int_G f(g)\varphi_\lambda(g^{-1})\, dg,$$

ou encore $\varphi_\lambda(f) = f \star \varphi_\lambda(e)$.

Enfin la définition de $\varphi_\lambda(g)$ montre que pour, au moins $f \in \mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(f) &= \int_G f(g)\varphi_\lambda(g^{-1})\, dg = \int_{K\times G} f(g) f_{K,\lambda}(gk) dg dk \\ &= \int_{K\times G} f(gk) f_{K,\lambda}(gk) dg dk = \int_G f(g) f_{K,\lambda}(g) dg \\ &= \int_{K\times B} f(kb)\chi_\lambda^{-1}(b) dk db = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_N f(\tau^p n)\chi_\lambda^{-1}(\tau^p)\delta(\tau^p) dn, \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad \varphi_\lambda(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda^{-p}\delta^{\frac{1}{2}}(\tau^p)\int_N f(\tau^p n)\, dn = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lambda^{-p}\tilde{f}(\tau^p),$$

ce qui prouve que $\varphi_\lambda(f)$ est la transformée de Laplace en λ de $\tilde{f}$.

On considère la fonction caractéristique de la double classe $K\tau^p K$, notée f_p, on obtient $f_p \star \varphi_\lambda(e) = m(K\tau^p K)\varphi_\lambda(\tau^p)$, et en appliquant le résultat précédent on obtient

Proposition 3.2.1 *La valeur, sur un élément fixé du groupe, de la fonction sphérique φ_λ est un polynôme en λ et λ^{-1}. Elle est donnée pour $p \geq 0$ par la formule*

$$\varphi_\lambda(\tau^p) = \frac{1}{1+\frac{1}{q_1}}(\sqrt{q_1 q_2})^{-p}[c_{q_1,q_2}(\lambda)\lambda^p + c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})\lambda^{-p}].$$

Démonstration: On vérifie que

$$c_{q_1,q_2}(\lambda) + c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}) = \frac{1}{q_1}.$$

Pour $p = 0$, on obtient trivialement $\varphi_\lambda(e) = 1$, la formule est vérifiée dans ce cas.

On supposera donc $p > 0$.

On évalue d'abord $m(K\tau^p K) = [K : (K \cap \tau^p K \tau^{-p})] = [K : K_{0,2p}]$. (On a noté ici, comme plus haut, l'origine 0 et $2p = \tau^p(0)$). Cet indice est donc égal au cardinal de l'orbite sous K du sommet $2p$, qui est la sphère de centre 0 et de rayon $2p$, car G est doublement transitif.

On obtient alors $m(K\tau^p K) = (q_1+1)q_2(q_1q_2)^{p-1}$.

On détermine ensuite $\tilde{f}_p$.

Comme $c_{q_1,q_2}(\lambda) = 1 + \sum_{n>0} a_n\lambda^{-n}$, on a alors $\tilde{f}_p(\tau^k) = 0$ si $k > p$, $\tilde{f}_p(\tau^p) = (q_1q_2)^{\frac{p}{2}}$, et pour $0 \le k < p$ on a $\tilde{f}_p(\tau^k) = a_{p-k}(q_1q_2)^{\frac{p}{2}}$.

On obtient alors

$$(q_1+1)q_2(q_1q_2)^{p-1}\varphi_\lambda(\tau^p) = (q_1q_2)^{\frac{p}{2}}[1 + \sum_{k=1}^{p} a_{p-k}(\lambda^k + \lambda^{-k})]$$

$$= (q_1q_2)^{\frac{p}{2}}[\lambda^p \sum_{k=0}^{p} a_{p-k}\lambda^{-(p-k)} + \lambda^{-p}\sum_{k=1}^{p} a_{p-k}\lambda^{(p-k)}]$$

$$= (q_1q_2)^{\frac{p}{2}}[\lambda^p \sum_{k=0}^{p} a_k\lambda^{-k} + \lambda^{-p}\sum_{k=0}^{p-1} a_k\lambda^{k}].$$

On remarque qu'en écrivant $c_{q_1,q_2}(\lambda) = a + \frac{b}{1+\lambda^{-1}} + \frac{c}{1-\lambda^{-1}}$, on obtient

$$\lambda^p \sum_{k=0}^{p} a_k\lambda^{-k} + \lambda^{-p}\sum_{k=0}^{p-1} a_k\lambda^{k} = \lambda^p c_{q_1,q_2}(\lambda) + \lambda^{-p}c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}),$$

car la somme des restes dans les développements en série vaut

$$-\lambda^{-1}[\frac{(-1)^{p+1}b}{1+\lambda^{-1}} + \frac{c}{1-\lambda^{-1}}] - [\frac{(-1)^p b}{1+\lambda} + \frac{c}{1-\lambda}] = 0.$$

D'où la formule annoncée. ■

Proposition 3.2.2 1) *La valeur de la fonction sphérique élémentaire* $\varphi_\lambda(\tau^p)$ *pour* $p \ge 0$ *est un polynôme de degré* p *en* $\lambda + \lambda^{-1}$.

En particulier, les fonctions φ_λ *et* $\varphi_{\lambda'}$ *sont égales si et seulement si* $\lambda' = \lambda$ *ou* $\lambda' = \lambda^{-1}$.

2) *La fonction* φ_λ *est bornée si et seulement si*

$$(q_1q_2)^{-\frac{1}{2}} \le |\lambda| \le (q_1q_2)^{\frac{1}{2}}.$$

3) *La fonction* φ_λ *est de carré intégrable sur* G, *si et seulement si* $q_1 < q_2$, *et* $\lambda = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$ *ou* $\lambda^{-1} = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$.

Dans ce cas on a

$$\|\varphi_\lambda\|^2 = m(K)\frac{q_2+1}{q_2-q_1} = m(I)\frac{(q_1+1)(q_2+1)}{q_2-q_1}.$$

Démonstration: On a vu au cours du calcul de $\tilde{f}_p$ que $k \mapsto \tilde{f}_p(\tau^k)$ est une fonction symétrique dont le support est l'intervalle d'entiers $[-p,p]$. Comme la fonction φ_λ est sa transformée de Laplace, en vertu du théorème des fonctions symétriques, elle s'écrit comme un polynôme de degré p en $\lambda+\lambda^{-1}$. On en déduit donc que $\varphi_\lambda = \varphi_{\lambda^{-1}}$.

L'égalité $\varphi_\lambda = c_{\lambda'}$ implique que $\varphi_\lambda(\tau) = c_{\lambda'}(\tau)$. Donc ces polynômes de degré un en $\lambda+\lambda^{-1}$ et $\lambda'+\lambda'^{-1}$ sont égaux, d'où $\lambda+\lambda^{-1} = \lambda'+\lambda'^{-1}$, c'est à dire $\lambda' = \lambda$ ou $\lambda' = \lambda^{-1}$.

Les zéros de $c(\lambda)c(\lambda^{-1})$ sont $\sqrt{q_1q_2}^{\pm 1}$ et $-\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}^{\pm 1}$.

La formule donnant φ_λ montre, au moins pour $\lambda \neq \pm 1$, que si $\frac{|\lambda|}{\sqrt{q_1q_2}} \leq 1$ et $\frac{|\lambda^{-1}|}{\sqrt{q_1q_2}} \leq 1$, la fonction sphérique φ_λ est bornée. C'est aussi le cas si $\lambda = \pm 1$, d'après le principe du maximum sur $\{\lambda \mid \sqrt{q_1q_2}^{-1} \leq |\lambda| \leq \sqrt{q_1q_2}\}$.

Les zéros de $c(\lambda)c(\lambda^{-1})$ sont $\sqrt{q_1q_2}^{\pm 1}$ et $-\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}^{\pm 1}$. Ils sont donc dans la couronne $\{\lambda \mid \sqrt{q_1q_2}^{-1} \leq |\lambda| \leq \sqrt{q_1q_2}\}$. On en déduit que, si $|\lambda| > \sqrt{q_1q_2}$ ou si $|\lambda|^{-1} > \sqrt{q_1q_2}$, la fonction $\varphi_\lambda(\tau^p)$ est asymptote à un terme proportionel à $(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1q_2}})^p$ ou à $(\frac{\lambda^{-1}}{\sqrt{q_1q_2}})^p$, terme dont le module tend vers l'infini avec p, et avec un coefficient de proportionalité non nul, car égal à $\frac{1}{1+\frac{1}{q_1}}c(\lambda)$ ou à $\frac{1}{1+\frac{1}{q_1}}c(\lambda^{-1})$.

Evaluons la norme $\|\varphi_\lambda\|^2$ de φ_λ : on a

$$\begin{aligned}\|\varphi_\lambda\|^2 &= m(K) + \sum_{n=1}^{\infty} m(K\tau^nK)|\varphi_\lambda|^2(\tau^p) \\ &= m(K)[1 + \frac{1}{1+\frac{1}{q_1}}\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^n c(\lambda) + \lambda^{-n}c(\lambda^{-1})|^2].\end{aligned}$$

Cette série ne peut converger que si $c(\lambda) = 0$ ou $c(\lambda)^{-1} = 0$.

Etudions ces cas; on peut toujours supposer, quitte à remplacer λ par λ^{-1}, que $c(\lambda) = 0$.

Dans ce cas, on a $c(\lambda^{-1}) + c(\lambda) = 1 + \frac{1}{q_1}$, d'où $c(\lambda^{-1}) = 1 + \frac{1}{q_1}$, et on obtient $\|\varphi_\lambda\|^2 = m(K)[1 + (1+\frac{1}{q_1})\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{-2n}|]$.

Traitons d'abord le cas $q_1 = q_2 = q$, dans ce cas c a un seul zéro égal à $\frac{1}{q}$, et la série $\sum \lambda^{-2n}$ diverge pour $\lambda = \frac{1}{q}$.

Si $q_1 \neq q_2$, alors c a deux zéros égaux à $\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}$ et $-\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$.

Pour le premier zéro $\lambda = \frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}$ la série $\sum \lambda^{-2n}$ diverge manifestement.

Pour l'autre zéro $\lambda = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$ la série $\sum \lambda^{-2n}$ converge si et seulement si $q_1 < q_2$.

On suppose donc que $q_1 < q_2$, on pose $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, on a

$$\|c_{\lambda_0}\|^2 = m(K)[1 + (1 + \frac{1}{q_1}) \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{q_1}{q_2})^n] = m(K) \frac{q_2 + 1}{q_2 - q_1}.$$

d'où la proposition, en remarquant que $[K : I] = q_1 + 1$, qui est le cardinal de la sphère unité centrée en x_0. ∎

Corollaire 3.2.3 *Pour* $\lambda \neq \sqrt{q_1 q_2}^{\pm 1}$ *et* $\lambda \neq -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}^{\pm 1}$, π_λ *est équivalent à* $\pi_{\lambda'}$ *si et seulement si* $\lambda' = \lambda$ *ou* $\lambda' = \lambda^{-1}$.

Si $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}^{\pm 1}$ *ou* $\lambda = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}^{\pm 1}$, π_λ *est n'équivalent à aucune* $\pi_{\lambda'}$ *avec* $\lambda' \neq \lambda$.

Démonstration: Dans le premier cas, où la représentation π_λ est irréductible, l'égalité des représentations implique l'égalité des fonctions sphériques, qui d'après 2.4.9 implique l'équivalence des représentations.

Pour les autres cas, si $\lambda = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}^{\pm 1}$, chaque facteur K_i sphérique apparait dans un cas comme sous-représentation, et dans l'autre cas comme quotient, et les équivalences sont décrites à la proposition 2.4.10.

Enfin, si $\lambda = \sqrt{q_1 q_2}^{\pm 1}$, on obtient la représentation unité et la représentation *st* ou *st'*, l'une comme sous-représentation, l'autre comme quotient, donc les représentations π_λ et π_λ^{-1} ne sont pas équivalentes, mais les facteurs le sont. ∎

Remarque Les résultats démontrés ci-dessus pour les fonctions sphériques permettent de conclure aux équivalences des représentations des séries principales étudiées au chapitre précédent, car les hypothèses du lemme 2.4.8 sont vérifiées.

Quand $q_1 \neq q_2$, les compacts maximaux n'ont pas le même volume, les formules donnant les fonctions sphériques élémentaires dépendent du numéro du sommet. On fixera une arête, dont on notera I le fixateur, d'où deux sommets voisins, une géodésique qui la contient numérotée par $\mathbb{Z}$, et un élément τ qui y agit par la translation de pas 2.

On obtient deux familles de fonctions sphériques que l'on notera $\varphi_\lambda^{(i)}$ où i désigne le numéro du sommet associé. Si $q_1 \neq q_2$, pour $\lambda = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$ l'une des fonctions $\varphi_\lambda^{(i)}$ est de carré intégrable, pour le numéro i avec $q_i = \inf(q_1, q_2)$.

Le sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ engendré dans la représentation régulière gauche par cette $\varphi_\lambda^{(i)}$ est isomorphe à t^1. Il est même invariant à droite par K_i qui est le sous-groupe compact maximal contenant le sous-groupe d'Iwahori I qui fixe un sommet de type i.

On désignera par T^0 la représentation unitaire qui est l'adhérence de cette représentation.

Son degré formel s'exprime alors

$$d_{T^0} = \frac{1}{m(I)} \frac{|q_2 - q_1|}{(q_1+1)(q_2+1)}.$$

On notera qu'il vérifie

$$d_{T^0} = d_{ST} \frac{|q_2 - q_1|}{q_1 q_2 - 1}.$$

Il n'est pas, en général, un multiple entier de celui de la représentation de Steinberg. Néanmoins, ces degrés formels sont égaux si l'un des q_i vaut 1, c'est à dire dans le cas d'un arbre homogène. Ce n'est pas étonnant, car ces représentations sont obtenues l'une à partir de l'autre par torsion par un caractère d'ordre 2.

Remarque On peut, comme pour la représentation de Steinberg, donner une définition plus géométrique de T^0. L'espace G/K s'identifie à l'ensemble des sommets S_i de l'arbre, dont la valence est la plus petite, ainsi $L^2(G/K)$, s'identifie à $L^2(S_i)$, et T^0 en est un sous$-G-$module invariant fermé, celui qui est engendré par l'image de φ_{λ_0}.

Ainsi cette définition ne fait pas intervenir le choix particulier de G.

3.3 Formules d'inversion de Fourier, Plancherel.

Soit $f \in \mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, comme $\tilde{f}$ est à support fini, la théorie élémentaire des fonctions analytique nous donne

$$\tilde{f}(\tau^p) = \int_{|\lambda|=\rho} \hat{f}(\lambda)\lambda^p \, d^*\lambda,$$

pour $d^*\lambda = \frac{1}{2i\pi}\frac{d\lambda}{\lambda}$ la mesure réalisant la moyenne sur le cercle de rayon ρ orienté dans le sens direct.

Comme pour $p \geq 0$ on a

$$f(\tau^p) = \delta^{-\frac{1}{2}}(\tau^p)\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{f}(\tau^{p+n}) = \delta^{-\frac{1}{2}}(\tau^p)\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{|\lambda|=\rho} \hat{f}(\lambda)\lambda^{p+n}\, d^*\lambda.$$

On considère alors le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\lambda^n$ dont on a vu qu'il est égal à $R = \inf(|\lambda_i^{-1}|)$, où λ_i^{-1} sont les zéros de $c(\lambda^{-1})$, c'est à dire $\lambda_i = \sqrt{q_1q_2}$ ou $\lambda_i = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$, sauf si $q_1 = q_2$, et dans ce cas, seul le zéro $\sqrt{q_1q_2}$ existe.

On voit que si $q_1 \geq q_2$ on a $R \geq 1$. Sinon $R = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} < 1$.

Dans tous les cas, pour $\rho < R$, on peut permuter intégration et sommation, d'où la formule

$$f(\tau^p) = \delta^{-\frac{1}{2}}(\tau^p)\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{|\lambda|=\rho} \hat{f}(\lambda)\lambda^{p+n}\, d^*\lambda$$

$$= \delta^{-\frac{1}{2}}(\tau^p)\int_{|\lambda|=\rho}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\hat{f}(\lambda)\lambda^{p+n}\, d^*\lambda = \delta^{-\frac{1}{2}}(\tau^p)\int_{|\lambda|=\rho} \hat{f}(\lambda)\lambda^{p}\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})}\, d^*\lambda.$$

La fonction à intégrer n'a que deux pôles, $\sqrt{q_1q_2} > 1$ et $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$.

Calculons son résidu en λ_0 (pour $q_1 \neq q_2$). Il vaut

$$\frac{1}{2i\pi}\hat{f}(-\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})(-\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^p\frac{q_2-q_1}{q_2+1},$$

comme on le vérifie aisément.

En déplaçant le contour d'intégration du cercle de rayon ρ, où $\rho < R$, au cercle unité, et en appliquant le théorème des résidus, on prouve.

Proposition 3.3.1 *Pour une fonction $f \in C_c(K\backslash G/K)$ et $p \geq 0$, on a*

$$f(\tau^p) = (q_1q_2)^{-\frac{p}{2}}\int_{|\lambda|=1} \hat{f}(\lambda)\lambda^p\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})}\, d^*\lambda \quad \textit{si } q_1 \geq q_2 \quad \textit{,et}$$

$$f(\tau^p) = (q_1q_2)^{-\frac{p}{2}}\int_{|\lambda|=1} \hat{f}(\lambda)\lambda^p\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})}\, d^*\lambda + \frac{q_2-q_1}{q_2+1}\hat{f}(\lambda_0)\lambda_0^p \ \textit{sinon},$$

où $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$, et la mesure $d^*\lambda = \frac{1}{2i\pi}\frac{d\lambda}{\lambda}$.

Dans le cas $p = 0$, on peut modifier l'expression précédente.

En effet l'intégrale sur le cercle unité est invariante par le changement de variable $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$, comme la transformée de Fourier $\hat{f}$ l'est aussi, car les fonctions sphériques élémentaires sont invariantes par cette transformation, on peut se limiter à intégrer $\hat{f}(\lambda)\lambda^p(\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})} + \frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)})$ sur le demi-cercle unité γ_1^+ situé dans le demi plan supérieur, et orienté dans le sens direct.

On remarque aussi, que $\overline{c_{q_1,q_2}(\lambda)} = c_{q_1,q_2}(\overline{\lambda}) = c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$, pour $|\lambda| = 1$.

Comme $c_{q_1,q_2}(\lambda) + c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}) = 1 + \frac{1}{q_1}$, on obtient

Proposition 3.3.2 *Pour une fonction $f \in \mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, on a*

$$f(e) = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{\gamma_1^+} \hat{f}(\lambda) |\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2 \, d^*\lambda \quad \textit{pour } q_1 \geq q_2, \textit{ et}$$

$$f(e) = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{\gamma_1^+} \hat{f}(\lambda) |\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2 \, d^*\lambda + \frac{q_2 - q_1}{q_2 + 1} \hat{f}(\lambda_0), \quad \textit{pour } q_1 < q_2,$$

où $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$.

On en déduit la formule de Plancherel

Proposition 3.3.3 *Soit $f \in L^2(K\backslash G/K)$, on a*

$$\|f\|_2^2 = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{\gamma_1^+} |\hat{f}|^2(\lambda) |\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2 \, d^*\lambda \quad \textit{pour } q_1 \geq q_2, \textit{ et}$$

$$\|f\|_2^2 = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{\gamma_1^+} |\hat{f}|^2(\lambda) |\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2 \, d^*\lambda + \frac{q_2 - q_1}{q_2 + 1} |\hat{f}|^2(\lambda_0) \quad \textit{pour } q_1 < q_2,$$

où $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$.

Corollaire 3.3.4 *Soit une fonction $f \in L^2(K\backslash G/K)$, alors f s'obtient à partir de $\hat{f}$ par la formule suivante. Pour $p \geq 0$, on a $f(\tau^p)$*

$$= (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{\gamma_1^+} \hat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(\tau^p) |\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2 \, d^*\lambda \quad \textit{si } q_1 \geq q_2, \textit{ et}$$

$$= (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{\gamma_1^+} \hat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(\tau^p) |\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2 \, d^*\lambda + \frac{q_2 - q_1}{q_2 + 1} \hat{f}(\lambda_0)\varphi_{\lambda_0}(\tau^p) \quad \textit{sinon.}$$

Démonstration: Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_c(K\backslash G/K)$, on va établir d'abord la formule de Plancherel pour f, en appliquant la formule d'inversion de Fourier à $f * \check{f}$, où $\check{f}(g) = \overline{f(g^{-1})} = \overline{f(g)}$, car pour une fonction $K-$biinvariante on a $f(g^{-1}) = f(g)$.

On remarque ensuite que $f * \check{f}(e) = \|f\|_2^2$, et que

$$\widehat{f * \check{f}}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{\bar{f}}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{f}}(\bar{\lambda}).$$

Cette expression coïncide avec $|\widehat{f}(\lambda)|^2$ si $|\lambda| = 1$ ou si $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ceci est trivial si $\lambda \in \mathbb{R}$, et si $|\lambda| = 1$, c'est une conséquence de $\widehat{f}(\lambda^{-1}) = \widehat{f}(\lambda)$, et de $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$.

Cette formule se prolonge par continuité à $L^2(K\backslash G/K)$, ce qui donne un sens à $\widehat{f}(\lambda)$, qui est défini comme un élément de L^2 du cercle unité pour la mesure ci-dessus.

Enfin, on démontre le corollaire en polarisant la forme associée au carré de la norme L^2, et en considérant la produit scalaire de f avec la fonction $\frac{1}{m(K\tau^pK)}f_p$, qui vaut 1 sur la double classe $K\tau^pK$, et 0 ailleurs, et dont la transformée de Fourier $\widehat{f_p}(\lambda) = \varphi_\lambda(\tau^p)$. On obtient immédiatement la formule du corollaire. ∎

Il est facile d'expliciter la mesure de Plancherel dans le cas d'un arbre homogène. On choisit alors $q_1 = q$, $q_2 = 1$, on exprime les représentations paramétrées par s, où $\lambda = q^{s-\frac{1}{2}}$.

On a $\frac{d^*\lambda}{\lambda} = \log(q)dt$, pour $s = \frac{1}{2} + it$, le support de la mesure m est l'intervalle $[0, \frac{\pi}{\log q}]$, et elle y est égale à

$$dm(t) = (1+\frac{1}{q})\frac{1}{2\pi}|\frac{1-q^{2it}}{1-q^{2it-1}}|^2 \log q\, dt = \frac{q+1}{2\pi}\frac{4q\sin^2 t\log q}{(q+1)^2 - 4\cos^2 t\log q}\log q\, dt.$$

On va en déduire la décomposition spectrale de $L^2(K\backslash G/K)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.5 *On suppose que $q_1 < q_2$, on pose $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$.*

1) *On a pour $|\lambda| = 1$, $\widehat{\varphi}_{\lambda_0}(\lambda) =< \varphi_\lambda, \varphi_{\lambda_0} >= 0$.*

2) *Pour $|\lambda| = 1$, le produit de convolution $\varphi_\lambda * \varphi_{\lambda_0}$ est défini et est donc nul.*

Démonstration: On a pour $|\lambda| = 1$, et $\lambda^2 \neq 1$

$$< \varphi_\lambda, \varphi_{\lambda_0} >= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} m(K\tau^nK)\varphi_\lambda(\tau^n)\varphi_{\lambda_0}(\tau^n) =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{q_1})(q_1q_2)^n(1+\frac{1}{q_1})^{-2}(q_1q_2)^{-n}(1+\frac{1}{q_1})(-\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^n 2\Re(\lambda^n c_{q_1,q_2}(\lambda)).$$

D'où $< \varphi_\lambda, \varphi_{\lambda_0} >=$

$$1 + 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^n c_{q_1,q_2}(\lambda) = 1 - 2\Re \frac{1}{1+\lambda^{-1}\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}} c_{q_1,q_2}(\lambda) = 0,$$

car pour $|\lambda| = 1$, on a $c_{q_1,q_2}(\lambda) = (1+\lambda^{-1}\sqrt{\frac{q_2}{q_1}})(\lambda - \frac{1}{\sqrt{q_1q_2}})\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}$.

Le cas $\lambda = \pm 1$ se démontre par continuité.

En effet, on vérifie que $\lambda^n c_{q_1,q_2}(\lambda) + \lambda^{-n} c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$ est un $O(n)$, uniformément sur le cercle unité, donc que la série donnant le produit $< \varphi_\lambda, \varphi_{\lambda_0} >$ qui est égale à $1+\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0^n \lambda^n c_{q_1,q_2}(\lambda) + \lambda^{-n} c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$, converge uniformément sur le cercle unité, d'où le résultat annoncé dans tous les cas.

On a $|\lambda^n c_{q_1,q_2}(\lambda) - \lambda^{-n} c_{q_1,q_2}(\lambda)| \leq n \sup_{|\lambda|=1} |(1-\lambda^{-2})c_{q_1,q_2}(\lambda)|$, ainsi que $\lambda^{-n}(c_{q_1,q_2}(\lambda) + c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})) = \lambda^{-n}(1+\frac{1}{q_1})$.

Ceci montre que $\sup_{|\lambda|=1,\, 0\leq p\leq n} |\lambda^p c_{q_1,q_2}(\lambda) + \lambda^{-p} c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})| = O(n)$.

On peut alors prouver la convergence de l'intégrale donnant la convolution $\varphi_\lambda * \varphi_{\lambda_0}(g)$ pour $g \in G$, en copiant la démonstration précédente.

Cette intégrale s'écrit, à part un terme, encore comme une somme, sur les entiers $p > 0$, d'intégrales

$$\frac{1}{m(K\tau^pK)} \int_{K\tau^pK} (-\sqrt{\frac{q_1}{q_2}})^p (\lambda^{n_x} c_{q_1,q_2}(\lambda) + \lambda^{-n_x} c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}))\, dx,$$

où l'entier $n_x \geq 0$ est défini par $gx \in K\tau^{n_x}K$.

Pour l'évaluer, on remarque que $d(0, gx(0)) \leq d(0, g(0)) + d(g(0), gx(0))$, et en utilisant le fait que g est une isométrie, que on a, pour $g \in K\tau^nK$ et $x \in K\tau^pK$, $n_x \leq n + p$. On rappelle que 0 est l'origine fixée par K, et $2n_x = d(0, gx(0))$.

On remplace alors le raisonnement de la convergence uniforme du produit scalaire des fonctions sphériques données ci-dessus la majoration $O(n)$ par un $O(n+p)$ avec p fixé, ce qui permet de conclure à la convergence du produit de convolution, d'où à sa nullité, car on a $\varphi_{\lambda_0} * \varphi_\lambda = \widehat{\varphi_{\lambda_0}}(\lambda)\varphi_\lambda$. ∎

Remarque On aimerait se passer de cette démonstration directe et utiliser la formule $f * \varphi_\lambda = \hat{f}(\lambda)\varphi_\lambda$ et la commutativité de la convolution des fonctions K-biinvariantes, pour obtenir ce résultat, en utilisant la relation $\varphi_\lambda * \varphi_{\lambda_0} = \widehat{\varphi_\lambda}(\lambda_0)\varphi_{\lambda_0} = \widehat{\varphi_{\lambda_0}}(\lambda)\varphi_\lambda$. Mais si $\widehat{\varphi_{\lambda_0}}(\lambda)$ est bien défini, car φ_{λ_0} est de carré sommable, ce n'est pas le cas de $\widehat{\varphi_\lambda}(\lambda_0)$.

Une autre façon d'obtenir un résultat voisin, serait d'appliquer la formule de Plancherel à φ_{λ_0}, de vérifier que $\|\varphi_{\lambda_0}\|^2 = \frac{q_2-q_1}{q_2+1}|\widehat{\varphi_{\lambda_0}}|^2(\lambda_0)$, d'où on déduirait que la restriction à γ_1^+ de $|\widehat{\varphi_{\lambda_0}}|^2(\lambda)$ est nulle presque partout pour la mesure dm.

Nous allons donner la décomposition spectrale de $L^2(K\backslash G/K)$.

Théorème 3.3.6 *Soient γ_1^+ le demi-cercle unité situé dans le demi-plan supérieur, et dm la mesure sur γ_1^+ égale à $dm(\lambda) = (1+\frac{1}{q_1})|\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2\frac{1}{2i\pi\lambda}d\lambda$.*

1) Si $q_1 \geq q_2$, l'espace $L^2(K\backslash G/K)$ est isomorphe à $L^2(\gamma_1^+, dm)$, par l'application qui à f associe $\hat{f}|_{\gamma_1^+}$.

2) Si $q_1 < q_2$, l'espace $L^2(K\backslash G/K)$ est isomorphe à $L^2(\gamma_1^+, dm) \oplus \mathbb{C}\varphi_{\lambda_0}$ par l'application qui à f associe $(\hat{f}|_{\gamma_1^+}, \hat{f}(\lambda_0)\varphi_{\lambda_0})$, avec $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$.

Démonstration: Comme la transformée de Fourier $\hat{f}$ reste invariante par $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$, compte tenu des formules de Plancherel, la restriction de $\hat{f}$ à γ_1^+ dans le premier cas et à $\gamma_1^+ \cup \{\lambda_0\}$, dans le second cas détermine f.

Les applications ainsi définies sont des isométries (injectives). Il reste à prouver la surjectivité.

L'image par $f \mapsto \hat{f}$ de $C_c(K\backslash G/K)$ est constituée des polynômes symétriques en λ et λ^{-1}, dont l'adhérence pour la convergence uniforme sur γ_1^+ est, d'après le théorème de Fejer appliqué aux fonctions continues paires sur le cercle unité, constituée de l'ensemble des fonctions continues sur γ_1^+, qui coïncident en 1 et -1. On en déduit alors que l'image par $f \mapsto \hat{f}$ de $C_c(K\backslash G/K)$ est dense dans $L^2(\gamma_1^+, dm)$, ce qui prouve la surjectivité dans le premier cas.

Si par contre $q_1 < q_2$, on montre l'injectivité à l'aide de la formule de Plancherel.

Pour vérifier que c'est une isométrie, on notera que $\|\varphi_{\lambda_0}\|^2 = \frac{q_2-q_1}{q_2+1}$, de sorte que la norme sur la droite $\mathbb{C}\varphi_{\lambda_0}$ est la restriction de la norme L^2 du groupe.

Pour montrer la surjectivité, on considère l'image de $C_c(K\backslash G/K) \oplus \mathbb{C}\varphi_{\lambda_0}$ dans $L^2(\gamma_1^+, dm) \oplus \mathbb{C}\varphi_{\lambda_0}$. Compte tenu du lemme précédent, on voit que cette image est la somme directe de l'espace des polynômes symétriques en λ et λ^{-1} et de $\mathbb{C}\varphi_{\lambda_0}$.

On conclut comme dans le premier cas. ∎

3.4 Décomposition spectrale de $L^2(G/K)$

On part d'une fonction $f \in C_c^\infty(G/K)$ à laquelle on associe, pour tout $g \in G$, une fonction f_g définie par $f_g(x) = \int_K f(gkx)\,dk$.

On vérifie que $f_g \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ et que $f_g(1) = f(g)$. On peut donc lui appliquer la formule d'inversion de Fourier, car l'algèbre $L^2(K\backslash G/K)$ a une unité e, qui est la fonction caractéristique de K : on obtient ainsi $f_g(1) =< f_g, e >$, et $\hat{e}(\lambda) = 1$.

On remarque ensuite que $f_g(1) =< f, e_g >$, où e_g désigne la fonction caractéristique de gK. On considère un paramètre λ, soit de module 1, soit égal à λ_0 si $q_1 < q_2$: on note $\mathbb{I}$ le vecteur normalisé invariant par K, dans V^λ si $|\lambda| = 1$, ou dans t^1 si $\lambda = \lambda_0$. On a

$$\hat{f}_g(\lambda) =< \pi^\lambda(f_g)\mathbb{I}, \mathbb{I} >=< \int_G \int_K f(gkx)\pi^\lambda(x)\mathbb{I}\, dxdk, \mathbb{I} >=$$

$$\int_G \int_K f(y) < \pi^\lambda(k^{-1}g^{-1}y)\mathbb{I}, \mathbb{I} > dydk = \int_G \int_K f(y) < \pi^\lambda(y)\mathbb{I}, \pi^\lambda(gk)\mathbb{I} > dydk$$

$$=< \int_G f(y)\pi^\lambda(y)\mathbb{I}dy, \int_K \pi^\lambda(gk)\mathbb{I}dk >=< \pi^\lambda(f)\mathbb{I}, \pi^\lambda(e_g)\mathbb{I} > .$$

Comme les fonctions caractéristiques des ensembles gK forment une base de $C_c^\infty(G/K)$, on déduit par linéarité la formule suivante

$$< f, h >= \int < \pi^\lambda(f)\mathbb{I}, \pi^\lambda(h)\mathbb{I} > \, d\nu(\lambda),$$

où pour $q_1 \geq q_2$ le support de la mesure $d\nu$ est γ_1^+ et $d\nu$ est donnée par $(1+\frac{1}{q_1})|\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2\, d^*\lambda$, et pour $q_1 < q_2$ la mesure $d\nu$ a comme support $\gamma_1^+ \cup \{\lambda_0\}$ avec $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$, sur γ_1^+ elle est donnée par $(1+\frac{1}{q_1})|\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2\, d^*\lambda$, et sur $\{\lambda_0\}$ c'est la mesure de Dirac: le facteur apparaissant dans la mesure de Plancherel 3.3.3 provient de ce que la fonction sphérique φ_{λ_0} a une de norme L^2 différente de 1, de sorte que $\mathbb{I} = \frac{1}{\|\varphi_{\lambda_0}\|}\varphi_{\lambda_0}$.

On peut énoncer le théorème

Théorème 3.4.1 *La représentation régulière de G dans $L^2(G/K)$ est égale à la somme des représentations suivantes.*

Si $q_2 \leq q_1$: l'intégrale des Π^λ pour la mesure $d\nu$, dont le support est γ_1^+, et dont la densité est égale à $(1+\frac{1}{q_1})|\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2\, d^*\lambda$.

Si $q_1 < q_2$: il y a un sous-espace invariant fermé irréductible égal à T^0 et son orthogonal est l'intégrale des Π^λ pour la mesure $d\nu$, dont le support est γ_1^+, et dont la densité est égale à $(1+\frac{1}{q_1})|\frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}|^2\, d^*\lambda$.

Enfin, dans tous les cas, la projection d'une fonction $f \in C_c^\infty(G/K)$ sur la partie continue de cette décomposition spectrale est égale à $(\pi^\lambda(f)\mathbb{I})_{\lambda\in\gamma_1^+}$.

Démonstration: On remarque, puisque pour $|\lambda| = 1$ les représentations Π^λ sont à valeurs dans le même espace de Hilbert $L^2(K/N_0)$, que l'intégrale hilbertienne des Π^λ pour la mesure $d\nu$ sur $\lambda \in \gamma_1^+$ est simplement $L^2(K/N_0 \times \gamma_1^+)$ pour la mesure produit $dk \otimes d\nu$. La formule donnant le produit scalaire de deux éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(G/K)$ montre d'abord que si $q_1 < q_2$ la projection d'un élément $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$ sur T^0 est $\pi^{\lambda_0}(f)(\mathbb{I})$, qui est égale à $\pi^{\lambda_0}(f)(\frac{1}{\|\varphi_{\lambda_0}\|}\varphi_{\lambda_0})$, ou encore à $\frac{1}{\|\varphi_{\lambda_0}\|} f \star \varphi_{\lambda_0}$.

Elle montre ensuite, que le plongement de $\mathcal{C}_c^\infty(G/K)$ dans la décomposition spectrale est isométrique, donc qu'elle se prolonge à $L^2(G/K)$.

Pour démontrer que c'est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, il suffira de montrer que l'image de $\mathcal{C}_c^\infty(G/K)$ est dense. On traitera ensemble les deux cas $q_1 < q_2$ et $q_1 \geq q_2$, en remarquant que dans les deux cas, il suffit de montrer que l'image de $\mathcal{C}_c^\infty(G/K)$ est dense dans la partie continue de la décomposition: en effet T^0 est un sous-espace fermé dont la projection sur l'orthogonal est donnée, pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$ par $g = f - \frac{1}{\|\varphi_{\lambda_0}\|} f \star \varphi_{\lambda_0}$, et pour un tel f, on a si $|\lambda| = 1$ $\Pi^\lambda(f)(\mathbb{I}) = \Pi^\lambda(g)(\mathbb{I})$, car la fonction sphérique φ_{λ_0} vérifie la relation $\Pi^\lambda(\varphi_{\lambda_0})\mathbb{I} = \varphi_\lambda \star \varphi_{\lambda_0} = 0$, d'après une formule établie ci-dessus.

Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$, on notera $\tilde{f}$ la fonction sur $K/N_0 \times \gamma_1^+$ égale à $\Pi^\lambda(f)(\mathbb{I})$.

Il s'agira donc de montrer, que toute fonction $F \in L^2(K/N_0 \times \gamma_1^+)$, orthogonale à tous les $\tilde{f}$ pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$, est nulle presque partout pour la mesure produit.

On remarque que si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K\backslash G/K)$ on a $\widetilde{\varphi \star f}(k,\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda)\tilde{f}(k,\lambda)$; on a donc

$$\int \tilde{\varphi}(\lambda) \int \tilde{f}(k,\lambda) F(k,\lambda) dm(\lambda) dk = 0.$$

Comme l'image de l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(K\backslash G/K)$ est dense dans $L^2(\gamma_1^+)$, on en déduit, qu'il existe un ensemble négligeable $N_f \subset \gamma_1^+$ pour chaque $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$, tel que pour $\lambda \in \gamma_1^+ - N_f$, on a $\int \tilde{f}(k,\lambda) F(k,\lambda)\, dk = 0$.

On considère l'ensemble dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$ formé des fonctions à valeurs rationnelles, et l'ensemble $N = \cup_{f \in \mathcal{D}} N_f$, qui est négligeable, comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables. Comme pour tout λ, avec $|\lambda| = 1$, $\{\tilde{f}(\lambda, .) \mid f \in \mathcal{D}\}$ est dense dans $L^2(K/N_0)$, on en déduit $F(\lambda, .) = 0$ p.p., pour $\lambda \in \gamma_1^+ - N$ d'où $F = 0$ p.p. ∎

Avant de spécialiser ces résultats aux cas des arbres homogènes, il est nécessaire d'étudier les conséquences des choix faits.

On remarque que le support de la partie continue de la mesure de Plancherel pour $L^2(K_x)$ ne dépend pas du numéro du sommet considéré, il est égal à γ_1^+; on définit les mesures $d\mu^i$, pour $i = 1, 2$, par

$$d\mu^i(\lambda) = (1 + \frac{1}{q_i})|\frac{1}{c_{q_i,q_j}(\lambda)}|^2 \, d^*\lambda, \text{ avec } j = 3 - i.$$

On vérifie sans peine la relation

$$q_1 c_{q_1,q_2}(\lambda) c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}) = q_2 c_{q_2,q_1}(\lambda) c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1}).$$

Il est clair que ces expressions sont proportionnelles, car les deux fonctions rationnelles de λ ont mêmes zéros, et mêmes pôles avec même multiplicité. On peut aussi interpréter cette relation en termes d'opérateurs d'entrelacement, ce qui sera fait au chapitre suivant.

Soient alors x_1 et x_2 deux sommets voisins, x_1 de numéro 1, et x_2 de numéro 2 : on considère les groupes compacts $K^1 = K_{x_1}$, $K^2 = K_{x_2}$ et le groupe d'Iwahori $I = K^1 \cap K^2$.

Comme m est une mesure de Haar, on a $m(K^i) = (q_i + 1)m(I)$, d'où l'égalité $\frac{1}{m(K^1)} d\mu^1 = \frac{1}{m(K^2)} d\mu^2$. On notera $\frac{1}{m(I)} d\mu^0$ cette valeur commune, ce qui définit une mesure $d\mu^0$, que l'on va expliciter: on note encore $d\mu^0(u)$ la mesure obtenue par le changement de variable $\lambda + \lambda^{-1} = 2\cos u$. Son support est $[0, \pi]$, elle y est donnée par la formule $d\mu^0(u)$

$$= \frac{2q_1q_2 \sin^2 u}{(q_1 + q_2)(1 + q_1q_2) + 2\sqrt{q_1q_2}(q_1 - 1)(q_2 - 1)\cos u - 4q_1q_2\cos^2 u} \frac{du}{\pi}.$$

On choisit la forme linéaire $\oint_{G/B}$ sur les fonctions quasi-invariantes par B, qui vérifient $\varphi(gb) = \varphi(g)\delta^{-1}(b)$, pour laquelle si φ_I est la fonction de support IB et qui vaut 1 sur I, on a $\oint_{G/B} \varphi_I = m(I)$. Cette forme permet de définir le produit scalaire sur $\mathcal{H}^\lambda$ pour $|\lambda| = 1$.

La partie continue de la formule de Plancherel pour $L^2(G/K^i)$ est donnée par

$$\|g\|^2 = \int_{\gamma_1^+} \oint_{G/B} |g_\lambda|^2 d\mu^0(\lambda),$$

pour une fonction g, orthogonale à la représentation T^0 dans le cas où T^0 est contenue dans la $L^2(G/K^i)$: on note $(g_\lambda)_{\lambda \in \gamma_1^+}$ la partie continue de cette décomposition spectrale. On a vu que pour $g \in C_c^\infty(G/K)$ on a $g_\lambda = \pi^\lambda(g)\mathbb{I}$, avec $\mathbb{I} = \frac{1}{m(K)}\varphi_K$ et φ_K est la fonction de V^λ dont la restriction à K est égale à 1.

Ceci montre que la partie continue de la mesure de Plancherel pour $L^2(G/K)$ ne dépend pas du sommet choisi x, dont le fixateur est le groupe K.

3.5 $L^2(G/K)$ et $L^2(G/I)$ (arbres homogènes)

Les résultats précédents s'appliquent au cas des arbres homogènes de type q, auxquels sont associés des arbres semi-homogènes de type (q,q), ou de type $(q,1)$.

On commencera par étudier le cas d'un compact K fixateur d'un sommet de l'arbre homogène, c'est à dire un sommet de l'arbre semi-homogène de valence $q+1$.

La décomposition spectrale de $L^2(G/K)$ ne comporte qu'une partie continue, et pour l'exprimer de façon naturelle on normalisera le produit scalaire sur V^λ et la mesure sur G, de sorte $m(K)=1$, et que l'on ait $\|g_\lambda\|=1$ pour la fonction $g_\lambda \in V^\lambda$ définie par $g_\lambda|K=1$.

On obtient, dans le cas d'un groupe G associé à un arbre de type $(q,1)$, comme mesure de Plancherel

$$d\mu(u) = \frac{q+1}{2\pi}\frac{4q\sin^2 u}{(q+1)^2-4q\cos^2 u}\,du.$$

Pour le cas d'un groupe G associé à un arbre de type (q,q), la formule précédente s'applique encore, en changeant u en $\frac{u}{2}$, en gardant $[0,\pi]$ comme support de la mesure.

On obtient ainsi

$$d\mu'(v) = \frac{q+1}{2\pi}\frac{4q\sin^2 \frac{v}{2}}{(q+1)^2-4q\cos^2 \frac{v}{2}}\,dv.$$

On va maintenant donner, pour un groupe G qui opère sur un arbre homogène de type q, dont I est le fixateur d'une arête, la décomposition spectrale de $L^2(G/I)$, dans les deux cas où G opère de façon faiblement doublement transitive, en conservant ou non, la numérotation des sommets.

De façon géométrique, on peut remarquer que si G respecte la numérotation, G sera associé à un arbre de type (q,q), et G/I s'identifiera à l'ensemble des arêtes de l'arbre homogène, alors que si G ne respecte pas la numérotation, G sera associé à arbre de type $(q,1)$, et $G/N(I)$ s'identifiera à l'ensemble des arêtes de l'arbre, tandis que G/I s'identifiera à l'ensemble des arêtes orientées de l'arbre.

Dans ce dernier cas, on remarque que $N(I)$, qui est le normalisateur de I, est aussi le fixateur du sommet d'ordre 2 associé à l'arête, et contient I comme sous-groupe d'indice 2.

Il serait commode pour la suite, de considérer les groupes G du premier cas, comme sous-groupes d'indice deux de groupes plus grands: mais l'exemple du groupe $G = SU(3)$ associé à une extension non ramifiée d'un corps local, montre que les sous-groupes compacts maximaux, bien qu'étant de même volume, ne sont pas isomorphes, l'une des deux classes de conjugaison correspond à des sommets hyperspéciaux, mais pas l'autre.

On considérera le groupe $\mathcal{G}_q$ des automorphismes de l'arbre de type $(q, 1)$, dans lequel on s'est donné une géodésique, pour laquelle x_0 est d'ordre $q+1$, et x_1 est d'ordre 2. On note $G = \mathcal{G}_q^+$, qui est le sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{G}_q$ qui conserve la numérotation de l'arbre homogène d'ordre q sous-jacent.

On note I le fixateur de l'arête $[x_0, x_1]$ dans $\mathcal{G}_q$, qui est aussi le fixateur d'une arête dans l'arbre homogène d'ordre q sous-jacent, c'est un sous-groupe de G, dont le normalisateur $N(I)$ dans $\mathcal{G}_q$ est le compact maximal fixant x_1.

De la décomposition spectrale de $L^2(\mathcal{G}_q/N(I))$, on va déduire la décomposition spectrale de $L^2(G/I)$. Avec les notations et choix précédents on a

Théorème 3.5.1 *Soit G un groupe opèrant de façon faiblement doublement transitive sur un arbre homogène numéroté d'ordre q, et I un sous-groupe d'Iwahori.*

Le $G-$espace $L^2(G/I)$ est isomorphe à la somme directe des $G-$espaces de Hilbert

$$\int_{\gamma_1^+} \mathcal{H}^\lambda d\mu^0(\lambda) \oplus ST,$$

la mesure $d\mu^0$ est la même que pour les fonctions K-sphériques. Le plongement f_λ dans la partie continue de la décomposition spectrale est donnée, pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/I)$, par

$$f_\lambda = \pi^\lambda(f)\mathbb{I}_I,$$

où $\mathbb{I}_I \in \mathcal{H}^\lambda$ a comme support IB et vaut $\frac{1}{m(I)}$ sur I.

Démonstration: On va se ramener au cas où $G = \mathcal{G}_q^+$, car les espaces $L^2(G/I)$ sont définis géométriquement, comme espace des fonctions de carré intégrable sur l'ensemble des arêtes de l'arbre, muni de la mesure discrète, sur lequel G opère de façon naturelle; ainsi l'action de $\mathcal{G}_q^+$ se transportera par restriction à G, de même que la décomposition spectrale, car les restrictions à G des représentations Π^λ de $\mathcal{G}_q^+$ sont les représentations Π^λ de G, comme on le voit aisément, en considérant les modèles Ω_s de ces représentations, qui agissent dans $L^2(\Omega)$.

Il en est de même pour les restrictions de la représentation de Steinberg *st*. Il en est encore de même pour ST, qui à priori est l'adhérence de *st* dans $L^2(G)$ et $L^2(\mathcal{G}_q^+)$, mais est en fait réalisée dans le même espace $L^2(G/I)$. On notera $\mathcal{G} = \mathcal{G}_q$ de sorte que $G = \mathcal{G}^+$.

On choisit un élément $\sigma \in \mathcal{G}$ qui stabilise la géodésique $\{x_n\}$ choisie dans l'arbre homogène $\mathcal{A}_q$, et y agit par $\sigma x_n = x_{1-n}$; son carré $\sigma^2 \in H$; on pourrait, en se fatiguant inutilement, construire une involution dans $\mathcal{G}$ qui vérifie cette condition. Cette construction n'est pas toujours possible pour un groupe plus petit que $\mathcal{G}$, comme on peut le voir dans le cas $PGL_2(D)$, pour une algèbre à division D de degré impair sur son centre un corps p–adique [Ch-3]. On notera que le normalisateur $N(I)$ de I dans $\mathcal{G}$ est égal à $I \sqcup I\sigma = I \sqcup \sigma I$.

Avant de comparer les représentations de G et $\mathcal{G}$, convenons de noter $\Pi^{(\lambda)}$ la représentation de $\mathcal{G}$ dans l'espace $\mathcal{H}^{(\lambda)}$, associée au paramétre λ, de sorte que la restriction à G de $\Pi^{(\lambda)}$ est la représentation Π^{λ^2} de G.

On choisira un produit scalaire commun sur les $\mathcal{H}^{(\lambda)}$ et $\mathcal{H}^{\mu}$, pour $|\lambda| = |\mu| = 1$, donné par l'intégrale $\int_K |f|^2\,dk$.

Ceci est possible, car K est le fixateur d'un sommet à la fois dans G, et dans $\mathcal{G}$.

On considère pour $f \in L^2(G/I)$, la fonction $\overline{f} \in L^2(\mathcal{G}/N(I))$, définie par $\overline{f}(g) = f(g)$ pour $g \in G$, et $\overline{f}(g) = f(g\sigma)$ pour $g \notin G$. On vérifie que $f \mapsto \overline{f}$ est une bijection de $L^2(G/I)$ sur $L^2(\mathcal{G}/N(I))$, telle que pour les normes L^2 sur G et $\mathcal{G}$ on ait $\|\overline{f}\|^2 = 2\|f\|^2$.

On a $\Pi^{(\lambda)}(\overline{f})\varphi = \Pi^{(\lambda)}(f)\varphi + \Pi^{(\lambda)}(f)\Pi^{(\lambda)}(\sigma)\varphi$, que l'on applique à l'élément $\mathbb{I}_{N(I)} \in \mathcal{H}^{(\lambda)}$ égal à $\frac{1}{m(N(I))} = \frac{1}{2m(I)}$ sur $N(I)$.

On obtient $2\Pi^{(\lambda)}(\overline{f})\mathbb{I}_{N(I)} = \Pi^{(\lambda)}(f)\mathbb{I}_I + \Pi^{(\lambda)}(f)\Pi^{\lambda}(\sigma)\mathbb{I}_I$. Ce sont des éléments dans des espaces de fonctions, sur lesquels $\mathcal{G}$ opère, dont on considère la restriction à G. On en déduit la relation $\Pi^{(\lambda)}_{|G}(\overline{f})\mathbb{I}_{N(I)} = \Pi^{\lambda^2}(f)\mathbb{I}_I$, car l'intersection $I\sigma\mathcal{B} \cap G = \emptyset$.

D'autre part, la représentation T^0 et la représentation de Steinberg de $\mathcal{G}$ ont même restriction à G, qui est la représentation de Steinberg ST de G. Comme le produit scalaire sur T^0 provient de celui de $L^2(\mathcal{G}/N(I))$, on voit que, outre la partie continue, l'espace $L^2(G/I)$ contient ST comme sous–G–espace invariant fermé.

On remarque ensuite que, si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$, on a l'égalité $\Pi^\lambda(f)(\mathbb{I}) = \Pi^\lambda(f)(\mathbb{I}_I)$, car $m(K)\mathbb{I} = \sum_{g\in K/I} m(I)\Pi^\lambda(g)(\mathbb{I}_I)$.

Ainsi le support de la mesure de Plancherel de $L^2(G/I)$, correspondant à l'orthogonal de la représentation de Steinberg, est celui de $L^2(G/K)$. Une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/I)$ s'y projette par $(f_\lambda)_{\lambda\in\gamma_1^+}$, avec $f_\lambda = \Pi^\lambda(f)(\mathbb{I})$. On voit compte tenu des résultats établis pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/K)$, que la partie continue de la mesure de Plancherel de $L^2(G/I)$ est celle décrite, qu'elle coïncide avec celle de $L^2(G/K)$.

Comme St est le sous-espace de $L^2(G)$ engendré par sa fonction I–sphérique, ST est un sous-espace invariant fermé de $L^2(G/I)$. ∎

3.6 $L^2(G/I)$, pour G transitif sur un arbre homogène

Nous allons décrire la décomposition spectrale de $L^2(G/I)$, où le groupe G opère avec une seule orbite sur l'arbre homogène, et I est le fixateur d'une arête $[x_0, x_1]$ de l'arbre homogène.

On normalise la mesure de Haar sur G, de sorte que $m(K) = 1$, on choisit la forme $\oint_{G/B}$ égale à $\int_K dk$. On choisit enfin dans le groupe G un élément σ tel que $\sigma(x_n) = x_{1-n}$, c'est à dire qui envoie la géodésique $[-\infty, \infty]$ pointée par x_0, sur la géodésique $[\infty, -\infty]$ pointée par x_1, et un tel élément existe, d'après les hypothèses de transitivité faites sur G.

On remarquera que, quand x_1 est choisi comme origine de la géodésique, ce que nous ferons pour décrire $L^2(G/I)$, un tel élément est noté w : nous réserverons cette notation à un élément qui fixe x_0,et échange les deux bouts de la géodésique.

On sait que σ normalise I, que $\sigma^2 \in H$ et que $N(I) = I \sqcup \sigma I = I \sqcup I\sigma$.

Soit alors $f \in L^2(G/I)$, on définit les fonctions

$$f_\sigma(g) = f(g\sigma),\ f^+ = f + f_\sigma,\ f^- = f - f_\sigma.$$

On a $2f = f^+ + f^-$.

Comme σ normalise I, la fonction f_σ est invariante à droite par I. Donc f^+ et f^- sont invariantes à droites par I. On vérifie que f^+ est invariante à droite par σ, et que $f^-(g\sigma) = -f^-(g)$.

Donc $f^+ \in L^2(G/N(I))$, et $f^- \in L^2(G/N(I), \epsilon)$, où $L^2(G/N(I), \epsilon)$ désigne le sous-espace de $L^2(G)$ formé des fonctions φ qui vérifient $\varphi(gk) = \epsilon(k)\varphi(g)$, pour $k \in N(I)$, pour le caractère ϵ défini par $\epsilon(g) = (-1)^{d(x,g(x))}$. ce caractère d'ordre 2 sur G ne dépend pas du choix du sommet x qui intervient dans sa définition.

La théorie des fonctions $N(I)-$sphériques a permis de décrire la décomposition spectrale de $L^2(G/N(I))$, il faudra faire la théorie analogue pour les fonctions $\epsilon - N(I)-$sphériques.

On introduit

$$L^2(N(I)\backslash G/N(I), \epsilon) = \{\varphi \in L^2(G) |\ \forall k, k' \in N(I),\ \varphi(kgk') = \epsilon(kk')\varphi(g)\},$$

et $C_c^\infty(N(I)\backslash G/N(I), \epsilon) = L^2(N(I)\backslash G/N(I), \epsilon) \cap C_c^\infty(G)$.

On remarque que si $f \in L^2(N(I)\backslash G/N(I), \epsilon)$, alors ϵf et biinvariante par $N(I)$, et que l'on a $\|f\|^2 = \|\epsilon f\|^2$.

La formule de Plancherel appliquée à $\epsilon f \in L^2(N(I)\backslash G/N(I))$, donnera la formule de Plancherel de f. Il suffira alors d'exprimer $\widehat{\epsilon f}(\lambda)$, pour $\epsilon f \in \mathcal{C}_c^\infty(N(I)\backslash G/N(I))$, pour $|\lambda| = 1$ ou $\lambda = \lambda_0$.

Deux cas sont à examiner.

Pour $|\lambda| = 1$, on a alors $\widehat{\epsilon f}(\lambda) = < \Pi^\lambda(\epsilon f)\mathbb{I}_{N(I)}, \mathbb{I}_{N(I)} >$.

Comme pour $h \in V^\lambda$, on a

$$\Pi^\lambda(\epsilon f)h(x) = \int_G \epsilon(g^{-1})f(g^{-1})h(gx)\,dg = \epsilon(x)\int_G f(g^{-1})(\epsilon h)(gx)\,dg.$$

On voit facilement que si $h \in V^\lambda$, on a $\epsilon h \in V^{-\lambda}$: en effet $(\epsilon h)(gb) = \epsilon(g)h(gb)\epsilon(b)$, et $\epsilon(b)\chi_\lambda(b) = \chi_{-\lambda}(b)$. On remarquera $\mathbb{J}_{N(I)}$ égal par définition à $\epsilon\mathbb{I}_{N(I)}$ de $V^{-\lambda}$, qui vaut $\frac{1}{2N(I)}$ sur I, et $-\frac{1}{2N(I)}$ sur $I\sigma$.

Pour $\lambda = \lambda_0 = -\sqrt{\frac{1}{q}}$, la représentation est de carré intégrable, son coefficient est φ_{λ_0}, et $\widehat{\epsilon f}(\lambda_0) = \frac{1}{\|\varphi_{\lambda_0}\|^2} < \epsilon f, \varphi_{\lambda_0} >$, où $<,>$ et $\|\,.\,\|$ sont les produit scalaire et la norme L^2.

La formule établie à la proposition 3.2.1, donne pour $g \in N(I)\tau^p N(I)$, avec $p \geq 0$, $\varphi_{\lambda_0}(g) = (\frac{-1}{q})^p$.

On compare cette formule avec celle du coefficient c de la représentation de Steinberg, donnée dans la proposition 2.7.1, par

$c(g) = (\frac{1}{q})^{|n|}$, si $g \in I\tau^n I$, et $c(g) = -(\frac{1}{q})^{|n|}$, si $g \in I\tau^n\sigma I$.

Comme une classe $N(I)\tau^p N(I) = I\tau^p I \cup I\tau^{-p} I \cup I\tau^p\sigma I \cup I\tau^{-p}\sigma I$, on vérifie que $c(g\sigma) = -c(g)$, et que pour $k \in N(I)$ on a $c(gk) = \epsilon(k)c(g)$. On en déduit, comme $c(g) = c(g^{-1})$, que $c = \epsilon\varphi_{\lambda_0}$.

La formule de Plancherel pour $L^2(N(I)\backslash G/N(I), \epsilon)$ est alors facile à établir, on a

$$\|f\|^2 = \int_{\gamma_1^+} | < \Pi^\lambda(f)\mathbb{J}_{N(I)}, \mathbb{J}_{N(I)} > |^2 d\mu^0(\lambda) + \frac{1}{\|c\|^2}| < f, c > |^2,$$

pour une fonction f intégrable, $< .,. >$ notant le produit scalaire L^2, $d\mu^0$ désignant la mesure de Plancherel de $L^2(K\backslash G/K)$.

Ceci s'établit, en remarquant que la transformée de Fourier $\hat{g}(\lambda)$ d'une fonction g, $N(I)-$sphérique, est invariante par $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$, que $\lambda \mapsto -\lambda^{-1}$ conserve le demi-cercle γ_1^+.

On en déduit la formule d'inversion de Fourier.

Soit alors $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G/N(I), \epsilon)$, pour $g \in G$, on considère la fonction f_g sur G définie par $f_g(x) = \int_{N(I)} \epsilon(k)f(gkx)\,dg$.

On vérifie, en utilisant la relation $c(kgk') = \epsilon(kk')c(g)$, pour $k, k' \in N(I)$, que cette fonction est $\epsilon - N(I)-$sphérique. On peut donc lui appliquer la formule d'inversion de Fourier, ce qui donne

$$f(g) = \int_{\gamma_1^+} | < \Pi^\lambda(f)\mathbb{J}_{N(I)}, \Pi^\lambda(g)\mathbb{J}_{N(I)} > |^2 \, d\mu(\lambda) + \frac{1}{\|c\|^2} f \star c(g).$$

En effet on a

$$\Pi^\lambda(f_g)h(y) = \int_G f_g(x)h(x^{-1}y)\,dx = \int_{G\times N(I)} f(gkx)\epsilon(k)h(x^{-1}y)\,dx,$$

qui est égal à $\int_G f(gx)h(x^{-1}y)\,dx$ si on a $h(ky) = \epsilon(k)h(y)$ pour $k \in N(I)$.

On obtient la relation $\Pi^\lambda(f_g)\mathbb{J}_{N(I)} = \Pi^\lambda(g^{-1}\Pi^\lambda(f)\mathbb{J}_{N(I)}$, d'où la formule annoncée.

On en déduit que la décomposition spectrale de $L^2(G/N(I), \epsilon)$, est la somme directe $\int_{\gamma_1^+} \mathcal{H}^\lambda d\mu^0(\lambda) \oplus ST$, avec la même mesure $d\mu^0$ que pour les fonctions K-sphériques.

Le plongement f_λ dans la partie continue de la décomposition spectrale est donnée, pour $f \in C_c^\infty(G/I, \epsilon)$, par $f_\lambda = \pi^\lambda(f)\mathbb{J}_I$, et le projecteur sur ST est donné par $\frac{1}{\|c\|^2} f \star c$.

Les outils sont en place pour établir le théorème

Théorème 3.6.1 *Soit G un groupe opèrant de façon faiblement doublement transitive sur un arbre homogène non numéroté d'ordre q, et I un sous-groupe d'Iwahori.*

Le $G-$espace $L^2(G/I)$ est isomorphe à la somme directe des $G-$espaces de Hilbert

$$\int_{\gamma_1^+} \mathcal{H}^\lambda d\mu^0(\lambda) \oplus ST \oplus T^0,$$

la mesure $d\mu^0$ est la même que pour les fonctions K-sphériques. Le plongement f_λ dans la partie continue de la décomposition spectrale est donnée, pour $f \in C_c^\infty(G/I)$, par

$$f_\lambda = \pi^\lambda(f)\mathbb{I}_I,$$

où $\mathbb{I}_I \in \mathcal{H}^\lambda$ a comme support IB et vaut $\frac{1}{m(I)}$ sur I.

Démonstration: De la relation $2f = f^+ + f^-$, on déduit que

$$L^2(G/I) \subset L^2(G/N(I)) + L^2(G/N(I), \epsilon),$$

et même l'égalité. Il est ainsi clair que la décomposition spectrale de $L^2(G/I)$ est celle qui est décrite dans l'énoncé.

Il reste donc à indiquer quel est le plongement (f_λ) d'un $f \in C_c^\infty(G/I)$ dans la partie continue de la décomposition spectrale.

Soit $\lambda \in \gamma_1^+$, comme on a $\Pi^\lambda(\sigma)\mathbb{I}_{N(I)} = \mathbb{I}_{N(I)}$, et $\Pi^\lambda(\sigma)\mathbb{J}_{N(I)} = \mathbb{J}_{N(I)}$, on voit que $\Pi^\lambda(f^+)\mathbb{I}_{N(I)} = 2\Pi^\lambda(f)\mathbb{I}_{N(I)}$, et $\Pi^\lambda(f^-)\mathbb{J}_{N(I)} = 2\Pi^\lambda(f)\mathbb{J}_{N(I)}$.

Comme $f = \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$, on a

$$f_\lambda = \frac{1}{2}(f_\lambda^+ + f_\lambda^-) = \Pi^\lambda(f)\mathbb{I}_{N(I)} + \Pi^\lambda(f)\mathbb{J}_{N(I)} = \Pi^\lambda(f)(\mathbb{I}_I);$$

en effet$\mathbb{I}_{N(I)}$ (resp. $\mathbb{J}_{N(I)}$) vaut $\frac{1}{2m(I)}$ sur I, et $\frac{1}{2m(I)}$ (resp. $-\frac{1}{2m(I)}$) sur I, donc leur somme est $\mathbb{I}_I$. ∎

3.7 Description géométrique de T^0, et de ST (cas homogène)

On rappelle la notation, où S_i, pour $i = 1, 2$, désigne l'ensemble des sommets de numéro i.

On choisira i, j de sorte que $q_i < q_j$. On choisit alors un sommet de numéro i, dont on note K le fixateur. Ainsi l'ensemble G/K s'identifie à S_i. On sait que l'espace de T^0, est engendré par les translatés de φ_{λ_0}, que c'est un sous-espace invariant fermé irréductible de $L^2(G/K)$, et qu'il n'a aucun vecteur invariant non nul par un K_y pour $y \in S_j$. On a

Proposition 3.7.1 *La représentation T^0 se réalise comme la sous-représentation de $L^2(G/K)$ dans*

$$V^0 = \{f \in L^2(G/K) \mid \textit{pour tout } y \in S_j \textit{ et tout } x \in G, \int_{K_y} f(kx)\, dk = 0\}.$$

De façon géométrique, T^0 est la sous-représentation de $L^2(S_i)$ égale à l'intersection des noyaux des opérateurs de moyenne sur les sphères centrées aux sommets de S_j.

Démonstration: . On a vu plus haut que $T^0 \subset V^0$. La formule de Plancherel de $L^2(G/K)$ montre que T^0 est l'orthogonal du spectre continu. Pour montrer que $V^0 = T^0$, il suffira de montrer que si $f \in V^0$ et si $(f_\lambda)_{\lambda \in \gamma_1^+}$ est la projection de f sur la partie continue de la décomposition spectrale, alors $f_\lambda = 0$ pour presque tout $\lambda \in \gamma_1^+$.

Soit $K' = K_y$ avec $y \in S_j$, notons ${}^{K'}f$ la fonction définie par ${}^{K'}f(x) = \int_{K'} f(kx)\, dk$. On remarque que ${}^{K'}f \in L^2(K' \backslash G/K)$.

On a $({}^{K'}f)_\lambda =^{K'} (f_\lambda)$, car la décomposition spectrale commute aux représentations de G; on en déduit que si $f \in V^0$, on a $\int_{K'} \Pi^\lambda(k) f_\lambda\, dk = 0$, pour presque tout $\lambda \in \gamma_1^+$.

On note $f_{K',\lambda}$ la fonction de V^λ égale à 1 sur K', et $<,>$ le produit scalaire de $\mathcal{H}^\lambda$. On a donc $< f_{K',\lambda}, f_\lambda >=< f_{K',\lambda}, {}^{K'} f_\lambda >= 0$.

L'ensemble des sommets de numéro j étant dénombrable, il existe un ensemble $N \subset \gamma_1^+$ qui est une réunion d'ensembles négligeables indéxés par S_j, donc de mesure nulle, tel que pour $\lambda \notin N$, la fonction f_λ est orthogonale à l'espace engendré par les fonctions $f_{K',\lambda}$, quand y décrit S_j. Cet espace contient V^λ, puisque la représentation π^λ est irréductible, et que l'ensemble des $f_{K',\lambda}$ est G−invariant.

Donc $f_\lambda = 0$, pour $\lambda \in \gamma_1^+ - N$, ainsi $f \in T^0$. ■

Cet énoncé admet des traductions dans les cas d'un arbre homogène.

Le premier cas est celui d'un groupe G, qui conserve la numérotation, donc associé à arbre de type (q, q).

Proposition 3.7.2 *Soit G un groupe d'automorphismes doublement transitif d'un arbre homogène numéroté, dont on note A l'ensemble des arêtes.*

La représentation de Steinberg est la représentation naturelle de G dans le sous-espace $V^0 = \{f \in L^2(A) \mid \text{pour tout sommet } x,\ M_x f = 0\}$, où $M_x f$ est la moyenne de f sur les arêtes issues de x.

Démonstration: Ce résultat serait clair, si on considérait aussi les moyennes par des compacts fixateurs de sommets plus éloignés. Mais on peut vérifier sans peine, par exemple par récurrence sur la distance du sommet x à l'arête a, dont on note I_a le fixateur, que les moyennes M_x engendrent les sommes $\sum_{K_x/I_a} f(ka)$, qui sont proportionnelles à ${}^{K_x}f(a)$. ■

Le second cas à examiner est celui du groupe G, transitif sur les sommets de l'arbre homogène: alors la représentation de Steinberg est alors égal à la représentation $T^0 \otimes \epsilon$, et l'espace G/I se décrit comme l'ensemble des arêtes orientées de l'arbre homogène. La proposition suivante est claire

Proposition 3.7.3 *Soit G un groupe d'automorphismes doublement transitif d'un arbre homogène non numéroté, dont on note $\widehat{A}$ l'ensemble des arêtes orientées.*

La représentation de Steinberg est la représentation naturelle de G dans le sous-espace V^0 de $L^2(\widehat{A})$ constitué de fonctions f qui prennent des valeurs opposées sur des arêtes de même support et d'orientation opposée, et dont les moyennes orientées $M_x f(a) = 0$, où la moyenne $M_x f(a)$ est prise sur les arêtes dont l'origine est x.

Remarque Donner dans le cas général une description analogue de la représentation de Steinberg semble équivalent à la connaissance de la formule de Plancherel pour $L^2(G/I)$.

3.8 Exemples: groupes $\mathfrak{p}$−adiques de rang un

Cette théorie s'applique aux groupes p−adiques G quasi-simples de rang un, au moins pour les groupes dont le centre est trivial: en fait, pour les autres, les représentations définies ici et les espaces quotients G/K, G/I, se factorisent, via leurs images, dans le groupe d'automorphisme de l'arbre.

Les groupes que l'on étudie plus précisement, seront définis sur un corps p−adique k dont on note q l'ordre du corps résiduel. Ils seront de deux types: d'une part des groupes linéaires, d'autre part des groupes orthogonaux ou unitaires, associés à des formes d'indice de Witt égal à un.

On considérera, pour une algèbre à division D centrale sur k de degré d, le groupe $PGL(2, D)$, son sous-groupe $PGL^\circ(2, D)$ des éléments dont la valuation du déterminant de Dieudonné est paire, et les sous-groupes $PSL(2, D)$, voire $SL(2, D)$

Le cas $D = k$ n'est pas exclus, et il correspond à des groupes déployés sur k.

Ces groupes opèrent doublement transitivement sur un arbre homogène d'ordre q^d, numéroté pour $PGL(2, D)$, non numéroté sinon. Le caractère ϵ, dans le cas $PGL(2, D)$, est trivial sur $PGL^\circ(2, D)$, et est donné par $\epsilon(g) = (-1)^{v(g)}$, où $v(g)$ est la valuation du déterminant de Dieudonné d'un relèvement de g.

Dans ce cas, l'espace des bouts s'interprète comme droite projective, le groupe B, fixateur d'un point à l'infini, est le stabilisateur d'une droite, il est constitué des matrices triangulaires supérieures dans une base adaptée; les caractères considérés de B seront factorisés par la valeur absolue du quotient des coefficient diagonaux.

Les autres cas considérés ici, sont ceux des groupes orthogonaux ou unitaires.

Un groupe $SO(5)$ de rang un, et des groupes unitaires associés aux extensions quadratiques séparables L de k, $SU(3)$, une forme de $SU(4)$ pour forme hermitienne de rang un, et des groupes $PGU(4)$, qui sont les quotients des groupes de similitudes des formes par leur centre.

Pour ces groupes, l'espace des bouts s'interprète comme l'ensemble des droites isotropes, et le groupe B sera le stabilisateur d'une droite isotrope, et sera un parabolique minimal de G. Il agira par homothéties sur la droite isotrope qu'il stabilise, d'où un homomorphisme de B dans k^* pour le groupe orthogonal et dans L^* pour les groupes unitaires, qui composé avec la valeur absolue, donne un caractère à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on compose avec un caractère de $\mathbb{R}_+^*$, ce procéde donne un caractère de B à valeurs complexes.

On obtient par ce procédé les χ_λ définis plus haut.

Il s'agit maintenant de décrire les arbres associés et les compacts maximaux.

Pour les groupes linéaires, on obtient des arbres homogènes de type q^d, avec une orbite dans le cas PGL_2, deux sinon; les compacts maximaux dans $PGL_2(D)$ sont de deux types, les conjugués de $PGL_2(\mathfrak{O}_D)$, et les normalisateurs des sous-groupes d'Iwahori; les sous-groupes d'Iwahori sont conjugués au sous-groupe de $PGL_2(\mathfrak{O}_D)$, formé d'éléments dont les images $\bmod \mathfrak{p}_D$ sont les matices triangulaires supérieures dans le corps résiduel.

Les compacts maximaux de $PGL^\circ(2, D)$, sont conjugés à $PGL_2(\mathfrak{O}_D)$ par des éléments de $PGL(2, D)$, ceux de $PSL_2(D)$ le sont à $PSL_2(\mathfrak{O}_D)$ par ce même groupe.

Les sous-groupes d'Iwahori de $PGL_2^\circ(D)$ sont ceux de $PGL_2(D)$, et leur trace sur $PSL_2(D)$ donne ceux de $PSL_2(D)$.

Les groupes $SU_3(L)$, pour $L|k$ ramifiée, opèrent sur un arbre homogène de type q, avec deux orbites; les compacts maximaux ne sont pas isomorphes, l'un est $SU_3(L) \cap SL_3(\mathfrak{O}_L)$, les sous-groupes d'Iwahori ont une description analogue comme matrices, dont l'image par réduction est triangulaire supérieure.

Les groupes de rang un $PSU_4(L)$, pour $L|k$ non ramifiée, opèrent sur un arbre homogène de type q^3, avec deux orbites, les compacts maximaux sont isomorphes: l'un est tout simplement $PSU_4(L) \cap PSL_4(\mathfrak{O}_L)$.

$PGU_4(L)$, pour $L|k$ non ramifiée, opèrent sur un arbre homogène de type q^3, avec une seule orbite, le caractère ϵ étant simplement la composée du caractère d'ordre 2 de k^*/NL^* avec le déterminant. On vérifie que les compacts maximaux de $PSU_4(L)$ sont conjugués dans $PGU_4(L)$. Les sous-groupes d'Iwahori ont une description analogue en terme de matrices dont l'image par réduction est dans un parabolique minimal.

Pour les autres cas décrits ici, les arbres associés sont semi-homogènes.

Le groupe $SU_3(L)$, pour $L|k$ non ramifiée, opère sur un arbre semi-homogène de type (q^3, q). Un sommet d'ordre $q^3 + 1$ est fixé par un conjugué du groupe $SU_3(L) \cap SL_3(\mathfrak{O}_L)$, la réduction $\bmod \mathfrak{p}_L$ donnant un $SU(3)$ sur le corps résiduel de k. L'autre sommet, d'ordre $q + 1$ est fixé par un conjugué du fixateur de la norme $\nu_{\frac{1}{2}}$.

Les groupes de rang un $PSU_4(L)$, pour $L|k$ ramifiée, opèrent sur un arbre semi-homogène de type (q^2, q), le sommet d'ordre q^2+1 est fixé par un conjugué du groupe $PSU_4(L) \cap PSL_4(\mathfrak{O}_L)$, la réduction $\mathrm{mod}\, \mathfrak{p}_L$ donnant un $SO(3)$ de rang un sur le corps résiduel de L, ce groupe étant isomorphe à PGL_2. L'autre sommet est fixé par un conjugué du fixateur de la norme $\nu_{\frac{1}{2}}$.

Le cas du goupe $SO(5)$ de rang un décrit ci-dessus, opère sur un arbre semi-homogène de type (q^2, q). On peut écrire la forme quadratique $q(x) = x_1x_{-1} + u^2 - \alpha v^2 - \beta w^2$, pour un x de coordonées (x_{-1}, u, v, w, x_1) dans une base adéquate, avec $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_k - \mathfrak{P}_k^2$.

Le groupe $SO(5) \cap SL_5(\mathfrak{O}_k)$ fixe un sommet d'ordre $q+1$, si $\alpha, \beta \in \mathfrak{P}_k$, le groupe résiduel est un $SO(3)$, qui est une forme de PGL_2, sur le corps résiduel de k.

Le groupe $SO(5) \cap SL_5(\mathfrak{O}_k)$ fixe un sommet d'ordre q^2+1, si α ou $\beta \in \mathfrak{P}_k$, mais pas les deux, le groupe résiduel est un $SO(4)$, de rang un, qui est une forme de PGL_2, sur une extension de degré deux du corps résiduel de k.

On peut voir facilement, que par un simple changement de base sur k^5, on passe facilement d'une de ces deux formes décrites ici, à un multiple de l'autre.

Cette étude des compacts maximaux a été traitée en détail dans [Ch-3].

3.9 Applications à certains produits libres

Cette théorie donne des résultats intéressants, quand un arbre homogène ou semi-homogène est associé à un groupe discret Γ qui opère fidèlement et de façon simplement transitive sur les sommets, ou sommets de numéro donné, ou enfin sur les arêtes de l'arbre. le premier cas est le cas du groupe libre à r générateurs: ce cas a été étudié dans [Ch-1] et a été l'origine indirecte de ce travail.

Le premier cas étudié est d'un groupe qui opère simplement transitivement sur un arbre homogène, supposé de type q. On sait, d'après [Ch-2], qu'il est de la forme $\Gamma = \Gamma_{r,s}$, un produit libre de r groupes d'ordre 2 et de s groupes cycliques infinis isomorphes à $\mathbb{Z}$, avec $r + 2s = q + 1$; on a vu [Ch-1], que le graphe de Cayley de Γ est un arbre homogène de type q sur lequel agissant à gauche, il opère simplement transitivement.

Si $\mathcal{G}$ est le groupe des automorphismes de cet arbre, et $\mathcal{K}$ le fixateur du sommet "origine" dans Γ, on a $\mathcal{G} = \Gamma\mathcal{K}$, $\Gamma \cap \mathcal{K} = \{e\}$, l'action de Γ sur $L^2(\Gamma)$

est simplement la restriction à Γ de l'action de $\mathcal{G}$ sur $L^2(\mathcal{G}/\mathcal{K})$, qui a été décrite ici. Ces résultats ont étés explicités dans [Ch-1].

Soit Γ un produit libre de $k+1$ groupes H_i d'ordre $r+1$. On a vu que Γ peut s'identifier aux sommets de numéro 1 d'un arbre homogène de type (k,r) et que Γ opère sur son arbre par des automorphismes. En notant encore $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de cet arbre, et $\mathcal{K}$ le fixateur du sommet "origine", qui est donc de numéro 1, dans cet arbre, on vérifie que $\mathcal{G} = \Gamma\mathcal{K}$, $\Gamma \cap \mathcal{K} = \{e\}$ et que l'action de Γ sur $L^2(\Gamma)$ est simplement la restriction à Γ de l'action de $\mathcal{G}$ sur $L^2(\mathcal{G}/\mathcal{K})$, qui a été décrite ici. Il sera commode de décrire les représentations intervenant ici, sous une forme adaptée au groupe Γ.

L'espace Ω des bouts de l'arbre s'interprète, comme espace des géodésiques issues de l'origine, qui restreintes aux sommets de numéro 1, s'identifient aux mots infinis du groupe Γ, réduits relativement au produit libre. La mesure invariante par $\mathcal{K}$ sur Ω, se définit naturellement sur cet espace de mots infinis, ainsi réinterprétés.

Enfin, la représentation T^0, définie si $k < r$, se réalise dans $L^2(\mathcal{G}/\mathcal{K})$; elle est donc définie dans $L^2(\Gamma)$, car Γ a été identifié à l'ensemble des sommets de numéro 1 de l'arbre.

Ainsi, la représentation régulière gauche de Γ dans $L^2(\Gamma)$ se décompose en somme directe continue de représentations de la série principale unitaire, que l'on peut décrire dans le $\Omega-$modèle, et si $k < r$, de la représentation $T^0|_\Gamma$ de carré intégrable sur Γ, dont un vecteur cyclique, est l'image lue sur Γ de φ_{λ_0} pour $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{k}{r}}$. La fonction sphériques φ_{λ_0} définit une fonction sur Γ, qui ne dépend que de la longueur dans Γ.

Le cas $k = r = 1$ est exclus de cette construction, il correspond au groupe diédral infini, pour lequel l'arbre associé se réduit à $\mathbb{Z}$.

Le cas $k = 1, r > 1$ correspond au produit libre de deux groupes du même ordre; c'est groupe qui opère simplement transitivement sur les arêtes d'un arbre homogène.

Le cas $r = 1, k > 1$ qui correspond à un produit libre de $k+1$ groupes cycliques d'ordre 2, a déjà traité.

Un cas, beaucoup plus intéressant, est le cas d'un produit libre de deux groupes $\Gamma = H_1 * H_2$, où H_1 est d'ordre 2, et H_2 d'ordre $q+1$, avec $q > 1$.

Ce groupe Γ opère simplement transitivement sur les arêtes d'un arbre homogène d'ordre q, et il s'identifie à un sous-groupe du groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes de l'arbre. On notera $\mathcal{I} \subset \mathcal{G}$ le sous-groupe d'Iwahori fixant l'arête "origine". On a $\mathcal{G} = \Gamma\mathcal{I}$ avec $\Gamma \cap \mathcal{I} = \{1\}$, ainsi Γ s'identifiera à $\mathcal{G}/\mathcal{I}$

L'homomorphisme canonique η de Γ sur $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, trivial sur H_2, égal à l'identité de H_1 coïncide sur Γ avec le signe ϵ du groupe $\mathcal{G}$.

Le groupe $\Gamma^\circ = \ker(\epsilon) \cap \Gamma$, qui est un sous-groupe de Γ d'indice 2, est le produit libre de H_2 et du groupe H_2' qui est le conjugué, dans Γ, de H_2 par l'élément non trivial de H_1. Les arbres associés à Γ et Γ° sont identiques. Ainsi les représentations de la série principale décrites décrivent dans le Ω−modèle se lisent sur Γ°, donc sur Γ. Et la représentation de Steinberg naturellement décrite sur les arêtes de l'arbre, se lit ainsi sur Γ.

La décomposition spectrale du $\mathcal{G}$−module $L^2(\mathcal{G}/\mathcal{I})$ donnera une décomposition spectrale de $L^2(\Gamma)$ en une somme continue de représentations unitaires de la série principale, que l'on a déjà décrite, et de deux représentations de carré intégrable, l'une est la représentation de Steinberg, et l'autre la représentation de Steinberg tordue par η.

Chapitre IV: Opérateurs d'entrelacement des séries principales, séries complémentaires, et représentations uniformément bornées

Dans ce chapitre, on va construire des opérateurs d'entrelacement pour les représentations des séries principales par intégration et prolongement analytique, on vérifiera que dans certains modèles ils sont définis par des convolutions.

On diagonalisera ces opérateurs, ce qui s'exprimera aisément dans le $\Omega-$modèle.

Cela permettra de construire des séries complémentaires, puis en appliquant la théorie des espaces de Lorentz, de décrire les représentations uniformément bornées.

4.1 Opérateurs d'entrelacement

Dans tout ce chapitre, on va garder fixée une géodésique $\{x_n\}$ pointée par un sommet x_0, dont on note K le fixateur dans G; le choix de la géodésique nous donne deux bouts $\pm\infty$, et on choisira encore $w \in G$ qui vérifie $w(x_n) = x_{-n}$. Les constructions seront relatives au bout ∞, au sommet x_0, ou du moins son numéro. On supposera de nouveau la mesure de Haar m de G normalisée par $m(K) = 1$, on conservera les autres choix et normalisations précédement faits.

On considère, pour $f \in V^\lambda$ et $g \in G$, l'intégrale

$$I(f,g) = \int_N f(gnw)\, dn.$$

On notera $\mathbb{I}_\lambda$ la fonction de V^λ égale à 1 sur K, cette notation étant simplifiée en $\mathbb{I}$, s'il n'y a pas d'ambiguité.

Proposition 4.1.1 1) *L'intégrale $I(f,g)$ est convergente pour $|\lambda| > 1$.*
2) *La fonction $I(f,.)$ qu'elle définit appartient à l'espace $V^{\lambda^{-1}}$, et l'application $I : f \mapsto I(f,.)$ est un opérateur d'entrelacement de π^λ avec $\pi^{\lambda^{-1}}$, c'est à dire vérifie*

$$I \circ \pi^\lambda(g) = \pi^{\lambda^{-1}}(g) \circ I.$$

3) *On a*

$$I(\mathbb{I}_\lambda) = c_{q_1,q_2}(\lambda)\mathbb{I}_{\lambda^{-1}},$$

d'où une interprétation de la fonction c_{q_1,q_2}.

Démonstration: Le point 3) a été déjà établi à l'origine, dans le lemme 3.1.3, où on a prouvé que $I(\mathbb{I}_\lambda)(e) = c_{q_1,q_2}(\lambda)$, ainsi que la convergence de l'intégrale associée pour $|\lambda| > 1$.

Pour établir la convergence de l'intégrale, on peut supposer, quitte à remplacer f par une translatée à gauche, que $g = e$. On remarquera que l'intégration définissant I, et la translation à gauche commutent de façon évidente.

Comme une fonction $f \in V^\lambda$ est continue sur G, elle est donc bornée sur K, soit alors $M = \sup_{k\in K} |f(k)|$, et on remarque aussi que la fonction $n \mapsto f(gnw)$ que l'on intègre est continue sur N. On remarque que $|\chi_\lambda| = \chi_{|\lambda|}$, d'où la majoration $|f| \leq M\mathbb{I}_{|\lambda|}$ car $|f(kb)| = |f(k)||\chi_\lambda(b)|$. De la convergence de l'intégrale d'entrelacement pour $\mathbb{I}_{|\lambda|}$ en e, déjà établie, on déduit le point 1).

Il est clair, que $I(f, gn) = I(f, g)$, pour $n \in N$, d'après les propriétés des mesures de Haar. Pour démontrer que $I(f, .) \in V^{\lambda^{-1}}$, il suffira de vérifier que $I(f, g\tau^p) = I(f, g)\chi_{\lambda^{-1}}(\tau)^{-p}$.

On a $f(g\tau^p nw) = f(g\tau^p n\tau^{-p}ww^{-1}\tau^p w) =$

$$= f(g\tau^p n\tau^{-p}w)\chi_\lambda^{-1}(w^{-1}\tau^p w) = f(g\tau^p n\tau^{-p}w)\chi_\lambda^{-1}(\tau^{-p}).$$

Comme on a l'égalité

$$\frac{d(bnb^{-1})}{dn} = \delta(b) = (q_1q_2)^{\nu(b)} = \frac{\chi_\lambda(b)}{\chi_{\lambda^{-1}}(b)},$$

on en déduira l'égalité à vérifier, sous réserve de convergence de l'intégrale.

Dans chacun des espaces V^λ et $V^{\lambda^{-1}}$, l'action du groupe, qui définit les représentations π^λ et $\pi^{\lambda^{-1}}$, est la translation à gauche; comme ces translations commutent avec l'intégration à droite, on vérifie ainsi que I est un opérateur d'entrelacement.

Pour établir le point 3), on remarque d'après l'argument précédent, que l'image d'une fonction invariante à gauche par K sera donc invariante à gauche par K. Comme dans V^μ l'espace des vecteurs invariants par K est de dimension 1, on voit que $I(\mathbb{I}_\lambda)$ sera un multiple de $\mathbb{I}_{\lambda^{-1}}$, que l'on déterminera par sa valeur à l'origine, qui a été donnée par le lemme cité. ∎

La suite logique du programme consisterait, en une normalisation des opérateurs d'entrelacement, obtenue par division par $c_{q_1,q_2}(\lambda)$ et en leur prolongement analytique.

Pour le premier point, on remarque que si $q_1 \neq q_2$, les pôles de c_{q_1,q_2} sont ± 1, les zéros étant $\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}$, et $-\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$. Si $q_1 = q_2 = q$, $c_{q,q}$ n'a qu'un zéro égal à $\frac{1}{q}$, et qu'un pôle égal à 1.

Donc si $q_1 < q_2$, la fonction c a un zéro $\lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$ de module $|\lambda_0| > 1$.

Et diviser par c, introduirait un pôle, pour une valeur du paramétre pour laquelle l'intégrale converge. Cette valeur correspond à π^{λ_0}, qui n'est pas irréductible, le sous-espace engendré par $\mathbb{I}_{\lambda_0}$, qui est une sous-représentation, est équivalent à un quotient de $\pi^{\lambda_0^{-1}}$.

On pourrait aussi se contenter pour ces intégrales de choisir un sommet dont le fixateur est un compact de plus grand volume.

Le prolongement analytique, qui sera traité plus loin, est toujours associé au choix d'un sommet.

Pour cela, fixons les notations.

Soit $r_\lambda : V^\lambda \longrightarrow V_0 = \mathcal{C}_c^\infty(K/N_0)$, défini par $r_\lambda(f) = f|_K$, c'est à dire qui à f associe sa restriction à K. C'est une bijection, dont on note ι_λ l'inverse. Pour $|\lambda| > 1$, on définit

$$J_\lambda(f) = r_{\lambda^{-1}} \circ I \circ \iota_\lambda(f).$$

Le problème consiste à montrer, que pour $f \in V_0$ fixé, $J_\lambda(f)$ dépend analytiquement de f.

Ceci s'obtiendra sans peine, quand on aura explicité I dans l'un des deux modèles suivants, le $N-$modèle ou le $\Omega-$modèle, dans lequel on pourra même diagonaliser I, et dont on verra que les valeurs propres sont des fonctions rationnelles de λ avec au plus deux pôles simples en $\lambda = \pm 1$.

4.2 Convolutions associées sur N

Soit $f \in V^\lambda$, et $\varphi = T(f)$ la fonction définie sur N par

$$\varphi(n) = f(nw).$$

On a la proposition

Proposition 4.2.1 *L'opèrateur d'entrelacement sur V^λ lu dans le $N-$modèle est donné, pour $|\lambda| > 1$, par la convolution à gauche par le noyau*

$$\alpha_\lambda(n) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}}\right)^{v(n)},$$

où v est la valuation définie sur $N - H$.

Plus précisément, on a $T \circ I(f) = T(f) \star \alpha_\lambda$.

Démonstration: Soit $\Phi(n) = I(f)(nw)$, on a $\Phi(n_0) = \int_N f(n_0 wnw)\, dn$, intégrale dans laquelle H est de mesure nulle.

On sait, d'après la proposition 1.5.7, que si $n \notin H, \exists n' \in N$, $\exists b \in B$ avec $wnw = n'wb$, et $\nu(b) = v(n) = -v(n')$.

Cette intégrale s'écrit

$$\Phi(n_0) = \int_{N-H} f(n_0 n' w)\beta(n)\, dn, \text{ avec } \beta(n) = (\sqrt{q_1 q_2}\lambda)^{-v(n)}.$$

On utilise le lemme 1.7.2 pour effectuer le changement de variable $n \mapsto n'$ sur $N/H - H$,que l'on étendre à N, qui est de mesure nulle, son "Jacobien" est donné par $dn' = (q_1 q_2)^{-v(n)}\, dn = (q_1 q_2)^{v(n')}\, dn$.

On obtient alors

$$\beta(n)\, dn = (\sqrt{q_1 q_2}\lambda)^{v(n')}(q_1 q_2)^{-v(n')}\, dn' = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}}\right)^{v(n')} dn' = \alpha_\lambda(n')\, dn',$$

parce que v est invariant par $n \mapsto n^{-1}$, il en est de même de α_λ, et comme le groupe N est unimodulaire, on en déduit le résultat annoncé. ∎

On notera, ici, ψ_λ l'image de la fonction $\mathbb{I}$, qui vaut 1 sur K. On sait que l'image par T de V^λ, est la somme directe de $C_c^\infty(N/H)$, et de la droite $\mathbb{C}\psi_\lambda$.

Pour obtenir un prolongement analytique, on traitera séparement les deux espaces $\mathbb{C}\psi_\lambda$ et $C_c^\infty(N/H)$.

Pour ψ_λ, c'est facile, car on sait que $I(\psi_\lambda) = c_{q_1,q_2}(\lambda)\psi_{\lambda^{-1}}$.

Sur $C_c^\infty(N/H)$, on remarque que si $f \in C_c^\infty(N/H)$, il existe un k tel que f est invariante à gauche par le sous-groupe N_k.

On peut alors dans le calcul de la convolution remplacer α_λ par $\alpha_\lambda^{(k)}$, sa régularisée à gauche invariante par N_k, défine par $\alpha_\lambda^{(k)} = \varepsilon_{k,N} \star \alpha_\lambda$, avec $\varepsilon_{k,N} = \frac{1}{m(N_k)}\mathbb{I}_{N_k}$. ($\mathbb{I}_{N_k}$ désigne, ici, la fonction caractéristique de N_k.)

Clairement $\alpha_\lambda^{(k)}$ est invariant à gauche par N_k, et on vérifie que $\alpha_\lambda^{(k)}$ et α_λ coïncident sur $N - N_k$.

En effet, on a, pour $l > k$, et $n \in N_l^*$, l'égalité $\alpha_\lambda^{(k)}(n) = \alpha_\lambda(n)$, car α_λ ne dépend que de v, et parce que $N_k N_l^* = N_l^*$.

Sur N_k le noyau $\alpha_\lambda^{(k)}$ est constant, il est donné par la moyenne de α_λ sur N_k, on a donc

$$\alpha_\lambda^{(k)}|_{N_k} = \Big(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}}\Big)^k \Big[\frac{m(N_k^*)}{m(N_k)}\frac{1}{1-\lambda^{-2}} + \frac{m(N_{k-1}^*)}{m(N_k)}\frac{\sqrt{q_1 q_2}\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-2}}\Big].$$

On obtient ainsi, pour $\lambda \neq \pm 1$, une fonction continue, convolable à gauche avec une fonction continue à support compact sur N/H.

On peut remarquer que ψ_λ est invariante par N_0, encore faudrait-il montrer, pour unifier ce procédé de prolongement analytique, vérifier qu'elle est convolable par α_λ^0.

On peut remarquer que dans le cas $PGL_2(k)$, l'espace N/H s'identifie à k, le noyau α_λ est de la forme $|x|^s$, que l'on régularise au voisinage de 0, et en le remplaçant par sa moyenne sur $\{|x| \leq q^{-k}\}$, obtenant ainsi un prolongement analytique de opérateurs de convolution; le cas le plus intéressant est le cas où $|\lambda| = 1$, correspondant à $\Re s = -1$, pour lequel les séries principales sont unitaires, et pour lequel on démontrera que les opérateurs d'entrelacementsnormalisés sont unitaires.

On obtiendrait alors, que les régularisés et normalisés des noyaux de convolutions $\frac{1}{|x|^{1+it}}$ définissent des opérateurs unitaires sur $L^2(k)$.

On aurait des résultats analogues sur $L^2(N)$, quand N est le radical unipotent d'un parabolique minimal d'un groupe p−adique de rang un. La théorie réelle analogue n'est d'ailleurs pas triviale: elle se traite par transformation de Fourier.

4.3 Convolutions associées à K, et Ω−modèle

Avant d'étudier les opérateurs de convolution associés à K, il convient d'introduire certaines notations.

Pour $\omega_0 \in \Omega$, on note $p(\omega; \omega_0)$ la distance à x_0 de la projection y d'un bout $\omega \neq \omega_0$ sur la demi-géodésique $[x_0, \omega_0]$. Par continuité on posera $p(\omega_0; \omega_0) = \infty$.

Si $\omega_0 = \infty$, on notera simplement $p(\omega) = p(\omega; \infty)$, on aura $p(\omega) = n$ si x_n est la projection de ω sur $[x_0, \infty]$.

Cette fonction se remonte à K, et ce qui nous permettra de définir une fonction p sur K, par $p(k) = p(k(\infty))$.

On sait que $K = N_0 w N_0 \cup w N_{-1} w N_0$.

Lemme 4.3.1 *La fonction p est donnée par*
$p(k) = 0$ *si* $k \in N_0 w N_0$,
$p(k) = -v(n)$ *si* $k \in wnwN_0$, *avec* $n \in N_{-1} - H$.

Démonstration: Dans le premier cas, on a $k(\infty) = n(-\infty)$, avec $n \in N_0$; comme l'image par n de la géodésique $[-\infty, \infty]$ est la géodésique $[k(\infty), \infty]$, et que $n(x_0) = x_0$, on voit que $x_0 \in [k(\infty), \infty]$, d'où $p(k) = 0$.

Dans le second cas, on a $k(\infty) = wn(-\infty)$, avec $n \in N_{-1}$.

On pose $m = v(n) \leq -1$. Le sommet x_m, par définition de la valuation, est le carrefour des trois bouts $(\infty, -\infty, n(-\infty))$, d'où $x_{-m} = w(x_m)$ est le carrefour des trois bouts $(-\infty, \infty, wn(-\infty))$, qui coïncide avec $(k(\infty), -\infty, \infty)$. Comme $-m > 0$, la projection de $k(\infty)$ sur $[x_0, \infty]$ est x_{-m}, d'où le lemme.■

Lemme 4.3.2 *Soit $m > 0$ et $k \in K$, on a*

$$k(x_m) = x_m \Longleftrightarrow k \in wN_{-m}wN_0,$$

d'où on déduit $p(k) = \sup\{m \geq 0 \mid k(x_m) = x_m\}$.

Démonstration: On sait que $K = N_0 w N_0 \cup wN_{-1}wN_0$.

Si $k \in N_0 w N_0$, on a $k \in nwN_0$, avec $n \in N_0$, donc $k(x_m) = n(x_{-m}) \neq x_m$: sinon $n(x_m) = x_{-m}$, impossible car n fixe la demi-géodésique $[x_0, \infty]$.

Nécessairement $k \in wN_1wN_0$, et $k(x_m) = wn(x_{-m})$, avec $n \in N$; on en déduit que $k(x_m) = x_m \Longleftrightarrow n(x_{-m}) = w(x_m) = x_{-m}$ ce qui est équivalent à $n \in N_{-m}$.

L'assertion sur p est trivialement un corollaire de la formule démontrée ici et du lemme précédent. ■

On peut maintenant exprimer l'opérateur d'entrelacement

Proposition 4.3.3 *Soit la fonction γ_λ définie sur G pour $\lambda \neq 0$, à support dans K, égale, en dehors de H, à*

$$\gamma_\lambda(k) = (1 + \frac{1}{q_1})(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}})^{-p(k)}.$$

L'intégrale d'entrelacement I est donnée sur V^λ, pour $|\lambda > 1$, par la convolution à droite par γ_λ.

Démonstration: On remarque que la valeur de γ_λ sur H n'importe pas, car H est négligeable.

On pose $I_1 = \int_{N_0} f(gnw)\, dn$ et $I_1 = \int_{N-N_0} f(gnw)\, dn$.

On remarque que, dans ces intégrales on peut intégrer encore à droite sur N_0, car f est invariante à droite par N_0, d'où $I_1 = \int_{N_0 \times N_0} f(gnwu)\,dndu$, et en utilisant le corollaire à la proposition 1.7.4, on obtient

$$I_1 = (1 + \frac{1}{q_1}) \int_{N_0 w N_0} f(gk)\,dk.$$

Pour I_2, comme pour $n \in N - N_0$ on a $v(n \geq 1)$, on écrit, suivant la formule établie dans la proposition 1.5.7, $nw = wn'wb$, avec $v(n') = -v(n)$.

On a $I_2 = \int_{N-N_0} f(gwn'wb)\,dndu = \int_{N-N_0} f(gwn'w)\chi_\lambda^{-1}(b)\,dn$, on effectue le changement de variable $n \mapsto n'$, dont on connait d'après la proposition 1.7.2 le "Jacobien", on obtient alors

$$I_2 = \int_{N-N_0} f(gnw)\,dn = \int_{N_{-1}} f(gwn'w)(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}})^{v(n')}\,dn'$$

par le même calcul que celui fait pour α_λ, puis, comme f est invariante à droite par N_0, on intègre sur $N_{-1} \times N_0$, d'où $I_2 = \int_{wN_{-1}wN_0} f(gk)\gamma_\lambda(k)\,dk$, le passage de l'intégrale sur N_{-1} à l'intégrale sur $wN_{-1}wN_0$ pour dk se faisant comme pour I_1.

Comme $\gamma_\lambda(k) = \gamma_\lambda(k^{-1})$ pour $k \in K$, on en déduit la proposition. ■

Il est intéressant d'expliciter ces opérateurs sur le Ω−modèle.

On va noter I_λ l'image dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de l'opérateur I de V^λ dans $V^{\lambda^{-1}}$, c'est à dire de façon plus précise,

$$I_\lambda = j_{\lambda^{-1}}^{-1} \circ I \circ j_\lambda,$$

où j_λ est la bijection de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sur V^λ définie par $j_\lambda(f)(k) = f(k(\infty))$.

On définit, sur $\Omega \times \Omega$ le noyau κ_λ par

$$\kappa_\lambda(\omega;\omega') = (1 + \frac{1}{q_1})(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}})^{-p(\omega,\omega')},$$

pour $\omega \neq \omega'$ la valeur pour $\omega = \omega'$ étant indifférente.

Par simple traduction de la proposition précédente, on a

Proposition 4.3.4 *L'opérateur I_λ est donné, pour $|\lambda| > 1$, par le noyau κ_λ, c'est à dire*

$$I_\lambda(f)(\omega_0) = \int_\Omega f(\omega)\kappa_\lambda(\omega,\omega_0)\,d\nu_{x_0}\omega,$$

pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

On peut remarquer que le noyau κ_λ est purement géométrique, il ne dépend pas du groupe G considéré, il en est donc de même de I_λ.

Pour une étude plus approfondie des opérateurs d'entrelacement, diagonalisation, prolongement analytique, et autres considérations, compte tenu de la remarque précédente, il sera judicieux de travailler avec le groupe $\mathcal{G}$, que l'on notera simplement G.

Pour $m \geq 0$, on notera

$$K(0,m) = \{g \in K \mid g(x_m) = x_m\},$$

qui est égal, pour $m > 0$, à $wN_{-m}wN_0$(comparer avec $\Gamma_0(N)$!), dont la mesure est donnée par $m(K(0,m)) = (1+\frac{1}{q_1})^{-1}m(N_{-m})$; on notera f_m sa fonction caractéristique, et $\alpha_m = \frac{1}{m(K(0,m))}f_m$, cette dernière notation étant compatible avec celle de la proposition 1.9.5.

Pour $m = 0$, on a $K = K(0,m)$, et $\alpha_0 = \mathbb{I}$, dont la restriction à K vaut 1.

On notera le noyau régularisé $\gamma_\lambda^m = \alpha_m \star \gamma_\lambda$.

Proposition 4.3.5 1) *On a* $\gamma_\lambda^0 = c_{q_1,q_2}(\lambda)\mathbb{I}$.

2) *Soit* $m > 0$, *sur* $K - K(0,m)$ *on a l'égalité* $\gamma_\lambda^m = \gamma_\lambda$.

Sur $K(0,m)$ *la fonction* γ_λ^m *coïncide avec la constante* $c_m(\lambda)$, *égale à*
$c_m(\lambda) = (1+\frac{1}{q_1})(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1q_2}})^{-m}c_+(\lambda)$ *si m est pair et*
$c_m(\lambda) = (1+\frac{1}{q_1})(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1q_2}})^{-m}c_-(\lambda)$ *si m est impair, avec*

$$c_+(\lambda) = \frac{1-\frac{1}{q_1}+\frac{q_2-1}{\sqrt{q_1q_2}}\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-2}}, \quad c_-(\lambda) = \frac{1-\frac{1}{q_2}+\frac{q_1-1}{\sqrt{q_1q_2}}\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-2}}.$$

Démonstration: Le premier point est clair, car $\alpha_0\star\gamma_\lambda$ est la fonction constante égale à $\int_K \gamma_\lambda(k)\,dk$, expression déjà calculée, et égale à la restriction à K de $I(\mathbb{I}_\lambda)$, qui vaut $c_{q_1q_2}(\lambda)\mathbb{I}_{\lambda^{-1}}$.

On notera pour $l \geq 0$, $K^*(0,l) = K(0,l) - K(0,l+1)$, c'est un ensemble sur lequel la fonction γ_λ est constante.

On remarque que pour $l < m$, on a $K(0,m)K^*(0,l) = K^*(0,l)$, car $K(0,m)$ est un sous-goupe de $K(0,l)$ et de $K(0,l-1)$. Donc, pour $l \geq m$ la régularisée γ_λ^m de γ_λ coïncide avec elle sur $K^*(0,l)$

Ceci établit la première partie de 2).

Par définition de γ_λ^m, on sait que c'est fonction constante sur $K(0,m)$, dont la valeur donnée par $\frac{1}{m(K(0,m))}\int_{K(0,m)}\gamma_\lambda(k)\,dk$

$$= (1+\frac{1}{q_1})\frac{\lambda^{-m}}{m(N_m)}\frac{1}{1-\lambda^{-2}}\Big[\frac{m(N_m^*)}{(\sqrt{q_1q_2})^{-m}} + \frac{\lambda^{-1}m(N_m^*)}{(\sqrt{q_1q_2})^{-m-1}}\Big],$$

car on a $(1+\frac{1}{q_1})m(K(0,l)) = m(N_l)$, ainsi que $m(N_{-l-2}) = (q_1q_2)^{-1}m(N_{-l})$, et $m(N_{-l-2})^* = (q_1q_2)^{-1}m(N_{-l})^*$.

En utilisant encore ces relations d'homogénéité, on obtient les formules suivantes

$$c_+(\lambda) = \frac{m(N_0^*)}{m(N_0)}\frac{1}{1-\lambda^{-2}} + \frac{m(N_{-1}^*)}{m(N_0)}\frac{\sqrt{q_1q_2}\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-2}},$$

$$c_-(\lambda) = \frac{m(N_{-1}^*)}{m(N_{-1})}\frac{1}{1-\lambda^{-2}} + \frac{m(N_{-2}^*)}{m(N_{-1})}\frac{\sqrt{q_1q_2}\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-2}},$$

comme $m(N_0^*) = (1-\frac{1}{q_1})m(N_0)$, et $m(N_{-1}^*) = (1-\frac{1}{q_2})m(N_{-1}) = \frac{q_2-1}{q_1q_2}m(N_0)$. On a la formule analogue $m(N_2^*) = \frac{q_1-1}{q_1q_2}m(N_0)$; on obtient ainsi les formules annoncées.

On remarquera que l'on passe de c_+ à c_- en échangeant q_1 et q_2. ∎

Corollaire 4.3.6 *On a*
$\alpha_0 \star \gamma_\lambda = c_0(\lambda)\alpha_0$, *avec* $c_0(\lambda) = c_{q_1,q_2}(\lambda)$.
et pour $n > 0$, $(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \star \gamma_\lambda = c_n(\lambda)(\alpha_n - \alpha_{n-1})$, *où*
$c_{2m+1}(\lambda) = -\lambda^{-2m}c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$, *pour* $m \geq 0$, *et*
$c_{2m}(\lambda) = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\lambda^{1-2m}c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1})$, *pour* $m > 0$.

Démonstration: Le premier point est clairement une conséquence de la formule établie pour γ_λ^0.

Pour les valeurs de $n > 0$, il convient de connaître les volumes de $K(0,n)$ qui sont, puisque le groupe est faiblement doublement transitif, d'indice dans K égal à l'ordre de la sphère de centre x_0 et de rayon n.

On a donc $m(K(0,2m+1))^{-1} = (q_1+1)(q_1q_2)^m$, et $m(K(0,2m))^{-1} = (1+\frac{1}{q_1})(q_1q_2)^m$, pour $m > 0$.

On remarque ensuite que $(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \star \gamma_\lambda = \gamma_\lambda^n - \gamma_\lambda^{n-1}$, est nul en dehors de $K(0,n-1)$ et est constant sur $K(0,n-1) - K(0,n)$ et sur $K(0,n)$.

Pour calculer ces valeurs, on utilise les relations suivantes, dont la vérification est immédiate, $(1+\frac{1}{q_1}) - c_{q_1,q_2}(\lambda) = c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$,

$$1 - c_+(\lambda) = c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}), \quad \text{et} \quad c_+(\lambda) - c_-(\lambda)\lambda^{-1}\sqrt{q_1q_2} = (q_1-1)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}),$$

ainsi que la relation analogue en échangeant q_1 et q_2,

$$1 - c_-(\lambda) = c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1}), \quad \text{et} \quad c_-(\lambda) - c_+(\lambda)\lambda^{-1}\sqrt{q_1q_2} = (q_2-1)c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1}).$$

Trois cas sont à étudier.

Sur $K - K(0,1)$ la fonction $(\alpha_1 - \alpha_0) \star \gamma_\lambda$, vaut

$$(1 + \frac{1}{q_1}) - c_{q_1,q_2}(\lambda) = c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}).$$

Sur $K(0,1)$, elle vaut $(1 + \frac{1}{q_1})\lambda^{-1}\sqrt{q_1 q_2} c_-(\lambda) - c_{q_1,q_2}(\lambda) =$

$$= (1 + \frac{1}{q_1})(1 - q_1 c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})) - c_{q_1,q_2}(\lambda) = -q_1 c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}).$$

On remarque ensuite que, puisque $m(K(0,1))^{-1} = (q_1 + 1)$, que $\alpha_0 - \alpha_1$ vaut 1 sur $K - K(0,1)$ et $-q_1$ sur $K(0,1)$.

On obtient ainsi la relation $(\alpha_1 - \alpha_0) \star \gamma_\lambda = -c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})(\alpha_1 - \alpha_0)$, ce qui donne $c_1(\lambda) = -c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$.

Pour $n > 1$, la fonction $(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \star \gamma_\lambda$ a son support sur $K(0, n-1)$, elle vaut

sur $K(0, n-1) - K(0, n)$ elle vaut $(1 + \dfrac{1}{q_1})(\dfrac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}})^{1-n}(1 - c_{-\varepsilon}(\lambda))$

et sur $K(0, n)$ elle vaut $(1 + \dfrac{1}{q_1})(\dfrac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}})^{1-n}(c_\varepsilon(\lambda)\lambda^{-1}\sqrt{q_1 q_2} - c_{-\varepsilon}(\lambda))$,

avec $\varepsilon = (-1)^n$. Explicitons ces valeurs.

Pour $n = 2m + 1$, avec $m > 0$, on obtient sur $K(0, 2m) - K(0, 2m + 1)$

$$(1 + \frac{1}{q_1})(q_1 q_2)^m \lambda^{-2m} c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$$

et sur $K(0, 2m + 1)$

$$(1 + \frac{1}{q_1})(1 - q_1)(q_1 q_2)^m \lambda^{-2m} c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$$

on note que $\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m}$ vaut $-(1 + \frac{1}{q_1})(q_1 q_2)^m$ sur $K(0, 2m) - K(0, 2m + 1)$, et qu'il vaut $(1 + \frac{1}{q_1})(q_1 - 1)(q_1 q_2)^m$ sur $K(0, 2m + 1)$.

Il s'ensuit que $(\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m}) \star \gamma_\lambda = c_{2m+1}(\lambda)(\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m})$, avec $c_{2m+1}(\lambda) = -\lambda^{-2m} c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$.

On remarquera que la formule est encore vraie pour $m = 0$. La formule précédente est donc valable pour $m \geq 0$.

Le cas $n = 2m$, avec $m > 0$, se traite de même, on obtient sur $K(0, 2m - 1) - K(0, 2m)$

$$-\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}(q_1 + 1)(q_1 q_2)^{m-1} \lambda^{1-2m} c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1}),$$

et sur $K(0,2m)$

$$\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}(q_2-1)(q_1+1)(q_1q_2)^{m-1}\lambda^{1-2m}c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1}),$$

comme $\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1}$ vaut $-(1+q_1)(q_1q_2)^{m-1}$ sur $K(0,2m)-K(0,2m+1)$, et qu'il vaut $(q_2-1)(1+q_1)(q_1q_2)^{m-1}$ sur $K(0,2m+1)$, on vérifie que
$(\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1})\star\gamma_\lambda = c_{2m}(\lambda)(\alpha_{2m}-\alpha_{2m-1})$,
avec $c_{2m}(\lambda) = -\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\lambda^{-2m}c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1})$. ∎

Théorème 4.3.7 *Pour $|\lambda|>1$ l'opérateur d'entrelacement I_λ est diagonalisable dans l'espace $L^2(\Omega)$.*

Ses sous-espaces propres sont les images des projecteurs Δ_n, et ils sont orthogonaux, et on a

$$I_\lambda|_{\Delta_n L^2(\Omega)} = c_n(\lambda).$$

Démonstration: Cet énoncé est une simple reformulation du résultat précédent, compte tenu de la proposition 1.9.6. ∎

4.4 Etude des opérateurs d'entrelacement

On sera amené à considérer l'opérateur

$$J_\lambda = \frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}I_\lambda;$$

si $q_1\geq q_2$, cet opérateur est défini sur $|\lambda|>1$, par contre si $q_1<q_2$, il l'est sur $|\lambda|>1$, sauf en $-\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$, où il a un pôle simple, qui est celui de $\frac{1}{c_{q_1,q_2}}$.

Proposition 4.4.1 1) *Pour $|\lambda|>1$ les opérateurs I_λ sont définis sur $L^2(\Omega)$.*

2) *Les opérateurs I_λ admettent un prolongement analytique sur $C^\infty(\Omega)$ pour $\lambda\in\mathbb{C}^*$, sauf en ±1 si $q_1\neq q_2$, et en 1 si $q_1=q_2$.*

Ils vérifient l'équation

$$I_{\lambda^{-1}}\circ I_\lambda = c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})I.$$

Ils sont donc inversibles si et seulement si $c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})\neq 0$, ces valeurs étant celles pour lesquelles π^λ est irréductible.

3) *Les opérateurs normalisés* J_λ *admettent un prolongement analytique sur* $C^\infty(\Omega)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C}^*$, *sauf aux zéros de* $c_{q_1,q_2}(\lambda)$, *qui sont égaux à* $\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}$ *et à* $-\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$ *si* $q_1 \neq q_2$, *et à* $\frac{1}{\sqrt{q}}$ *si* $q_1 = q_2 = q$. *On a*

$$J_1 = I, \textit{ainsi que pour } q_1 \neq q_2 \quad J_{-1} = I, \ \textit{et} \ J_{\lambda^{-1}} \circ J_\lambda = I.$$

4) *Pour* $|\lambda| = 1$, *les opérateurs* J_λ *se prolongent à* $L^2(\Omega)$ *et sont unitaires.*

Démonstration: Clairement si $|\lambda| > 1$, les coefficients $c_n(\lambda)$ sont bornés. Le prolongement analytique est trivialement défini, grâce à la diagonalisation.

Pour établir la relation $I_{\lambda^{-1}} \circ I_\lambda = c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})I$, on peut soit vérifier la relation $c_n(\lambda^{-1})c_n(\lambda) = c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$ pour $n \geq 0$, soit utiliser lemme de Schur qui montre que, si π^λ et $\pi^{\lambda^{-1}}$ sont irréductibles, $I_{\lambda^{-1}} \circ I_\lambda$ est un scalaire; on pourra alors se contenter de vérifier la relation annoncée sur les fonctions constantes. On obtiendrait ainsi la relation recherchée pour les valeurs de λ où π^λ est irréductible, et on la prolongerait par continuité.

On connait les zéros de $c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$ égaux à $\sqrt{q_1 q_2}^{\pm 1}$ en général et $\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}^{\pm 1}$, pour $q_1 \neq q_2$: on y reconnait les valeurs de non irréductibilité de π^λ.

L'énoncé général de 3) est clair, on peut seulement remarquer que la détermination de J_1 et éventuellement de J_{-1} se fait, soit par le calcul, soit en invoquant encore le lemme de Schur.

Le point 4) est une conséquence de ce que, pour $|\lambda| = 1$, on a $|c_n(\lambda)| = |c_{q_1,q_2}(\lambda)|$: ainsi J_λ est diagonalisable, avec des valeurs propres de module 1, dans des espaces propres orthogonaux.

La relation est à vérifier est triviale pour $n = 0$, claire pour $n = 2m + 1$, car alors on a $|c_{q_1,q_2}(\lambda)| = |c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})|$, enfin conséquence pour $n = 2m$ avec $m > 0$, de l'égalité $q_2 c_{q_2,q_1}(\lambda)c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1}) = q_1 c_{q_1,q_2}(\lambda)c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1})$.

On peut aussi rappeler que l'équivalence unitaire de Π^λ et de $\Pi^{\lambda^{-1}}$ a été établie dans la proposition 2.4.9, grâce aux fonctions sphériques. ∎

On notera que J_1 n'est pas scalaire pour $q_1 = q_2 = q$, car $c_n(\lambda) = (-1)^n$. Ce dernier point est évidemment lié au fait que π^λ, pour $\lambda = -1$, est réductible.

Il sera utile pour la suite de connaître l'expression de J_λ dans le $N-$modèle.

On sait que, pour $|\lambda| > 1$, l'opérateur I est donné par la convolution sur N par le noyau α_λ, donné par $\alpha_\lambda(n) = (\frac{\lambda}{\sqrt{q_1 q_2}})^{v(n)}$.

Ainsi, pour $|\lambda| > 1$, l'opérateur de convolution normalisé J, qui correspond à J_λ est donné par la convolution à droite par le noyau ϖ_λ, où

$$\varpi_\lambda = \frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}\alpha_\lambda.$$

Donc l'opérateur J qui correspond à J_λ, admet un prolongement analytique pour $|\lambda| \leq 1$, donné par la convolution par le régularisé de ϖ_λ.

On considère, pour $m > 0$, le sous-ensemble $\mathcal{C}_m^\infty(N/H)$ de $\mathcal{C}_c^\infty(N/H)$, formé des fonctions invariantes à droite par N_m.

On a $\mathcal{C}_c^\infty(N/H) = \bigcup \mathcal{C}_m^\infty(N/H)$.

Soit le noyau ϖ_λ^m défini sur $N - H$, coïncidant avec ϖ_λ sur $N - N_{-m}$, et qui sur N_{-m} est constant et est égal à la moyenne de ϖ_λ sur N_{-m}.

On vérifie, sans peine, que la restriction à $\mathcal{C}_m^\infty(N/H)$ de l'opérateur J, est égal à la convolution à droite par ϖ_λ^m.

On remarque ensuite que, pour $m > 0$, $K(0,m) \cap wNw = N_{-m}$. Ainsi le noyau régularisé ϖ_λ^m correspond à l'image de α_λ^m, par le changement de variable, $n \mapsto wnw$ défini sur N_{-m}, car les fonctions sur K/N_0, invariantes à droite par $K(0,m)$, correspondent dans le N−modèle aux fonctions sur N/H, invariantes à droite par N_{-m}. On obtient, vu le calcul fait pour γ_λ,

$$\varpi_\lambda^m|_{N_m} = \frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}(1+\frac{1}{q_1})^{-1}c_m(\lambda) = \frac{1}{c_{q_1,q_2}(\lambda)}(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1q_2}})^{-m}c_\pm(\lambda),$$

d'après la proposition 4.3.5, avec $c_\pm = c_+$ si m est pair, et $c_\pm = c_-$ si m est impair.

Les opérateurs d'entrelacement permettent de redémontrer directement

Proposition 2.7.3 *Les deux représentations de Steinberg, st qui est réalisée comme sous-représentation de $V^{\sqrt{q_1q_2}}$, et st′ qui l'est comme quotient de $V^{\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}}$, sont équivalentes.*

Démonstration: On rappelle que, pour $\lambda = \sqrt{q_1q_2}$, la forme $\int_K f(k)\,dk$ est G−invariante dans V^λ, elle est égale d'ailleurs à $E^{\mathcal{B}^0}$. La représentation st est justement définie dans l'espace des fonctions annulées par cette forme, c'est à dire dans $\bigoplus_{n>0}\Delta_n\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

On vérifie que pour $n > 0$, on a $c_n(\lambda) \neq 0$: en effet, comme $c_{q_1,q_2}(\lambda) = 0$ et $c_{q_2,q_1}(\lambda) = 0$, $c_{q_1,q_2}(\lambda^{-1}) = 1+\frac{1}{q_1}$ et $c_{q_2,q_1}(\lambda^{-1}) = 1+\frac{1}{q_2}$, donc I est injectif sur st. La représentation st' est réalisée dans le quotient de $V^{\lambda^{-1}}$ par l'espace des constantes, or l'image de st est un supplémentaire de l'espace des constantes. La proposition s'en déduit. ∎

4.5 Série complémentaire

On peut définir une forme sesquilinéaire invariante sur V^λ, quand la contragrédiente de π^λ, qui est égale à $\pi^{\lambda'}$ pour $\lambda' = \bar{\lambda}^{-1}$, est équivalente à π^λ. Ceci n'est possible que si $\lambda' = \lambda$ ou $\lambda' = \lambda^{-1}$. Dans le premier cas, on a $|\lambda| = 1$, c'est la série principale. Dans l'autre cas, $\lambda' = \lambda^{-1}$, implique λ réel.

On peut considèrer la forme $< f, g >_\lambda = < f, I_\lambda(g) >$, asociée à la dualité $<,>$ entre π^λ et $\pi^{\lambda'}$; on utilise le $\Omega-$modèle pour la décrire, mais on lui préférera la forme proportionnelle obtenue en remplaçant I_λ par J_λ.

La forme sesquilinéaire obtenue se détermine alors facilement. On obtient

$$< f, g >_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(\lambda) < \Delta_n f, \Delta_n g >,$$

avec $c'_n(\lambda) = \frac{c_n(\lambda)}{c_0(\lambda)}$.

Comme $c'_0(\lambda) = 1$, il existera une forme hermitienne sur l'espace de π^λ, si et seulement si les coefficients de J_λ sont définis et strictement positifs.

On vérifie, par un calcul élémentaire, que l'on a $c'_n(\lambda) > 0$ pour tout $n > 0$, si et seulement si $\lambda \in I_c$, où

$$I_c =]\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}, \sqrt{q_1 q_2}[\bigcup] - \sqrt{\frac{q_j}{q_i}}, -\sqrt{\frac{q_i}{q_j}}[,$$

avec $q_i < q_j$, et $i, j \in \{1, 2\}$. On a ainsi montré

Théorème 4.5.1 *Pour $\lambda \in I_c$, il existe un produit hermitien sur V^λ.*

La représentation dans le complété de cet espace, noté $\mathcal{H}_\lambda$ sera dite appartenir à la série complémentaire.

De plus on a $\mathcal{H}^\lambda \subset \mathcal{H}_\lambda$ pour $|\lambda| > 1$, et $\mathcal{H}^\lambda \supset \mathcal{H}_\lambda$ pour $|\lambda| < 1$.

Enfin pour $\lambda < 0$, les espaces $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{H}_{|\lambda|}$ sont équivalents.

Démonstration: Le premier point a déja été établi.

Soit $\lambda \in I_c$, on remarque ensuite que si $|\lambda| > 1$, $c_n(\lambda) \to 0$, et si $|\lambda| < 1$, $c_n(\lambda) \to \infty$. Le deuxième point s'en déduit.

Enfin, si $\lambda < 0$, $\lambda \in I_c$, alors $|\lambda| \in I_c$ et on vérifie que $\frac{c'_n(\lambda)}{c'_n(|\lambda|)}$ ne prend qu'au plus trois valeurs, en fonction de la parité de n.

Ainsi les produits scalaires définis sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à l'aide de J_λ et de $J_{|\lambda|}$ sont équivalents, et définissent le même complété. ∎

Proposition 4.5.2 *Soit $\lambda \in I_c$. L'accouplement $<,>$ entre les représentations contragrédientes V^λ et $V^{\lambda^{-1}}$ se prolonge en une dualité entre $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{H}_{\lambda^{-1}}$, pour laquelle on a*

$$| < f, g > |^2 \leq < f, f >_\lambda < f, f >_{\lambda'},$$

pour $f \in \mathcal{H}_\lambda$ et $g \in \mathcal{H}_{\lambda^{-1}}$. Et pour cette dualité, $\mathcal{H}_\lambda$ s'identifie au dual de $\mathcal{H}_{\lambda^{-1}}$.

Démonstration: Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On a puisque $c'_n(\lambda^{-1}) = c'_n(\lambda)^{-1}$,

$$| < f, g > | = | \sum_{n \geq 0} < \Delta_n f, \Delta_n g > | = \sum_{n \geq 0} < \sqrt{c'_n(\lambda)} \Delta_n f, \sqrt{c'_n(\lambda^{-1})} \Delta_n g > |$$

$\leq \|f\|_\lambda \|g\|_{\lambda^{-1}}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, car on a

$$\|f\|_\lambda^2 = \sum_{n \geq 0} c'_n(\lambda) < \Delta_n f, \Delta_n f >, \text{ et } \|g_{\lambda^{-1}}\|^2 = \sum_{n \geq 0} c'_n(\lambda^{-1}) < \Delta_n g, \Delta_n g > .$$

On vérifie aussi que l'application $f \mapsto \sum_{n \geq 0} c'_n(\lambda) \Delta_n f$ réalise la dualité de $\mathcal{H}_\lambda^{-1}$ sur $\mathcal{H}_\lambda$. ■

4.6 Représentations uniformément bornées

Le but de cette section est de construire un produit hermitien sur V^λ ou sur $C_c^\infty(N/H)$, de sorte que l'action de π^λ se prolonge dans un espace de Hilbert, et que pour la norme d'opérateurs, on ait $\sup_{g \in G} \|\pi^\lambda(g)\| < \infty$.

Ce sera possible si $\sigma = |\lambda| \in]\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}, \sqrt{q_1 q_2}[$, le produit scalaire $<,>_\sigma$, étant celui de la série complémentaire réalisée dans le N/H−modèle.

Pour cela, on s'inspirera de l'article de Lohoué [L], qui traite ce même problème pour les groupes de Lie réels de rang un, à l'aide des espaces de Lorentz $L_{p,q}$, dont les propriétés décrites par Hunt [H], permettent de contourner l'absence de transformation de Fourier sur N/H. Cette méthode a d'ailleurs été utilisée par [M. Z.] dans le cas du groupe libre.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.6.1 *Soient $\sigma \in]\frac{1}{\sqrt{q_1 q_2}}, \sqrt{q_1 q_2}[$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = \sigma$.*

L'espace V^λ, réalisé comme espace de fonctions sur N/H, se plonge dans $\mathcal{H}_\sigma$, et $\pi^\lambda(g)$, pour $g \in G$, admet un prolongement par continuité à $\mathcal{H}_\sigma$, prolongement que l'on notera $\pi_\sigma^\lambda(g)$.

De plus, il existe une constante c_σ, qui ne dépend que de σ, telle que

$$\|\pi^\lambda(g)\|_\sigma \leq c_\sigma,$$

où $\|.\|_\sigma$ désigne la norme des opérateurs sur $\mathcal{H}_\sigma$.

Démonstration: Pour $\sigma = 1$, le théorème à démontrer est évident: en effet l'opérateur d'entrelacement est trivial, car on est ainsi dans la série principale unitaire, et le produit scalaire est indépendant de λ.

On supposera donc désormais que $\sigma \neq 1$.

On va commencer par comparer sur B les représentations π^λ et π^σ.

On a le lemme

Lemme 4.6.2 *On a, pour $b \in B$, la relation*

$$\pi^\lambda(b) = (\frac{\lambda}{\sigma})^{\nu(b)}\pi^\sigma(b).$$

en particulier, $\pi^\lambda(b)$ se prolonge en un opérateur unitaire.

Démonstration: On vérifie que l'on a $\pi^\lambda(n_0)\varphi(n) = \varphi(n_0^{-1}n)$, pour $n_0 \in N$, et $\varphi \in C_c^\infty(N/H)$, donc $\pi^\lambda(n_0)$ ne dépend pas de λ, comme on a $\nu(n_0) = 0$, la relation est établie sur N.

On a $\tau^{-1}nw = \tau^{-1}n\tau w w^{-1}\tau^{-1}w$, d'où

$$\pi^\lambda(\tau)\varphi(n) = \varphi(\tau^{-1}n\tau w)\chi_\lambda^{-1}(w^{-1}\tau^{-1}w) = \varphi(\tau^{-1}n\tau w)\chi_\lambda^{-1}(\tau),$$

que l'on compare à $\pi^\sigma(\tau)\varphi(n)$, ce qui donne $\pi^\lambda(\tau) = \frac{\sigma}{\lambda}\pi^\sigma(\tau)$.

Comme B est engendré par N et τ, le lemme s'en déduit. ∎

L'image de V^λ est $C_c^\infty(N/H)\cup\pi^\lambda(w)C_c^\infty(N/H)$; pour démontrer que V^λ se plonge dans $\mathcal{H}_\sigma$, il suffira de prouver que la restriction de $\pi^\lambda(w)$ à $C_c^\infty(N/H)$ est continue pour la norme $\|.\|_\sigma$.

Ceci sera l'une conséquence de la continuité de π^λ sur $C_c^\infty(N/H)$ pour la norme $\|.\|_\sigma$.

Comme $C_c^\infty(N/H)$ est dense dans dans $\mathcal{H}_\sigma$, en vertu de la décomposition de Bruhat $G = B \cup BwB$, et du fait que $\pi^\lambda|_B$ est unitaire dans $\mathcal{H}_\sigma$, pour démontrer que le théorème, il suffira de démontrer que $\pi^\lambda(w)$ est continu sur $C_c^\infty(N/H)$ pour $\|.\|_\sigma$, et que sa norme est majorée par une constante c_σ, qui ne dépend que de σ.

Démontrons alors ce point. Pour cela, il faut comparer $\pi^\lambda(w)$ et $\pi^\sigma(w)$. On peut partir d'une fonction $f \in C_c^\infty(N/H)$, on pose $g = \pi^\sigma(w)f$, on sait que $\|g\|_\sigma = \|f\|_\sigma$, car π^σ est une représentation unitaire, car dans la série complémentaire.

Pour $n \in N-H$, on sait, puisque $w^2 \in H$, qu'on peut écrire $w^{-1}nw = n'wb$ avec $v(n) = -v(n') = \nu(b)$.

On a $\pi^\lambda(w)f(n) = f(n')\chi_\lambda^{-1}(b)$, or $g(n) = f(n')\chi_\sigma^{-1}(b)$, on obtient ainsi $\pi^\lambda(w)f = \mu_\alpha g$, avec $\mu_\alpha(n) = \alpha^{v(n)}$, pour $\alpha = \frac{\sigma}{\lambda}$. Le théorème sera ainsi la conséquence de la proposition suivante

Proposition 4.6.3 *Soit $\sigma \in]\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}, \sqrt{q_1q_2}[$. ayant réalisé $\mathcal{H}_\sigma$ comme complété de $C_c^\infty(N/H)$, on considère, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $|\alpha| = 1$, la fonction définie sur $N-H$, μ_α, égale à $\mu_\alpha(n) = \alpha^{v(n)}$.*

Il existe une constante c_σ, telle que si $f \in \mathcal{H}_\sigma$ la fonction $\mu_\alpha f \in \mathcal{H}_\sigma$, et

$$\|\mu_\alpha f\|_\sigma \leq c_\sigma \|f\|_\sigma.$$

4.7 Etude d'un multiplicateur

Cette section est consacrée à la démonstration de la proposition précédente. Pour cela, on introduira les espaces $L_{p,q}$ de Lorentz, dont on rappellera ici, les propriétés essentielles.

On considère un groupe localement compact X, muni d'une mesure de Haar m.

A une fonction f mesurable sur X, on associe sa fonction distribution λ_f et la fonction f^* définies sur $\mathbb{R}_+$, par

$\lambda_f(y) = m(\{x \in X \mid |f(x)| > y\})$, et $f^*(t) = \inf\{y > 0 \mid \lambda_f(y) \leq t\}$.

On définit alors les espaces de Lorentz $L_{p,q}$ définis pour $0 < p, q < \infty$ et $L_{p,\infty}$ pour $0 < p < \infty$, comme espace des fonctions mesurables sur X dont la norme

$$\|f\|_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \qquad \text{ou } \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty.$$

La proposition suivante récapitule les résultats dont nous nous servirons.

Proposition 4.7.1 *(Hunt [H])*
1) *Les espaces $L_{p,q}$ définis ci-dessus sont des espaces de Banach pour les normes $\|.\|_{p,q}$.*
2) *Le dual de $L_{p,q}$, pour $1 < p, q < \infty$, est $L_{p',q'}$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, le dual de $L_{p,1}$, pour $1 < p < \infty$, est $L_{p',\infty}$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

3) *On a*

$$\|fg\|_{p,q} \leq C\|f\|_{p_0,q_0}.\|g\|_{p_1,q_1},$$

avec $1+\frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_1}$, $1+\frac{1}{q}=\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}$ *et pour une constante* C, *ne dépendant que de* p_0,p_1,q_0,q_1.

4) *On a*

$$\|f\star g\|_{p,q} \leq C'\|f\|_{p_0,q_0}.\|g\|_{p_1,q_1},$$

avec $0<\frac{1}{p}-1=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_1}-1<1$, $0\leq\frac{1}{q}=\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_1}\leq 1$, *et pour une constante* C', *ne dépendant que de* p_0,p_1,q_0,q_1.

Ces outils vont permettre la démonstration de la proposition 4.6.3.

Lemme 4.7.2 *La majoration* $\|\mu_\alpha f\|_\sigma \leq c_\sigma\|f\|_\sigma$, *est vraie pour* f *quelconque dans* $\mathcal{H}_\sigma$, *dès qu'elle l'est pour tout* $f\in\mathcal{C}^\infty(N_0/H)$.

Démonstration: En effet, tout d'abord on peut remarquer qu'il suffit d'établir cette majoration sur le sous-espace dense $\mathcal{C}_c^\infty(N/H)$, et de conclure par continuité.

On étudie ensuite, $\pi^\sigma(\tau^k)(\mu_\alpha f)$, où π^σ désigne l'action dans le $N/H-$modèle, donnée par $\pi^\sigma(\tau^k)g(n)=g(\tau^{-k}n\tau^k)\chi_\sigma^{-1}(\tau^k)$.

Comme $v(\tau^{-k}n\tau^k)=v(n)-2k$, on a $\mu_\alpha(\tau^{-k}n\tau^k)=\alpha^{-2k}\mu_\alpha(n)$. On en déduit, comme π^σ est unitaire, que $\|\mu_\alpha\pi^\sigma(\tau^k)(f)\|_\sigma=\|\mu_\alpha f\|_\sigma$. On voit, d'après la formule explicite, que l'image $\pi^\sigma(\tau^k)$ de $\mathcal{C}^\infty(N_0/H)$ est $\mathcal{C}^\infty(N_{2k}/H)$, on établit ainsi le lemme. ∎

On notera encore J_s l'opérateur d'entrelacement normalisé opérant sur le $N/H-$modèle. Le prolongement analytique de J_sf, pour $f\in\mathcal{C}^\infty(N_0/H)$ est facile à établir.

On détermine pour J_sf pour $|s|>1$, par une convolution par le noyau ϖ_s sur N, dont on rappelle la valeur, $\varpi_s(n)=\frac{1}{c_{q_1,q_2}(s)}(\frac{s}{\sqrt{q_1q_2}})^{v(n)}$: c'est une fonction analytique de s.

Comme $N_0w\subset K$, on utilise le prolongement analytique ainsi défini, qui coïncide avec celui défini sur les fonctions déterminées par leur restriction à K.

Enfin, on supposera quitte à le remplacer par σ^{-1}, que $\sigma>1$, et on définira $\beta\in]0,1[$, par $\sigma=\sqrt{q_1q_2}^{\beta}$, pour σ comme ci-dessus.

On remarque que, dans la dualité entre $\mathcal{H}_\sigma$ et $\mathcal{H}_{\sigma^{-1}}$, le dual du sous-espace $\mathcal{C}^\infty(N_0/H)$ dans l'un, est le sous-espace $\mathcal{C}^\infty(N_0/H)$ dans l'autre.

On notera enfin que $c_{q_1,q_2}(\sigma) > 0$, et que $c_{q_1,q_2}(\sigma^{-1}) < 0$, car le numérateur de $c_{q_1,q_2}(\lambda)$ est toujours positif sur $]\frac{1}{\sqrt{q_1q_2}}, \infty[$, alors que son dénominateur est $1 - \lambda^{-2}$.

On posera par la suite, pour $0 < \beta < 1$,

$$r_\beta = \frac{2}{1-\beta}, \text{ et } s_\beta = \frac{2}{1+\beta}.$$

Lemme 4.7.3 *Soit $f \in \mathcal{H}_{\sigma^{-1}}$, alors $f \in L_{r_\beta}$ et*

$$\|f\|_{r_\beta} \leq k\|f\|_{\sigma^{-1}},$$

pour une constante $k = k(\beta)$, qui ne dépend que de β.

Démonstration: Le point clef de la démonstration consiste à évaluer, pour $t > 0$, la mesure de l'ensemble

$$E_t = \{x \in N \mid \varpi_{\sigma^{-1}}(x) = c_{q_1q_2}(\sigma^{-1})^{-1}(\frac{\sigma}{\sqrt{q_1q_2}})^{v(x)} > t\}.$$

Comme $(\frac{\sigma}{\sqrt{q_1q_2}})^{v(x)} = \sqrt{q_1q_2}^{(\beta-1)v(x)}$, compte tenu de $m(N_p) \asymp \sqrt{q_1q_2}^p$, [12] on trouve qu'il existe une constante k telle que $m(E_t) \leq kt^{\frac{-1}{1-\beta}}$.

Donc $\|\varpi_{\sigma^{-1}}\|_{\frac{1}{1-\beta},\infty} \leq k$.

On pose $s_\beta = \frac{2}{1+\beta}$, comme on a $\frac{1}{r_\beta} = (1-\beta) + \frac{1}{s_\beta}$, et que $\frac{1}{\infty} = 0$, on en déduit, en appliquant le 4) de la proposition 4.7.1, que

$$\|J_\sigma f\|_{r_\beta,2} \leq k\|f\|_{s_\beta,2}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(N_0/H)$.

Comme d'après le 2) de cette même proposition, on a $\frac{1}{r_\beta} + \frac{1}{s_\beta} = 1$, le dual de $L_{r_\beta,2}$ est $L_{s_\beta,2}$, d'où on en déduit que, pour $g \in \mathcal{C}^\infty(N_0/H)$,

$$| < J_\sigma g, g > | \leq \|g\|_{s_\beta,2}.$$

La dualité entre $\mathcal{H}_\sigma$ et $\mathcal{H}_{\sigma^{-1}}$ permet de conclure. ∎

Lemme 4.7.4 *Soit σ comme ci-dessus. On pose, pour $|\alpha| = 1$, $x \in N$ et $\Re s > 1$,*

$$M_{\alpha,s}(x) = \int_N |\mu_\alpha(xy) - \mu_\alpha(y)|^2 \varpi_s(y)\, dy,$$

[12] la notation $a \asymp b$ signifie que le rapport $\frac{a}{b}$ est borné inférieurement et supérieurement par des réels strictement positifs.

cette fonction admet prolongement analytique, noté encore $M_{\alpha,s}$, dans un domaine contenant σ^{-1}. Soit $M_\alpha = M_{\alpha,\sigma^{-1}}$.

Les fonctions $M_\alpha \in L_{\frac{1}{\beta},\infty}$, et il existe une constante $C(\sigma)$, telle que pour $|\alpha| = 1$, $\|M_\alpha\|_{\frac{1}{\beta},\infty} \leq C(\sigma)$.

Démonstration: On voit sans peine, sous réserve de convergence que $M_\alpha(x)$ ne dépend que de la valuation de x, et que si l'on remplace x par un conjugué $\tau^k x \tau^{-k}$, on obtient vu l'homogénéité de la fonction intégrée, la relation $M_\alpha(\tau^k x\tau^{-k}) = \lambda^{-2k} M_\alpha(x)$.

Ces arguments permettraient donc de conclure, si on pouvait savoir à priori que, sur $N_0^* \cup N_{-1}^*$, la fonction M_α est bornée uniformément par rapport à α.

On a $M_\alpha(x) \leq K\sigma^{v(x)} = K\sqrt{q_1q_2}^{\beta v(x)}$, $m(N_k^*) \asymp m(N_k) \asymp \sqrt{q_1q_2}^{-k}$, et $m(\{x \mid M_\alpha(x) > t\}) \asymp t^{\frac{1}{\beta}}$, on conclurait aisément que $M_\alpha \in L_{\frac{1}{\beta},\infty}$, la majoration utilisée étant uniforme par rapport à α, et on en déduirait le lemme sans autre calcul.

Il est donc nécessaire de calculer $M_{\alpha,s}$, ce qui d'ailleurs, est très simple.

En effet si $v(x) \neq v(y)$, alors $v(xy) = \sup(v(x), v(y))$. On pose $v(x) = k$, donc si $v(y) > k$, $v(xy) = v(y)$ et $\mu_\alpha(xy) - \mu_\alpha(y) = 0$.

Ainsi $c_{q_1q_2}(s)M_{\alpha,s}(x) =$

$$= \left(\frac{s}{\sqrt{q_1q_2}}\right)^k \int_{N_k} |\alpha^{v(y)-v(xy)} - 1|^2\, dy + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{q_1q_2}}\right)^{k-l}|\alpha^{-l} - 1|^2 m(N_{k-l}^*),$$

qui s'écrit sous la forme $s^k c^{\pm}(\alpha, \lambda)$, où $\pm 1 = (-1)^k$,et

$$c^{\pm}(\alpha,\lambda) = c_0^{\pm}(\alpha) + c_1^{\pm}\left(\frac{1}{1-s^{-2}} - 2\Re\frac{1}{1-(\alpha s)^{-2}} + c_2^{\pm}\left(\frac{s^{-1}}{1-s^{-2}} - 2\Re\frac{\alpha s}{1-(\alpha s)^{-2}}\right)\right),$$

où $c_0^{\pm}(\alpha)$ est une fonction continue de α, et $c_1^{\pm}, c_1^{\pm}$ sont des constantes.

Cette formule montre le prolongement analytique de M_α jusque à $s = \sigma^{-1}$, et donne les majorations annoncées, d'où le lemme. ∎

On calcule ensuite pour $f \in C^\infty(N_0/H)$,

$$\int_{N_0\times N_0} |f(x) - f(y)|^2 \varpi_s(xy^{-1})\, dxdy = 2c'(s)\|f\|_2^2 + 2 < J_s f, f >,$$

comme on le voit sans peine en développant l'expression, dans laquelle on a posé $c'(s) = \int_{N_0} \varpi_s(x)\, dx = \frac{c_+(s)}{c_{q_1q_2}(s)}$, où $(1 - s^{-2})c_+(s) = 1 - \frac{1}{q_1} + \frac{q_2-1}{\sqrt{q_1q_2}}s^{-1}$;

On notera que $\varpi_\sigma > 0$, et $\varpi_{\sigma^{-1}} < 0$, d'où $c'(s) > 0$, si $s = \sigma$, et $c'(s) < 0$, si $s = \sigma^{-1}$.

On remarque aussi, pour f fixé comme dans l'énoncé, les intégrales écrites ci-dessus convergent partout, en dehors des zéros de c_{q_1,q_2}, et comme ce sont en fait des sommes finies, l'analyticité des résultats est évidente.

En particulier pour $s = \sigma^{-1}$, on obtient

$$\|f\|^2_{\sigma^{-1}} = c'_{\sigma^{-1}}\|f\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_{N_0\times N_0} |f(x) - f(xy)|^2 \varpi_{\sigma^{-1}}(y)\, dxdy,$$

en effectuant un changement de variable dans l'intégrale. On notera que $-\varpi_{\sigma^{-1}} > 0$.

Etudions l'expression analogue pour $\mu_\alpha f$.

On remarque que $c'_{\sigma^{-1}}\|\mu_\alpha f\|_2^2 = c'_{\sigma^{-1}}\|f\|_2^2 \leq \|f\|^2_{\sigma^{-1}}$.

On calcule

$$R(\alpha, f) = \int_{N_0\times N_0} |\mu_\alpha(x)f(x) - \mu_\alpha(xy)f(xy)|^2 \frac{-\varpi_{\sigma^{-1}}(y)}{2}\, dxdy,$$

que l'on écrit

$$\mu_\alpha(x)f(x) - \mu_\alpha(xy)f(xy) = \mu_\alpha(x)(f(x) - f(xy)) + (\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(xy))f(xy),$$

d'où, comme $|\mu_\alpha| = 1$, $R(\alpha, f) \leq I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \int_{N_0\times N_0} |f(x) - f(xy)|^2(-\varpi_{\sigma^{-1}}(y))\, dxdy \leq |< M_\alpha, |f|^2 >|,$$

$$I_2 = \int_{N_0\times N_0} |\mu_\alpha(x) - \mu_\alpha(xy)|^2 |f(x)|^2(-\varpi_s(y))\, dxdy, \leq < f, f >_{\sigma^{-1}}.$$

On a ainsi montré que $\|\mu_\alpha f\|^2_{\sigma^{-1}} \leq 2\|f\|^2_{\sigma^{-1}} + |< M_\alpha, |f|^2 >|$.

On a vu que $f \in L_{r_\beta,2}$, donc $|f|^2 \in L_{\frac{1}{1-\beta},1}$, comme $M_\alpha \in L_{\frac{1}{\beta},\infty}$, on en déduit que $|< M_\alpha, |f|^2 >| \leq \|M_\alpha\|_{\frac{1}{\beta},\infty}\|f\|^2_{r_\beta,2}$, d'après la dualité entre $L_{\frac{1}{1-\beta},1}$ et $L_{\frac{1}{\beta},\infty}$, ce qui établit la proposition pour σ^{-1}.

Pour l'obtenir dans $\mathcal{H}_\sigma$, on remarque que $< f, \mu_\alpha g > = < \mu_{\bar\alpha} f, g >$, pour des fonctions de $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N_0/H)$, on utilise alors la dualité entre $\mathcal{H}_\sigma$ et $\mathcal{H}_{\sigma^{-1}}$ pour conclure. Ainsi la proposition 4.6.3 est démontrée, d'où finalement le théorème. ∎

Remarque sur le phénomène de Kunze-Stein

On utilise la formule donnant les fonctions sphériques élémentaires, et on vérifie que $c_1(\tau^p) \asymp p(\sqrt{q_1 q_2})^{-p}$ et que $m(K\tau^p K) \asymp (q_1 q_2)^p$, d'où on déduit que $c_1 \in L^{2+\epsilon}$, pour $\varepsilon > 0$.

On peut alors utiliser la méthode de Lohoué dans l'article [L], pour démontrer que $L^r(G) \star L^2(G) \subset L^2(G)$, pour $1 \leq r < 2$, et que la convolution par une fonction de $L^r(G)$ est un opérateur borné de $L^2(G)$. Ceci établit le phénomène de Kunze-Stein pour le groupe G.

On peut aussi, partant de la même estimation de la fonction sphérique c_1, copier la démonstration faite par Cowling [C], dans le cas des groupes de Lie semi-simples à centre fini, et utiliser alors les décompositions de Cartan, Bruhat et d'Iwawsawa, qui ont été établies pour G dans ce mémoire, et démontrer alors, par une autre méthode, le phénomène de Kunze-Stein.

Chapitre V: Restriction des séries principales au groupe B et applications

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude des restrictions à B des représentations Π^λ pour $|\lambda| = 1$, et des π^λ pour λ quelconque.

Pour cela, on va réaliser ces représentations dans le $N/H-$modèle.

5.1 Réalisations et équivalences

On remarque tout d'abord, si $f \in \mathcal{H}^\lambda$ et si $\varphi(n) = f(nw)$, on a

$$\Pi^\lambda(n_0)\varphi(n) = \varphi(n_0^{-1}n), \text{ et } \Pi^\lambda(\tau^k)\varphi(n) = \varphi(\tau^{-k}n\tau^k)(\frac{\lambda}{\sqrt{q_1q_2}})^{-k},$$

car $\tau^{-k}nw = \tau^{-k}n\tau^k ww^{-1}\tau^{-k}w$, $\tau^{-k}n\tau^k \in N \rtimes B$, et $w^{-1}\tau^{-k}w \in B$, avec $\nu(w^{-1}\tau^{-k}w) = k$

On notera R^λ la restriction à B de Π^λ et r^λ celle de π^λ.

La restriction à V^λ de la représentation R^λ n'est pas irréductible. En effet, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(N/H)$ est un sous-espace stable par B de codimension 1. On notera r^λ la représentation de B dans l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(N/H)$ ainsi obtenue.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on notera ε_α le caractère de B, défini par $\varepsilon_\alpha(b) = \alpha^{\nu(b)}$.

Proposition 5.1.1 1) *Soient* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*$, *et* $\alpha = \frac{\lambda'}{\lambda}$, *on a* $r^\lambda = \varepsilon_\alpha \otimes r^{\lambda'}$.
2) *Soient* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*$, *avec* $|\lambda| = |\lambda'| = 1$ *et* $\alpha = \frac{\lambda'}{\lambda}$, *on a* $R^\lambda = \varepsilon_\alpha \otimes R^{\lambda'}$.

Démonstration: La démonstration est évidente, car vu les formules établies ci-dessus, il suffit de s'assurer que les représentations opèrent dans le même espace, ce qui est le cas de r^λ, mais ce n'est pas le cas pour la restriction à B de V^λ.

Les espaces $\mathcal{H}^\lambda$ et $\mathcal{H}^{\lambda'}$ sont différents si $|\lambda| \neq |\lambda'|$, ces espaces ne sont intéressants que lorsque $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, dans ce cas, ils sont égaux à $L^2(N/H)$. ∎

On remarquera que, pour r^λ, les sous-espaces invariants ne dépendent pas de λ, car ε_α agit par des scalaires.

Soit $V_0 = \{f \in \mathcal{C}_c^\infty(N/H) \mid \int_N f(n)\, dn = 0 \}$, la représentation r^λ n'est pas irréductible, elle contient V_0, comme sous-espace stable de codimension 1 du précédent.

On notera r_0^λ la restriction de la représentation r^λ à V_0.

On remarquera que V_0 est l'espace de la restriction à B de la représentation de Steinberg.

De même on peut considérer le sous-module r_+^λ (resp. r_-^λ) qui est la restriction à B de r^λ au sous-module t^1 (resp. t^2). On obtient ainsi la restriction à B de $t^1 \cap V_0$ (resp. $t^2 \cap V_0$) tordu par un caractère de B.

Dans le cas, où $q_1 \neq 1$ et $q_2 \neq 1$, on obtient trois représentations différentes de B. Dans le cas contraire, il n'y en a qu'une à torsion près, comme on le verra plus loin.

La question de l'équivalence de ces représentations, qui ne diffèrent que par un caractère de B trivial sur N, et dont la restriction à N est la représentation régulière de N, n'admet une solution raisonnable que dans le cas unitaire.

Proposition 5.1.2 *Les représentations R^λ de B dans $L^2(N/H)$ sont équivalentes pour $|\lambda| = 1$.*

Démonstration: Soient λ, λ' vérifiant $|\lambda| = |\lambda'| = 1$, et μ tel que $\mu^2\lambda = \lambda'$.

On sait que les représentations Π^μ et $\Pi^{\mu^{-1}}$ sont unitaires et unitairement équivalentes, et que le produit scalaire peut être pris comme la norme L^2 dans le $N-$modèle.

Ainsi en notant J l'opérateur d'entrelacement, qui est alors un opérateur unitaire sur $L^2(N/H)$, et vérifie $\Pi^\mu \circ J = J \circ \Pi^{\mu^{-1}}$.

On pose alors $\beta = \mu\lambda$, le caractère ε_β est unitaire, on a $\Pi^{\lambda'} = \varepsilon_\beta \otimes \Pi^\mu$ ainsi que $\Pi^\lambda = \varepsilon_\beta \otimes \Pi^{\mu^{-1}}$; la proposition s'en déduit. ∎

Remarque Cette méthode ne s'applique pas à r^λ, car $C_c^\infty(N/H)$ n'est pas stable par l'opérateur d'entrelacement J. Cet opérateur J est défini par la convolution avec le noyau ϖ^μ qui n'est pas à support compact.

5.2 Irréductibilité

Le résultat, différera suivant que l'arbre est ou non homogène, la démonstration sera commune dans sa plus grande partie.

Théorème 5.2.1 *On suppose que G opère de façon triplement transitive sur l'espace de bouts d'un arbre homogène. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

1) *La représentation r_0^λ à valeurs dans V_0, est irréductible.*

2) *On suppose de plus que $|\lambda| = 1$, alors la représentation unitaire R^λ est irréductible.*

Théorème 5.2.2 *On suppose que l'arbre est homogène numéroté ou semi-homogène, et que le groupe G y est triplement transitif. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.*

1) *Les représentations r_+^λ et r_-^λ sont irréductibles, et r_0^λ est la somme de ces représentations.*

2) *On suppose de plus que $|\lambda| = 1$, on note R_+^λ (resp.R_-^λ) l'adhérence de r_+^λ (resp.r_-^λ) dans $L^2(N/H)$.*

Les représentations unitaires R_+^λ et R_-^λ sont irréductibles, et $L^2(N/H)$ est la somme directe orthogonale de ces représentations.

On notera V_+ le sous-module engendré par $r^\lambda(B)(\mathbb{I}_{N_1} - c\mathbb{I}_{N_0})$, avec c vérifiant $m(N_1) + cm(N_0) = 0$, de même V_- le sous-module engendré par $r^\lambda(B)(\mathbb{I}_{N_0} - c'\mathbb{I}_{N_{-1}})$, avec c' vérifiant $m(N_0) + c'm(N_{-1}) = 0$.

Lemme 5.2.3 *L' espace V_+ coïncide avec la restriction à B de $t^1 \cap V_0$, et l'espace V_- avec celle de $t^2 \cap V_0$. Les espaces V_+ et V_- sont orthogonaux. De plus, on a $V_0 = V_+ \oplus V_-$.*

Démonstration: On remarquera, que les modules $V_\pm$ ne dépendent pas de λ. On calcule ensuite l'image dans le $N-$modèle de la fonction $f_{y,\lambda} \in V^\lambda$ définie par sa restriction à K_y égale à 1, on posera pour simplifier $f_{p,\lambda} = f_{x_p,\lambda}$, et on notera $\mu = \lambda\sqrt{q_1q_2}$.

On va déterminer l'image de $f_{p,\lambda}$.

On remarque que $\tau^p w \in K_{x_p}$, et $N_p \subset K_{x_p}$: donc si $n \in N_p$, comme $n\tau^p w \in K_{x_p}$, on a $f(nw) = f(nww^{-1}\tau^p w)\chi_\lambda(w^{-1}\tau^p w) = f(n\tau^p w)\mu^p = \mu^p$.

Si $n \notin N_p$, soit $v(n) = k > p$, on peut écrire $nw = w^{-1}n'wb$ avec $v(n') = -k < -p$ et $\nu(b) = k$. vérifions que $w^{-1}n'w \in N_p$: en effet, $w(x_l) = x_{-l}$, donc $n'w(x_p) = n'(x_{-p})x_{-p}$ car $-k < -p$, d'où $w^{-1}n'w(x_p) = w^{-1}(x_{-p}) = x_p$. Ainsi $f(nw) = f(w^{-1}n'w)\mu^{-k} = \mu^{-k}$.

On obtient la formule,

$$f_{p,\lambda} = \mu^{-p}\mathbb{I}_{N_p} + \sum_{k>p} \mu^{-k}\mathbb{I}_{N_k^*} = (1 - \frac{1}{\mu})\sum_{k\geq p} \mu^{-k}\mathbb{I}_{N_k},$$

car $\mathbb{I}_{N_k^*} = \mathbb{I}_{N_k} - \mathbb{I}_{N_{k-1}}$.

On remarquera que cette série donnant la fonction $f_{p,\lambda}$ converge, non pas dans l'espace $L^2(N/H)$ avec la mesure usuelle, mais dans l'espace de la représentation Π^λ lue sur N/H.

On notera que

$$\pi^\lambda(\tau^k)f_{p,\lambda} = \mu^k f_{p-2k,\lambda},$$

car $f_{p,\lambda}(\tau^{-k}x) = f_{p,\lambda}(\tau^{-k}x\tau^k)\chi_\lambda^{-1}(\tau^{-k})$, et $\tau^{-k}K_{x_p}\tau^k = K_{x_{p-2k}}$.

On remarquera que $f_{p,\lambda} - f_{p+2,\lambda} = (1-\frac{1}{\mu})\mu^{-p}(\mathbb{I}_{N_p} - \mu^{-1}\mathbb{I}_{N_{p+1}})$.

Deux cas nous intéressent.

Si $\lambda = \lambda_0 = -\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}$, $\mu = -q_1$, et $f_{-1,\lambda_0} - f_{1,\lambda_0} = -(q_1+1)(\mathbb{I}_{N_{-1}} - \frac{1}{q_1}\mathbb{I}_{N_0})$, qui est donc un générateur de V_-, car $m(N_0) = q_1 m(N_{-1})$.

Si $\lambda = \lambda_0^{-1}$, $\mu = -q_2$, et $f_{0,\lambda_0^{-1}} - f_{2,\lambda_0^{-1}} = (1+\frac{1}{q_2})(\mathbb{I}_{N_0} - \frac{1}{q_2}\mathbb{I}_{N_1})$, qui est donc un générateur de V_+, car $m(N_1) = q_2 m(N_0)$.

On notera que $f_{0,\lambda_0^{-1}} - f_{2,\lambda_0^{-1}} \in t^1$ et $f_{-1,\lambda_0} - f_{1,\lambda_0} \in t^2$. D'où on en déduit que $V_+ \subset t^1$ et $V_- \subset t^2$.

Ainsi, pour pour montrer l'orthogonalité de V_+ et de V_-, il suffira de montrer l'orthogonalité de t^1 et de t^2 dans la dualité définie par l'accouplement défini par $< \varphi, \psi >= \oint_{G/B} \varphi\bar{\psi}$, dont on sait , d'après 1.7.4, qu'il est proportionnel à $\int_N \varphi(nw)\bar{\psi}(nw)\,dn$.

Cette orthogonalité est une conséquence la proposition 2.4.7, où il a été établi que pour tout sommet y de numéro 2 l'intégrale $\int_{K_y} f = 0$, pour $f \in t^1$.

En effet, ceci implique que $< f_{y,\lambda_0}, f >= 0$, car $\int_{K_y}$ est proportionnel à $\oint_{G/B}$, comme les f_{y,λ_0}, pour y décrivant les sommets de numéro 2, engendrent linéairement t^2, on en déduit l'orthogonalité de t^1 et de t^2, d'où celle de V_+ et de V_-. On remarquera que l'accouplement défini par l'intégrale sur N est invariante, bien entendu par $r^\lambda|_N$, mais encore que B agissant via r^λ, conserve cet accouplement au facteur $|\lambda|^\nu$ près. ∎

On supposera pour la suite le groupe G triplement transitif.

Lemme 5.2.4 *Soit $f \in L^2(N/H)$, $f \neq 0$, alors il existe $x, y \in N$ tels que*

$$\int_H f(xhy)\,dh \neq 0.$$

Démonstration: Si $\int_H f(xhy)\,dh = 0$, alors f est orthogonale dans $L^2(N)$ à la fonction caractéristique $\mathbb{I}_{xHyH}$. Soit W l'espace engendré par $\mathbb{I}_{xHyH}$, pour $x, y \in N$.

Montrons que $W = L^2(N/H)$. On sait d'après la proposition 1.5.11, puisque G est triplement transitif que $HyH = N_k^*$, si $y \in N - H$, avec $v(y) = k$, et $HyH = H$, si $x \in H$. comme $N_k = \sqcup_{l \leq k} N_l^* \cup H$, les fonctions $\mathbb{I}_{xN_k} \in W$. On note ensuite que les fonctions de $C_c^\infty(N/H)$ sont combinaisons linéaires finies de $\mathbb{I}_{xN_k}$, car elles sont à support compact, et invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact qui contient H.

Comme $C_c^\infty(N/H)$ est dense dans $L^2(N/H)$, on a $W = L^2(N/H)$, d'où $f = 0$, car f est orthogonale à $L^2(N/H)$. D'où le lemme. ∎

Lemme 5.2.5 1) *Soit* $V \subset L^2(N/H)$ *un sous-espace invariant fermé non nul, alors il existe* $f \in V$ *non nulle et invariante à gauche par* H.
2) *Soit* $W \subset C_c^\infty(N/H)$ *un sous-espace invariant non nul, alors il existe* $f \in W$ *non nulle invariante à gauche par* H.

Démonstration: montrons d'abord le 1). D'après le lemme précédent, si $f \neq 0$, on sait qu'il existe $x \in N$, tel que $R^\lambda(H)R^\lambda(x^{-1})f \neq 0$, avec $R^\lambda(H) = \int_H R^\lambda(h)\, dh$. La fonction $g = R^\lambda(H)R^\lambda(x^{-1})f$ convient. Pour établir le 2), il suffit de vérifier que $g \in W$, et pour cela de remarquer que $r^\lambda(H)C_c^\infty(N/H) \subset C_c^\infty(N/H)$. Ceci se vérifie en remarquant, que pour $f = \mathbb{I}_{xN_k}$, on a $r^\lambda(h)f = f$ pour $h \in H \cap xN_kx^{-1}$, qui est un sous-groupe ouvert de H, donc d'indice fini. Comme tout élément f de $C_c^\infty(N/H)$ est une combinaison linéaire finie de $\mathbb{I}_{xN_k}$, ainsi $r^\lambda(h)$ sera trivial sur une intersection finie de sous-groupes ouverts de H, qui est un sous-groupe ouvert de H, on en déduit que pour f fixé, $r^\lambda(H)$ est une moyenne finie de $r^\lambda(h)$, d'où le 2).

La valeur de $g(x)$ pour $x \in N$ ne dépend que de $v(x)$, on peut écrire $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathbb{I}_{N_k^*}$. Quitte à la remplacer par $R^\lambda(N_p)g$, pour p convenable, on peut supposer g est constante sur N_p, et non nulle, car $R^\lambda(N_p)g = (\sum_{k\leq p} c_k m(N_k^*))\mathbb{I}_{N_p} + m(N_p)\sum_{k>p} c_k \mathbb{I}_{N_k^*}$. ∎

Revenons à la démonstration des théorèmes. *Démonstration:* On part d'un sous-module $W \subset C_c^\infty(N/H)$, supposé non nul, on sait d'après ce qui précéde, qu'il existe une fonction $f \in W$, $f \neq 0$, invariante à gauche par H.

Soit $f \in C_c^\infty(N/H)$, deux cas peuvent se produire.

Ou bien $\int_N f(n)\, dn \neq 0$,, on choisit p suffisament grand pour que N_p contienne le support de f. La convolée de f avec la fonction caractéristique de N_p, est égale à $I(f)\mathbb{I}_{N_p}$, ainsi $\mathbb{I}_{N_p} \in W$: comme $f \in C_c^\infty(N/H)$, elle est invariante à gauche par un sous-groupe ouvert N_f de N, et la convolution à gauche par $\mathbb{I}_{N_p}$, qui est aussi égale à $\pi^\lambda(N_p)$, est une combinaison linéaire finie, indexée par N_p/N_f de $r^\lambda(n)f$. On obtient alors $W = C_c^\infty(N/H)$, car pour tout l, on a $C_c^\infty(N/H) = \pi^\lambda(B)\mathbb{I}_{N_l}$ comme on le voit sans peine, en remarquant que les fonctions $\mathbb{I}_{xN_{l-2n}}$ engendrent $C_c^\infty(N/H)$.

Ou bien $\int_N f(n)\, dn = 0$, comme $f \in C_c^\infty(N/H)$, et que f est invariante à droite par H, on peut écrire $f = a_k\mathbb{I}_{N_k} + \sum_{k<l\leq q} a_l \mathbb{I}_{N_l^*}$, avec $a_k \neq 0$, quitte à remplacer f par $\mathbb{I}_{N_{q-1}} \star f$, ce qui est possible comme on l'a déjà vu, cette convolution étant une combinaison linéaire finie de $r^\lambda(n)f$, on peut supposer $q = k+1$, alors $f = a_k\mathbb{I}_{N_k} + a_{k+1}\mathbb{I}_{N_{k+1}}$, avec $I(f) \neq 0$, ce qui montre que $f \in V_+$, si k est pair, ou $f \in V_-$ sinon.

On a ainsi montré que tout sous-module propre de $C_c^\infty(N/H)$, contient

V_+ ou V_-, s'il contient les deux, ce sera V_0. Comme V_+ et V_- sont orthogonaux pour un produit scalaire quasi-invariant pour les représentations, la proposition est démontrée dans le cas r^λ.

Montrons enfin comment on peut ramener le cas unitaire au cas précédent.

On considère V un sous-espace invariant fermé de $L^2(N/H)$, on sait qu'il existe une fonction $f \in V$, non nulle et invariante à gauche par H. On vérifie qu'il existe une régularisée $\mathbb{I}_{N_k} \star f \neq 0$. En effet f s'écrit $\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \mathbb{I}_{N_l^*}$, car $f(n)$ ne dépend que de $v(n)$. la relation $\mathbb{I}_{N_k} \star f = 0$ implique que $a_l = 0$ si $l > k$, car $\mathbb{I}_{N_k} \star \mathbb{I}_{N_l^*} = m(N_k)\mathbb{I}_{N_l^*}$. Il existe k tel que $\mathbb{I}_{N_k} \star \mathbb{I}_{N_l^*} \neq 0$.

On pourra toujours supposer, quitte à la remplacer par $\mathbb{I}_{N_k} \star f$ avec k convenable, que f est constante sur N_k.

Elle s'écrit alors $f = a_k \mathbb{I}_{N_k} + \sum_{l>k} a_l \mathbb{I}_{N_l^*}$.

Ou bien $f = a_k \mathbb{I}_{N_k}$, et alors $f \in C_c^\infty(N/H)$, ou bien il existe plus petit indice $l > k$ avec $a_l \neq 0$. On considère alors $g_n = r^\lambda(n) f - f \in V$, pour $n \in N_l^*$, on a $g_n = a_k(\mathbb{I}_{N_k} - \mathbb{I}_{nN_k}) \neq 0$. Ainsi $V \cap C_c^\infty(N/H) \neq \{0\}$. On utilise alors les résultats précédents, ce qui donne $V \supset V_+$ ou $V \supset V_-$.

On remarque que les adhérences de V_+ et de V_- restent orthogonales, donc leur intersection est triviale, leur somme est donc directe, et elle contient l'adhérence de V_0.

Montrons ensuite que l'adhérence de V_0 contient $C_c^\infty(N/H)$.

Soit $f \in C_c^\infty(N/H)$ et $I(f) = \int_N f(n)\,dn$.

On considère la suite de fonctions f_q par $f_q = f + c_q \mathbb{I}_{N_q^*}$, où c_q est défini par $I(f_q) = I(f) + c_q m(N_q^*) = 0$. En norme L^2, $f_q \to f$, car

$$\|f - f_q\|^2 = |c_q|^2 m(N_q^*) = \frac{-I(f)}{m(N_q^*)}.$$

On remarquera que ce raisonnement s'applique aussi dans le cas d'un arbre homogène, mais si par exemple si ($q_2 = 1$), les ensembles $N_{2k+1}^* = \emptyset$! Si $q_2 = 1$, alors $V_- = \{0\}$, et $V_+ = V_0$. De même si $q_1 = 1$, alors $V_+ = \{0\}$, et $V_- = V_0$. ∎

Remarque L'exemple de $PSL_2(k)$, pour un corps $p-$adique, montre que cette condition de triple transitivité est nécessaire.

La représentation Π^λ a déjà été explicitée au 2.3. Elle est définie sur $L^2(k)$, pour $\Re s = \frac{1}{2}$, avec $q\lambda = q^{2s}$, q étant l'ordre du corps résiduel de k. Elle a été notée u^λ, et on a $u^\lambda f(x) = |cx + d|^{2s} f(\frac{ax+b}{cx+d})$, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Détérminons les sous-espaces V de $L^{(k)}$ invariants par $u^\lambda(B)$. On note que B opère sur $L^2(k)$, par les translations $x \mapsto f(x + b)$ et les homothéties

$|a|^{4s}f(a^2x)$.

On note $\widehat{V} = \{\hat{f} \mid f \in V\}$; l'invariance par translations de V implique que $\widehat{V} = \widehat{V}(\Omega)$, où $\widehat{V}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(k)$ à support dans Ω, avec $\Omega \subset k$. On notera $V(\Omega)$ l'image réciproque par transformation de Fourier de $\widehat{V}(\Omega)$.

L'invariance par les homothéties de rapport un carré, équivaut à la condition $k^{*2}\Omega \subset \Omega$, donc Ω est une réunion de classes modulo les carrés.

Si q est impair, on obtient 4 sous-espaces invariants fermés irréductibles, et non pas 2, comme dans le cas des groupes triplement transitifs, d'après le résultat précédent.

Si k est de caractéristique 2, il y a même une infinité de sous-espaces fermés invariants, voir [G-G-P].

5.3 Application à la décomposition spectrale

On remarque que puisque $G = KB$ pour K un fixateur du sommet 0, qui peut être choisi en fait quelconque, $G/K = B/N_0$, la restriction à B de la représentation régulière de G dans $L^2(G/K)$, n'est rien d'autre que la représentation régulière gauche de B dans $L^2(S_1)$, où S_1 est l'ensemble des sommets de numéro 1.

Le résultat le plus significatif, qui est une simple reformulation des résultats établis précédement, est celui de l'arbre homogène, et d'un groupe transitif sur l'ensemble S des sommets, et triplement transitif sur l'espace des bouts. Pour un tel groupe on a

Proposition 5.3.1 *Soit G un groupe triplement transitif sur un arbre homogène non numéroté. On désigne par B le fixateur d'un bout.*

La représentation régulière de B sur $L^2(S)$, admet comme décomposition spectrale $\int_{\gamma_1^+} R^\lambda dm(\lambda)$, où la mesure dm est la mesure de Plancherel des fonctions sphériques sur G. Les représentations R^λ s'obtiennent à partir de l'une d'entre elles par torsion avec des caractères unitaires. Elles sont équivalentes et irréductibles.

Plus généralement pour un groupe qui opère sur un arbre semi-homogène de type (q_1, q_2).

Proposition 5.3.2 *Soit G un groupe triplement transitif sur un arbre semi-homogène de type (q_1, q_2). On désigne par B le fixateur d'un bout, et S_1 l'ensemble des sommets de numéro* 1.

1) *Si* $q_1 \geq q_2$, *alors la représentation régulière de* B *sur* $L^2(S_1)$, *admet comme décomposition spectrale* $\int_{\gamma_1^+} R^\lambda dm(\lambda)$, *où la mesure* dm *est la mesure de Plancherel des fonctions sphériques sur* G.
2) *Si* $q_1 < q_2$, *la représentation régulière de* B *sur* $L^2(S_1)$, *admet comme décomposition spectrale* $\int_{\gamma_1^+} R^\lambda dm(\lambda) \oplus T^0|_B$, *où la mesure* dm *est la partie continue de la mesure de Plancherel des fonctions sphériques sur* G.

Les représentations R^λ *s'obtiennent à partir de l'une d'entre elles par torsion avec des caractères unitaires. Elles sont équivalentes, et somme directe orthogonale de deux sous- représentations irréductibles.*

BIBLIOGRAPHIE

[A] **G. AHUMADA BUSTAMANTE** Analyse harmonique sur l'espace des chemins d'un arbre, *Thèse doctorat en sciences, Orsay, 1988.*

[B-T 1 & 2] **F. BRUHAT et J. TITS** Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local,

1re partie: le groupe linéaire général *Bull. Soc. Math. France 112,1984, p.259-301.*

2^{e} partie: groupes unitaires *Bull. Soc. Math. France 115,1987, p.141-195.*

[Ca-1] **P. CARTIER** Géométrie et analyse sur les arbres, *Séminaire Bourbaki,1971-72 exposé 407. Lectures notes in Math. Springer-Verlag 1973, p.123-140.*

[Ca-2] **P. CARTIER** Fonctions harmoniques sur un arbre, *Symposia Mathematica 9, 1972,p.203-270.*

[Ca-3] **P. CARTIER** Harmonic analysis on trees, *Proc. Sympos.Pure.Math., vol 26, 1973 p.419-424.*

[Ch-1] **F. CHOUCROUN** Analyse harmonique sur le groupe des automorphismes d'un arbre homogène et applications aux groupes libres, *C.R.A.S. 296, 1983 p.585-588.*

[Ch-2] **F. CHOUCROUN** Groupes opérant simplement transitivement sur un arbre homogène et plongements dans $PGL_2(k)$, *C.R.A.S. 298, 1984 p.313-315.*

[Ch-3] **F. CHOUCROUN** Sous-groupes discrets des groupes $\mathfrak{p}$-adiques de rang un, et arbres de Bruhat-Tits. *Preprint Orsay 1991.*

[Ch-4] **F. CHOUCROUN** Arbres, espaces ultramétriques, et bases de structure uniforme *à paraître dans geometriae dedicata.*

[Co] **M. COWLING** The Kunze-Stein phenomenon *Ann. of Math. 107, 1978, p. 209-234.*

[D] **J. DIXMIER** Les C^*-Algèbres et leurs représentations, *Gauthier Villars, Paris, 1964.*

[Fa-P] **J. FARAUT and M.A. PICARDELLO** The Plancherel measure for symmetric graphs, *Ann. Mat. Pura Appl. 138 ,1984, 151-155.*

[Fi-P] **A. FIGA-TALAMANCA and M.A. PICARDELLO** Spherical functions and harmonic analysis on free groups, *J. Funct. Anal. 47, 1982 p.281-304.*

[G] **R. GODEMENT** A theory of spherical functions I, *Trans. Amer. Soc. 73 (1952) p. 496-556.*

[G-G-P] **I.M. GEL'FAND, M.GRAEV, and I. PYATETSKI-SHAPIRO** Representation theory and automorphic functions, *Saunders company, Philaldelphia, 1969.*

[H] **R. HUNT** On $L(p,q)$ Spaces, *L'enseignement Mathématique, (2), 12 1966 p.249-276.*

[L] **N. LOHOUE** Sur les représentations uniformément bornées et le théorème de Kunze-Stein, *Osaka Journ. of Math., 18, 1981 p.465-480.*

[Mat] **H. MATSUMOTO** Fonctions sphériques sur un groupe semi-simple p-adique, *C. R. A. S. 269, 1969, p.829-832.*

[Mau] **F.I. MAUTNER** Spherical function over p-adic field I, *Amer. J. Math, 80, 1958, p.441-457.*

[M-Z] **A. M. MANTERO and A. ZAPPA** The Poisson transform and representation of a free group, *Journ. of funct. anal.,51,1983, p.372-399.*

[M-W] **B. MOHAR and W. WOESS** A survey on spectra of infinite graphs, *Bull. London Math. Soc., 21, 1989 p. 209-234.*

[O] **G.I.OL'SHANSKII** Classification of irreducible representations of automorphisms groups of Bruhat-Tits trees, *Funct. Anal. Appl.,11, 1977, p.26-34.*

[Sa] **I. SATAKE** theory of spherical functions on reductive algebraic group over $\mathfrak{p}-$adic fields, *Publ. Math. I.H.E.S., 18 ,1963, p.5-70.*

[S] **J.P. SERRE** Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque 46, 1977.*

[T-1] **J. TITS** Sur le groupe des automorphismes d'un arbre, *Essay on Topology and related topics, Mémoires dédiés à De Rham, Springer-Verlag 1970, p. 188-211.*

[T-2] **J. TITS** Reductive groups over local fields, *Proc. Symp. Pure Math., vol 33,1979, p.29-69.*

[W] **A. WEIL** L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, *Hermann, Paris, 1953.*