J.-C. SIKORAV

Quelques propriétés des plongements Lagrangiens

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 46 (1991), p. 151-167
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__151_0>

QUELQUES PROPRIETES DES PLONGEMENTS LAGRANGIENS

J.-C. Sikorav, Université Toulouse III
URA 1408 du CNRS "Géométrie et topologie"
février 1991

Introduction

Soit L une variété <u>fermée</u> connexe de dimension n et soit $(V,\omega = d\lambda)$ une variété symplectique exacte de dimension $2n$. Nous nous intéressons à l'existence d'un plongement lagrangien $j : L \to V$ satisfaisant l'une au moins des conditions suivantes :

(a) j est homotope à $f : L \to V$, application continue donnée.

(b) $[j^*\lambda] \in H^1(L;\mathbb{R})$ est donné.

(c) j est à valeurs dans un ouvert $\mathcal{U} \subset V$ donné, et est symplectiquement (resp. hamiltoniennement) isotope à un plongement $f : L \to V$ donné (problèmes d'engouffrement).

Une discussion générale de ce genre de problèmes est donnée dans [9]. Nous nous limiterons à deux cas particuliers, où $V = T^*M$ est un fibré cotangent muni de sa structure symplectique canonique $\omega = d\lambda$, $\lambda = p.dq$:

(i) $M = \mathbb{R}^n$. On identifie $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$, avec $\omega(X,Y) = (iX,Y)$ (produit scalaire euclidien).

(ii) M fermée.

Après avoir rappelé certains des principaux résultats connus, nous en donnons quelques nouveaux, les principaux étant :

Théorème 1 (M. Gromov, communication orale ; cf. 1.2). Si $j : L \to \mathbb{C}^n$ est un plongement lagrangien à valeurs dans le cylindre $Z_n(r) = B^2(r) \times \mathbb{C}^{n-1}$, alors le sous-groupe $\mathrm{im}\,[j^*\lambda] \subset \mathbb{R}$ contient un élément a tel que $0 < a < \pi r^2$.

Corollaire. Si $[j^*\lambda]$ est multiple d'une classe entière, il existe $r > 0$ tel que j n'admette pas d'engouffrement hamiltonien la poussant dans le cylindre $Z_n(r)$.

Théorème 2 (cf. 2.3). Soit α une 1-forme non fermée sur une variété fermée M . Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\alpha(M)$ dans T^*M qui ne contient aucune sous-variété lagrangienne homotope à zéro.

On en déduit que sous certaines conditions une limite C^0 de sous-variétés lagrangiennes est lagrangienne (cf. 2.4).

Théorème 3 (cf. 2.7). Soit $\phi : T^n \to T^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ un plongement lagrangien qui est symplectiquement isotope à $id \times \{0\}$ dans $T^n \times \mathbb{R}^n = T^*T^n$. Alors $pr_2 \circ \phi : T^n \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homotope à zéro sauf peut-être si $n = 3$.

Ceci généralise un résultat de F. Laudenbach [11] sur les 1-formes fermées non singulières.

Enfin, généralisant à un cotangent quelconque une méthode introduite dans [21] pour T^*T^n, nous définissons des invariants symplectiques d'ouverts d'un cotangent en mesurant le "nombre" de sous-variétés qu'ils contiennent. Nous montrons notamment :

Théorème 4 (cf. 3.4). Si $b_1(M) \geq 2$, il existe une famille de dimension infinie d'ouverts étoilés de T^*M deux à deux non symplectomorphes.

Dans cet énoncé on a muni l'espace de tous les ouverts de T^*M de la topologie Hausdorff. Un ouvert $\mathcal{U} \subset T^*M$ est dit étoilé (par rapport à la section nulle) si pour tout $q \in M$ la fibre $\mathcal{U}_q \subset T^*_qM$ est étoilée par rapport à 0 . Ceci implique qu'il est difféomorphe au cotangent tout entier, donc un corollaire est que l'espace des structures symplectiques sur T^*M est de dimension infinie.

Les preuves utilisent certains résultats de Gromov obtenus par les courbes holomorphes [7], ainsi que le résultat sur les phases génératrices de [19] et des corollaires donnés dans [10].

1. Sous-variétés lagrangiennes de $\mathbb{C}^n$

La première question est de savoir si une variété fermée donnée L^n admet un plongement lagrangien dans $\mathbb{C}^n$: voir M. Audin [1] pour les résultats connus en 1987. Entre autres :

- le h-principe de M. Gromov [7] permet d'expliciter les conditions nécessaires et suffisantes pour que L admette une immersion lagrangienne régulièrement homotope à un plongement, ou de façon équivalente : admette un plongement totalement réel. Ces conditions, de nature homotopique, excluent toutes les sphères S^n sauf pour $n = 1$ ou 3 .

- Si L admet un plongement lagrangien dans $\mathbb{C}^n$ et si V admet une immersion lagrangienne dans $\mathbb{C}^m$ (ce qui équivaut à la trivialité du $\mathbb{C}$-fibré $TL \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$), alors $L \times V$ admet un plongement lagrangien dans $\mathbb{C}^{n+m}$.
- A une exception près, on connaît exactement quelles sont les surfaces qui admettent un plongement lagrangien dans $\mathbb{C}^n$: pour les orientables, seulement le tore T^2 . Pour les non-orientables : celles dont la caractéristique d'Euler est divisible par 4 , sauf peut-être la bouteille de Klein.
- Comme obstruction "non homotopique" au plongement, il y a essentiellement le résultat de Gromov [7] : si j est un plongement lagrangien de L dans $\mathbb{C}^n$, $[j^*\lambda]$ est toujours non nul. Ceci implique en particulier que $H^1(L;\mathbb{R})$ est non nul.

Plus récemment L. Polterovich [15] a défini une notion de chirurgie lagrangienne (inspirée de [10]) permettant d'éliminer des points doubles d'immersions lagrangiennes quitte à rajouter des anses rondes. Il obtient ainsi beaucoup de nouveaux exemples de variétés plongeables, notamment les premiers qui ne soient pas des fibrés sur le cercle ou des produits. Par ailleurs, utilisant un résultat de C. Viterbo [22] sur l'indice de Maslov (cf. 1.5), Polterovich [16] donne une nouvelle obstruction à l'existence d'un plongement lagrangien :par exemple la variété K^n , quotient de T^n par l'application $(x_1,\dots x_n) \to (x_1+1/(2n-2),x_2,\dots x_n)$ n'est pas de plongeable si $n \geq 3$ (K^2 est la bouteille de Klein mais son obstruction ne marche pas dans ce cas).

On suppose maintenant que j est un plongement lagrangien de L dans $\mathbb{C}^n$. On identifie L et $j(L)$.

1.1. Disques holomorphes (cf. [7]). Par définition, un disque holomorphe à bord dans L est une application $f : (D,\partial D) \to (\mathbb{C}^n,L)$ continue et holomorphe dans l'intérieur, où D est le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Elle est alors de classe C^∞ sur D .

D'autre part, rappelons que l'aire d'une application f de D dans $\mathbb{C}^n$ est

$$a(f) = \iint_D |\partial f/\partial x \wedge \partial f/\partial y| .$$

Si f est holomorphe, on a $a(f) = \iint_D |df|^2 = \iint_D f^*\omega$. En particulier, si f est non constante on a $a(f) > 0$. De plus, si $f|\partial D$ est à valeurs dans la variété lagrangienne L , alors la formule de Stokes donne $a(f) = \int_{\partial D} f^*\lambda = <[j^*\lambda],[f|\partial D]>$. Donc $\mathrm{im}\ [j^*\lambda]$ contient l'aire de tout disque holomorphe à bord dans L .

Dans [7], Gromov démontre le résultat suivant, dont la non nullité de la classe $[j^*\lambda]$ est une conséquence immédiate.

Théorème. Soit $L \subset \mathbb{C}^n$ une variété lagrangienne fermée. Alors il existe un disque holomorphe non constant à bord dans L .

Soit $a(L)$ la borne inférieure des aires des disques holomorphes non constants à bord dans L. Reprenant certaines étapes de la preuve de Gromov, nous allons en donner une majoration en fonction de la "taille" de L.

1.2. Proposition. Si L est contenue dans le cylindre $Z_n(r)$, on a $a(L) < \pi r^2$. Autrement dit : il existe un disque holomorphe à bord dans L et d'aire $< \pi r^2$.
Corollaire. $\mathrm{im}\,[j^*\lambda]$ contient un élément a tel que $0 < a < \pi r^2$.

Démonstration. Pour trouver les disques holomorphes, on étudie l'équation

(E) $\qquad \bar\partial f = C \;,\quad f : (D,\partial D) \to (\mathbb{C}^n, L)$ homotope à zéro,

où $\bar\partial f = (1/2)\,(\partial f/\partial x + i\,\partial f/\partial y)$ et $C \in \mathbb{C}^n$ est une constante donnée.

Lemme. L'équation (E) a une solution si : $\pi |C|^2 < a(L)$.

Preuve du lemme. D'après [7], si cette équation n'a pas de solution c'est qu'il y a perte de compacité de l'ensemble $\{ f \equiv 0 \mid |\partial f| \leq C \}$, ce qui est dû aux disques holomorphes. Plus précisément, supposons que C est un point limite de l'ensemble de résolubilité : alors il existe une suite $(f_i : (D,\partial D) \to (\mathbb{C}^n, L) \,,\, i \in \mathbb{N})$ d'aplications homotopes à zéro telle que $\partial f_i \to C$ au sens C^0, et qui n'admet aucune sous-suite convergente. Le théorème de compacité des courbes holomorphes ([7], th. 1.5) dit alors qu'il existe

- des disques holomorphes non constants à bord dans L : h_j, $1 \leq j \leq k$, avec $k \geq 1$,
- des points z_j ∂D et des voisinages $U_{ij} \ni z_j$

avec la propriété suivante : après reparamétrage, $f_i | U_{ij}$ converge vers $h_j | D \setminus \{1\}$. A fortiori on a pour tout j :

$$(*) \qquad \lim_{i \to \infty} a(f_i | U_{ij}) = \lim_{i \to \infty} \iint_{U_{ij}} f_i^* \omega = a(h_j)\,.$$

Nous allons montrer :

(i) $\limsup\, a(f_i) \leq 2\pi |C|^2$

(ii) $\liminf\, a(f_i) \geq 2 \sum a(h_j)$.

Ceci impliquera $\pi |C|^2 \geq a(L)$ d'où le lemme.

Preuve de (i). On a :

$$|\partial f/\partial x \wedge \partial f/\partial y| \leq (1/2)\ (|\partial f/\partial x|^2 + \partial f/\partial y|^2)$$

$$= \langle i\ \partial f/\partial x, \partial f/\partial y\rangle + (1/2)\ (|\ \partial f/\partial x + i\ \partial f/\partial y\ |)^2)$$

$$= f^*\omega + 2\ |\bar\partial f|^2 .$$

Comme f_i est homotope à zéro et que L est lagrangienne, on a $\iint_D f_i^*\omega = 0$ donc $a(f_i) \leq \iint_D 2\ |\bar\partial f|^2$, d'où la majoration cherchée.

Preuve de (ii). Ecrivons

$$a(f_i) = a(f\ |\ D\backslash\bigcup_j U_{ij}) + \Sigma_j\ a(f|U_{ij}) .$$

Le second terme a pour limite $\Sigma\ a(h_j)$ d'après (*). Quant au premier, le fait que $\iint_D f_i^*\omega = 0$ et l'inégalité $|\partial f/\partial x \wedge \partial f/\partial y| \geq (1/2)\ |\bar\partial f|^2$ permettent de le minorer par $|\ \Sigma_j \iint_{U_{ij}} f_i^*\omega\ |$, qui a pour limite inférieure $\mathbb{Z}_j\ a(h_j)$ d'après (*). Ceci prouve (ii) donc le lemme.

Fin de la preuve de la proposition. D'après le lemme, il suffit de montrer que si L est contenue dans le cylindre $Z_n(r)$, l'équation (E) n'a pas de solution si $|C_1| \geq r$. Pour cela, procédant comme dans [7], on observe qu'une solution f est harmonique, donc que la formule de Poisson donne $f'(0) = \int_{\partial D} f(s)\ d\mu(s)$, où μ est une mesure de probabilité sur ∂D. On en déduit que la première coordonnée est majorée : $|f'_1(0)| < r$, d'où a fortiori $|C_1| < r$.

1.3. Preuve du corollaire 2. Généralisations possibles. Par hypothèse, on a $\mathrm{im}\ [j^*\lambda] = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$. Le théorème 1 implique $0 < \alpha < \pi\, r^2$. Comme $[j^*\lambda]$ est invariante par isotopie hamiltonienne, le corollaire 2 en résulte avec $r = \sqrt{(\alpha/\pi)}$.

On peut se demander si ce corollaire reste valide sans hypothèse sur $[j^*\lambda]$. Un premier pas vers une preuve pourrait être la

Proposition. Si $L \subset \mathbb{C}^n$ est une sous-variété lagrangienne fermée, il existe un disque holomorphe à bord dans L d'aire minimale. En particulier : $a(L) > 0$.

Démonstration. Si (f_i) est une suite de disques holomorphes telle que $a(f_i) \to a(L)$, alors (à reparamétrage près) :

- ou bien (f_i) est non compacte, ce qui implique l'existence d'une famille de disques holomorphes h_j , $1 \leq j \leq k$ telle que $\sum a(h_j) \leq a(L)$. Nécessairement on a $k = 1$ et $a(h_1) = a(L)$.
- ou bien (f_i) est compacte, donc on peut supposer qu'elle converge vers un disque holomorphe f , avec $a(f) \leq a(L)$. Donc $a(f) = a(L)$, à moins que f ne soit constante. Mais cette dernière éventualité ne se produit pas : en effet, les (f_i) sont non homotopes à zéro donc la longueur du bord $f_i(\partial D)$ est minorée.

Outre les courbes holomorphes, une autre méthode possible de preuve est celle des systèmes hamiltoniens et notamment des capacités symplectiques d'Ekeland-Hofer [3] : il suffirait par exemple de prouver qu'une des capacités de L est strictement positive. D'après [3-II], on peut calculer la première capacité pour les tores "standard" : $c_1(S^1(r_1) \times \ldots \times S^1(r_n)) = \inf \pi r_i^2$. Donc le corollaire 2 reste valide dans ce cas, avec $r = \inf r_i$. Viterbo [23] a montré que c'est encore vrai pour un plongement lagrangien quelconque de T^n . La valeur de r est à peu près le rayon maximal d'un tube du cotangent de L que l'on peut plonger dans $\mathbb{C}^n$, ce qui semble plausible aussi en général.

Par ailleurs, mentionnons le résultat de Ya. M. Eliashberg [4] : par une isotopie hamiltonienne est à valeurs dans $(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \times \mathbb{C}^{n-1}$, on ne peut pousser le tore dans le cylindre $Z_n(r_1)$. La preuve utilise un résultat d'intersection lagrangienne (cf. la section 2 pour ce genre de raisonnement).

1.4. Un "contre-exemple" (Viterbo, communication orale). Si $[j^*\lambda]$ est irrationnelle (non multiple d'une classe entière), on n'a pas en général de contrainte sur sa valeur en fonction de la "taille" de L , comme le montre l'exemple suivant : pour toute classe $a \in H^1(T^n;\mathbb{R})$ irrationnelle (non multiple d'une classe entière) et tout $\varepsilon > 0$, il existe un plongement $j : T^n \to B^{2n}(\varepsilon)$ tel que $[j^*\lambda] = a$.

En effet, il existe $A \in G\mathcal{L}(n,\mathbb{Z})$ tel que $A.a = (b_1,\ldots,b_n)$, avec $b_i > 0$ et $\sum b_i < \pi \varepsilon^2$. Donc, en définissant $r_i = \sqrt{(b_i/\pi)}$, l'application naturelle $j_0 : T^n \to S^1(r_1) \times \ldots \times S^1(r_n)$ est à valeurs dans $B^{2n}(\varepsilon)$ et vérifie $[j_0{}^*\lambda] = A.a$ par construction. Il suffit alors d'utiliser l'action naturelle de $G\mathcal{L}(n,\mathbb{Z})$ sur T^n pour définir $j = j_0 \circ {}^tA^{-1}$.

1.5. Autres contraintes sur $[j^*\lambda]$. Dans [22], Viterbo montre que si j est un plongement lagrangien de T^n (ou plus généralement d'une variété admettant une métrique de courbure négative ou nulle) dans $\mathbb{C}^n$, alors $[j^*\lambda]$ n'est jamais un multiple négatif de la classe de Maslov $\mu(j) \in H^1(L;\mathbb{Z})$.

Par exemple, si $j : T^n \to \mathbb{C}^n$ est symplectiquement isotope au plongement standard, alors $[j^*\lambda]$ n'est jamais un multiple négatif de $(1,1\ldots,1)$. Dans ce dernier cas, il semble probable qu'on a toujours $[j^*{}_1] = (a_1,\ldots,a_n)$ avec $a_i > 0$ pour tout i . Une méthode de preuve pourrait être de suivre les disques holomorphes au cours de l'isotopie.

2. Sous-variétés lagrangiennes dans le cotangent d'une variété fermée

Dans cette section M est une variété fermée et L une sous-variété lagrangienne fermée de T^*M. On note j l'inclusion $L \to T^*M$ et π la projection $L \to M$. On note $\mathcal{O}(M)$ l'image de la section nulle.

Le principal résultat est encore dû à Gromov [7] : il n'existe pas de plongement lagrangien $j : L \to T^*M \backslash \mathcal{O}(M)$ exact, c'est-à-dire tel que $[j^*\lambda] = 0$. Notons qu'on ne connaît pas d'exemple d'une variété exacte et non hamiltoniennement isotope à $\mathcal{O}(M)$ (voir [10]).

Par ailleurs, il est rare que l'on puisse engouffrer symplectiquement la section nulle dans $T^*M \backslash \mathcal{O}(M)$ [18] [20]. Par exemple, si $n = 3$ il faut que M fibre sur le cercle.

2.1. Intersection avec un conormal. Si K est une sous-variété de M, on rappelle que le fibré conormal $\phi^*K \subset T^*M$ est l'ensemble des covecteurs au-dessus de K qui sont orthogonaux à TK. C'est une sous-variété lagrangienne fibrée en espaces vectoriels sur K.

Conjecture . Si L est une sous-variété exacte et si $K \subset M$ est une sous-variété fermée, alors $L \cap \nu^*K$ est non vide.

Dans [10] on montre que cette conjecture est vraie dans les trois cas suivants :

(i) L est hamiltoniennement isotope à la section nulle
(ii) K est une fibre d'une fibration différentiable d'espace total M
(iii) l'inclusion $K \to M$ est homotope à zéro.

La preuve, très simple, utilise le théorème de Gromov pour (ii) et (iii), et le résultat de [ ] sur les phases génératrices pour (i).

2.2. Définition. La sous-variété $L \subset T^*M$ est <u>essentielle</u> si $[j^*\lambda]$ est dans l'image de π^* : $H^1(M;\mathbb{R}) \to H^1(L;\mathbb{R})$.
De façon équivalente : on peut rendre L exacte en la translatant dans les fibres par une 1-forme fermée β sur M. Ou encore : L est l'image d'une sous-variété exacte par un automorphisme symplectique de T^*M.

Exemple. Toute sous-variété lagrangienne homotope à la section nulle est essentielle.

Proposition. Si L est essentielle et si $K \subset M$ est homotope à zéro, alors L rencontre ν^*K.

<u>Démonstration</u>. Par hypothèse, L devient exacte après translation par une forme fermée β. Comme K est homologue à zéro on peut supposer β nulle sur K. Alors $L \cap \nu^*K = (L+\beta) \cap \nu^*K$, et cette intersection est non vide d'après [10].

2.3. Preuve du théorème 2. Si α n'est pas fermée, il existe un lacet plongé $\gamma \subset M$ homotope à zéro tel que $\int_\gamma \alpha = a > 0$. Paramétrant γ par $[0,1]$, on définit

$$\mathcal{U} = T^*(M\backslash\gamma) \cup \{ (q,p) : q \in \gamma, p(d\gamma/dt) > \alpha(d\gamma/dt) - a\}.$$

Il existe une fonction f sur M telle que $(\alpha+df)(d\gamma/dt) \equiv a$ sur γ. Remplaçant α et $\mathcal{U}$ par $\alpha+df$ et $\mathcal{U}+df$, on se ramène au cas où $\alpha(d\gamma/dt)$ est constant sur γ. Alors

$$\mathcal{U} = T^*(M\backslash\gamma) \cup \{ (q,p) : q \in \gamma, p(d\gamma/dt) > 0 \},$$

donc $\mathcal{U}$ ne rencontre pas $v^*\gamma$. La proposition 2.1 implique que $\mathcal{U}$ ne contient aucune sous-variété essentielle.

2.4. Théorème. Soient (V,ω) une variété symplectique et $(L_i = \phi_i(M))$ une suite de sous-variétés lagrangiennes fermées qui converge C^0 vers une sous-variété lisse fermée $L = \phi(M)$. On suppose de plus que l'hypothèse (*) suivante est vérifiée :

(*) Le sous-fibré $TL \subset TV \mid L$ admet un supplémentaire lagrangien.

Alors L est lagrangienne.

Démonstration. L'hypothèse entraîne que $\phi^*\omega$ est exacte, donc on peut supposer que $\omega = d\lambda$ est exacte. Il s'agit alors de montrer que $\alpha = \phi^*\lambda$ est fermée. Pour cela, nous allons montrer que $\alpha \circ\phi^{-1}$ s'étend en un symplectomorphisme local $\Phi : (V,\phi(M)) \to (T^*M,\alpha(M))$. Alors $\Phi(L_i)$ sera une sous-variété lagrangienne homotope à la section nulle donc essentielle, et le théorème 2 entraînera la fermeture de α.

Suivant une méthode dûe à J. Martinet, et expliquée par D. Bennequin dans [2] (p. 23), l'existence de Φ résultera de celle d'un isomorphisme de fibrés symplectiques $\Psi : TV \mid L \to T(T^*L)) \mid \alpha(L)$ qui prolonge l'isomorphisme $d\alpha : TL \to T(\alpha(L))$. Par hypothèse il existe $F_1 \subset TV \mid L$, supplémentaire lagrangien de TL. Par ailleurs, la restriction $E \mid \alpha(L)$ du fibré vertical donne un supplémentaire lagrangien F_2 de $T(\alpha(L)) \subset T(T^*L)$. Donc l'isomorphisme Ψ cherché va de $TV \mid L = TL \oplus F_1$ vers $T(T^*L)) \mid \alpha(L) = T(\alpha(L)) \oplus F_2$. Cherchant Ψ sous la forme $d\alpha \oplus u$ où u est un isomorphisme de F_1 sur F_2, il sera symplectique si

$$(**) \qquad (\forall X \in TL, Y \in F_1) \qquad \omega_1(X,Y) = \omega_2(d\alpha(X),u(Y)).$$

Or le fait que F_1 est lagrangien implique que $Y \to \omega_1(.,Y)$ est un isomorphisme de F_1 sur le dual $(TL)^*$. De même $Y \to \omega_2(.,Y)$ est un isomorphisme de F_2 sur $(T(\alpha(L)))^*$. Si l'on prend pour u le composé des isomorphismes $F_1 \to (TL)^* \to (T(\alpha(L)))^* \to F_2$, la propriété (**) sera vérifiée par construction.

Remarque. L'hypothèse (*) n'est peut-être pas nécessaire. Notons que cette question de convergence C^0 de sous-variétés lagrangiennes est liée au célèbre résultat d'Eliashberg et Gromov [4] [8] [9] (cf. aussi [3]) : si $(\phi_i : (V^{2n},\omega) \to (W^{2n},\omega'))$ est une suite de plongements symplectiques qui converge C^0 vers ϕ, la différentielle $d\phi$ est symplectique là où elle existe.

Remarquons toutefois que ce dernier résultat est de nature locale, et n'a pas d'analogue pour les plongements lagrangiens de variétés non fermées. Cela résulte du h-principe C^0-fin [8], dont on peut donner l'exemple élémentaire suivant :

$$\phi_i = id \times f_i \ : \ B^2(1) \to (\mathbb{C}, \omega) \times (\mathbb{C}, \omega) \ ,$$

avec $f_i{}^*\omega = -\omega$ et $f_i \to 0$ au sens C^0 (l'existence de f_i est géométriquement évidente). Alors (ϕ_i) est une suite de plongements lagrangiens qui converge C^0 vers le plongement symplectique $id \times 0$!

Toujours à cause du h-principe C^0-fin, une limite C^0 d'immersions lagrangiennes n'a aucune raison d'être lagrangienne, même si la variété est fermée.

2.5. Dans [10] on démontre que si L est exacte l'image de $\pi_1(L)$ dans $\pi_1(M)$ est d'indice fini, donc $\pi^*: H^1(M;\mathbb{R}) \to H^1(L;\mathbb{R})$ est injectif. Donc la définition suivante est licite :

Définition. Si L est essentielle, on pose $\xi(L) = \pi^{*-1}([j^*\lambda])$.

Si l'on a une suite de variétés essentielles L_i qui convergent au sens Hausdorff vers $\alpha(M)$, on peut se demander si $\xi(L_i)$ converge vers $[\alpha]$. En considérant $L_i - \alpha$ et en utilisant les homothéties, on voit que cela revient à la question suivante (cf. la question posée par Laudenbach [11] sur l'aire balayable).

Conjecture. On fixe une norme (notée $|\ |$) sur $H^1(M;\mathbb{R})$ et un voisinage compact $\mathcal{U}$ de la section nulle dans T^*M (par exemple le tube unité d'une métrique riemannienne). Alors il existe une constante C telle que pour toute sous-variété essentielle $L \subset \mathcal{U}$ on ait $|\xi(L)| \leq C$.

2.6. Proposition. La conjecture 2.5 est vraie si L est symplectiquement isotope à la section nulle.

Démonstration. On munit M d'une structure riemannienne et l'on pose

$$\rho(E) = \sup \{ |p| \ : \ (q,p) \in E \} \ , \quad E \subset T^*M$$

$$\| \xi \| = \inf \{ \rho(\alpha(M) : \alpha \text{ est une 1-forme représentant } \xi \}$$

(norme de Whitney-Federer). Il s'agit de trouver C telle que $|\xi(L)| \leq C\,\rho(L)$.

(a) Fixons une base $([\gamma_1],\dots,[\gamma_k])$ de $H^1(M;\mathbb{R})$, où les γ_j sont des lacets plongés, paramétrés par $[0,1]$ à vitesse constante $|d\gamma_j/dt| = v_j$. Comme toutes les normes sur $H^1(M;\mathbb{R})$ sont équivalentes, il existe $C' > 0$ telle que $(\forall \xi)\ |\xi| \le C' \sup_j |<\xi,[\gamma_j]>|$. On va voir que $C = C' \sup v_j$ convient, et pour cela montrer : $|<\xi,[\gamma_j]>| \le v_j\, \rho(L)$.

Fixons $j \in [1,k]$. On peut représenter $\xi(L)$ par une 1-forme fermée α telle que $\alpha(d\gamma_j/dt)$ soit constant sur γ_j, d'où

$$|\alpha(d\gamma_j/dt)| \equiv |\int \alpha(d\gamma_j/dt)\, dt| = |<\xi(L),[\gamma_j]>|.$$

De plus la translatée $L - \alpha$ est hamiltoniennement isotope à la section nulle, donc la propriété 2.1.(i) implique que $L \cap (v^*\gamma_j + \alpha)$ est non vide. Soit $x = (q,p)$ un point de cette intersection, on peut minorer : $\rho(L) \ge |p| \ge |p\,|\,T\gamma_j|$ (norme de la restriction de p à l'espace tangent à γ_j). Comme $p \in (v^*\gamma_j + \alpha(q))$ où $\alpha(q) \in T^*_qM$ est la valeur de α en q, on a ensuite

$$|p\,|\,T\gamma_j| = |\alpha(d\gamma_j/dt)|/v_j = |<\xi(L),[\gamma_j]>|/v_j.$$

On a donc $\rho(L) \ge |<\xi(L),[\gamma_j]>|/v_j$, d'où le résultat.

Remarque. Cette preuve montre que la conjecture 2.5 est conséquence de la conjecture 2.1.

2.7. Preuve du théorème 3. Rappelons l'énoncé. Par hypothèse, $\phi : T^n \to T^n \times \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ est un plongement lagrangien, qui est symplectiquement isotope à la section nulle dans $T^n \times \mathbb{R}^n$, et l'on doit montrer que $p = pr_2 \circ \phi : T^n \to \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ est homotope à zéro, sauf peut-être si $n = 3$.

L'hypothèse implique que ϕ est hamiltoniennement isotope à $id \times \{a\}$ dans $T^n \times \mathbb{R}^n$, avec $a \ne 0$ sinon $im(\phi)$ rencontrerait la section nulle. Nous allons utiliser le résultat suivant :

Théorème [19]. Si $j : L \to T^*M$ est hamiltoniennement isotope à la section nulle, elle admet une <u>phase génératrice quadratique</u>, c'est-à-dire une fonction $S : M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

- $\partial S/\partial v : M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ admet 0 pour valeur régulière, de sorte que $\Sigma_S = (\partial S/\partial v)^{-1}(0)$ est une variété de la dimension de M
- il existe un difféomorphisme $\phi : \Sigma_S \to L$ tel que $j \circ \phi(q,v) = (q,\partial S/\partial q(q,v))$
- $S(q,v) = g(v)$ hors d'un compact, où g est une forme quadratique non dégénérée.

Appliquant ce résultat au translaté $j = \phi - (0,a)$, on obtient que, à un difféomorphisme près, ϕ s'identifie à l'application

$$i_S : \Sigma_S \to T^n \times \mathbb{R}^n , \ (q,v) \to (q,a+\partial S/\partial q) .$$

Par hypothèse on a $p = a+\partial S/\partial q \neq 0$ sur Σ_S. Nous allons voir que l'application $a+\partial S/\partial q$, considérée comme à valeurs dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, est homotope à zéro.

Considérons la 1-forme fermée sur $T^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\Omega = dS + adq = (a+\partial S/\partial q)\, dq + \partial S/\partial v\, dv .$$

Comme $a+\partial S/\partial q \neq 0$ sur $(\partial S/\partial v)^{-1}(0)$, Ω est non singulière. La 1-forme $\Omega =$ $dg - adq$ est aussi non singulière, et l'on a $\Omega = \Omega_0$ hors de K. Par un argument dû à A. Douady (cf. [11], [17]), Ω et Ω_0 sont homotopes parmi les formes non singulières, par une homotopie constante hors de K. Autrement dit, si l'on définit $F, F_0 : T^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+N} \backslash \{0\}$ par

$$F(q,v) = (\partial S/\partial q + a, \partial S/\partial v) \ , \ F_0\,(q,v) = (a,\partial g/\partial v) \ ,$$

et $G , G_0 : T^n \times \mathbb{R}^n \to S^{n+N-1}$ par

$$G = F/|F| \quad , \quad G_0 = F_0/|F_0| ,$$

alors on a $G \cong G_0$ rel. $(T^n \times \mathbb{R}^n \setminus K)$.

Soit $C > 0$ tel que K soit contenu dans $X = T^n \times B^N(C)$. En considérant les restrictions à la variété compacte à bord X^{n+N}, on a les propriétés suivantes pour les applications $G , G_0 : X \to S^{n+N-1}$:

(i) $G \cong G_0$ rel. ∂X

(ii) $G_0^{-1} \{(a/|a|,0)\} = \varnothing$

(iii) G est transverse à $S^{n-1} \subset S^{n+N-1} \subset (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, $G^{-1}(S^{n-1}) = \Sigma_S$ et l'application $g = G|\Sigma_S : \Sigma_S \to S^{n-1}$ s'identifie à $(p-a)/|p-a|$.

D'après la propriété (iii), il s'agit de montrer que g est homotope à zéro sauf peut-être si $n = 3$. Nous allons voir que cela résulte des propriétés (i) et (ii).

Soit $x \in S^{n-1}$ une valeur régulière de g. Par la construction de Thom-Pontriaguine, la classe d'homotopie $[g]$ s'identifie à la classe de cobordisme framé $[g^{-1}(x)] \in \Omega_1^{fr}(\Sigma_S)$. De plus, $x \notin G(\partial X)$ et x est une valeur régulière de G, donc la classe d'homotopie $[G] \in [X$ rel. $\partial X, S^{n+N-1}]$ (applications coïncidant sur le bord avec G_0) s'identifie à $[G^{-1}(x)] \in \Omega_1^{fr}(X)$. Comme $\Sigma_S = G^{-1}(S^{n-1})$ a un fibré normal trivialisé, il est clair que $[G^{-1}(x)]$ est l'image de $[g^{-1}(x)]$ par l'application naturelle $i^* : \Omega_1^{fr}(\Sigma_S) \to \Omega_1^{fr}(X)$.

Si $n \neq 3$, il y a deux possibilités :

(1) Si $n > 3$, l'application i^* est un isomorphisme. En effet, $\Omega_1{}^{fr}(\Sigma_S)$ s'identifie aux classes de cobordisme $[Z,f]$, où Z est une variété fermée de dimension 1 stablement parallélisée et f une application continue de Z dans Σ_S. On a une propriété analogue pour $\Omega_1{}^{fr}(X)$ (ceci pour tout n, car on peut toujours supposer $n + N > 3$), d'où des suites exactes courtes :

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \Omega_1{}^{fr}(\Sigma_S) \to H_1(\Sigma_S;\mathbb{Z}) \to 0$$

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \Omega_1{}^{fr}(X) \to H_1(X;\mathbb{Z}) \to 0 ,$$

où les termes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspondent à $\pi_1(SO(n-1))$ et à $\pi_1(SO(n+N-1))$. Il suffit ensuite de remarquer que (X,Σ_S) est 2-connexe pour en déduire $[g^{-1}(x)] = 0$ c'est-à-dire $g \cong 0$.

(2) Si $n = 2$, on a $\Omega_1{}^{fr}(\Sigma_S) = H_1(\Sigma_S;\mathbb{Z}) = H_1(X;\mathbb{Z})$, donc i^* est injective et l'argument de (1) s'applique encore.

Remarques. (1) Si $n = 3$, comme $\pi_1((SO(2)) = \mathbb{Z}$ on a une suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \to \Omega_1{}^{fr}(\Sigma_S) \to H_1(\Sigma_S;\mathbb{Z}) \to 0$, et le fait que $i^*([g^{-1}(x)]) = 0$ se traduit par : $[g^{-1}(x)] \in 2\mathbb{Z}$. (Il semble peu probable que $n = 3$ soit vraiment un cas particulier).

(2) On peut se demander si ce théorème est encore vrai pour une variété essentielle. Si ce n'était pas le cas, cela donnerait un exemple de variété essentielle non symplectiquement isotope à la section nulle. Par exemple, existe-t-il un tore lagrangien $L \subset T^2 \times (\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$ qui induise en homologie une matrice $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 0 \end{matrix}$ avec $a \neq 0$?

3. Classification symplectique d'ouverts du cotangent. Dans cette section M est encore une variété fermée.

3.1. Définitions. (a) Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de T^*M, on pose :

$$I(\mathcal{U}) = \{ a \in H^1(M;\mathbb{R}) \ : \ \exists \ L \subset \mathcal{U} \text{ essentielle telle que } \xi(L) = a \}.$$

$$I_0(\mathcal{U}) = \{ [\alpha] \in H^1(M;\mathbb{R}) \ : \ \exists \ L \subset \mathcal{U} \text{ hamiltoniennement isotope à } \alpha(M) \}.$$

Ce sont des ouverts de $H^1(M;\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^k$, $k = b_1(M)$, et les applications I, I_0 sont continues si l'on munit les espaces d'ouverts de la topologie de Hausdorff.

(b) Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de T^*M. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont équivalents par isotopie symplectique s'il existe une isotopie symplectique de $\mathcal{U}$ dans T^*M qui l'envoie sur $\mathcal{V}$.

On a les propriétés d'invariance suivantes.

Proposition. (a) Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont équivalents par isotopie symplectique, il existe $b \in H^1(M;\mathbb{R})$ tel que $I_0(\mathcal{V}) = I_0(\mathcal{U}) + b$.

(b) Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts essentiels et symplectomorphes. Alors il existe $A \in \mathrm{Aut}\, H^1(M;\mathbb{Z})$ et $b \in H^1(M;\mathbb{R})$ tels que $I(\mathcal{V}) = AI(\mathcal{U}) + b$.

<u>Démonstration</u>. (a) Evident.

(b) (cf. [21]) Si $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un symplectomorphisme, il induit en cohomologie ϕ^* : $H^1(\mathcal{V}; \mathbb{Z}) \to H^1(\mathcal{U};\mathbb{Z})$ qui s'identifie à un élément de $\mathrm{Aut}\, H^1(M; \mathbb{Z})$. On définit $A = \phi^{*-1}$. Ensuite, la 1-forme fermée $\phi^*\lambda$ sur U a une classe de cohomologie $[\phi^*\lambda] \in H^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ qui s'identifie à un élément b de $H^1(M;\mathbb{R})$. Il est alors facile de voir que si L est une sous-variété essentielle de $\mathcal{U}$, $\phi(L)$ est une sous-variété essentielle de V et $\xi(\phi(L)) = A\xi(L) + b$. On a une propriété analogue pour ϕ^{-1}, d'où la proposition.

3.2. Proposition. Soit $P \subset \mathbb{R}^k$ un polyèdre ouvert convexe contenant 0, à faces entières et en nombre fini. Si $n = 2$, on suppose de plus que les inéquations définissant l'appartenance de $\xi \in H^1(M;\mathbb{R})$ à P sont de la forme

$$(\xi,a_i) > c_i\,,\ 1 \le i \le N\,,\ a_i \in H_1(M;\mathbb{Z})\,,$$

où les a_i sont représentés par des lacets plongés disjoints γ_i (si $n \ge 3$ c'est toujours le cas).

Alors il existe $\mathcal{U}$ étoilé tel que $I_0(\mathcal{U}) = P$.

Corollaire. Si $b_1(M) \ge 2$ l'ensemble des valeurs prises par $I_0(\mathcal{U})$ sur les ouverts étoilés est de dimension infinie.

<u>Démonstration</u>. Nous allons voir qu'il suffit de poser, les γ_i étant paramétrés par $[0,1]$:

$$\mathcal{U} = T^*(M\backslash\bigcup_i \gamma_i) \cup_i \{ (q,p) \ :\ q \in \gamma_i\,,\ p(d\gamma_i/dt) > c_i \}\,.$$

Comme P contient 0 on a $c_i < 0$ donc $\mathcal{U}$ est étoilé. De plus :

(1) $I_0(\mathcal{U}) \supset P$. En effet, si $\xi \in P$ il existe une 1-forme fermée α représentant ξ et telle que $\alpha(d\gamma_i/dt) = (\xi, a_i)$ pour tout i : son graphe $\alpha(M)$ est contenu dans $\mathcal{U}$ donc $\xi \in I_0(\mathcal{U})$.

(2) $I_0(\mathcal{U}) \subset P$. Ceci résulte aussitôt du lemme suivant, lui-même conséquence immédiate de la propriété 2.1.(i)

Lemme. Soient α une forme fermée et γ un lacet. Si $\mathcal{U}$ ne rencontre pas $v^*\gamma + \alpha$, alors $I_0(\mathcal{U})$ ne contient pas $[\alpha]$.

Remarque. Si la conjecture 2.5 était vraie, la proposition resterait vraie pour $I(\mathcal{U})$ ce qui permettrait directement d'obtenir le théorème 4.

3.3. Nous allons voir que la différence entre l'isotopie symplectique et l'équivalence symplectique peut n'être "pas trop grande". Commençons par une définition : un ouvert $\mathcal{U}$ est <u>essentiel</u> si la projection $\mathcal{U} \to M$ induit un isomorphisme $H^1(M;\mathbb{Z}) \to H^1(\mathcal{U};\mathbb{Z})$.

Proposition. Soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ une famille non dénombrable d'ouverts essentiels dont l'un est étoilé et borné. On suppose qu'ils sont deux à deux non équivalents dans T^*M. Alors il existe i et j distincts tels que $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_j$ ne soient pas symplectomorphes.

<u>Démonstration</u>. Soit $\mathcal{U}_0$ l'ouvert étoilé borné. Supposons qu'au contraire il existe pour tout i un symplectomorphisme $\phi_i : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_i$. Alors $\phi_i \mid M$ donne un plongement lagrangien α_i de M dans T^*M. Comme les classes d'isotopie symplectique de ces plongements sont en nombre au plus dénombrable, il existe i et j distincts tels que α_i et α_j soient symplectiquement isotopes. Nous allons voir que le fait que $\mathcal{U}_0$ est étoilé par rapport à M permet d'appliquer l'astuce d'Alexander dans les fibres de T^*M et d'en déduire que $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_j$ sont équivalents dans T^*M.

Comme $M \subset \mathcal{U}_i$ est une équivalence d'homotopie, on peut par extension d'isotopie symplectique se ramener au cas où $\alpha_i = \alpha_j$. Notons $L = \alpha_i(M) = \alpha_j(M)$. Puisque $\mathcal{U}_i$ est essentiel, L est aussi essentielle. Soit $\phi = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j$. Par construction $\phi \mid L = id$, et l'on peut en fait supposer que $\phi = id$ près de L. En effet, ϕ a a une fonction génératrice et l'on peut la rendre nulle près de L.

Montrons que, comme plongement de $\mathcal{U}_i$ dans T^*M, ϕ est isotope à l'identité, ce qui montrera bien que $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_j$ sont équivalents dans T^*M contrairement à l'hypothèse. Voici la construction de l'isotopie de ϕ à id :

(1) Soit $X = \phi_i*(X_0)$ sur $\mathcal{U}_i$ où $X_0 = p.\partial/\partial p$ est le champ radial dans les fibres. On note ψ_t son flot : il est défini pour $t \leq 0$ puisque $\mathcal{U}_0$ est étoilé.

(2) Soit Y un champ de Liouville complet sur T^*M, tel que $Y = X$ près de L. Ceci est possible parce que $X - X_0$ est le ω-dual d'une forme fermée β et que le fait que L est essentielle dit que β est cohomologue à une forme β' qui provient de la base, donc qu'on peut trouver β'' sur T^*M qui vaut β près de L et β' à l'infini. On note χ_t son flot, qui est défini pour t quelconque.
(3) Soit $\phi_t = \chi_t \circ \phi \circ \psi_{-t}$, $t \geq 0$. Alors, pour T assez grand, $\psi_{-T}(K)$ est contenu dans un voisinage de L assez petit pour que $\phi = \mathrm{id}$ et $X = Y$, donc $\phi_T = \chi_T \circ \psi_{-T}$.

L'isotopie cherchée s'obtient en faisant suivre $(\phi_t, 0 \leq t \leq T)$ de $(\chi_t \circ \psi_{-t}, T \geq t \geq 0)$.

3.4. Preuve du théorème 4. Soit $\mathcal{E}_{\acute{e}t}(T^*M)$ l'espace des ouverts étoilés. Il est muni de deux relations d'équivalence :

- la relation d'équivalence symplectique, notée $\approx$

- la relation d'isotopie symplectique, notée $\approx_0$.

La proposition 3.3 dit que les fibres de $\mathcal{E}_{\acute{e}t}(T^*M)/\approx_0 \to \mathcal{E}_{\acute{e}t}(T^*M)/\approx$ sont dénombrables. Ceci implique que $\mathcal{E}_{\acute{e}t}(T^*M)/\approx$ a la même dimension que $\mathcal{E}_{\acute{e}t}(T^*M)/\approx_0$. Or, si $b_1(M) \geq 2$, le corollaire 3.2 et la continuité de I_0 montrent que ce dernier espace est encore de dimension infinie.

Remarques. (1) A fortiori, l'espace des structures symplectiques sur T^*M est alors de dimension infinie. La topologie sur cet espace est donnée par la topologie compacte-ouverte C^0 (ou C^∞ ce qui revient au même). Rappelons qu'au contraire, si V est une variété fermée, le lemme de Moser implique que l'espace des structures symplectiques sur V est une variété de dimension finie, égale à $b_1(V)$. Si V est ouverte, c'est encore vrai pourvu que l'on prenne la topologie fine, la dimension étant alors $b_1(V,\infty)$. Le résultat ci-dessus indique que pour la topologie fine il y a sans doute énormément de composantes connexes en général, alors que sur $\mathbb{R}^{2n}$ par exemple l'espace des structures symplectiques avec la topologie compacte-ouverte est connexe d'après le h-principe [8].

(2) Il résulte du travail récent d'A. Floer et Hofer [5] que pour toute métrique riemannienne les longueurs de toutes les géodésiques fermées sont des invariants d'isotopie symplectique du tube unité ouvert. Plus généralement, pour tous les ouverts étoilés à bord lisse les aires des caractéristiques fermées sont de tels invariants. En utilisant un résultat de J.-P. Otal [12], on en déduit, dans le cas où M est une surface, que si les tubes unité de deux métriques à courbure négative et sont équivalents par isotopie symplectique, alors les métriques sont les mêmes à isotopie près. Il est probable que le symplectomorpisme des tubes devrait suffire, et plausible que le résultat subsiste en dimension quelconque.

(3) Des invariants très proches ont été définis indépendamment par Eliashberg [5], qui en a aussi déduit des invariants de contactomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Audin, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 593-623.

[2] D. Bennequin, *Caustique mystique*, Séminaire Bourbaki n° 635 (novembre 1984), Astérisque **133-134**, 19-56.

[3] I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Z. **200** (1989), 355-378. Partie II, Math. Z. **201** (1990)

[4] Ya. M. Eliashberg, *A theorem on the structure of wave fronts and its applications in symplectic topology*, Funct. Anal. Appl. **21** (1987), 227-232.

[5] Ya. M. Eliashberg, préprint Stanford Univ.1990.

[6] A. Floer, H. Hofer, en préparation.

[7] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307-347.

[8] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer Ergebnisse **9** (nouvelle série), 1986.

[9] M. Gromov, *Symplectic topology, hard and soft*, Int. Congress Math. Berkeley 1986, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, p. 81-98.

[10] F. Lalonde et J.-C. Sikorav, *Sous-variétés lagrangiennes des fibrés cotangents*, à paraître dans Comment. Math. Helv.

[11] F. Laudenbach, *Les formes différentielles de degré 1 non singulières : classes d'homotopie de leurs noyaux*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 447-464.

[12] J.-P. Otal, *Le spectre marqué des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math. (1990)

[13] L. Polterovich, *The Maslov class of Lagrange surfaces and Gromov's pseudo-holomorphic curves*, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[14] L. Polterovich, *Monotone Lagrange submanifolds of linear spaces and the Maslov class in cotangent bundles*, à paraître dans Math. Zeit.

[15] L. Polterovich, *The surgery of Lagrange submanifolds*, préprint 1990.

[16] L. Polterovich, *The Maslov class rigidity and non existence of Lagrangian embedding*, préprint IHES 1990.

[17] J.-C. Sikorav, *Classes d'homotopie des formes fermées non singulières*, C. R. Acad. Sci. Paris **294** (1982), 413-416.

[18] J.-C. Sikorav, *Sur un problème de disjonction par isotopie symplectique*, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **57** (1986), 543-552.

[19] J.-C. Sikorav, *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne*, Comm. Math. Helv. **62** (1987), 61-72.

[20] J.-C. Sikorav, *Homologie de Novikov,* in : Thèse d'Etat, Université Paris-Sud Orsay, 1987.

[21] J.-C. Sikorav, *Rigidité symplectique dans le cotangent de* T^n, Duke Math. J. **59** (1989), 227-231.

[22] C. Viterbo, *A new obstruction to embedding Lagrangian tori,* Invent. Math. **100** (1990), 301-320.

[23] C. Viterbo, *Plongements lagrangiens et capacités symplectiques de tores dans* $\mathbb{R}^{2n}$, C.R.Acad.Sci. Paris **311** Série I (1990), 487-490.