

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ÉTIENNE GHYS

Flots transversalement affines et tissus feuilletés

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 123-150

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__123_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FLOTS TRANSVERSALEMENT AFFINES ET TISSUS FEUILLETES

Etienne GHYS

Cet article se compose de deux parties distinctes qui peuvent être lues indépendamment. Nous les avons cependant regroupées car la seconde peut à la fois jouer le rôle de motivation et d'application pour la première.

C'est grâce à de nombreuses conversations avec Yves Carrière que ce travail a pu être mené à bien. Je l'en remercie chaleureusement.

I - LES FLOTS TRANSVERSALEMENT AFFINES COMPLEXES.

I. INTRODUCTION

Les théorèmes de structure décrivant les feuilletages de codimension 1 réelle sont essentiellement fondés sur le théorème de R. Sacksteder [7]. Il serait agréable de pouvoir transposer ce résultat dans le domaine complexe [9]. Rappelons-en l'énoncé. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1, transversalement orientable, de classe C^2 , sur une variété compacte connexe M . Soit $\mathcal{M} \subset M$ un *ensemble minimal*, c'est-à-dire un fermé non vide réunion de feuilles de \mathcal{F} et minimal pour ces propriétés. On suppose que \mathcal{M} est *exceptionnel* dans le sens où il ne coïncide ni avec une feuille compacte ni avec la variété M toute entière. Alors, il existe un lacet contenu dans une feuille de \mathcal{M} dont l'holonomie est hyperbolique, c'est-à-dire dont la dérivée au point fixe est différente de 1. Il est concevable que ce même énoncé reste vrai dans le contexte holomorphe si l'on définit correctement la notion d'ensemble minimal exceptionnel dans ce cas.

Un corollaire important du théorème de Sacksteder a été exploité en particulier par J. Plante ; il décrit la nature des *mesures transverses invariantes*. Rappelons qu'une telle mesure est une collection de mesures définies sur les transversales au feuilletage qui est invariante par le pseudogroupe d'holonomie. On dit qu'une mesure transverse invariante (non triviale) est *ergodique* si elle ne peut pas s'écrire comme somme de deux mesures transverses invariantes non proportionnelles. Le corollaire en question peut s'exprimer de la façon suivante. Une mesure transverse invariante ergodique ne peut être que de deux types :

i) Elle est concentrée sur une feuille compacte, c'est-à-dire que, sur une transversale, elle se réduit à la somme des masses de Dirac aux points d'intersection avec cette feuille compacte.

ii) Son support est la variété toute entière. Dans ce cas on peut paramétrer topologiquement les transversales grâce à cette mesure et le pseudogroupe d'holonomie est alors topologiquement conjugué à un pseudogroupe de translations de la droite réelle.

On peut énoncer un analogue holomorphe.

Question : Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement holomorphe de codimension 1 complexe sur une variété compacte M . On suppose que \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante ergodique μ . Peut-on affirmer que la mesure μ est de l'un des types suivants ?

i) μ est concentrée sur une feuille compacte de \mathcal{F} .

ii) μ est concentrée sur une sous-variété compacte V de codimension 1 réelle.

iii) μ est une forme de volume transverse. Dans ce cas \mathcal{F} est riemannien, c'est-à-dire qu'il existe une métrique riemannienne sur le fibré normal à \mathcal{F} qui est invariante par holonomie.

Le premier but de cet article est de donner une modeste contribution à ce problème. Nous allons considérer le cas simple où le pseudogroupe d'holonomie n'est pas constitué d'applications holomorphes quelconques mais plutôt d'applications affines complexes du type $z \rightarrow az + b$. On dit alors que le feuilletage est *transversalement affine complexe*.

Théorème. La réponse à la question précédente est affirmative dans le cas d'un feuilletage transversalement affine complexe.

Ce résultat est démontré au paragraphe 2. On le comparera au théorème de Nishimori [6] qui démontre un analogue du théorème de Sacksteder pour les feuilletages transversalement affines complexes mais sous une hypothèse géométrique difficilement contrôlable concernant la structure

de l'ensemble minimal. Dans le paragraphe 3, on donne une application qui justifie le titre de cet article. On appellera ici "flot" un feuilletage orienté de dimension 1 (on ne fixe donc pas de paramétrage le long des feuilles). Une propriété essentielle de ces flots est que leurs feuilles, étant de dimension 1, sont à croissance linéaire et donc polynomiale. Il en résulte que tout flot possède au moins une mesure transverse invariante non triviale. Ceci permet, et c'est le but du paragraphe 3, de classer complètement les flots transversalement affines complexes. Nous ne citerons dans cette introduction qu'une classification faible qui sera précisée plus loin.

Théorème. *Soit \mathcal{F} un flot transversalement affine complexe sur une variété compacte connexe M (de dimension 3). Alors quatre cas sont possibles :*

- i) *Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont fermées et \mathcal{F} est une fibration de Seifert .*
- ii) *Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont des tores T^2 . La collection de ces adhérences définit une fibration de M sur le cercle.*
- iii) *La variété M est difféomorphe au tore T^3 et \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire à feuilles denses.*
- iv) *La variété M est difféomorphe à $S^2 \times S^1$ et \mathcal{F} possède deux orbites périodiques qui sont respectivement les ensembles α et ω -limites de toutes les autres orbites.*

2. PSEUDOGRUPES AFFINES COMPLEXES.

On se fixe un feuilletage \mathcal{F} transversalement affine complexe sur une variété compacte connexe M . On suppose que \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante ergodique μ et que celle-ci n'est pas concentrée sur une feuille compacte. Dans ces conditions, on se propose de démontrer que le feuilletage considéré est riemannien.

Soit $K \subset M$ le support de la mesure μ , c'est-à-dire le fermé constitué des points x tels que toute transversale à \mathcal{F} contenant x dans son intérieur est de mesure non nulle. Bien sûr, K est un fermé non vide saturé par le feuilletage. Dans un premier temps, nous allons montrer que la restriction de \mathcal{F} au fermé K est "équicontinue". Pour pouvoir préciser cette notion, nous allons introduire quelques notations supplémentaires.

Recouvrons M par un nombre fini d'ouverts connexes U_i feuilletés trivialement, c'est-à-dire difféomorphes à $L_i \times T_i$ où L_i est un ouvert de \mathbb{R}^p (p est la dimension des feuilles) et T_i un ouvert connexe du plan complexe. Soit $f_i : U_i \rightarrow T_i$ la projection correspondante. Par hypothèse, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe une application affine complexe γ_{ij} telle que $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$ sur $U_i \cap U_j$. On peut toujours supposer que les adhérences des T_i dans \mathbb{C} sont disjointes et on note T la réunion

des T_i . Soit \mathcal{P} le pseudogroupe d'holonomie correspondant agissant sur T et engendré par les restrictions des γ_{ij} à $f_i(U_i \cap U_j)$.

Il est bien connu que le fait que \mathcal{P} provienne d'un feuilletage d'une variété compacte entraîne que \mathcal{P} est de *génération compacte* (voir [4]). Cela entraîne qu'il est possible de choisir des ouverts connexes T_i' dans T_i ayant les propriétés suivantes :

- i) L'adhérence de T_i' dans \mathbb{C} est contenue dans T_i .
- ii) Le pseudogroupe \mathcal{P}' agissant sur la réunion T' des T_i' et engendré par les restrictions de γ_{ij} à $f_i(U_i \cap U_j) \cap T_i'$ est équivalent à \mathcal{P} .

La démonstration de ce fait est bien facile et se fonde sur le lemme de recouvrement de Lebesgue appliqué au recouvrement de M par les U_i .

On munit T et T' de la métrique provenant de leurs plongements naturels dans \mathbb{C} . Cette métrique n'est bien sûr pas invariante par \mathcal{P} et \mathcal{P}' puisque nous ne supposons pas a priori que \mathcal{F} est riemannien ! Remarquons cependant que, \mathcal{P} étant affine complexe, les disques de T sont envoyés sur des disques.

Par hypothèse, μ définit une mesure non triviale sur T , encore notée μ et invariante par \mathcal{P} . Son support est noté \mathcal{K} . Le support de la mesure μ restreinte à T' est bien sûr $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap T'$. La partie atomique de μ est encore une mesure invariante par \mathcal{P} . Puisque nous supposons μ ergodique et non réduite à des atomes, la mesure μ est sans atomes.

L'équicontinuité de \mathcal{P} sur \mathcal{K} peut maintenant être explicitée.

Lemme 2.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ ayant la propriété suivante. Soit x un point de $T_i' \cap \mathcal{K}'$ tel que le disque $D(x, \eta)$ de centre x et de rayon η soit contenu dans T_i . Soit γ un élément du pseudogroupe \mathcal{P} défini sur $D(x, \eta)$. Alors $\gamma(D(x, \eta))$ est un disque de rayon inférieur à ε .*

Démonstration. Nous affirmons d'abord que pour tout $\delta > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que tout disque D de rayon r , centré sur un point de \mathcal{K}' et contenu dans l'un des T_i' , est de mesure inférieure à δ . En effet, dans le cas contraire, il existerait un $\delta > 0$ et une suite de point x_n de \mathcal{K}' telle que les disques $D(x_n, 1/n)$ soient de mesure supérieure à δ . Il est clair que tout point d'accumulation de la suite x_n dans \mathcal{K} serait un atome pour la mesure μ sur T . Ceci est contraire à l'hypothèse faite sur μ .

Réciproquement, pour tout rayon $r > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que tout disque D , contenu dans T_1' , centré sur un point de \mathcal{K}' et de mesure inférieure à δ , est de rayon inférieur à r . En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite de disques D_n , centrés sur \mathcal{K}' , de mesure tendant vers 0 mais de rayons minorés. Une limite de tels disques serait un disque de mesure nulle mais centré sur un point de \mathcal{K}' . Ceci contredit le fait que \mathcal{K}' est le support de la mesure étudiée.

Les deux affirmations précédentes montrent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ ayant la propriété suivante. Si deux disques D_1 et D_2 sont centrés sur \mathcal{K}' , sont contenus dans un T_1' et sont de même mesure et si le rayon de D_1 est inférieur à η , alors le rayon de D_2 est inférieur à ε .

Cette dernière propriété, associée au fait que \mathcal{P}' préserve les disques et la mesure, achève la démonstration du lemme.

Lemme 2.2. *Pour tout point x de \mathcal{K}' , il existe un voisinage \mathcal{V} de x tel que tout germe en x d'un élément de \mathcal{P}' est le germe en x d'un élément de \mathcal{P} défini sur \mathcal{V} tout entier.*

Démonstration. Notons \mathcal{P}_1' l'ensemble fini des générateurs naturels de \mathcal{P}' et \mathcal{P}_k' l'ensemble des composés d'au plus k éléments de \mathcal{P}_1' . Il existe un réel $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante. Si le germe d'un élément γ de \mathcal{P}_1' est défini en x , alors l'élément γ se prolonge en un élément de \mathcal{P} défini sur le disque $D(x, \varepsilon)$ contenu dans T .

Soit \mathcal{V} le disque $D(x, \eta)$ où $\eta \leq \varepsilon$ est donné par le lemme 2.1 pour le choix précédent de ε . Montrons, par récurrence sur l'entier k , que le voisinage \mathcal{V} vérifie la condition requise pour les germes d'éléments de \mathcal{P}_k' .

Lorsque $k=1$, cette condition est vérifiée par définition de ε . Supposons la vérifiée jusqu'à l'entier k . Soit γ un élément de \mathcal{P}_{k+1}' , défini au point x de \mathcal{K}' , écrit sous la forme :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \text{ avec } \gamma_2 \in \mathcal{P}_1' \text{ et } \gamma_1 \in \mathcal{P}_k'.$$

Nous savons que γ_2 se prolonge en un élément de \mathcal{P} défini sur le disque $D(x, \eta)$. Le lemme 2.1 montre alors que $\gamma_2(D(x, \eta))$ est un disque centré sur un point de \mathcal{K}' et de rayon inférieur à ε . Par hypothèse de récurrence, γ_1 se prolonge à un élément de \mathcal{P} défini sur $\gamma_2(D(x, \eta))$. Ceci montre que γ se prolonge en un élément de \mathcal{P} défini sur $\mathcal{V} = D(x, \eta)$ et achève la démonstration du lemme 2.2.

Notons que ce lemme exprime une propriété proche de la complétude introduite dans [4],[8].

Soit $\text{Aff}(\mathbb{C})$ le groupe affine complexe, c'est-à-dire le groupe des applications du type $z \rightarrow az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Puisque la mesure μ est ergodique, l'orbite par \mathcal{P}' de μ -presque tout point de \mathcal{K}' est dense dans \mathcal{K}' . Fixons un point x de \mathcal{K}' ayant cette propriété et soit \mathcal{V} le voisinage de x donné par le lemme précédent. Soit Γ_ε la partie de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ constituée des éléments γ tels que :

- i) le germe de γ en x est le germe d'un élément de \mathcal{P}' .
- ii) La distance entre $\gamma(x)$ et x est inférieure à ε .

Il résulte du lemme 2.2 que si ε est assez petit, pour tout γ de Γ_ε la restriction de γ à \mathcal{V} est dans \mathcal{P} .

Les lemmes 2.1 et 2.2 montrent alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que le produit de deux éléments de $\overline{\Gamma}_\eta$ est dans Γ_ε . Soit $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ l'adhérence de Γ_ε dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Par conséquent, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ est un sous-groupe de Lie local fermé de $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Les restrictions à \mathcal{V} des éléments de Γ_ε préservent μ et il en est donc de même pour les éléments de $\overline{\Gamma}_\varepsilon$.

En observant que les sous-groupes de Lie locaux fermés de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ sont localement les sous-groupes fermés connexes de $\text{Aff}(\mathbb{C})$, nous avons montré le résultat suivant.

Proposition 2.3. *Il existe un sous-groupe fermé connexe H de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ tel que les éléments de $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ proches de l'identité sont les éléments de H proches de l'identité. Les éléments de Γ_ε normalisent H .*

De façon à analyser les sous-groupes fermés connexes H de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ qui pourront intervenir, nous ferons d'abord les observations suivantes :

- i) H ne contient pas de contraction de centre x car H préserve la mesure μ non atomique.
- ii) le premier groupe dérivé H' de H est un groupe de translations normalisé par H .

Nous pouvons donc envisager plusieurs possibilités :

Cas 1 : H est trivial.

Cas 2 : H contient toutes les translations.

Cas 3 : H contient toutes les translations parallèles à une droite donnée $z \rightarrow z + tv$ (avec v fixé et t réel quelconque). Alors H et Γ_ε sont contenus dans le groupe des applications du type $z \rightarrow \pm z + tv$.

Cas 4 : H ne contient aucune translation. Dans ce cas, H est abélien, contenu dans le groupe des homothéties de même centre $z_0 \in \mathbb{C}$ du type $z \rightarrow \lambda(z - z_0) + z_0$. De même, Γ_ε est contenu dans ce même groupe abélien. On distingue alors deux sous-cas :

a) H contient toutes les homothéties de centre z_0 .

b) H coïncide avec le groupe des homothéties de centre z_0 dont le multiplicateur λ appartient à un sous-groupe à un paramètre de \mathbb{C}^* , i.e. du type $\{\exp(\alpha)\}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ fixé et t réel quelconque).

Nous allons examiner chacun de ces cas.

Lemme 2.4. *Le cas 1 est impossible.*

Démonstration. Le point x n'est pas un point isolé de \mathcal{K}' car x n'est pas un atome de μ et l'orbite de x par \mathcal{P}' est dense dans \mathcal{K}' . Il existe donc une suite d'éléments distincts γ_n de Γ_ε tels que $\gamma_n(x)$ tende vers x_0 . La suite $|\gamma_n'(x)|$ des modules des dérivées des γ_n reste dans un intervalle compact $[u, v]$ de \mathbb{R}_+ car sinon on pourrait trouver dans le voisinage \mathcal{V} de x un point fixe répulsif ou attractif pour l'un des γ_n et nous avons vu que ceci est impossible. Quitte à passer à une sous-suite, on peut donc supposer que γ_n converge dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$ et donc que $\gamma_n \gamma_p^{-1}$ tende vers l'identité si n et p tendent vers l'infini. On trouve ainsi des éléments de Γ_ε différents de l'identité dans n'importe quel voisinage de l'identité dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$.

Lemme 2.5. *Dans le cas 2, le feuilletage considéré est riemannien.*

Démonstration. Dans ce cas, au voisinage de x , la mesure μ est invariante par toutes les petites translations de \mathbb{C} . La restriction de μ à un voisinage de x est donc proportionnelle à la mesure de Lebesgue de \mathbb{C} . Nous allons montrer qu'il en est de même au voisinage de tout autre point y de \mathcal{K}' . Puisque l'orbite de x par \mathcal{P}' est dense dans \mathcal{K}' , il est possible de trouver une suite d'éléments γ_n de \mathcal{P}' tels que γ_n soit défini en x et que $\gamma_n(x)$ tende vers y . Puisque la mesure μ coïncide avec un multiple de la mesure de Lebesgue au voisinage de x , les lemmes 2.1 et 2.2 permettent alors d'en déduire que μ coïncide aussi avec un multiple constant de la mesure de Lebesgue au voisinage de y . Par conséquent, tous les points de \mathcal{K}' sont intérieurs au support de μ , c'est-à-dire à \mathcal{K}' . En d'autres termes, \mathcal{K}' est ouvert (et fermé). Par connexité de la variété ambiante, on a $\mathcal{K}' = T'$ et la mesure coïncide sur chaque composante connexe T_i' de T' avec un multiple constant de la mesure de Lebesgue. En modifiant chaque T_i' par une homothétie convenable, on se ramène au cas où μ coïncide avec la mesure de Lebesgue sur T' . La conclusion est maintenant claire : une application affine complexe qui préserve la mesure de Lebesgue est une isométrie.

Lemme 2.6. *Dans le cas 3, le feuilletage est riemannien.*

Démonstration. Le fermé \mathcal{K}' coïncide alors, au voisinage de x , avec un intervalle d'une droite du plan complexe. De plus, dans ce voisinage, μ coïncide avec un multiple constant de l'élément de longueur sur cette droite. Par un argument analogue à celui utilisé dans le lemme précédent, cette propriété est vérifiée au voisinage de tout point de \mathcal{K}' . En raffinant le recouvrement U_i de M , on peut alors supposer que pour chaque composante connexe T_i de T , l'intersection $T_i \cap \mathcal{K}$ est vide ou égale à un intervalle Δ_i d'une droite du plan complexe. Par changement de coordonnée affine sur T_i , on peut supposer que μ coïncide sur T_i avec l'élément de longueur sur Δ_i (pour les indices i tels que Δ_i soit défini).

Soit \mathcal{C} la réunion des T_i qui rencontrent \mathcal{K} , c'est-à-dire qui contiennent l'un de ces intervalles Δ_i . Nous affirmons d'abord que si x appartient à $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap T'$, alors pour tout γ de \mathcal{P} avec $\gamma(x) \in \mathcal{C}'$, l'élément γ est une isométrie de \mathbb{C} . Considérons en effet l'ensemble Ω' des points x de \mathcal{C}' pour lesquels cette propriété est vérifiée. On peut aussi définir l'ensemble Ω des points x de \mathcal{C} tels que pour tout γ de \mathcal{P} avec $\gamma(x) \in \mathcal{C}$, l'élément γ est une isométrie. Observons que $\Omega' = \Omega \cap \mathcal{C}'$ car les pseudogroupes \mathcal{P} agissant sur T et \mathcal{P}' agissant sur T' sont équivalents.

i) Ω' est non vide car il contient les points de $\mathcal{K}' = (\cup \Delta_i) \cap \mathcal{C}'$.

ii) Ω' est fermé dans \mathcal{C}' . Considérons une suite x_n d'éléments de Ω' convergeant vers un point x de \mathcal{C}' . Soit γ un élément de \mathcal{P}' tel que $\gamma(x) \in \mathcal{C}'$. Comme le domaine de définition de γ est ouvert, $\gamma(x_n) \in \mathcal{C}$ pour n assez grand et γ est une isométrie.

iii) Ω' est ouvert. Soit $x \in \Omega'$ et y un point voisin de x . Soit γ un élément de \mathcal{P}' défini en y et tel que $\gamma(y) \in \mathcal{C}'$. Bien sûr, γ n'est pas nécessairement défini en x mais nous savons que les générateurs de \mathcal{P}' se prolongent en des générateurs de \mathcal{P} de sorte que x est dans le domaine de définition de γ considéré comme élément de \mathcal{P} . Il en résulte que γ est une isométrie.

Par connexité, Ω' coïncide avec \mathcal{C}' .

Considérons maintenant une composante T_i' de T' ne rencontrant pas \mathcal{K}' , c'est-à-dire contenue dans $T' \setminus \mathcal{C}'$. On peut alors trouver un point x de T_i' et un élément γ de \mathcal{P}' tels que $\gamma(x) \in \mathcal{C}'$. Ceci résulte de la connexité de la variété ambiante M . Equipons T_i' de la métrique image de la métrique euclidienne de \mathbb{C} par γ^{-1} . Cette métrique ne dépend pas du choix de $x \in T_i'$ et de γ d'après ce que nous venons de voir.

Il est maintenant clair que le pseudogroupe \mathcal{P}' tout entier est un pseudogroupe d'isométries.

Remarquons que, dans la situation que nous venons de considérer le support K de μ dans M est une sous-variété fermée de codimension 1 réelle dans M qui se projette localement sur les intervalles Δ_i .

Lemme 2.7. *Dans le cas 4, le feuilletage est riemannien.*

Démonstration. Dans le sous-cas a) le point z_0 , centre des homothéties $z \rightarrow \lambda(z-z_0) + z_0$ n'est certainement pas dans le voisinage \mathcal{V} de x car nous avons vu que la restriction à \mathcal{V} de ces homothéties préserve μ et que μ n'a pas d'atomes. Puisque toutes les valeurs de λ correspondent à des éléments de H , les orbites locales de H sont ouvertes. Là encore, le point considéré x est intérieur au support de μ et la forme μ est localement une forme volume. On conclut alors comme dans le lemme 2.5.

Dans le sous-cas b), le groupe H est constitué d'homothéties du type $\exp(t\alpha)(z-z_0) + z_0$ (t réel, α complexe fixé). Les orbites sont des spirales logarithmiques ou des cercles. On procède exactement comme dans le lemme 2.6 en remplaçant les intervalles de droite par des morceaux de spirales logarithmiques ou des arcs de cercles. La métrique euclidienne sur \mathbb{C} doit alors être remplacée par la métrique $\frac{dz d\bar{z}}{|z-z_0|^2}$, invariante par H .

Résumons les résultats obtenus dans ce paragraphe.

Théorème 2.8. *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine complexe sur une variété compacte connexe M . On suppose que \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante ergodique μ . Alors deux cas (non exclusifs) sont possibles :*

- i) La mesure μ est concentrée sur une feuille compacte.*
- ii) Le feuilletage \mathcal{F} est riemannien.*

Observons que, dans le cas ii), la mesure μ n'est pas nécessairement une forme de volume transverse. Nous avons vu que μ peut se concentrer sur une sous-variété fermée de M de codimension réelle 1.

3. FLOTS TRANSVERSALEMENT AFFINES.

Dans ce paragraphe, nous classons les flots transversalement affines complexes sur les variétés compactes connexes sans bord. Cette classification sera une conséquence assez facile du théorème démontré au paragraphe précédent. L'observation fondamentale est bien sûr qu'un flot quelconque possède toujours au moins une mesure transverse invariante non triviale et donc une mesure ergodique (rayons extrémaux du cône des mesures invariantes).

Rappelons la classification des flots riemanniens telle qu'elle a été donnée par Yves Carrière [2].

Soit \mathcal{F} un flot riemannien sur une variété fermée connexe et orientable M de dimension 3. Plusieurs situations peuvent se présenter.

1) Les feuilles \mathcal{F} sont toutes denses. Alors, M est difféomorphe au tore T^3 et le feuilletage \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire. Son pseudogroupe transverse est donc constitué de translations et peut donc être considéré comme transversalement affine complexe. Notons que la structure complexe transverse invariante n'est pas unique.

2) L'adhérence d'une feuille générique de \mathcal{F} est un tore T^2 et au moins une feuille de \mathcal{F} est fermée. Dans ce cas, M s'obtient en recollant deux tores solides $D^2 \times S^1$ le long de leurs bords. Le feuilletage sur chaque tore solide est la suspension d'une rotation du disque d'angle irrationnel (par rapport à π). La variété M est alors un espace lenticulaire ou $S^2 \times S^1$. Dans un cas comme dans l'autre, \mathcal{F} ne peut posséder de structure transverse affine complexe. D'une part, le revêtement universel d'une variété possédant un feuilletage transversalement affine complexe se submerge sur un ouvert de \mathbb{C} par l'application développante [2] et ne peut donc être compact. Ceci élimine le cas des espaces lenticulaires dont le groupe fondamental est fini. D'autre part, pour cette même raison, la sphère S^2 ne peut posséder de structure affine complexe et ceci montre que les feuilletages riemanniens considérés sur $S^2 \times S^1$ ne peuvent être transversalement affines.

3) Les adhérences de toutes les feuilles de \mathcal{F} sont des tores T^2 . La restriction de \mathcal{F} à l'adhérence de l'une des feuilles est conjuguée à un feuilletage linéaire. La variété M est alors un fibré en tores au-dessus du cercle dont la monodromie est un difféomorphisme linéaire A de $SL(2, \mathbb{Z})$ préservant un feuilletage linéaire de pente irrationnelle de T^2 .

Si la matrice A est l'identité, la variété M est difféomorphe au tore T^3 et \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire. Si $A \neq \text{Id}$, le feuilletage \mathcal{F} est transversalement hyperbolique, c'est-à-dire que sa structure transverse est modélisée sur le groupe d'isométries du demi-plan de Poincaré. Il se trouve

que cette structure transverse peut même se réduire au groupe des isométries du type $z \rightarrow az + b$ (a réel positif et b réel quelconque). En considérant le demi-plan de Poincaré comme plongé dans \mathbb{C} , on voit que ces isométries sont aussi des applications affines de \mathbb{C} . Ainsi, \mathcal{F} peut aussi être considéré comme un feuilletage transversalement affine complexe. (Voir [2] pour une description précise de ces exemples).

4) Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont fermées et \mathcal{F} est un fibré de Seifert. Pour que \mathcal{F} soit muni d'une structure affine transverse invariante, il faut et il suffit que l'"orbifold" base de la fibration soit affine complexe. Ces orbifolds sont bien connues : ce sont les quotients finis des tores T^2 . A un revêtement fini près, la variété M supportant \mathcal{F} est donc un fibré en cercles au-dessus de tore T^2 .

En résumé, nous avons montré le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soit \mathcal{F} un flot riemannien possédant une structure transverse affine complexe, sur une 3-variété fermée connexe M . Alors, trois cas sont possibles :*

- i) M est diffeomorphe au tore T^3 et \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire.
- ii) M est un fibré en tores au-dessus du cercle. Les feuilles de \mathcal{F} sont denses dans les fibres de cette fibration.
- iii) \mathcal{F} est une fibration de Seifert. La base de cette fibration, considérée comme orbifold, est un quotient fini du tore T^2 .

Pour compléter la description des flots transversalement affines, il nous faut maintenant étudier le cas non riemannien. Toute mesure transverse invariante ergodique est alors concentrée sur une feuille compacte (ou encore orbite périodique) de \mathcal{F} .

Le voisinage d'une orbite périodique c de \mathcal{F} est caractérisé par son application de Poincaré qui est une homothétie du type $h(z) = \lambda z$.

Si λ est de module 1 et d'argument irrationnel par rapport à π , on met en évidence une famille de tores invariants au voisinage de c sur lesquels le feuilletage \mathcal{F} est conjugué à un feuilletage linéaire. Ceci permet de trouver des mesures transverses invariantes ergodiques concentrées sur ces tores et donc distinctes de masses de Dirac. D'après ce que nous avons vu, ceci est exclu puisque nous supposons \mathcal{F} non riemannien.

Si λ est une racine de l'unité, toutes les feuilles de \mathcal{F} proches de c sont fermées. L'analyticité transverse de \mathcal{F} montre alors que toutes les feuilles de \mathcal{F} sont fermées et que \mathcal{F} est une fibration de Seifert. Là encore, ceci est exclu puisque \mathcal{F} n'est pas riemannien.

Si $|\lambda| \neq 1$, l'orbite fermée c est répulsive ou attractive. En particulier, pour tout point x proche de c , l'ensemble ω ou α -limite de x coïncide avec c . Observons que, pour tout flot, les ensembles ω et α -limites supportent des mesures transverses invariantes ergodiques. Il en résulte que, dans notre cas, pour tout x de M situé hors d'une orbite fermée, les ensembles $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ sont des orbites fermées isolées attractives et répulsives. Un simple argument de connexité montre alors le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Soit \mathcal{F} un flot transversalement affine complexe non riemannien sur une 3-variété fermée connexe M . Alors, il existe deux orbites fermées c_1 et c_2 de \mathcal{F} telles que, pour tout point x de $M \setminus c_1 \cup c_2$, l'ensemble ω -limite (resp. α -limite) de x est c_1 (resp. c_2).*

Il n'est pas difficile maintenant de compléter la description du flot étudiée. La variété M s'obtient en collant deux tores solides $D^2 \times S^1$ le long de leur bord, transverse à \mathcal{F} . Puisque nous avons vu que le groupe fondamental d'une variété compacte supportant un flot transversalement affine doit être infini, on en déduit que M est difféomorphe à $S^2 \times S^1$.

Pour terminer cette partie, nous décrivons complètement le flot \mathcal{F} avec sa structure transverse affine. La démonstration, facile, est laissée au lecteur.

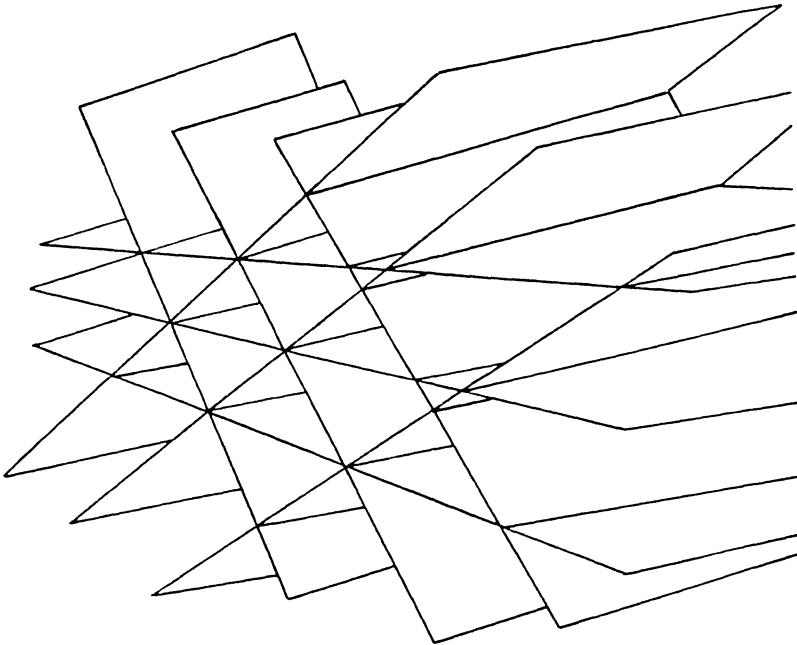
On considère le feuilletage de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ dont les feuilles sont les droites verticales $\{z\} \times \mathbb{R}$ pour $z \neq 0$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_*^+$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_*^-$. Ce feuilletage est invariant par les homothéties (on a toujours $|\lambda| \neq 1$): $(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \rightarrow (\lambda^n z, |\lambda|^n t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Le quotient, difféomorphe à $S^2 \times S^1$, est muni d'un flot transversalement affine complexe possédant exactement deux orbites fermées qui correspondent à $\{0\} \times \mathbb{R}_*^+$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_*^-$. Ces orbites fermées sont les ω et α -limites des autres orbites. A conjugaison près, cette famille de flots (dépendant du paramètre λ) représente tous les flots transversalement affines complexes non riemanniens.

II. LES TISSUS FEUILLETÉS

I. INTRODUCTION.

Soit M une variété fermée de dimension 3. Un *tissu feuilleté* sur M est la donnée suivante :

- i) un feuilletage \mathcal{A} de dimension 1 sur M , appelé *axe* du tissu feuilleté,
- ii) trois feuilletages $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ de codimension 1 sur M , transverses deux à deux et contenant tous les trois l'axe \mathcal{A} .



Les feuilletages considérés sont de classe C^∞ . Pour simplifier, nous supposons aussi que tous ces feuilletages sont orientables et transversalement orientables.

Nous nous proposons ici de décrire tous les tissus feuilletés.

La première observation est qu'il est facile de "compléter" un tissu feuilleté en une famille de feuilletages (\mathcal{F}_λ) de codimension 1, dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et "tournant" autour de l'axe \mathcal{A} . Pour cela, fixons $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et définissons en chaque point x de M l'hyperplan $P_\lambda(x)$ de $T_x M$ qui contient la droite tangente à \mathcal{A} en x et dont le birapport avec les plans tangents à $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ en x est égal à λ . Le champ d'hyperplans P_λ est intégrable pour tout λ . Une façon simple de s'en assurer est de considérer un champ de vecteurs X tangent à \mathcal{A} et le flot φ_t qu'il engendre. L'intégrabilité de $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ montre que la différentielle de φ_t préserve les fibrés tangents à $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ et la linéarité de $d\varphi_t$ montre alors que $d\varphi_t$ préserve le champ de plans P_λ . En d'autres termes, le crochet de Lie de X et d'un champ tangent à P_λ est tangent à P_λ . Le théorème de Frobenius permet d'affirmer que P_λ est intégrable, c'est-à-dire qu'il définit un feuilletage \mathcal{F}_λ .

Nous pouvons maintenant donner quelques exemples.

Exemple 1.1. On suppose qu'il existe une fibration localement triviale π de M sur le tore T^2 , de fibres difféomorphes à S^1 . Considérons trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ de dimension 1, transverses deux à deux, sur le tore T^2 . On définit alors un tissu feuilleté sur M dont l'axe est formé des fibres de π et dont les feuilletages $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ sont $\pi^*f_0, \pi^*f_1, \pi^*f_\infty$.

Exemple 1.2. Soit P un hyperplan linéaire de \mathbb{R}^3 . La famille des hyperplans affines de \mathbb{R}^3 parallèles à P définit un feuilletage linéaire de \mathbb{R}^3 . Lorsque P décrit un faisceau linéaire de \mathbb{R}^3 , ces feuilletages définissent un tissu linéaire de \mathbb{R}^3 invariant par translations. Par passage au quotient par \mathbb{Z}^3 , on obtient un tissu feuilleté sur le tore T^3 . La nature exacte de ce tissu feuilleté dépend de la position du réseau \mathbb{Z}^3 par rapport au faisceau linéaire de plans utilisé. Lorsque l'axe de ce tissu feuilleté correspond à une direction rationnelle de \mathbb{R}^3 , l'exemple ainsi construit rentre dans la famille d'exemples précédents.

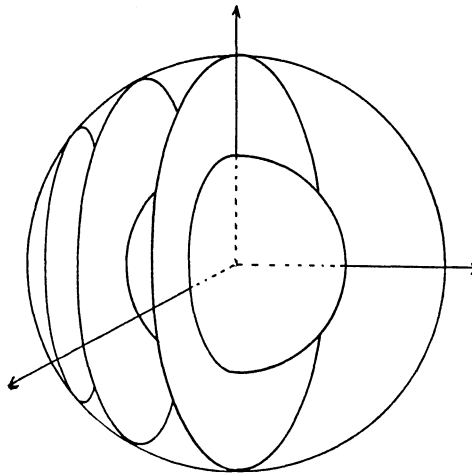
Exemple 1.3. On peut généraliser l'exemple 1.2. Soit G un groupe de Lie de dimension 3, d'algèbre de Lie \mathcal{G} . On suppose qu'il existe dans \mathcal{G} un faisceau linéaire d'hyperplans $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ formé de sous-algèbres de \mathcal{G} . On suppose de plus que G possède un sous-groupe discret Γ tel que G/Γ soit compact. L'hyperplan P_λ de \mathcal{G} définit sur G/Γ un champ de plans intégrable car P_λ est une sous-algèbre. La variété G/Γ est ainsi munie d'un tissu feuilleté.

Voici un exemple explicite. L'algèbre de Lie \mathcal{G} est engendrée par X, Y, Z avec les relations de crochet :

$$[X, Y] = Y \quad ; \quad [X, Z] = -Z \quad ; \quad [Y, Z] = 0.$$

L'hyperplan P_λ est engendré par Y et $X + \lambda Z$. On constatera que P_0 est une sous-algèbre abélienne alors que, pour $\lambda \neq 0$, les sous-algèbres P_λ sont non abéliennes et sont toutes conjuguées dans \mathfrak{G} . Le groupe de Lie simplement connexe G associé à \mathfrak{G} possède effectivement des sous-groupes uniformes discrets Γ . On pourra consulter [2] et [3] pour la description des variétés et des feuilletages correspondants. Nous dirons simplement que les variétés du type G/Γ sont des fibrés en tores sur le cercle. Les fibres toriques correspondent aux orbites de la sous-algèbre abélienne P_0 engendrée par X et Y . Le feuilletage de dimension 1 correspondant à Y , qui est l'axe du tissu feuilleté considéré, est un feuilletage riemannien contenu dans cette fibration en tores. En examinant la liste des groupes de Lie de dimension 3, on s'assure que cet exemple explicite est le seul qui produise des exemples différents de 1.1 et 1.2. Ceci résultera d'ailleurs de la classification des tissus feuilletés que nous allons obtenir.

Exemple 1.4. Considérons le faisceau linéaire des hyperplans (P_λ) de \mathbb{R}^3 qui contiennent l'axe de z . Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, les plans affines parallèles à P_λ définissent un feuilletage de \mathbb{R}^3 et donc de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Tous ces feuilletages sont invariants par les homothéties $(x,y,z) \longrightarrow (kx,ky,kz)$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$). On obtient donc un tissu feuilleté sur le quotient M de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par l'action d'un groupe monogène d'homothéties. Ce quotient est difféomorphe à $S^2 \times S^1$. Pour chaque λ , le feuilletage \mathcal{F}_λ est formé de deux composantes de Reeb collées le long de leur bord. Les rotations euclidiennes de \mathbb{R}^3 autour de l'axe des z induisent sur M des difféomorphismes qui permutent les feuilletages \mathcal{F}_λ . On reconnaîtra dans l'axe de ce tissu feuilleté l'exemple de flot transversalement affine complexe qui a été décrit dans la première partie de cet article.



Par la suite, nous allons analyser complètement la nature des tissus feuilletés. Les exemples les plus significatifs sont ceux que nous venons de citer. Dans cette introduction, nous nous contenterons d'un énoncé faible.

Théorème. *Soit M une variété fermée connexe de dimension 3 qui possède un tissu feuilleté.*

Alors, M est de l'un des types suivants :

- i) un fibré en cercles S^1 au-dessus du tore T^2 ,*
- ii) un fibré en tores T^2 au-dessus du cercle S^1 ,*
- iii) le produit $S^2 \times S^1$.*

2. LA STRUCTURE HOLOMORPHE TRANSVERSE.

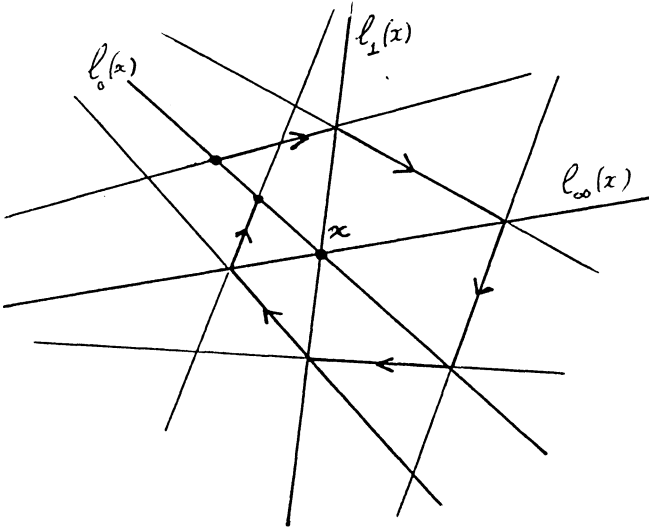
Dans ce paragraphe, nous allons décrire quelques faits bien connus concernant les tissus du plan.

Un *tissu* du plan est la donnée de trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ de dimension 1, transverses deux à deux, dans un ouvert simplement connexe Ω du plan \mathbb{R}^2 . Si x est un point de Ω , il existe une métrique euclidienne dans $T_x\Omega$, unique à multiple près, telle que les droites $T_x f_0, T_x f_1, T_x f_\infty$ forment des angles de $\pi/3$. En d'autres termes, un tissu dans Ω définit une structure conforme sur Ω . D'après le théorème d'intégrabilité bien connu, on peut donc trouver un difféomorphisme direct φ de Ω sur un ouvert du plan euclidien qui envoie f_0, f_1, f_∞ sur trois feuilletages formant un angle $\pi/3$ entre eux. Ce difféomorphisme est bien sûr défini à transformation conforme près, c'est-à-dire, si on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , à transformation holomorphe près. Ainsi, Ω est équipé d'une structure holomorphe.

Bien entendu, un tissu feuilleté trace un tissu sur toute transversale à l'axe. La structure holomorphe induite sur ces transversales est invariante par l'holonomie de l'axe. Par conséquent, *l'axe d'un tissu feuilleté est un flot transversalement holomorphe.*

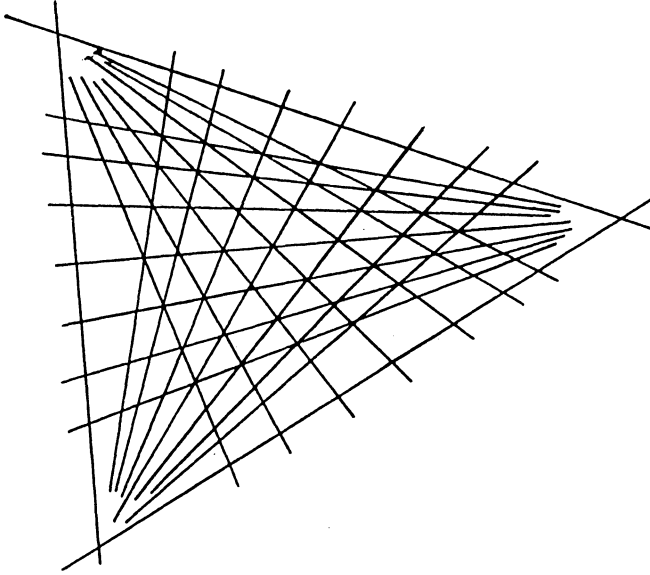
Pour étudier plus précisément les tissus du plan, on introduit un invariant appelé "courbure". Pour ces notions, on consultera [1] et [5].

Soit x un point de Ω et $l_0(x), l_1(x), l_\infty(x)$ les feuilles de f_0, f_1, f_∞ passant par x . En composant six applications d'holonomie de f_0, f_1, f_∞ sur les transversales $l_0(x), l_1(x), l_\infty(x)$ comme indiqué sur la figure suivante, on obtient un difféomorphisme local h_x de $l_0(x)$ défini au voisinage de x et fixant x . Ces applications h_x sont les applications d'holonomie du tissu.



Lorsque le tissu est linéaire, c'est-à-dire lorsque f_0, f_1, f_∞ sont formés de droites parallèles à trois droites données, ces applications d'holonomies h_x coïncident avec l'identité pour tout x . Réciproquement, si h_x est l'identité pour tout x , le tissu est localement linéarisable : pour chaque point de Ω , il existe un difféomorphisme d'un voisinage de ce point sur un ouvert du plan qui envoie le tissu sur un tissu linéaire.

En général, l'application h_x est tangente à l'ordre deux à l'identité. Voici une façon de s'en convaincre. Approchons le tissu considéré à l'ordre deux au voisinage de x par un tissu formé de trois faisceaux de droites :



Il suffit de s'assurer que ce dernier tissu est linéarisable. Pour le vérifier, on peut envoyer deux des pôles des faisceaux à l'infini à l'aide d'une transformation projective. Le tissu est alors constitué des droites verticales, des droites horizontales et des droites passant par un point donné, par exemple l'origine. L'application $(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow (\text{Log } u, \text{Log } v) \in \mathbb{R}^2$ envoie alors ce tissu sur un tissu linéaire.

Si l'on paramètre $l_0(x)$ par longueur d'arc s à partir de x , l'application d'holonomie h_x est du type $h_x(s) = s - ks^3 + \dots$. Le réel k est la fonction courbure du tissu au point x .

Malheureusement, ce réel k n'est pas invariant lorsque l'on change de coordonnées dans Ω . Pour obtenir un véritable invariant, on procède de la façon suivante. On considère un difféomorphisme φ de Ω sur un ouvert du plan \mathbb{R}^2 (de coordonnées u,v) tel que φ envoie f_0, f_1, f_∞ sur trois feuilletages $\varphi_* f_0, \varphi_* f_1, \varphi_* f_\infty$ qui font des angles $\pi/3$. On définit alors une 2-forme α sur Ω par :

$$\alpha = \varphi^*(k \, du \, dv)$$

où k est la fonction courbure du tissu $(\varphi_*f_0, \varphi_*f_1, \varphi_*f_\infty)$. Il est très facile de vérifier que la 2-forme α ne dépend pas du choix de φ (unique, rappelons-le, à transformation holomorphe près). La 2-forme α est la *forme de courbure* du tissu ; elle est intrinsèquement liée au tissu, indépendamment des coordonnées utilisées. Le tissu considéré est localement linéarisable si et seulement si la forme de courbure s'annule identiquement.

Revenons maintenant au cas d'un tissu feuilleté d'axe \mathcal{A} . Sur chaque transversale à \mathcal{A} , nous avons vu qu'il est possible d'introduire une structure complexe ainsi qu'une 2-forme différentielle α . On peut aussi considérer la forme α comme une forme sur M qui est basique pour \mathcal{A} ; c'est une forme fermée dont le noyau contient les vecteurs tangent à \mathcal{A} .

Deux cas opposés se présentent.

Si la forme α est identiquement nulle, nous savons que le tissu transverse est localement linéarisable. Dans des coordonnées holomorphes convenables, le tissu induit sur une transversale est formé des feuilletages par droites parallèles à trois droites faisant entre elles des angles égaux à $\pi/3$. Ces coordonnées sont uniques à une application holomorphe préservant ces feuilletages près, c'est-à-dire à une application du type $z \rightarrow az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. L'axe est donc un flot transversalement affine complexe. Ces flots ont été décrits dans la première partie de cet article.

Un autre cas se présente lorsque α n'a pas de singularité. On peut alors définir une métrique riemannienne g sur chaque transversale à \mathcal{A} par :

$$g(v) = \alpha(v, iv)$$

où v est un vecteur tangent et iv désigne la multiplication de v par $i = \sqrt{-1}$, bien définie grâce à la structure complexe sur la transversale. L'axe \mathcal{A} est donc riemannien et nous savons que ces flots sont classés en dimension 3.

Le cas intermédiaire, où α a des singularités, sera plus difficile à analyser. C'est le but du paragraphe suivant.

3. DESCRIPTION DE L'AXE

Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soit (\mathcal{F}_λ) un tissu feuilleté d'axe \mathcal{A} sur une variété fermée connexe de dimension 3. Deux cas (non exclusifs) sont possibles.*

- i) \mathcal{A} est un flot riemannien.*
- ii) \mathcal{A} est un flot transversalement affine complexe.*

Considérons la forme α que nous avons introduite au paragraphe précédent, vue comme forme sur M , basique pour \mathcal{A} . Soit R l'ouvert de M formé des points où α est non nulle. Si R est vide, nous savons que \mathcal{A} possède une structure transverse affine complexe. Si $R = M$, nous avons vu que la forme α et la structure holomorphe transverse permettent de montrer que \mathcal{A} est riemannien. *Nous supposons donc que R est non vide et différent de la variété M tout entière.*

Nous introduisons maintenant des notations analogues à celles utilisées dans la première partie pour l'étude des flots transversalement affines complexes. On recouvre M par un nombre fini d'ouverts U_i feuilletés trivialement par \mathcal{A} , c'est-à-dire du type $L_i \times T_i$ où L_i est un intervalle de \mathbb{R} et T_i un ouvert connexe du plan complexe. On suppose que les adhérences de T_i dans \mathbb{C} sont disjointes et on note T la réunion des T_i . Le pseudogroupe d'holonomie correspondant est noté \mathcal{P} ; il est engendré par des difféomorphismes holomorphes γ_{ij} d'un ouvert de T_i vers un ouvert de T_j pour chaque couple (i, j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Ce pseudogroupe \mathcal{P} préserve un tissu de T formé de trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ . La forme basique α sur M produit sur T une 2-forme, encore notée α , invariante par \mathcal{P} . L'ensemble des points où α est non nulle est noté \mathcal{R} ; il correspond bien sûr à l'ouvert R de M . Enfin, il est possible de choisir des ouverts connexes T_i' dont l'adhérence est contenue dans T_i et tels que le pseudogroupe \mathcal{P}' engendré par les restrictions des éléments de \mathcal{P} à $T' = \cup T_i'$ (à la source et au but) soit équivalent à \mathcal{P} . Enfin, nous notons \mathcal{R}' l'intersection de \mathcal{R} et de T' .

L'ouvert \mathcal{R}' est invariant par \mathcal{P}' et il est possible de définir une métrique riemannienne g sur \mathcal{R}' invariante par \mathcal{P}' . En fait, on peut même définir sur \mathcal{R}' des champs de vecteurs invariants. On définit les champs de vecteurs X_0, X_1, X_∞ sur \mathcal{R}' qui sont tangents à f_0, f_1, f_∞ , orientés positivement et de longueur 1 par rapport à la métrique riemannienne g . (Rappelons que tous les objets considérés dans cet article sont supposés orientables).

Lemme 3.2. *Soit x un point de \mathcal{R}' . L'orbite de x par \mathcal{P}' , entièrement contenue dans \mathcal{R}' , ne s'accumule pas sur la frontière de \mathcal{R}' dans T' .*

Démonstration. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Soit \mathcal{R}'_ε l'ensemble des points x de \mathcal{R}' tels que les flots locaux des champs X_0 et X_1 de \mathcal{R} sont définis en x pour tous les temps t avec $|t| < \varepsilon$. Il est clair que \mathcal{R}'_ε est ouvert dans \mathcal{R}' et que la réunion (croissante) des \mathcal{R}'_ε est égale à \mathcal{R} .

Par définition de \mathcal{P}' , si ε est assez petit l'ouvert \mathcal{R}'_ε est invariant par \mathcal{P}' .

Remarquons enfin que si une suite x_n de points de \mathcal{R}' converge vers la frontière de \mathcal{R}' dans T' , les vecteurs $X_0(x_n)$ et $X_1(x_n)$ tendent vers l'infini. Il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite x_n est hors de \mathcal{R}'_ε pour n assez grand.

Ces observations entraînent évidemment le lemme.

Lemme 3.3. *Soit x un point de $R \subset M$. Deux cas sont possibles :*

- i) la feuille de \mathcal{A} passant par x est un cercle.*
- ii) l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est un tore T^2 . La restriction de \mathcal{A} à ce tore est différentiablement conjuguée à un feuilletage linéaire du tore.*

Démonstration. Soit K l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x et \mathcal{K} et \mathcal{K}' les fermés correspondants de T et T' . Nous savons que les pseudogroupes \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont riemanniens sur \mathcal{R} et \mathcal{R}' . La difficulté provient du fait que la métrique g n'est pas complète. De manière équivalente, les champs X_0 , X_1 et X_∞ ne sont pas complets. Cependant, nous avons vu qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout point y de \mathcal{K}' , les flots locaux de X_0 et X_1 sont définis en y pour tous les temps t avec $|t| < \varepsilon$. Cette dernière propriété permet d'adapter les démonstrations des théorèmes de structure des flots riemanniens à cette nouvelle situation, voir [4], [8]. Il en résulte que K est une sous-variété de M . Puisque nous supposons que R est non vide et différent de M , la frontière de \mathcal{R} est non vide et le lemme 3.2 montre que la feuille de \mathcal{A} passant par x n'est pas dense dans M . Ainsi K est de dimension 1 ou 2. Lorsque K est de dimension 1, la feuille de \mathcal{A} passant par x est un cercle. Lorsque K est de dimension 2 c'est une surface compacte connexe supportant un flot riemannien à feuilles denses. C'est donc un tore et le feuilletage \mathcal{A} restreint à ce tore est conjugué à un feuilletage linéaire.

Lemme 3.4. *Soit x un point de \mathcal{R} tel que la feuille de \mathcal{A} passant par x est fermée. Alors toutes les feuilles de \mathcal{A} sont fermées et ce sont les fibres d'une fibration en cercles de M .*

Démonstration. Les pseudogroupes \mathcal{P} et \mathcal{P}' préservent les champs de vecteurs X_0 et X_1 et commutent donc avec leurs flots locaux. Il en résulte que si un point x est tel que la feuille de \mathcal{A} passant par x est un cercle, les feuilles de \mathcal{A} passant par les points voisins de x sont aussi fermées et d'holonomie triviale. Par analyticité transverse, toutes les feuilles de \mathcal{A} sont fermées et d'holonomie triviale, c'est-à-dire que ce sont les fibres d'une fibration en cercles.

Une fibration en cercles définit bien entendu un flot riemannien. Pour achever la démonstration de la proposition, nous sommes donc amenés à supposer que, *pour tout x de \mathcal{R} , l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est un tore.*

Soit p un réel irrationnel. Soit $S_p \subset M$ l'ensemble des points de M tels que l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x soit un tore T^2 et que la restriction de \mathcal{A} à cette adhérence soit conjuguée à un feuilletage linéaire de T^2 de pente p . D'après ce que nous avons vu, tout point de R appartient à S_p pour un certain p . Plus précisément, l'existence des champs de vecteurs X_0 et X_1 invariants par \mathcal{P} montre que si un point x de R est dans S_p , tout point suffisamment voisin de x est encore dans S_p . Il existe donc un réel p tel que l'intérieur $\overset{\circ}{S}_p$ de S_p soit non vide. Nous fixons une telle valeur de p et nous noterons $\overset{\circ}{S}$ et S au lieu de $\overset{\circ}{S}_p$ et S_p . On note \mathcal{S} et \mathcal{S}' les parties correspondantes de T et T' . Nous nous proposons de montrer que $S = M$.

Lemme 3.5. *Il existe une fonction uniformément continue $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ telle que, pour tout x de S , l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est la feuille de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ qui passe par x .*

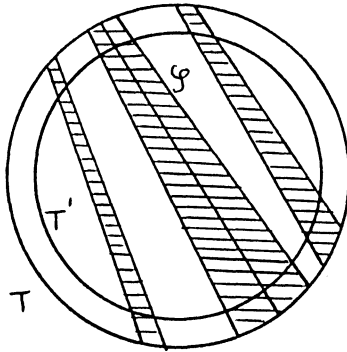
Démonstration. Pour chaque point x de \mathcal{S}' , l'adhérence de l'orbite de x sous l'action de \mathcal{P}' est une courbe passant par x . La tangente à cette courbe fait un birapport $\lambda(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec les tangentes aux feuilles de f_0, f_1, f_∞ passant par x . On obtient ainsi une fonction $\lambda : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ évidemment constante sur les orbites de \mathcal{P}' . On note encore $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ l'application correspondante. Autrement dit, pour tout x de S , l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est une feuille compacte de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$, l'un des feuilletages de codimension 1 du tissu feuilleté étudié.

Pour montrer que λ est uniformément continue, nous introduisons deux notations. Tout d'abord, nous notons d la distance sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ image de la distance naturelle sur $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ par l'application $\text{tg} : \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. D'autre part, nous complétons les trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ en une famille de feuilletages (f_λ) comme nous l'avons fait pour la famille (\mathcal{F}_λ) . L'adhérence de l'orbite d'un point x de \mathcal{S}' par \mathcal{P}' coïncide donc, au voisinage de x , avec la feuille de $f_{\lambda(x)}$ passant par x .

Il est clair que si x_1 et x_2 sont deux points de \mathcal{S}' , les adhérences de leurs orbites par \mathcal{G} sont égales ou disjointes.

Il existe par ailleurs une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante. Si deux points x_1 et x_2 sont dans T' et si les paramètres λ_1 et λ_2 sont tels que $d(\lambda_1, \lambda_2) \geq C\|x_2 - x_1\|$, alors la feuille de f_{λ_1} passant par x_1 coupe celle de f_{λ_2} passant par x_2 en un point de T .

Ces deux observations montrent que l'application $\lambda: S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est Lipschitz et donc uniformément continue. Cette application se prolonge donc en une application λ définie sur l'adhérence de S .



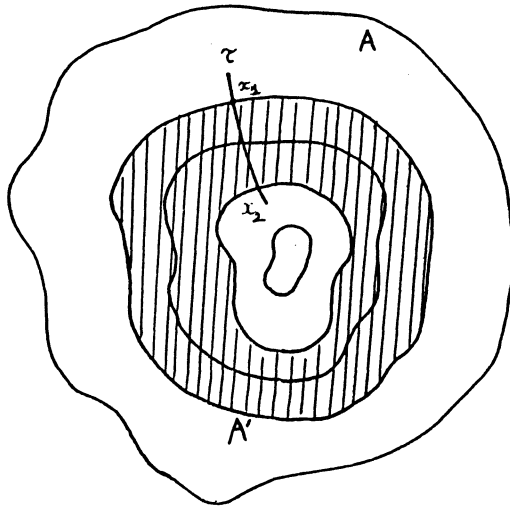
Lemme 3.6. *On a $S = M$. En d'autres termes, les adhérences de toutes les feuilles de \mathcal{F} sont des tores T^2 et les restrictions de \mathcal{F} à ces tores sont toutes conjuguées à un feuilletage linéaire de T^2 de pente p .*

Démonstration. Nous allons montrer que $\overset{\circ}{S}$ est fermé. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un point x dans la frontière de $\overset{\circ}{S}$.

Nous affirmons que la feuille L de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ passant par x est compacte (rappelons que l'application λ a été prolongée à l'adhérence de S et, en particulier, au point x). Dans le cas contraire, il existerait une transversale fermée positive τ à $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ qui couperait L une infinité de fois. En considérant une suite de points x_n de $\overset{\circ}{S}$ convergeant vers x , on obtiendrait donc que le nombre d'intersection de τ avec la feuille (compacte) L_n de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ passant par x_n tend vers l'infini.

Nous avons déjà observé que ces feuilles compactes L_n sont deux à deux égales ou disjointes. Par conséquent, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que toute feuille L_n est isotope à l'une des feuilles L_1, L_2, \dots, L_{n_0} . Comme τ et L_n sont positivement transverses pour n assez grand, le nombre d'intersection de τ et L_n est borné. Cette contradiction montre la compacité de la feuille L de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ passant par x . Cette feuille est d'ailleurs un tore T^2 car le flot \mathcal{A} y est tangent.

La restriction de \mathcal{A} à L , identifiée à T^2 , est une limite de feuilletages de T^2 différentiablement conjugués à des feuilletages linéaires de pente p . Par continuité du nombre de rotation, on en déduit que cette restriction est topologiquement conjuguée à ce feuilletage linéaire de pente p . Soit c une courbe plongée dans L , transverse à la restriction de \mathcal{A} à L et telle que l'application de premier retour de \mathcal{A} sur c soit topologiquement conjuguée à une rotation d'angle $2\pi p \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$. Soit A un anneau transverse à \mathcal{A} , contenant la courbe c . L'application H de premier retour de \mathcal{A} est définie au voisinage de c , est holomorphe, préserve c et préserve un tissu (f_λ) sur A . La courbe c est une feuille du feuilletage f_{λ_0} de A avec $\lambda_0 = \lambda(x)$.



Soit τ un arc de A transverse à c et x_1 et x_2 deux points de τ situés de part et d'autre de c et suffisamment proches de c . Par un argument élémentaire de connexité, on établit l'existence de paramètres λ_1 et λ_2 , proches de λ_0 tels que les feuilles de f_{λ_1} et f_{λ_2} passant par x_1 et x_2

respectivement sont fermées et délimitent un anneau A' contenu dans A . L'application H de premier retour de \mathcal{A} sur A est entièrement définie sur A' et préserve cet anneau A' . Soit φ un difféomorphisme holomorphe de A' sur un anneau standard $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < k\}$. Le difféomorphisme holomorphe $\varphi \circ H \circ \varphi^{-1}$ est alors une rotation dont l'angle fait un rapport irrationnel avec π puisque p est irrationnel. La famille des cercles concentriques est donc invariante par $\varphi \circ H \circ \varphi^{-1}$ et la courbe $\varphi(c)$ est nécessairement l'un de ces cercles.

Revenant à la situation étudiée, nous avons mis en évidence une famille de tores T^2 au voisinage du point x qui sont invariants par \mathcal{A} et pour lesquels le feuilletage \mathcal{A} est différemment conjugué à un feuilletage linéaire de pente p . Mais cela signifie précisément que le point x est intérieur à S , contrairement au fait que x a été choisi comme point frontière de S . Cette contradiction montre donc que la frontière de $\overset{\circ}{S}$ est vide, c'est-à-dire que $S = M$ et établit donc le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 3.1. La démonstration du lemme 3.6 montre en fait qu'il existe une fibration localement triviale de M de fibres T^2 (et de base S^1) dont les fibres sont les adhérences des feuilles de \mathcal{A} . Un voisinage d'une de ces fibres est difféomorphe à $T^2 \times]0,1[$ et, dans ces coordonnées, \mathcal{A} est tangent aux tores $T^2 \times \{*\}$ et y induit un feuilletage linéaire de pente p . Il est clair que, dans ce cas, l'axe \mathcal{A} est riemannien.

4. DESCRIPTION DES TISSUS FEUILLETÉS.

Il nous reste à examiner la liste des flots riemanniens et des flots transversalement affines complexes et à déterminer ceux qui peuvent être l'axe d'un tissu feuilleté.

Commençons par une proposition élémentaire.

Proposition 4.1. *Soit (\mathcal{F}_λ) un tissu feuilleté d'axe \mathcal{A} sur une variété fermée connexe M de dimension 3. Les tissus feuilletés (\mathcal{G}_μ) ayant le même axe \mathcal{A} sont naturellement paramétrés par les applications $\rho: M \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ constantes sur les feuilles de \mathcal{A} .*

Démonstration. En chaque point x de M , les hyperplans de $T_x M$ contenant la tangente à \mathcal{A} en x forment une droite projective réelle. La donnée de deux tissus feuilletés (\mathcal{F}_λ) et (\mathcal{G}_μ) permet d'obtenir, pour chaque x de M , deux bases projectives de cette droite. Le passage de l'une de ces bases à l'autre fournit une application $\rho: M \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ constante sur les feuilles de \mathcal{A} .

Réciproquement, une telle application donne un changement de base et produit donc un tissu feuilleté \mathcal{G}_μ ; l'intégrabilité de \mathcal{G}_μ se traduit par la constance de ρ sur les feuilles de \mathcal{A} .

Notons que le cas où ρ est constant est un peu particulier : le tissu (\mathcal{G}_μ) coïncide alors avec (\mathcal{F}_λ) mais après un changement projectif π de paramètre, c'est-à-dire que l'on a : $\mathcal{G}_\mu = \mathcal{F}_{\pi(\mu)}$.

Nous pouvons maintenant analyser les diverses possibilités pour l'axe \mathcal{A} , en commençant par le cas riemannien. La situation présente se simplifie grâce à la remarque suivante qui a déjà été faite implicitement plus haut.

Lemme 4.2. *Si l'axe \mathcal{A} est riemannien, il est transversalement parallélisable. En d'autres termes, il existe deux champs de vecteurs X_0 et X_1 , transverses à \mathcal{A} , partout linéairement indépendants ,et dont les flots préservent \mathcal{A} .*

Démonstration. Il suffit de choisir X_0 et X_1 tangents à \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 et de norme 1 par rapport à la structure riemannienne transverse invariante. On utilise ici l'orientabilité des feuilletages étudiés.

La liste des flots riemanniens en dimension 3 a été rappelée dans la première partie de cet article. La liste des flots transversalement parallélisables est plus courte. Voici les cas possibles :

- a) un fibré en cercles dont la base, étant parallélisable, est un tore T^2
- b) un flot linéaire sur le tore T^3
- c) un flot dont les adhérences des orbites forment une fibration en tores T^2 .

Complétons la description de ces trois cas.

a) Lorsque l'axe est un fibré en cercles, il est immédiat que le tissu considéré est du type que nous avons décrit dans l'exemple 1.1

b) Un flot linéaire \mathcal{A} sur T^3 est l'axe d'un tissu linéaire comme décrit dans l'exemple 1.2. Les autres tissus d'axe \mathcal{A} sont paramétrés par les applications $\rho: T^3 \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ constantes sur les orbites de \mathcal{A} . Si ces orbites sont denses, ρ est une constante et les seuls tissus à considérer sont les tissus linéaires. Si les adhérences des orbites sont des tores T^2 , les applications ρ possibles correspondent à des applications de S^1 dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Il serait facile de décrire la topologie de ces tissus non linéaires sur T^3 . Enfin, si les orbites de \mathcal{A} sont fermées, on est ramené au cas a).

c) Dans ce cas, il faut décrire les fibrés en tores qui peuvent intervenir. Un tel fibré est défini par sa monodromie dont on peut supposer, après isotopie, que c'est un difféomorphisme linéaire de $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induit par un élément B de $GL(2, \mathbb{Z})$. Cet élément doit respecter l'orientation de T^2 et préserver un feuilletage linéaire orienté de pente irrationnelle p . Il est facile d'en conclure que B est soit la matrice identité soit une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à 2 (de façon à être diagonalisable sur \mathbb{R}). Dans le premier cas, \mathcal{A} est un flot linéaire sur T^3 et nous sommes ramenés au point b). Lorsque $\text{tr } B > 2$, le feuilletage \mathcal{A} a déjà été décrit dans la première partie ; il admet une structure transverse modelée sur le demi-plan supérieur où agissent les isométries hyperboliques du type $z \rightarrow az + b$ avec $a > 0$. Ces isométries préservent le tissu du demi-plan formé des droites verticales, des droites horizontales et des droites parallèles à la première bissectrice (par exemple). Il en résulte que \mathcal{A} est effectivement l'axe d'un tissu feuilleté. Il ne serait pas difficile d'ailleurs d'identifier ce tissu à celui décrit dans l'exemple 1.3. Les autres tissus feuilletés d'axe \mathcal{A} , correspondent aux applications p constantes sur les feuilles de \mathcal{A} , c'est-à-dire aux applications du cercle dans $PGL(2, \mathbb{R})$. Leur description qualitative n'est pas difficile.

Nous avons décrit tous les cas où l'axe est riemannien. Pour terminer l'étude des tissus feuilletés, il nous reste à envisager la situation où l'axe est un flot transversalement affine complexe.

D'après la première partie, à conjugaison différentiable près, \mathcal{A} peut se décrire de la façon suivante. Soit λ un nombre complexe non nul de module différent de 1. La transformation

$$(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \rightarrow (\lambda z, |\lambda| t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$$

préserve la trace sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ des droites verticales $\{*\} \times \mathbb{R}$. Le feuilletage \mathcal{A} est le feuilletage obtenu sur le quotient, difféomorphe à $S^2 \times S^1$. Nous savons que \mathcal{A} a précisément deux orbites fermées dont l'holonomie est formée d'homothéties $z \rightarrow \lambda^n z$ ($n \in \mathbb{Z}$). Dans le cas qui nous intéresse, ces applications d'holonomie doivent préserver un tissu orienté sur les transversales. Seul le cas où λ est un réel positif peut donc intervenir dans un tissu feuilleté.

Lorsque λ est réel positif, nous avons vu dans l'exemple 1.4 que \mathcal{A} est effectivement l'axe d'un tissu feuilleté de $S^2 \times S^1$. La nature dynamique de \mathcal{A} et en particulier le fait que les deux orbites fermées de \mathcal{A} sont les ensembles ω et α -limite des autres orbites montrent qu'une fonction constante sur les orbites de \mathcal{A} est constante. Il en résulte qu'à transformation projective près, il n'existe qu'un seul tissu d'axe \mathcal{A} .

Ceci termine la description des tissus feuilletés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BLASCHKE, G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
- [2] Y. CARRIERE, *Flots riemanniens*, Astérisque 116, p. 31-52, 1984.
- [3] E. GHYS, V. SERGIESCU, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, *Topology* 19 (1980), p. 179-197.
- [4] A. HAEFLIGER, *Pseudogroups of local isometries*, Colloque de Géométrie différentielle de St Jacques de Compostelle, Research Notes 131, Pitman (1985), p. 174-197.
- [5] I. NAKAI, *Topology of complex webs of codimension one and the geometry of projective space curves*, *Topology*, vol. 26, n° 4, p. 475-504, 1987.
- [6] T. NISHIMORI, manuscrit, Grenoble 1989.
- [7] R. SACKSTEDER, *Foliations and pseudogroups*, *Amer. Journal of Math.*, vol. 87, 1965, p. 79-101.
- [8] E. SALEM, *Une généralisation du théorème de Myers-Steenrod aux pseudogroupes d'isométries locales*, *Ann. Inst. Fourier*, 38, p. 185-200, 1988.
- [9] D. SULLIVAN, *Conformal dynamical systems*, *Proc. Intern. Conf. Dynamical Systems, Rio de Janeiro*, Springer Lecture Notes in Math. 1007, 1983, p. 725.

U.R.A. DO 746
C.N.R.S.

Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07